BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN CHAZY

Sur le calcul de l'énergie d'accélération d'un corps solide

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 171-173
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__171_0>

SUR LE CALCUL DE L'ÉNERGIE D'ACCÉLÉRATION D'UN CORPS SOLIDE;

PAR M. JEAN CHAZY.

Dans deux Notes récentes [1] M. Platrier et M. Aimond ont calculé l'expression de l'énergie d'accélération d'un corps solide ayant un point fixe. En employant le Calcul vectoriel d'une façon plus systématique ou plus directe, on peut donner au calcul la forme suivante.

Nous appliquons la formule connue [2] qui transforme un produit scalaire de deux produits vectoriels en une différence de produits de deux produits scalaires

$$(1) \qquad (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c});$$

et la formule qui résulte immédiatement de la précédente

$$(2) \quad (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{c}).(\vec{b}\times\vec{d}) + (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{b})(\vec{c}.\vec{d}).$$

Ces deux formules équivalent d'ailleurs à des extensions de l'identité de Lagrange.

O désignant le point fixe du corps solide, P l'un quelconque de ses points matériels, de masse m, et $\vec{\omega}$ la rotation instantanée, la vitesse $\vec{v}$ du point P est donnée par la formule du mouvement de rotation

$$(3) \qquad \vec{v} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OP};$$

d'où résulte que les deux produits scalaires $\vec{v}.\vec{\omega}$ et $\vec{v}.\overrightarrow{OP}$ sont nuls, car chacun d'eux est transformé par la formule (3) en un produit

[1] *Comptes rendus*, t. 202, 1936, p. 1405 et 1407. *Voir* aussi DE MISES, *id.*, p. 1966.

[2] *Voir* par exemple, BRICARD, *Le Calcul vectoriel*, Paris, Armand Colin, 1929, p. 33.

mixte dont deux facteurs sont égaux :

$$\vec{v}.\vec{\omega} = \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}\right).\vec{\omega} = 0, \tag{4}$$

$$\vec{v}.\overrightarrow{OP} = \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}\right).\overrightarrow{OP} = 0. \tag{5}$$

L'accélération $\vec{\gamma}$ du point P peut s'écrire par dérivation de l'égalité (3), et puisque la vitesse $\vec{v}$ est égale à la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OP}$,

$$\vec{\gamma} = \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt} \times \overrightarrow{OP}.$$

Nous avons à calculer la somme

$$\frac{1}{2}\Sigma m\gamma^2 = \frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right) + \left(\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt} \times \overrightarrow{OP}\right)\right]^2$$

étendue à tous les points du solide considéré.

Développant le carré et appliquant la formule (1), nous obtenons d'abord au premier terme.

$$\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)^2 = \left(\vec{\omega}.\vec{\omega}\right)\left(\vec{v}.\vec{v}\right) - \left(\vec{\omega}.\vec{v}\right)\left(\vec{v}.\vec{\omega}\right) = \omega^2 v^2,$$

ω et v désignant les valeurs absolues ou algébriques de la rotation $\vec{\omega}$ et de la vitesse $\vec{v}$, et puisque le produit scalaire $\vec{v}.\vec{\omega}$ est nul d'après l'égalité (4). Donc le premier terme de l'énergie d'accélération peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\Sigma m\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\Sigma m\,\omega^2 v^2 = \omega^2\,\frac{\Sigma m v^2}{2} = \frac{I\omega^4}{2},$$

par application d'une formule classique où I désigne le moment d'inertie du corps solide par rapport à l'axe instantané.

On peut transformer le deuxième terme par la formule (1) :

$$\left(\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt} \times \overrightarrow{OP}\right)^2 = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \overline{OP}^2 - \left(\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}.\overrightarrow{OP}\right)^2,$$

et introduire l'angle des deux vecteurs $\frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}$ et $\overrightarrow{OP}$; mais pour ce terme, le plus simple est de revenir à la figure et à la définition donnée par M. Platrier. Le deuxième terme de l'énergie d'accélération $\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\overrightarrow{OP}\right)^2$ est le demi-produit du carré de la rotation dérivée et du moment d'inertie du corps solide par rapport à la droite passant par O et portant cette rotation dérivée, de même que la force vive

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}\right)^2$$

est égale au produit $I\omega^2$ du carré de la rotation $\vec{\omega}$ et du moment d'inertie du solide par rapport à l'axe instantané.

Enfin au troisième terme du développement du carré nous appliquons la formule (2), soit

$$\left(\vec{\omega}\times\vec{v}\right).\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\overrightarrow{OP}\right)$$
$$=\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right).\left(\vec{v}\times\overrightarrow{OP}\right)+\left(\vec{\omega}.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\left(\vec{v}.\overrightarrow{OP}\right)-\left(\vec{\omega}.\vec{v}\right)\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}.\overrightarrow{OP}\right);$$

mais dans chacun des deux produits de produits scalaires l'un des facteurs est nul d'après les égalités (4) et (5). Le troisième terme de l'énergie d'accélération est ainsi

$$\Sigma m\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right).\left(\vec{v}\times\overrightarrow{OP}\right)=-\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right).\Sigma\left(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{mv}\right)=-\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right).\vec{\sigma},$$

c'est-à-dire est au signe près le produit mixte de la rotation $\vec{\omega}$ par la rotation dérivée $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ et par le moment cinétique $\vec{\sigma}$ du corps solide au point fixe O.

Nous retrouvons les trois termes définis par M. Platrier.