Bulletin de la S. M. F.

D. Menchoff

Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 147-170

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__147_0>

SUR LA CONVERGENCE ET LA SOMMATION DES SÉRIES DE FONCTIONS ORTHOGONALES;

PAR M. D. MENCHOFF.

INTRODUCTION. — Soit

$$\{\varphi_n(x)\} \equiv \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\} \tag{1}$$

un système normé de fonctions orthogonales sur un intervalle (a, b), c'est-à-dire

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases} \tag{2}$$

Suivant MM. S. Kaczmarz et H. Steinhaus, nous désignerons un tel système par ON [1]. Nous dirons qu'un système ON (1) est un *système de convergence*, lorsque la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tag{3}$$

entraîne la convergence presque partout dans (a, b) de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \tag{4}$$

où c_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont des constantes quelconques.

L'existence des systèmes de convergence a été démontrée par M. A. Haar [2], M. H. Rademacher [3] et d'autres auteurs. On peut se demander, quelle est l'étendue de la classe des systèmes de convergence. Nous allons démontrer que *chaque système* ON *contient une partie qui est un système infini de convergence.*

---

(1) S. KACZMARZ et H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwow, 1935. Nous supposerons que le système (1) est infini.

(2) A. HAAR, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* (*Math. Annalen*, 69, 1910, p. 331-371).

(3) H. RADEMACHER, *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen* (*Math. Annalen*, 87, 1922, p. 112-138).

Comme application, nous obtiendrons un théorème qui concerne le changement de l'ordre des termes dans les systèmes ON. Dans le dernier paragraphe nous démontrerons encore un théorème sur la sommation des séries de fonctions orthogonales par les méthodes linéaires de M. Toeplitz.

1. Théorème I. — *Chaque système* ON *contient une partie*

$$\{\varphi_{m_k}(x)\} \equiv \{\varphi_{m_1}(x), \varphi_{m_2}(x), \ldots, \varphi_{m_k}(x), \ldots\} \qquad (m_{k-1} < m_k), \tag{5}$$

qui est un système infini de convergence.

Démonstration. — Désignons par ω_n le maximum de

$$\left| \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\,dx \right|,$$

lorsque α et β sont des nombres arbitraires sur (a, b). On a donc

$$\left| \int_\alpha^\beta \varphi_n(x)\,dx \right| \leqq \omega_n \qquad (a \leqq \alpha < \beta \leqq b) \tag{6}$$

et, de plus,

$$\omega_n = \left| \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_n(x)\,dx \right|, \tag{7}$$

où α_n et β_n sont des nombres déterminés qui vérifient les inégalités $a \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq b$.

Il est facile de voir que

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n = 0. \tag{8}$$

En effet, si (8) n'est pas vraie, il existe une suite de nombres entiers et positifs l_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, tels que

$$\omega_{l_k} > \lambda > 0, \qquad \lim_{k \to \infty} l_k = \infty, \tag{9}$$

où λ est une constante. On peut d'ailleurs supposer que α_{l_k} et β_{l_k} tendent vers des limites déterminées α' et β' lorsque $k \to \infty$,

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_{l_k} = \alpha', \qquad \lim_{k \to \infty} \beta_{l_k} = \beta'. \tag{10}$$

Les intégrales $\int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi_n(x)\,dx$ sont des coefficients de Fourier par rapport au système ON (1) de la fonction égale à *un* dans l'intervalle (α', β') et à zéro en dehors de cet intervalle, d'où il résulte que

$$(11) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi_n(x)\, dx = 0.$$

En se servant de l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left| \int_{\alpha_{l_k}}^{\alpha'} \varphi_{l_k}(x)\, dx \right| \leqq \sqrt{|\alpha' - \alpha_{l_k}| \int_{\alpha_{l_k}}^{\alpha'} \varphi_{l_k}^2(x)\, dx} \leqq \sqrt{|\alpha' - \alpha_{l_k}|},$$

d'où il résulte, en vertu de (10),

$$(12) \qquad \lim_{k \to \infty} \int_{\alpha_{l_k}}^{\alpha'} \varphi_{l_k}(x)\, dx = 0,$$

et l'on démontre de la même manière que

$$(13) \qquad \lim_{k \to \infty} \int_{\beta'}^{\beta_{l_k}} \varphi_{l_k}(x)\, dx = 0.$$

En comparant (11), (12) et (13) avec l'inégalité évidente

$$\omega_{l_k} \leqq \left| \int_{\alpha_{l_k}}^{\alpha'} \varphi_{l_k}(x)\, dx \right| + \left| \int_{\alpha'}^{\beta'} \varphi_{l_k}(x)\, dx \right| + \left| \int_{\beta'}^{\beta_{l_k}} \varphi_{l_k}(x)\, dx \right|,$$

on obtient finalement

$$\lim_{k \to \infty} \omega_{l_k} = 0;$$

ce qui est incompatible avec (9). L'inégalité (8) est donc démontrée.

