BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL LEVY

Sur la sommabilité des séries aléatoires divergentes

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES ALÉATOIRES DIVERGENTES ;

PAR M. PAUL LÉVY (¹).

INTRODUCTION.

L'occasion du présent travail a été une remarque faite incidemment par M. Denjoy au cours d'une conférence faite par lui au Collège de France, en mai 1934. Il se trouvait avoir à considérer une série divergente dépendant d'un paramètre x, et la sommabilité éventuelle de cette série aurait pu présenter un certain intérêt. Le calcul des probabilités rend intuitifs certains résultats qui sans lui seraient assez abstraits, et j'ai pu, en considérant x comme une variable aléatoire, indiquer tout de suite à M. Denjoy que la série considérée par lui n'avait aucune chance d'être sommable; en termes d'analyse pure, cela veut dire qu'elle n'est sommable que pour des valeurs de x constituant au plus un ensemble de mesure nulle, et cela quel que soit le procédé de sommation considéré, donné d'avance (ou choisi en fonction de x parmi une infinité dénombrable de procédés de sommation donnés d'avance; je ne reviendrai pas sur cette extension évidente).

Cela m'a donné l'idée d'étudier d'une manière générale la sommabilité des séries aléatoires divergentes. Le fait qui domine cette étude est le suivant : la sommabilité implique une infinité d'oscillations des sommes successives S_n au voisinage d'une valeur

(¹) Ce travail est le développement d'une communication orale du 14 novembre 1934.

moyenne S. Cette circonstance n'a aucune chance d'être produite par le hasard.

Après avoir rappelé quelques résultats connus sur les procédés de sommation, sur quelques principes généraux du calcul des probabilités, et sur les séries aléatoires à termes indépendants les uns des autres, nous étudions au paragraphe **3** la sommabilité de ces séries et établissons un théorème tout à fait général : la probabilité qu'une telle série soit sommable est nulle, à la seule exception du cas où elle est la somme d'une série numérique sommable et d'une série aléatoire convergente.

Nous étudions ensuite le cas des variables enchaînées. Nous commençons par quelques exemples, choisis de manière à montrer les circonstances qui nous ont paru utiles à connaître pour comprendre la théorie générale; ceux des paragraphes **4** et **6** sont des exemples de cas que l'on peut considérer comme normaux, tandis qu'au paragraphe **5** nous avons insisté surtout sur un cas exceptionnel, mais dont une théorie générale doit prévoir la possibilité. Dans ces exemples, nous avons étudié surtout la sommabilité par les moyennes arithmétiques. Au paragraphe **7** nous étudions le cas simple où la corrélation entre les u_n est telle que les sommes S_n sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres, de sorte que la sommation de la série Σu_n équivaut à la recherche d'une moyenne (ou limite généralisée) de variables indépendantes. Moyennant une limitation convenable de la probabilité des grandes valeurs des variables, nous donnons la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un procédé de sommation permettant de définir la moyenne de ces variables.

Le paragraphe **8** contient le principe d'une méthode applicable à un cas très général. Le résultat de cette étude est que le hasard ne peut pas donner naissance à une série sommable. La probabilité qu'une série soit divergente et sommable ne peut être positive que si, dans certains cas dont la réalisation dépend surtout des premiers termes de la série (expression qui peut d'ailleurs désigner un très grand nombre de termes), les sommes successives ont des *oscillations forcées*, déterminées en fonction d'un certain nombre de termes $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, *la part du hasard*, qui subsiste tant qu'on ne connaît que ces termes, étant très petite, et tendant vers zéro quand ν augmente indéfiniment.

Ce travail se termine par l'étude d'un type de séries contenant celle de M. Denjoy comme cas particulier. Nous ne l'avons pas traité par la méthode générale du paragraphe 8, mais par une méthode spéciale, pouvant sans doute servir dans d'autres cas, basée sur la remarque que certaines probabilités, tout en n'étant pas connues d'avance, et dépendant des premiers termes de la série, ne varient que dans d'étroites limites. Compte tenu du fait qu'une série de puissances n'admettant pas la circonférence du cercle de convergence comme coupure est sommable sur certains arcs de cette circonférence par la méthode exponentielle, les résultats obtenus donnent une nouvelle démonstration du fait connu qu'en général, les modules des coefficients étant connus et ses arguments choisis au hasard, cette circonférence est une coupure (1).

