A. RAUCH

Sur les angles de divergence des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 71-77

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__71_0>

SUR LES ANGLES DE DIVERGENCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. A. RAUCH.

Nous allons étudier les fonctions entières $f(z)$ d'ordre $\rho > 1/2$ admettant des angles de divergence d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$ bordés d'angles de convergence pour

$$J(f, \varphi, k) = \int_1^\infty \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \frac{dr}{r^{k+1}} \qquad (k = \rho).$$

Nous supposons que $\arg z = 0$ *est bissectrice d'un angle de divergence.*

On a les résultats suivants :

$$\text{(A)} \qquad \lim_{k=\rho} \frac{\displaystyle\int_1^\infty \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \frac{dr}{r^{k+1}}}{\displaystyle\int_1^\infty \overset{+}{\log} |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} = \cos\rho\varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{2\rho} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2\rho}\right) \text{ [1]}.$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\rho}{2\pi} \leqq \lim_{k=\rho} \frac{\displaystyle\sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r_n^k(e^{i\theta})}}{\displaystyle\int_1^\infty \overset{+}{\log} |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} \leqq \frac{\rho}{2\pi \cos\rho\varepsilon} \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\rho}{2\pi} = \lim_{k=\rho} \frac{\displaystyle\sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{1}{r_n^k(x)}}{\displaystyle\int_1^\infty \overset{+}{\log} |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} \leqq \frac{\rho}{2\pi \cos\rho\varepsilon} \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0),$$

sauf pour un ensemble possible de valeurs x de mesure linéaire nulle.

$\sum_{\widehat{2\varepsilon}}$ est étendue aux modules des racines $r_n(a)$ de $f(z) = a$

---

[1] A. RAUCH, ***Extension d'un théorème de MM. Lindelof et Phragmèn*** (*Comptes rendus*, t. 201, 1935, p. 189-191).

situées dans chacun des angles d'ouverture 2ε et de bissectrices $\pm \frac{\pi}{2\rho}$.

Nous allons utiliser les égalités suivantes de M. Valiron :

$$(1)\qquad J(f, \varphi_0, k)\sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\pi}{k}\sum_{\widehat{\varphi_1-\varphi_2}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\delta_n(e^{i\theta})}{r_n^k(e^{i\theta})}\,d\theta$$

$$= J(f, \varphi_1, k)\sin k(\varphi_0 - \varphi_2) + J(f, \varphi_2, k)\sin k(\varphi_1 - \varphi_0) + O(1) \quad [1],$$

$$(2)\qquad \left[J(f, \varphi_0, k) - J\left(\frac{1}{f-x}, \varphi_0, k\right)\right]\sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{2\pi}{k}\sum_{\widehat{\varphi_1-\varphi_2}} \frac{\delta_n(x)}{r_n^k(x)}$$

$$= C(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, x) + \left[J(f, \varphi_1, k) - J\left(\frac{1}{f-x}, \varphi_1, k\right)\right]\sin k(\varphi_0 - \varphi_2)$$

$$+ \left[J(f, \varphi_2, k) + J\left(\frac{1}{f-x}, \varphi_2, k\right)\right]\sin k(\varphi_1 - \varphi_0),$$

quel que soit x, ainsi que le théorème de Valiron-Nevanlinna [2] :

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\frac{1}{|f(re^{i\theta}) - x|}\,d\theta \leqq O[\log T(r)] \qquad [r > r(x)],$$

sauf pour un ensemble possible de valeurs x de mesure linéaire nulle.

$\sum_{\widehat{\varphi_1-\varphi_2}}$ est étendue aux modules $r_n(x)$ et aux arguments $\omega_n(x)$ des racines de $f(z) = x$ du secteur

$$\varphi_2 \leqq \omega_n \leqq \varphi_1 \qquad (r_n \geqq 1)$$

et

$$\delta_n = \sin k(\varphi_1 - \omega_n)\sin k(\varphi_0 - \varphi_2), \qquad \text{si} \qquad \varphi_0 \leqq \omega_n \leqq \varphi_1,$$
$$\delta_n = \sin k(\omega_n - \varphi_2)\sin k(\varphi_1 - \varphi_0), \qquad \text{si} \qquad \varphi_2 \leqq \omega_n \leqq \varphi_0;$$

d'ailleurs,

$$\varphi_2 < \varphi_0 < \varphi_1, \qquad \varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{k} < \frac{\pi}{\rho}.$$

---

[1] VALIRON, *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini* (*Journal de Villat*, t. 10, 1931, p. 457-480).

[2] VALIRON, *Sur la distribution des valeurs de fonctions méromorphes* (*Acta math.*, t. 47, 1925); R. NEVANLINNA, *Le théorème Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, p. 82 (Gauthier-Villars, Paris).