Pour chaque valeur de n nous avons

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi_n(t)\, dt = \varphi_n(x)$$

presque partout dans l'intervalle (a, b). Donc, en vertu d'un théorème d'Egoroff [1], la fonction de x définie par l'expression

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi_n(t)\, dt$$

[1] D. Egoroff, *Sur les suites des fonctions mesurables* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 152, 1911, p. 244).

tend uniformément vers $\varphi_n(x)$ pour $h \to 0$ sur un ensemble situé dans (a, b) et dont la mesure est aussi voisine que l'on veut de $b - a$. Par suite, pour chaque nombre entier et positif n et pour chaque nombre nombre positif ε on peut définir un ensemble G, situé dans (a, b), et un nombre positif δ qui vérifient les conditions suivantes :

$$1^{\circ} \qquad \left| \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} \varphi_s(t)\,dt - \varphi_s(x) \right| < \varepsilon \qquad (1 \leq s \leq n,\ x \subset G),$$

$$2^{\circ} \qquad \operatorname{mes} G > b - a - \varepsilon.$$

Nous pouvons toujours supposer que pour $x \subset G$ les points correspondants $x + \delta$ se trouvent dans l'intervalle (a, b).

Déterminons une suite de nombres entiers et positifs m_k, une suite d'ensembles E_k et une suite de nombres positifs δ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, de la manière suivante. Posons tout d'abord

$$n_1 = 1, \qquad E_1 = (a, b), \qquad \delta_1 = b - a.$$

En supposant ensuite que les nombres n_{k-1}, δ_{k-1} et l'ensemble E_{k-1} soient déjà définis et en nous servant des conditions 1° et 2° où l'on pose $n = m_{k-1}$, $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$, nous pouvons déterminer un ensemble E_k, situé dans (a, b), et un nombre positif δ_k qui vérifient les inégalités

$$(14) \qquad \left| \frac{1}{\delta_k} \int_x^{x+\delta_k} \varphi_s(t)\,dt - \varphi_s(x) \right| < \frac{1}{k^2} \qquad (1 \leq s \leq m_{k-1},\ x \subset E_k),$$

$$(15) \qquad \operatorname{mes} E_k > b - a - \frac{1}{k^2}.$$

On peut d'ailleurs supposer que

$$(16) \qquad \delta_k < \delta_{k-1}, \qquad \delta_k < \frac{1}{k}.$$

En tenant compte de (8), nous pouvons à présent déterminer le nombre entier et positif m_k qui vérifie les inégalités

$$(17) \qquad \omega_{m_k} < \frac{\delta_k}{2^k},$$

$$(18) \qquad m_k > m_{k-1}.$$

Nous voyons donc que les nombres m_k, δ_k et les ensembles E_k

peuvent être définis de proche en proche pour toutes les valeurs de $k=1, 2, 3, \ldots$ De plus, pour $k>1$ toutes les inégalités (14), (15), (16), (17) et (18) sont vérifiées.

En supposant que m_k sont les nombres que nous venons de définir, nous démontrerons que le système $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ est un système de convergence. A cet effet, prenons une série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{m_k}(x), \tag{19}$$

où c_k, $k=1, 2, 3, \ldots$, sont des constantes quelconques telles que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{20}$$

converge. Comme il est bien connu, la série (19) converge en moyenne dans l'intervalle (a, b) vers une fonction $f(x)$ à carré sommable, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b [f(t)-S_k(t)]^2\,dt=0, \tag{21}$$

où

$$S_k(x)=\sum_{s=1}^{k} c_s \varphi_{m_s}(x).$$

Nous allons démontrer que la série (19) converge vers $f(x)$ presque partout dans (a, b). L'intervalle (α, β) étant un intervalle arbitraire situé sur (a, b), nous aurons

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\int_\alpha^\beta S_k(t)\,dt\right| \leqq \sqrt{(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta [f(t)-S_k(t)]^2\,dt},$$

d'où il résulte, en vertu de (21),

$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta S_k(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt. \tag{22}$$

Posons

$$E=\liminf_{k\to\infty} E_k. \tag{23}$$

Il résulte de (15) que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}\,\text{CE}_k$$

converge, où CE_k est le complémentaire de E_k par rapport à l'intervalle (a, b). Donc

$$\text{mes}\,\text{CE} = \text{mes} \limsup_{k = \infty} \text{CE}_k = 0 \quad [1],$$

et, par suite,

$$\text{mes}\,\text{E} = b - a. \tag{24}$$

Soit E′ l'ensemble des points x dans l'intervalle (a, b) où la dérivée $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$ existe et vérifie la relation

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{25}$$

Nous avons

$$\text{mes}\,\text{E}' = b - a,$$

et, par suite, en vertu de (24),

$$\text{mes}(\text{E}, \text{E}') = b - a, \tag{26}$$

où (E, E′) est la partie commune des ensembles E et E′.

Nous démontrerons que la série (19) converge vers $f(x)$ en chaque point de l'ensemble (E, E′). Soit x un point quelconque de cet ensemble; donc $x \subset \text{E}$ et $x \subset \text{E}'$. Il en résulte d'après la définition de l'ensemble E [la relation (23)], qu'il existe un nombre entier et positif k_x tel que $x \subset \text{E}_k$ pour toutes les valeurs de $k > k_x$. Le nombre k_x dépend en général de x.

En supposant que $k > k_x$; nous aurons $x \subset \text{E}_{k+1}$ et, par suite, en vertu de (14),

$$\left| \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} \varphi_{m_s}(t)\,dt - \varphi_{m_s}(x) \right| < \frac{1}{(k+1)^2} \qquad (1 \leqq s \leqq k). \tag{27}$$

---

[1] Cette égalité résulte de l'inégalité évidente

$$\text{mes} \limsup_{k \to \infty} \text{CE}_k \leqq \sum_{k=j}^{\infty} \text{mes}\,\text{CE}_k,$$

où j peut avoir une valeur arbitraire.