1. Notions générales sur les procédés de sommation. — Désignons respectivement par u_n et S_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la série étudiée et la somme de ses n premiers termes. Considérons une suite de coefficients μ_n $(n = 1, 2, \ldots,)$ positifs ou nuls, et de somme unité; supposons que chaque μ_n dépende, non seulement de n, mais d'un autre paramètre t (2) que nous supposons infiniment croissant, (en principe par valeurs entières, mais cela n'est pas essentiel) et tend vers zéro pour t infini. La donnée de μ_n en fonction de n et t définit un *procédé de sommation*. La série Σu_n est *sommable* par ce procédé, si la moyenne

$$\mathcal{S}(t) = \sum_{1}^{\infty} \mu_n S_n \tag{1}$$

tend, pour t infini, vers une limite S qui est la *somme généralisée* de cette série. On sait d'ailleurs que, si l'on veut pouvoir appliquer à cette somme généralisée les règles habituelles du calcul algébrique, il faut imposer aux coefficients μ_n des conditions supplémentaires, que l'on peut préciser de plusieurs manières. Nous

(1) Sous la forme précise que nous indiquons, ce théorème semble avoir été énoncé pour la première fois en 19[illegible] seulement par M. H. Steinhaus (*Math. Zeit.*, t. 31).

(2) Nous ne le faisons pas figurer explicitement. Nous désignerons par μ_n, μ'_n et $\bar{\mu}_n$, les déterminations des coefficients correspondant à des valeurs distinctes t, t' et T de ce paramètre.

n'aurons pas besoin de ces conditions. Nos résultats, notamment ceux des paragraphes 3 et 7, s'appliquent donc, non seulement aux procédés de sommation les plus généraux, mais à des procédés (tels que celui qui consisterait à ne prendre que la moyenne des sommes d'indice pairs) que des raisons évidentes conduisent à écarter en pratique.

Posons $m_n = \sum_1^n \mu_\nu$. La différence $m_{n''} - m_{n'}$ est le *poids de l'intervalle* (n', n'') *dans le calcul de* $\mathfrak{S}(t)$. Le seul poids important à considérer est le poids limite, pour t infini ; c'est lui que nous appellerons *poids de cet intervalle*. Tout intervalle indépendant de t a un poids nul. Pour obtenir un poids positif, il est nécessaire que n'' (si $n' < n''$) augmente indéfiniment avec t ; si par exemple on détermine n' et n'' de manière que $m_{n'}$ et $m_{n''}$ tendent vers deux limites données α et β $(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1)$, ce qui est toujours possible si le plus grand des μ_n tend vers zéro, on obtient un intervalle fonction de t et de poids $\beta - \alpha$ (¹).

Ainsi, pour la sommation exponentielle, définie par

$$\mu_n = e^{-t}\frac{t^n}{n\,!},$$

si l'on pose $n = t + x\sqrt{t}$, à des valeurs x' et x'' fixes (ou tendant vers des limites déterminées, finies ou infinies) de x, correspond un intervalle (n', n'') de poids

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$$

l'intervalle $\left(t,\ t + \varepsilon\sqrt{2\pi t}\right)$ aura un poids ε ; l'intervalle

$$[t - \lambda(t)\sqrt{t},\ t + \lambda(t)\sqrt{t}]$$

aura un poids unité, si $\lambda(t)$ augmente indéfiniment avec t.

(¹) Si l'on se donne un intervalle dépendant d'un paramètre t' dont la relation avec t ne soit pas précisée, il peut être sous-entendu qu'à chaque valeur de t' on fait correspondre la valeur de t qui rende maximum le poids de l'intervalle considéré dans le calcul de $\mathfrak{S}(t)$.

Cette notion de poids a été introduite et développée dans mon Mémoire sur les séries divergentes publié dans ce Bulletin en 1926. M. Karamata est revenu sur cette question en 1932, dans une communication au Congrès de Zurich, sans paraître remarquer qu'il utilisait, avec une terminologie différente, une notion que j'avais introduite dès 1926.

D'une manière générale, en prenant pour n' et n'' deux fonctions de t qui augmentent indéfiniment, l'une assez lentement, l'autre assez vite, on obtient un intervalle de poids unité. Si d'ailleurs on donne à t une succession de valeurs t_h ($h = 1, 2, \ldots,$) assez rapidement croissantes, les déterminations successives de l'intervalle (n', n'') obtenues pour ces valeurs t_h [nous les désignerons par (n'_h, n''_h)] seront extérieures les unes aux autres. On peut même supposer n'_{h+1} beaucoup plus grand que n''_h. Si alors il s'agit de séries aléatoires divergentes, la somme des termes de rangs compris entre n'_{h+1} et n''_h ne sera pas petite, et aura même, dans des conditions que la suite précisera, une dispersion aussi grande que l'on veut. S'il s'agit de séries à termes indépendants les uns des autres, les déterminations de $\mathfrak{S}(t_h)$ et $\mathfrak{S}(t_k)$ $(k > h)$, l'une ne dépendant pas de ces termes et l'autre les contenant (si k est assez grand) seront très différentes, ce qui exclut la sommabilité. Cette idée sera précisée dans la suite et étendue au cas des variables enchaînées.