Démonstration de (A). — Prenons dans (1) $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$, où ε est assez petit pour que φ_1 soit $< \frac{\pi}{\rho}$ et encore dans l'angle de convergence pour $J(f, \varphi, k)$; supprimons $\sum > 0$ et divisons par $J(f, 0, k)$ en remarquant que

$$\lim_{k=\rho} \frac{J(f, \varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} = 0,$$

$$\lim_{k=\rho} \frac{J(f, \varphi_0, k)}{J(f, 0, k)} \leqq \cos\rho\varphi_0 + \sin\rho\varphi_0 \operatorname{tang}\rho\varepsilon \qquad \left(0 < \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Donc

$$\lim_{k=\rho} \frac{J(f, \varphi_0, k)}{J(f, 0, k)} \leqq \cos\rho\varphi_0 \qquad \left(0 \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2\rho}\right). \tag{4}$$

Soit maintenant

$$0 = \varphi_0 < \varphi_1 = -\varphi_2 < \frac{\pi}{2\rho}.$$

On a, d'après (1),

$$\sin 2\rho\varphi_1 \leqq \left[\lim \frac{J(f, -\varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} + \lim \frac{J(f, \varphi_1, k)}{J(f, 0, k)}\right] [\sin\rho\varphi_1,$$

ou, en divisant par $\sin\rho\varphi_1$ et en tenant compte de (4),

$$2\cos\rho\varphi_1 \leqq \left[\lim \frac{J(f, -\varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} + \lim \frac{J(f, \varphi_1, k)}{J(f, 0, k)}\right] \leqq 2\cos\rho\varphi_1$$

c'est-à-dire

$$\lim \frac{J(f, -\varphi_1, k)}{J(f, 0, k)} + \lim \frac{J(f, \varphi_2, k)}{J(f, 0, k)} = 2\cos\rho\varphi_1,$$

ce qui exige, d'après (4), l'égalité (A).

Démonstration de (B). — Prenons dans (1) :

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2\rho}, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon,$$

on a :

$$\delta_n \leqq \sin^2 k\varepsilon$$

donc,

$$J(f, \varphi_0, k)\sin 2k\varepsilon + \frac{1}{k} \sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 k\varepsilon}{r_n^k(e^{i\theta})} d\theta$$

$$\geqq [J(f, \varphi_1, k) + J(f, \varphi_2, k)] \sin k\varepsilon + O(1),$$

divisons par $J(f, O, k)$ et passons à la limite en remarquant que, d'après (A),

$$\lim \frac{J\left(f, \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, k\right)}{J(f, O, k)} = \lim \frac{J\left(f, \frac{\pi}{2\rho}, k\right)}{J(f, O, k)} = 0,$$

$$\lim \frac{J\left(f, \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon, k\right)}{J(f, O, k)} = \sin \rho\varepsilon.$$

On en déduit la première partie de (B).

Soit maintenant

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + 2\varepsilon, \qquad \varphi_2 = 0.$$

On a

$$\sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}} = \sum_{\widehat{\varphi_0 - \varphi_2}} + \sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_0}} \geqq \sum_{\widehat{\varphi_0 - \varphi_2}} \geqq \sum_{\widehat{2\varepsilon}}.$$

$$\sum_{\widehat{2\varepsilon}} \geqq \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{\cos k\varepsilon \sin k\varepsilon}{r_n^k(e^{i\theta})}.$$

Donc,

$$J(f, \varphi_0, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{k} \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\varepsilon \sin k\varepsilon}{r_n^k(e^{i\theta})} d\theta$$
$$\leqq J(f, \varphi_1, k) \sin k\varphi_0 + J(f, \varphi_2, k) \sin k\varepsilon + O(1).$$

Divisons par $J(f, O, k)$ et passons à la limite, on en déduit la deuxième partie de (B).

Démonstration de (C). — Excluons dans la suite l'ensemble exceptionnel de M. Valiron. (3) donne alors

$$(5) \qquad \int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - x} \right| \frac{dr\, d\theta}{r^{\lambda+1}} = O(1) = A,$$

quel que soit $\lambda > 0$; il en est *a fortiori* ainsi quand l'intégrale est étendue à un petit secteur d'ouverture ε. Dans ce secteur il y a donc au moins un rayon φ tel que

$$\int^{\infty} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi}) - x} \right| \frac{dr}{r^{\lambda+1}} < \infty.$$

En effet, si :

$$\int_1^\infty \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-x}\right|\frac{dr}{r^{\lambda+1}}=\infty,$$

quel que soit θ de l'angle ε, on peut trouver R tel que

$$\int_1^R \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-x}\right|\frac{dr}{r^{\lambda+1}}>\frac{A}{\varepsilon},\qquad R\geqq R\left(\theta,\frac{A}{\varepsilon}\right).$$

Cette inégalité a lieu encore dans un petit intervalle $(\theta-\eta, \theta+\eta)$, car pour R fixe le premier membre est continu en θ. D'après le théorème de Borel-Lebesgue on peut couvrir l'angle ε avec un nombre fini de ces intervalles. Si alors

$$R_0=\max.\ R\left(\theta,\frac{A}{\varepsilon}\right)$$

qui est fini, on a

$$A<\int_\varepsilon d\theta\int_1^{R_0}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-x}\right|\frac{dr}{r^{\lambda+1}}=\int_1^{R_0}\int_\varepsilon \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-x}\right|\frac{dr\,d\theta}{r^{\lambda+1}}$$
$$<\int_1^\infty\int_\varepsilon \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f-x}\right|\frac{dr\,d\theta}{r^{\lambda+1}},$$

ce qui est impossible ([1]).