Il est clair que

$$(28)\qquad |c_k| \leqq \sqrt{\mathfrak{A}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où

$$(29)\qquad \mathfrak{A} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Donc il résulte de (27) que

$$(30)\quad \left| \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} S_k(t)\, dt - S_k(x) \right|$$
$$\leqq \sum_{s=1}^{k} |c_s| \left| \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} \varphi_{m_s}(t)\, dt - \varphi_{m_s}(x) \right| < \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}}{k+1} \qquad (k > k_x),$$

où $S_k(x)$ a la même signification que précédemment.

En tenant compte de (22), on peut choisir un nombre entier $l > k$ de telle façon que

$$(31)\quad \left| \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} f(t)\, dt - \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} S_l(t)\, dt \right| < \frac{1}{k},$$

où l dépend, en général, de x et de k. On a de plus, en vertu de (28),

$$\left| \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} S_l(t)\, dt - \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} S_k(t)\, dt \right|$$
$$\leqq \frac{1}{\delta_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{l} |c_s| \left| \int_x^{x+\delta_{k+1}} \varphi_{m_s}(t)\, dt \right|$$
$$\leqq \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}}{\delta_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{l} \left| \int_x^{x+\delta_{k+1}} \varphi_{m_s}(t)\, dt \right|,$$

et, par suite, il résulte des inégalités (6), (17) et de la première inégalité (16) :

$$(32)\quad \left| \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} S_l(t)\, dt - \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} S_k(t)\, dt \right|$$
$$\leqq \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}}{\delta_{k+1}} \sum_{s=k+1}^{l} \frac{\delta_s}{2^s} < \frac{\sqrt{\mathfrak{A}}}{2^k}.$$

En comparant (31), (32) et (30), on obtient finalement

$$(33) \qquad \left| \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} f(t)\, dt - S_k(x) \right| < \frac{2\sqrt{\mathfrak{A}}+1}{k}$$

pour toutes les valeurs de $k > k_x$.

Il résulte de la seconde inégalité (16) que $\lim\limits_{k \to \infty} \delta_{k+1} = 0$. Puisque $x \subset E'$, on obtient donc de (25) :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\delta_{k+1}} \int_x^{x+\delta_{k+1}} f(t)\, dt = f(x)$$

et, par suite, en vertu de (33),

$$(34) \qquad \lim_{k \to \infty} S_k(x) = f(x).$$

La relation (34) est vérifiée en chaque point de l'ensemble (E, E'), c'est-à-dire la série (19) converge vers $f(x)$ en chaque point de cet ensemble. Il résulte donc de (26) que la série (19) converge presque partout dans l'intervalle (a, b). Mais les coefficients c_k de la série (19) sont des constantes assujetties à une seule condition que la série (20) converge; par suite, $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ est un système de convergence. Puisque $m_k < m_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, le théorème I est démontré.

2. Dans ce paragraphe nous considérerons une application du théorème I qui concerne le changement de l'ordre des fonctions dans les systèmes ON. Soit $\mathfrak{W}(n)$ une fonction de l'argument entier et positif n qui vérifie les conditions

$$(35) \qquad \mathfrak{W}(n) > 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \mathfrak{W}(n) = \infty.$$

Nous dirons qu'une telle fonction est un *multiplicateur de convergence ou multiplicateur de M. H. Weyl pour un système* ON *donné* $\{\varphi_n(x)\}$, si la convergence de la série

$$(36) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{W}(n) c_n^2$$

entraîne la convergence presque partout de la série

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

où c_n sont des constantes. Nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème II. — *Étant donnés une fonction arbitraire* $\mathcal{W}(n)$, *vérifiant les conditions* (35), *et un système* ON *quelconque* $\{\varphi_n(x)\}$, *on peut effectuer dans ce système un changement de l'ordre des fonctions* $\varphi_n(x)$ *de telle façon que pour le système* $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$, *ainsi obtenu, la fonction* $\mathcal{W}(n)$ *soit un multiplicateur de convergence.*

Démonstration. — En vertu du théorème I, le système $\{\varphi_n(x)\}$ contient une partie

$$\{\varphi_{m_k}(x)\} \equiv \{\varphi_{m_1}(x), \varphi_{m_2}(x), \ldots, \varphi_{m_k}(x), \ldots\}, \quad (m_k < m_{k+1}),$$

qui est un système infini de convergence. En tenant compte de la seconde relation (35), nous définirons, de plus, une suite de nombres entiers et positifs ρ_l, $l = 1, 2, 3, \ldots$, qui vérifient les conditions

$$(37) \qquad \rho_1 = 1, \qquad \rho_{l-1} < \rho_l, \qquad \mathcal{W}(\rho_l) > 2^l \qquad (l > 1).$$

Déterminons une suite de nombres entiers et positifs

$$(38) \qquad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_n, \quad \ldots$$

de la manière suivante :

1° Lorsque $\rho_l < n < \rho_{l+1}$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, nous poserons

$$(39) \qquad \nu_n = m_k,$$

où $k = n - l$.

2° Lorsque $n = \rho_l$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, nous poserons

$$(40) \qquad \nu_n = \mu_l,$$

où $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_l < \ldots$ sont tous les nombres entiers et positifs, situés dans l'ordre de croissance, qui sont différents des nombres m_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Les nombres ν_n sont définis pour toutes les valeurs entières et positives de n, et l'on voit immédiatement que dans la suite (38) chaque nombre entier et positif se trouve une et une seule fois, c'est-à-dire la suite (38) est obtenue de la suite

$$1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ n, \ \ldots$$

par un changement de l'ordre des termes.