Définissons d'abord ce qu'on peut appeler la *sommabilité au sens du calcul des probabilités*. Une série aléatoire sera sommable au sens du calcul des probabilités si à chaque détermination possible de cette série on peut faire correspondre un nombre S (qui sera sa somme généralisée) tel que, quelque petit que soit ε, on a

$$\lim_{t \to \infty} \mathfrak{P} \{ | \mathfrak{S}(t) - S | > \varepsilon \} = 0.$$

Cela ne veut pas dire qu'elle soit sommable dans des cas de probabilité positive. D'après un mode de raisonnement connu, cela revient au même que de dire que, quelque petits que soient ε et ε' positifs, on peut leur faire correspondre un nombre T tel que pour $t > T$, $t' > T$, on ait

$$\mathfrak{P} \{ | \mathfrak{S}(t) - \mathfrak{S}(t') | > \varepsilon \} < \varepsilon'.$$

Cette sommabilité, et la sommabilité ordinaire, correspondent respectivement à la convergence en mesure et à la convergence ordinaire d'une suite de fonctions d'une variable réelle x [1]. On

[1] On ramène la sommabilité à la convergence, dans le sens indiqué, en faisant correspondre à chaque valeur u'_n de u_n le nombre $x_n = \mathfrak{P} \{ u_n < u'_n \}$, et formant un nombre x avec toutes les décimales de tous les x_n, rangées dans un

peut aussi définir une sommabilité correspondant à la convergence en moyenne.

2. Sur quelques principes fondamentaux relatifs aux probabilités dénombrables. — Il est nécessaire de rappeler quelques principes relatifs aux probabilités dénombrables, que j'ai établis dans des travaux antérieurs [1] et qui peuvent n'être pas connus du lecteur.

Il est d'abord bien entendu que nous supposons donnée la loi de probabilité dont dépend la suite des u_n. Cela veut dire que la probabilité pour qu'un système d'inégalités de la forme

$$a_\nu \leqq u_\nu < b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

est toujours bien connue, les différentes probabilités ainsi données vérifiant le principe des probabilités totales. Les principes de la détermination des probabilités sont ceux de la théorie de la mesure. Si une infinité d'ensembles sont mesurables, il en est de même de l'ensemble constitué par leur réunion, ou de leurs parties communes. Il en résulte immédiatement qu'une éventualité telle que la convergence des séries, ou leur sommabilité, n'a jamais une probabilité indéterminée; elle correspond, dans la correspondance avec une variable x considérée plus haut (note de la page 5), à un ensemble mesurable.

Supposons alors qu'on soit assuré, dans des cas de probabilité α, de l'existence d'un certain entier N, qui sera par exemple le plus petit nombre entier vérifiant une certaine condition. Soit $\gamma_n = \mathfrak{P}\{N = n\}$. On a $\alpha = \Sigma\gamma_n$. Il en résulte qu'en négligeant des cas de probabilité arbitrairement petite, on peut supposer N inférieur à un nombre pris suffisamment grand. On peut même, en excluant des cas de probabilités respectives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, la probabilité totale $\varepsilon \leqq \Sigma\varepsilon_i$ étant arbitrairement petite, supposer une infinité de nombres $N_1, N_2, \ldots$, respectivement inférieurs à

ordre convenable. $\mathfrak{S}(t)$, pour $u_n = u'_{n'}$ sera une fonction de x, et la notion de sommabilité au sens du calcul des probabilités est identique à la notion de convergence en mesure de la suite des fonctions de x ainsi obtenues en faisant varier t.

[1] *Cf.* notamment un Mémoire actuellement à l'impression dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, et qui aura sans doute paru avant celui-ci.

des valeurs numériques n_1, n_2, ... On en déduit que, en négligeant toujours des cas de probabilité arbitrairement petite, une série convergente peut être supposée uniformément convergente et une série sommable peut être supposée *uniformément sommable* [c'est-à-dire que la convergence de $\mathfrak{S}(t)$ vers $\mathfrak{S}$ peut être supposée uniforme].