Prenons pour φ_1 et φ_2 de tels rayons dans les secteurs

$$\frac{\pi}{2\rho}-2\varepsilon\leqq\varphi_2\leqq\frac{\pi}{2\rho}-\varepsilon<\frac{\pi}{2\rho}=\varphi_0<\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon\leqq\varphi_1\leqq\frac{\pi}{2\rho}+2\varepsilon,$$

(2) s'écrira

$$\begin{aligned}
&J(f,\varphi_0,k)\sin k(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{2\pi}{k}\sum_{\widehat{\varphi_1-\varphi_2}}\frac{\delta_n(x)}{r_n^k(x)}\\
&=O(1)+J\left(\frac{1}{f-x},\varphi_0,k\right)\sin k(\varphi_1-\varphi_2)\\
&\quad+J(f,\varphi_1,k)\sin k(\varphi_0-\varphi_2)+J(f,\varphi_2,k)\sin k(\varphi_1-\varphi_0)\\
&\geqq J(f,\varphi_2,k)\sin k(\varphi_1-\varphi_0).
\end{aligned}$$

D'ailleurs,
$$\delta_n\leqq\sin k(\varphi_1-\varphi_0)\sin k(\varphi_0-\varphi_2);$$

([1]) Je dois à M. Valiron la démonstration de cette propriété.

donc

$$\lim_{k=\rho} \frac{2\pi}{k} \frac{\sum\limits_{\widehat{4\varepsilon}} \frac{1}{r_n^k(x)}}{J(f, O, k)} \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2) \geqq \lim_{k=\rho} \frac{J(f, \varphi_2, k)}{J(f, O, k)} \sin k(\varphi_1 - \varphi_0)$$
$$= \cos \rho\varphi_2 \sin \rho(\varphi_1 - \varphi_0).$$

On en déduit la première partie de (C).

Prenons dans (2)

$$\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\pi}{2\rho} + 2\varepsilon, \qquad \varphi_2 = O, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2\rho} + 3\varepsilon.$$

On a

$$\sum_{\widehat{\varphi_1 - \varphi_2}} \geqq \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sum_{\widehat{\varphi_0 - \varphi_2}} \frac{\sin k\omega_n}{r_n^k(x)}$$
$$\geqq \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{\sin k\omega_n}{r_n^k(x)}$$
$$\geqq \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sin k\left(\frac{\pi}{2\rho} - 2\varepsilon\right) \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{1}{r_n^k(x)}.$$

Donc

$$\frac{2\pi}{k} \sin k(\varphi_1 - \varphi_0) \sin k\left(\frac{\pi}{2\rho} - 2\varepsilon\right) \sum_{\widehat{2\varepsilon}} \frac{1}{r_n^k(x)} \leqq J(f, \varphi_1, k) \sin k(\varphi_0 - \varphi_2)$$
$$+ J(f, \varphi_2, k) \sin k(\varphi_1 - \varphi_0)$$
$$+ O(1).$$

Divisons par $J(f, O, k)$ et passons à la limite, on en déduit la deuxième partie de (C).

Remarques. — Les démonstrations sont les mêmes pour la direction $-\frac{\pi}{2\rho}$. Les premières parties de (B) et (C) sont vraies pour *tout* $\varepsilon > 0$, les deuxièmes pour *tout* ε *assez petit*.

Si nous procédons d'une façon analogue avec

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} \leqq \varphi_0 \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon = \varphi_1,$$

on trouve

Σ étant étendue aux racines de $f(z) = x$ d'un secteur $|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}$, $|z| \geqq 1$, on a

$$\text{(D)} \qquad \lim_{k=\rho} \frac{\displaystyle\sum \frac{1}{r_n^k(x)}}{\displaystyle\int_1^{\infty} \overset{+}{\log} |f(r)| \frac{dr}{r^{k+1}}} = 0.$$

sauf pour un ensemble possible de valeurs x de mesure linéaire nulle (¹).

(¹) *Voir* des théorèmes analogues de M. L. Cartwright, *Proc. London Math. Soc.*, 2ᵉ série, t. 38, 1935, p. 504, et de M. G. Valiron, *Compositio Mathematica*, vol. 1, fasc. 2, p. 195.