Nous allons démontrer que la fonction $\mathcal{W}(n)$ est un multiplicateur de convergence pour le système $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$. Prenons une série

$$(41) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \varphi_{\nu_n}(x),$$

où c_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sont des constantes quelconques telles que la série (36) converge. Pour démontrer le théorème II il suffit de prouver que la série (41) converge presque partout dans (a, b).

Soient

$$(42) \qquad \sum{}' c_n \, \varphi_{\nu_n}(x)$$

et

$$(43) \qquad \sum{}'' c_n \, \varphi_{\nu_n}(x)$$

deux séries infinies, où la somme Σ' est étendue à tous les indices n différents de ρ_l, $l = 1, 2, 3, \ldots$, tandis que la somme Σ'' est étendue à tous les indices $n = \rho_l$, $l = 1, 2, 3, \ldots$. Supposons, de plus, que dans les séries (42) et (43) les indices n soient situés dans l'ordre de croissance. Nous allons démontrer que chacune des séries (42) et (43) converge presque partout dans (a, b), d'où il résultera la convergence presque partout de la série (41).

On voit immédiatement que

$$(44) \qquad \sum{}' c_n \, \varphi_{\nu_n}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \, \varphi_{m_k}(x),$$

où $c'_k = c_{k+l}$, le nombre l étant défini par l'inégalité $\rho_l < k < \rho_{l+1}$. Il résulte de la convergence de la série (36) et de la relation $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{W}(n) = \infty$ que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$ converge, d'où l'on conclut que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k'^2 = \sum{}' c_n^2$$

est aussi convergente. Le système ON $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ étant un système de convergence, on voit donc de l'égalité (44) que la série (42) converge presque partout (a, b).

Il résulte de la définition de la série (43) et de l'égalité (40) que

$$\sum{}'' c_n \varphi_{\nu_n}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} c_{\rho_l} \varphi_{\mu_l}(x), \tag{45}$$

où $\{\varphi_{\mu_l}(x)\}$ est un système ON. En posant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{W}(n) c_n^2 = \mathfrak{A},$$

nous aurons

$$c_{\rho_l}^2 \leqq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{W}(\rho_l)},$$

et, par suite, en vertu de (37),

$$c_{\rho_l}^2 < \frac{\mathfrak{A}}{2^l},$$

d'où il résulte que la série

$$\sum_{l=1}^{\infty} (\log l)^2 c_{\rho_l}^2 \tag{46}$$

converge. Il vient donc, d'après un théorème sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, que la série

$$\sum_{l=1}^{\infty} c_{\rho_l} \varphi_{\mu_l}(x),$$

qui est identique à la série (43), converge presque partout dans (a, b) [1]. On voit, en résumant, que chacune des séries (42) et (43) et, par suite, la série (41) convergent presque partout dans (a, b), ce qui achève la démonstration du théorème II.

3. Dans ce paragraphe nous démontrerons un théorème sur la

---

[1] H. Rademacher, *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen* (*Math. Annalen*, 87, 1922, p. 112-138).

D. Menchoff, *Sur les séries de fonctions orthogonales* (*Fundamenta Mathematicae*, 4, 1923, p. 82-105).

sommation des séries de fonctions orthogonales par des méthodes linéaires. Rappelons tout d'abord la définition de ces méthodes. Étant donnée une série infinie quelconque

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{47}$$

et une matrice infinie

$$\left| \begin{array}{llllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1k}, & \ldots \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & \ldots, & a_{2k}, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ a_{i1}, & a_{i2}, & \ldots, & \ldots, & a_{ik}, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array} \right. \tag{48}$$

considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s_k, \tag{49}$$

où $s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$. On dit que la série (47) est sommable par la méthode linéaire définie à l'aide de la matrice (48), si la série (49) converge pour toutes les valeurs de i, suffisamment grandes, et possède une somme qui tend vers une limite finie, bien déterminée, lorsque $i \to \infty$. La valeur de cette limite est, par définition, la somme généralisée de la série (47).

On dit qu'une méthode linéaire est *régulière*, si les éléments de la matrice (48) vérifient les conditions suivantes :

1° La série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ converge absolument pour toutes les valeurs de i, suffisamment grandes, et

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1.$$

2° Pour toutes les valeurs de i, suffisamment grandes,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \mathfrak{M},$$

où $\mathcal{M}$ ne dépend pas de i.

3°
$$\lim_{i \to \infty} a_{ik} = 0 \quad (^1) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Soit γ_i le maximum de tous les nombres $|a_{ik}|$ pour une valeur fixe de i,

$$\gamma_i = \max_{1 \leq k < +\infty} |a_{ik}|. \tag{50}$$

Nous désignerons par T′ toute méthode linéaire pour laquelle les éléments a_{ik} de la matrice (48) vérifient les conditions 1°, 2° et aussi la condition

4°
$$\lim_{i \to \infty} \gamma_i = 0.$$

Il est clair que toute méthode T′ est une méthode régulière, mais le réciproque n'est pas vrai. D'ailleurs, il est facile de voir que les méthodes de Cesàro de tout ordre positif sont des méthodes T′.

En effet, on peut considérer une méthode de Cesàro d'ordre positif quelconque δ comme une méthode linéaire pour laquelle les éléments a_{ik} de la matrice correspondante (48) sont définis par les relations

$$(\alpha) \qquad a_{ik} = \frac{\binom{\delta + i - k - 1}{i - k}}{\binom{\delta + i - 1}{i - 1}} \qquad \text{lorsque} \quad 1 \leq k \leq i;$$

$$(\beta) \qquad a_{ik} = 0 \qquad \text{lorsque} \quad k > i,$$

où

$$\binom{r}{0} = 1, \qquad \binom{r+s}{s} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+s)}{s!} = \frac{\Gamma(r+s+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots) \quad (^2).$$

(¹) La définition des méthodes régulières (méthodes T) est due à M. Toeplitz, *Über lineare Mittelbildungen* (*Prace Mat. Fiz*, 22, 1911, p. 113-119).