D'autre part, si α et α_n sont les probabilités *a priori* d'un événement E évaluées respectivement *a priori* et après n expériences (c'est-à-dire en fonction de u_1, u_2, ..., u_n supposés connus), α_n tend pour n infini, sauf dans des cas dont la probabilité est nulle, vers une limite égale à 1 dans les cas favorables à E et à 0 dans les autres cas. En d'autres termes, après un certain nombre d'expériences, α_n étant très voisin de 0 ou de 1, on sait pratiquement si E doit être ou non réalisé, bien qu'il ne puisse y avoir de certitude qu'après une infinité d'opérations. Ainsi il est facile de définir un mode de dépendance entre les u_n tel que, suivant les résultats des premières expériences, la série Σu_n soit convergente, ou divergente et sommable, ou bien non sommable. Pratiquement les différents cas se trouveront séparés après un nombre fini d'opérations; l'étude de la probabilité de la sommabilité, effectuée après un nombre assez grand d'opérations, doit donner une valeur presque égale à 0 et 1; la probabilité *a priori* étant d'ailleurs la valeur probable de la probabilité *a posteriori*, tous les problèmes de probabilités dénombrables sont virtuellement résolus si l'on sait reconnaître dans quels cas une probabilité est égale à 0 ou 1 ou voisine de ces valeurs.

3. Les séries aléatoires à termes indépendants les uns des autres. — Rappelons d'abord encore quelques résultats connus, établis par MM. Khintchine, Kolmogoroff et moi-même : la probabilité de la convergence d'une telle série étant toujours 0 ou 1, on peut sans ambiguïté parler de *séries convergentes* ou de *séries divergentes*; il sera sous-entendu qu'elles ont le caractère indiqué, sauf dans des cas dont la probabilité est nulle. Si cela est utile, on peut alors préciser que ces cas exceptionnels n'existent pas en disant que la série considérée est *sûrement convergente* ou *sûrement divergente*. Ainsi la série $\Sigma \pm \frac{1}{n^\alpha}$ est sûrement convergente si $\alpha > 1$, convergente si $\alpha > \frac{1}{2}$, divergente si $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, sûrement divergente si $\alpha = 0$.

Une série divergente Σu_n peut être la somme d'une série numérique Σa_n et d'une série aléatoire convergente Σv_n. Elle est alors sommable ou non en même temps que Σa_n. Nous n'avons pas à insister sur ce cas. Dans le cas contraire une série divergente le reste si on lui ajoute une série numérique absolument quelconque. Nous dirons alors qu'elle est *essentiellement divergente*. Dans ce cas la *dispersion* de S_n (1) augmente indéfiniment avec n, c'est-à-dire que, quelle que soit la suite de nombres a_n, on a, l étant une constante indépendante de n,

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{P} \{ a_n \leqq S_n \leqq a_n + l \} = 0.$$

Rappelons que, $\mathcal{E} \{ x \}$ et $\sigma^2 \{ x \}$ désignant respectivement les valeurs probables de x et de $(x - \mathcal{E} \{ x \})^2$, et σ_n désignant $\sigma \{ u_n \}$, la condition nécessaire et suffisante pour que la série Σu_n soit essentiellement divergente est que la série numérique $\Sigma \sigma_n^2$ soit divergente, et que de plus elle ne puisse pas être rendue convergente par la substitution à u_n d'une variable u'_n égale à u_n, mais en différant dans des cas de probabilité α_n, la série $\Sigma \alpha_n$ étant convergente. Une suite de variable u'_n vérifiant cette condition a été appelée par M. Khintchine suite *équivalente* à la suite des u_n; la substitution de u'_n à u_n pour les valeurs de n dépassant un nombre suffisamment grand ne constitue un changement effectif que dans des cas de probabilité arbitrairement petite; elle ne peut donc pas changer la probabilité de la convergence; or il est évidemment possible que la série $\Sigma \sigma^2 \{ u'_n \}$ soit convergente, et que, dans les cas très peu probables où u_n diffère de u'_u, ses valeurs soient assez grandes pour que la série $\Sigma \sigma_n^2$ soit divergente, ou même que ses termes soient infinis; l'introduction de u'_n dans la condition de

---

(1) Nous appelons *dispersion* de x pour une probabilité α, et désignons par $\mathcal{D}_\alpha \{ x \}$, la borne inférieure de la longueur des intervalles qui ont une probabilité de contenir x au moins égale à α. Rappelons que la dispersion d'une somme de variables indépendantes est au moins égale à celle de chaque terme. Dans le cas de deux variables enchaînées x et y, si pour chaque valeur de x supposée connue, la dispersion de y est au moins égale à une valeur indépendante de x, il en est de même de la dispersion de la somme.

convergence que nous venons de rappeler est donc bien nécessaire.