M. Toeplitz a démontré le théorème suivant :

Pour qu'une méthode linéaire soit régulière, il faut et il suffit que chaque série convergente soit sommable par cette méthode, la somme généralisée étant égale à la somme au sens ordinaire.

(²) *Voir*, par exemple, Hobson, *The theory of functions of a real variable*, 2ᵉ édition, t. II, 1926, p. 70-71.

Dans le livre de M. Hobson, les éléments de la matrice $\| a_{ik} \|$, ainsi que

En vertu des propriétés des expressions $\binom{r+s}{s}$ on trouve immédiatement que

$$a_{ik} \geqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{i} a_{ik} = 1,$$

d'où il résulte en vertu de (β), que les nombres a_{ik} vérifient les conditions 1° et 2°. En tenant compte des relations

$$0 < \binom{r+s}{s} = \frac{s^r}{\Gamma(r+1)}(1+\zeta_s), \qquad \lim_{s \to \infty} \zeta_s = 0 \qquad (r > -1),$$

on trouve, de plus,

$$C_1 \frac{s^r}{\Gamma(r+1)} < \binom{r+s}{s} < C_2 \frac{s^r}{\Gamma(r+1)} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, r > -1),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives. On a donc pour $\delta > 0$, $k < i$, $i > 1$:

$$(51) \qquad a_{ik} < \frac{C_2}{C_1} \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta)} \frac{(i-k)^{\delta-1}}{(i-1)^{\delta}} < \mathcal{L}(\delta)\left[\frac{1}{(i-1)^{\delta}} + \frac{1}{i-1}\right],$$

où $\mathcal{L}(\delta)$ ne dépend que de δ, et l'on obtient de la même manière :

$$(52) \qquad a_{ii} = \frac{1}{\binom{\delta+i-1}{i-1}} < \frac{1}{C_1} \frac{\Gamma(\delta+1)}{(i-1)^{\delta}}.$$

En comparant (50), (51) et (52), on trouve finalement

$$\gamma_i < \mathcal{L}_1(\delta)\left[\frac{1}{(i-1)^{\delta}} + \frac{1}{i-1}\right] \qquad (i > 1),$$

où $\mathcal{L}_1(\delta)$ ne dépend que de δ. Il résulte donc que les nombres a_{ik} vérifient la condition 4° et, par suite, la méthode considérée de Cesàro est une méthode T'. C. Q. F. D.

---

les termes de la série infinie Σu_n, sont numérotés par des indices qui prennent toutes les valeurs à partir de *zéro*. Dans ce cas, pour avoir une méthode de Cesàro d'ordre δ, il faut définir les a_{ik} par les relations

$$a_{ik} = \frac{\binom{\delta+i-k-1}{i-k}}{\binom{\delta+i}{i}}, \qquad \text{lorsque } 0 \leqq k \leqq i,$$

$$a_{ik} = 0, \qquad \text{lorsque } k > i.$$

On peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Étant donnés un système* ON (1) *quelconque et une suite de constantes* c_n *telles que la série* (3) *converge, pour chaque méthode* T' *on peut effectuer dans la série correspondante* (4) *un changement de l'ordre des termes de telle façon que la nouvelle série, ainsi obtenue, soit sommable presque partout dans* (a, b) *par cette méthode* T'.

Démonstration. — La série (3) étant convergente, on peut déterminer une suite de nombres entiers et positifs m_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, tels que

$$(53) \qquad m_k < m_{k+1}, \qquad |c_{m_k}| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il en résulte, d'après un raisonnement déjà employé dans la démonstration du théorème II, que la série

$$(54) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_{m_k} \varphi_{m_k}(x)$$

converge presque partout dans l'intervalle (a, b).

Désignons par ρ_l, $l = 1, 2, 3, \ldots$, tous les nombres entiers et positifs, numérotés dans l'ordre de croissance, qui sont différents des nombres m_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Posons

$$(55) \qquad \tau_l(x) = \sum_{s=1}^{l} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x).$$

La série $\sum_{l=1}^{\infty} c_{\rho_l}^2$ étant convergente, on peut déterminer, d'après un théorème connu (¹), une suite de nombres entiers et positifs l_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, $l_j < l_{j+1}$, tels que $\lim_{j \to \infty} \tau_{l_j}(x)$ existe et possède une valeur finie $\psi(x)$ presque partout dans (a, b), c'est-à-dire

$$(56) \qquad \lim_{j \to \infty} \tau_{l_j}(x) = \psi(x)$$

(¹) Ce théorème peut être obtenu comme une conséquence d'un théorème de M. H. Rademacher.

H. RADEMACHER, *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen* (*Math. Annalen*, 87, 1922, p. 112-138).

en chaque point d'un ensemble E, où

(57) $$E \subset (a, b), \quad \text{mes}\, E = b - a.$$

Chacune des fonctions $\tau_l(x)$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, et $\psi(x)$ étant finie presque partout dans (a, b), on peut déterminer, pour chaque valeur de j, un nombre positif $\mathcal{L}_j$ et un ensemble G_j qui vérifient les conditions

(58) $$\mathcal{L}_j < \mathcal{L}_{j+1}, \quad \max_{1 \leqq l \leqq l_j} [\,|\tau_l(x)| + |\psi(x)|\,] < \mathcal{L}_j \quad \text{pour } x \subset G_j,$$

(59) $$G_j \subset (a, b), \quad \text{mes}\, G_j > b - a - \frac{1}{j^2}.$$

En posant

(60) $$G = \liminf_{j \to \infty} G_j,$$

on voit de (59) :

(61) $$G \subset (a, b), \quad \text{mes}\, G = b - a.$$

Considérons, à présent, une méthode linéaire T′ quelconque définie à l'aide d'une matrice (48). Dans la suite, nous désignerons cette méthode par T'_0 (¹) Nous allons démontrer qu'on peut effectuer dans la série (4) un changement de l'ordre des termes de telle façon que la nouvelle série, ainsi obtenue, soit sommable par cette méthode T'_0 presque partout dans (a, b).

Posons

(62) $$\gamma'_i = \max_{i \leqq s < +\infty} \gamma_s,$$

où γ_i est défini par la relation (50). En tenant compte de la condition 4° (définition des méthodes T′) on voit immédiatement que

(63) $$\lim_{i \to \infty} \gamma'_i = 0.$$

Définissons deux suites de nombres entiers λ_j et μ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, de la manière suivante. Posons tout d'abord $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. En supposant ensuite que les nombres λ_{j-1}, μ_{j-1}, $j > 1$, soient déjà définis et en tenant compte de la relation (63), définissons le

(¹) Sans restreindre la généralité des raisonnements, on peut supposer que pour la méthode T'_0 les conditions 1° et 2° (définition des méthodes T et T′) soient remplies pour toutes les valeurs de $i \geqq 1$.

nombre λ_j de telle façon que

(64) $$\lambda_{j-1} < \lambda_j, \qquad \gamma'_{\lambda_j} \mathcal{L}_j \mu_{j-1} < \frac{1}{j}.$$

D'après la condition 2° (définition des méthodes T et T′) la série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|$ converge pour chaque valeur de i (¹). On peut donc déterminer un nombre entier μ_j tel que les inégalités

(65) $$\mu_{j-1} + l_{j+1} < \mu_j, \qquad \mathcal{L}_j \delta_j < \frac{1}{2^j}$$

soient vérifiées, où

(66) $$\delta_j = \max_{1 \leqq i \leqq \lambda_j} \sum_{k=\mu_j}^{\infty} |a_{ik}|.$$

En partant des nombres $\lambda_1 = \mu_1 = 0$, nous définissons donc de proche en proche les nombres entiers λ_j et μ_j pour toutes les valeurs d'indice j. De plus, les inégalités (64) et (65) sont vérifiées pour toutes les valeurs de $j > 1$.

En posant

(67) $$l_0 = 0, \qquad \mu'_j = \mu_j + l_j - l_{j-1} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

on obtient de la première inégalité (65)

(68) $$\mu_j < \mu'_j < \mu_{j+1} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

De plus, il résulte de l'égalité $\mu_1 = 0$ que

(69) $$\sum_{r=1}^{j} (\mu'_r - \mu_r) = l_{j-1} + \mu'_j - \mu_j = l_j.$$

Définissons une suite de nombres entiers et positifs

(70) $$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_n, \quad \ldots$$

(¹) Suivant la remarque faite à propos de la méthode T'_0, nous pouvons supposer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|$ pour toutes les valeurs de $i \geqq 1$ au lieu de la supposer pour toutes les valeurs de i suffisamment grandes.

de la manière suivante. Lorsque n vérifie l'inégalité

(71) $$\mu_j < n \leqq \mu'_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

nous poserons

(72) $$\nu_n = \rho_l,$$

où

(73) $$l = l_{j-1} + n - \mu_j,$$

c'est-à-dire, si n croît indéfiniment en prenant successivement toutes les valeurs vérifiant les inégalités (71), le nombre correspondant ν_n prend successivement toutes les valeurs appartenant à la suite

(74) $$\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_l < \ldots.$$

De même, lorsque n vérifie l'inégalité

(75) $$\mu'_j < n \leqq \mu_{j+1} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

nous poserons

(76) $$\nu_n = m_k,$$

où

(77) $$k = \sum_{r=1}^{j-1} (\mu_{r+1} - \mu'_r) + n - \mu'_j,$$

c'est-à-dire, si n croît indéfiniment en prenant successivement toutes les valeurs vérifiant les inégalités (75), le nombre correspondant ν_n prend successivement toutes les valeurs appartenant à la suite

(78) $$m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots.$$

Puisque $\mu_1 = 0$, les nombres ν_n sont définis pour chaque valeur de n, et l'on voit immédiatement que chaque nombre entier et positif se trouve une et une seule fois dans la suite (70), c'est-à-dire la suite (70) est obtenue de la suite 1, 2, 3, $\ldots$, n, $\ldots$ en y faisant un changement de l'ordre des termes. Donc la série

$$(79) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x)$$

ne diffère de la série (4) que par l'ordre de ses termes.

Nous allons démontrer que la série (79) est sommable presque partout dans (a, b) par la méthode T'_0 considérée. Posons

$$(80) \qquad c'_n = c_{\nu_n}, \qquad c''_n = 0,$$

si n vérifie une des inégalités (71), et

$$(81) \qquad c'_n = 0, \qquad c''_n = c_{\nu_n},$$

si n vérifie une des inégalités (75), d'où il résulte

$$(82) \qquad c_{\nu_n} = c'_n + c''_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pour démontrer que la série (79) est sommable presque partout dans (a, b) par la méthode T'_0, il suffit de prouver que chacune des séries

$$(83) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

et

$$(84) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c''_n \varphi_{\nu_n}(x).$$

est sommable par cette méthode presque partout dans (a, b).

Il résulte de (80), (81), (75) et (76) que la série (84) est obtenue de la série (54) en y ajoutant des termes égaux à zéro. Par suite, la série (84) converge presque partout dans (a, b). Chaque méthode T' étant régulière, on voit donc que la série (84) est sommable par la méthode T'_0 presque partout dans (a, b).

Démontrons à présent que la série (83) est sommable par la méthode T'_0 vers $\psi(x)$ en chaque point de l'ensemble (G, E), où (G, E) est la partie commune des ensembles G et E, définis plus haut [voir les relations (56) et (60)]. Posons

$$(85) \qquad S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} c'_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

et considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} S_k(x), \tag{86}$$

où a_{ik} sont les éléments de la matrice qui correspond à la méthode T'_0. Soit x un point quelconque de l'ensemble (G, E). Pour démontrer qu'en ce point la série (83) est sommable vers $\psi(x)$ par la méthode T'_0, il suffit de prouver que, pour ce point x, la série (86) converge pour toutes les valeurs de i, suffisamment grandes, et possède une somme qui tend vers $\psi(x)$, lorsque $i \to \infty$. En tenant compte de la condition 1° (définition des méthodes T′) il résulte immédiatement que cette dernière proposition sera démontrée, si l'on prouve qu'au point x considéré la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|\,|S_k(x) - \psi(x)| \tag{87}$$

converge pour toutes les valeurs de i, suffisamment grandes, et possède une somme qui tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Posons

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=\mu_j+1}^{\mu_{j+1}} |a_{ik}|\,|S_k(x) - \psi(x)|, \tag{88}$$

$$\varepsilon_j(x) = \max_{j \leqq s < +\infty} |\tau_{l_s}(x) - \psi(x)|. \tag{89}$$

Puisque le point x appartient à l'ensemble (G, E) et, par suite, à l'ensemble E, il résulte de (56) que

$$\lim_{j \to \infty} \varepsilon_j(x) = 0. \tag{90}$$

D'autre part, le point x appartient à l'ensemble G, et par suite, il résulte de la relation (60) qu'il existe un nombre j_x tel que $x \subset G_j$ pour toutes les valeurs de $j > j_x$.

On obtient de (85), (80) et (81) :

$$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j-1} \sum_{n=\mu_r+1}^{\mu'_r} c_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x) + \sum_{n=\mu_j+1}^{k} c_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x) \qquad (\mu_j < k \leqq \mu'_j), \tag{91}$$

$$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j} \sum_{n=\mu_r+1}^{\mu'_r} c_{\nu_n} \varphi_{\nu_n}(x) \qquad (\mu'_j < k \leqq \mu_{j+1}). \tag{92}$$

De plus, on a de (67) et (69) :

(93) $$l_{j-1} < l_{j-1} + k - \mu_j \leqq l_j = l_{j-1} + \mu'_j - \mu_j$$

pour $\mu_j < k \leqq \mu'_j$. Donc, en comparant (71), (72) et (73) avec (91), (92), (93) et (55), on trouve

(94) $$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j-1} \sum_{s=l_{r-1}+1}^{l_r} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x) + \sum_{s=l_{j-1}+1}^{l} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x) = \tau_l(x)$$
$$(\mu_j < k \leqq \mu'_j).$$

où $l = l_{j-1} + k - \mu_j$ et, de même,

(95) $$S_k(x) = \sum_{r=1}^{j} \sum_{s=l_{r-1}+1}^{l_r} c_{\rho_s} \varphi_{\rho_s}(x) = \tau_{l_j}(x) \qquad (\mu'_j < k \leqq \mu_{j+1}).$$

En supposant que

(96) $$\lambda_j < i \leqq \lambda_{j+1} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

nous allons considérer les propriétés de la fonction $\sigma_{ir}(x)$. Nous aurons, en vertu de (88), (94) et (95) :

(97) $$\sigma_{ir}(x) \leqq \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu'_r} |a_{ik}|\,|\tau_l(x) - \psi(x)|$$
$$+ |\tau_{l_r}(x) - \psi(x)| \sum_{k=\mu'_r+1}^{\mu_{r+1}} |a_{ik}| \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

l'indice l dans la première somme étant considéré comme une fonction de k définie par l'égalité $l = l_{r-1} + k - \mu_r$ (donc $l_{r-1} < l \leqq l_r$).

Lorsque $r = j - 1$ ou $r = j$, $j - 1 > j_x$, $\lambda_j < i \leqq \lambda_{j+1}$, on a $x \subset G_r$, et l'on obtient de (58), (89) et (97) :

$$\sigma_{ir}(x) \leqq \mathcal{L}_r \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu'_r} |a_{ik}| + \varepsilon_r(x) \sum_{k=\mu'_r+1}^{\mu_{r+1}} |a_{ik}|.$$

Donc, il résulte de la définition du nombre γ_i [la relation (50)] et de la condition 2° (définition des méthodes T et T') :

(98) $$\sigma_{ir}(x) \leqq \mathcal{L}_r \gamma_i (\mu'_r - \mu_r) + \mathfrak{M} \varepsilon_r(x) \leqq \mathcal{L}_j \gamma_i (\mu'_r - \mu_r) + \mathfrak{M} \varepsilon_r(x).$$

On obtient de (62), (96), (67) et de la première inégalité (65) :

(99) $$\gamma_i \leqq \gamma'_{\lambda_j}, \qquad \mu'_r - \mu_r < l_r \leqq l_j < \mu_{j-1},$$

d'où il résulte en vertu de (98) et (64).

(100) $$\sigma_{ir}(x) < \frac{1}{j} + \mathfrak{M}\,\varepsilon_r(x)$$
$$(r = j - 1 \text{ ou } r = j,\ j - 1 > j_x,\ \lambda_j < i \leqq \lambda_{j+1}).$$

Lorsque $r > j > j_x$, $\lambda_j < i \leqq \lambda_{j+1}$, on a

(101) $$i \leqq \lambda_r.$$

De plus, on obtient de la relation $x \subset G_r$ pour $r > j_x$ et des inégalités (97), (58)

$$\sigma_{ir}(x) \leqq \mathfrak{L}_r \sum_{k=\mu_r+1}^{\mu_{r+1}} |\alpha_{ik}|,$$

d'où il résulte, en vertu de (66), (65) et (101),

(102) $$\sigma_{ir}(x) < \mathfrak{L}_r \delta_r < \frac{1}{2^r} \qquad (r > j > j_x,\ \lambda_j < i \leqq \lambda_{j+1}).$$

En tenant compte de (50) et de la première inégalité (99), on obtient

$$|\alpha_{ik}| \leqq \gamma'_{\lambda_j} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots,\ \lambda_j < i \leqq \lambda_{j+1}) \ (^1),$$

et, par suite, en supposant $r < j$, il résulte de la relation $x \subset G_j$ pour $j > j_x$ et des inégalités (97), (58)

(103) $$\sigma_{ir}(x) < \gamma'_{\lambda_j} \mathfrak{L}_j (\mu_{r+1} - \mu_r) \qquad (r < j,\ j > j_x,\ \lambda_j < i \leqq \lambda_{j+1}).$$

Lorsque $i > \lambda_{j_x+2}$, on peut déterminer un nombre $j > j_x + 1$ qui vérifie l'inégalité (96) et, par suite, il résulte de (102) et (88) que la série (87) converge au point x considéré. Donc cette série converge au point x pour toutes les valeurs de i, suffisamment grandes. En désignant par $T_i(x)$ la somme de la série (87), nous

---

(1) La première inégalité (99) est vérifiée sous la seule condition $\lambda_j < i$.

aurons

$$(104)\quad T_i(x) = \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) + \sigma_{i,j-1}(x) + \sigma_{ij}(x) + \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) \qquad (i > \lambda_{j_x+2}),$$

où le nombre j est défini par l'inégalité (96).

Nous allons démontrer que

$$(105)\qquad \lim_{i \to \infty} T_i(x) = 0.$$

En tenant compte de l'inégalité (103) et de l'égalité $\mu_1 = 0$, on obtient

$$\sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) < \gamma'_{\lambda_j} \mathcal{L}_j \sum_{r=1}^{j-2} (\mu_{r+1} - \mu_r) = \gamma'_{\lambda_j} \mathcal{L}_j \mu_{j-1},$$

d'où il résulte, en vertu de (64) et de la relation $\lim\limits_{i \to \infty} j = \infty$

$$(106)\qquad \lim_{i \to \infty} \sum_{r=1}^{j-2} \sigma_{ir}(x) = 0.$$

Puisque $j > j_x + 1$, il vient de (100)

$$\sigma_{i,j-1}(x) < \frac{1}{j} + \mathfrak{M}\,\varepsilon_{j-1}(x),$$

$$\sigma_{i,j}\quad(x) < \frac{1}{j} + \mathfrak{M}\,\varepsilon_j\quad(x),$$

d'où il résulte, en vertu de (90),

$$(107)\qquad \lim_{i \to \infty} \sigma_{i,j-1}(x) = 0, \qquad \lim_{i \to \infty} \sigma_{ij}(x) = 0.$$

De plus, on trouve de l'inégalité (102) :

$$\sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) < \frac{1}{2^j},$$

et, par suite,

$$(108)\qquad \lim_{i \to \infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \sigma_{ir}(x) = 0.$$

En comparant (104) avec (106), (107) et (108) on obtient la relation (105).

On voit, en résumant, que, pour $x \subset (G, E)$, la série (87) converge pour toutes les valeurs de i, suffisamment grandes, et possède une somme qui tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$. Puisque

$$\text{mes}(G, E) = b - a,$$

on voit donc, d'après ce que nous avons déjà dit, que la série (83) est sommable par la méthode T'_0 considérée presque partout dans (a, b). Nous avons déjà démontré que la série (84) possède la même propriété. Par suite, il résulte de (82) que la série (79) est sommable par la méthode T'_0 presque partout dans (a, b), ce qui achève la démonstration du théorème III.

On peut démontrer un théorème plus général que le théorème III, à savoir :

Quels que soient une méthode T' *et un système* ON (1), *on peut effectuer dans ce système un changement de l'ordre des fonctions de telle façon que pour le système* $\{\varphi_{\nu_n}(x)\}$, *ainsi obtenu, la convergence de la série* (3) *entraîne la sommation de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\nu_n}(x)$$

par la méthode T' *considérée presque partout dans* (a, b).

Dans ce dernier théorème le changement de l'ordre des fonctions dans le système (1) ne dépend que de ce système et de la méthode T'.