Des hypothèses limitant la probabilité des grandes valeurs jouent naturellement un grand rôle en calcul des probabilités. Nous dirons que les lois de probabilité dont dépendent les u_n forment une *famille normale* (1) s'il existe une variable x, indépendante de n, telle que $\sigma\{x\}$ soit fini et que

$$\mathfrak{P}\{|u_n - \mathcal{E}\{u_n\}| > \xi\sigma_n\} \leqq \mathfrak{P}\{|x| > \xi\}.$$

Alors l'expression

$$\alpha_n = \mathfrak{P}\{|u_n - \mathcal{E}\{u_n\}| > \sigma_n\sqrt{n}\}$$

est le terme général d'une série convergente. On peut donc, si les lois dont dépendent les u_n forment une famille normale, définir des variables u'_n formant une suite équivalente à celle des u_n et telle que l'on ait toujours, c étant une constante arbitrairement petite,

$$|u'_n - \mathcal{E}\{u_n\}| \leqq c\sigma_n\sqrt{n}.$$

Quant aux valeurs de $|u_n - \mathcal{E}\{u_n\}|$ supérieures à $c\sigma_n$, même si c est grand, la probabilité qu'elles soient réalisées une infinité de fois ne peut pas être négligée (à moins qu'on ne fasse des hypothèses plus restrictives que celle faite ci-dessus); mais si c est assez grand, ces valeurs n'interviennent que pour une fraction arbitrairement petite dans le calcul de σ_n^2 et dans celui de

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 = M_n^2 = \sigma^2\{S_n\}.$$

Si les lois considérées forment une famille normale, et si de plus M_n et $\frac{M_n}{\sigma_n}$ augmentent indéfiniment avec n, l'ordre de grandeur de $S_n - \mathcal{E}\{S_n\}$ est celui de M_n; non seulement (d'après l'inégalité de Tchebycheff) les valeurs de cette différence beaucoup plus grandes que M_n sont très peu probables, mais il en est de même des valeurs beaucoup plus petites; la dispersion $\mathcal{D}_\alpha\{S_n\}$ est alors aussi, quel que soit α, de l'ordre de grandeur de M_n.

Nous supposerons $\mathcal{E}\{u_n\} = 0$. Demandons-nous d'abord si la

(1) C'est une locution abrégée; pour être correct, il faudrait dire que ces lois, une fois réduites, forment une famille normale de lois $\mathcal{L}_2$ (*cf.* Paul Lévy, *Calcul des probabilités*, p. 213).

limite généralisée des u_n existe, c'est-à-dire si la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = \frac{S_n}{n}$$

tend vers une limite pour n infini. Si l'on veut seulement qu'il y ait convergence au sens du calcul des probabilités, il suffit évidemment que $\frac{M_n}{n}$ tende vers zéro (cette condition caractérise la convergence en moyenne, plus restrictive que la convergence en mesure). Cette condition est aussi nécessaire si les u_n dépendent de lois constituant une famille normale, mais ne l'est évidemment plus si l'on supprime cette condition. Ainsi il y aura convergence de $\frac{S_n}{n}$ vers zéro, au sens du calcul des probabilités, si l'on a

$$\mathfrak{P}\{|u_n| > \xi\} < c\xi^{-\alpha} \qquad (1 < \alpha \leqq 2),$$

c et α étant indépendant de n; dans ce cas l'ordre de grandeur de $|S_n|^\alpha$ est en effet, sauf dans des cas très peu probables, au plus celui de n; pourtant M_n peut être infini, ou bien être fini pour chaque valeur de n, mais avoir en fonction de n une croissance arbitrairement rapide.

En ce qui concerne la convergence proprement dite de $\frac{S_n}{n}$ vers zéro, j'ai montré dans un travail antérieur que sa probabilité est toujours 0 ou 1; si elle est égale à 1, on dit que la *loi forte des grands nombres* s'applique à la suite des u_n. Pour qu'il en soit ainsi, M. Kolmogoroff (¹) a montré qu'il suffit que la série $\sum \frac{\sigma_n^2}{n^2}$ soit convergente; cette condition ne peut d'ailleurs pas être améliorée si l'on ne fait sur u_n aucune autre hypothèse que $\mathcal{E}\{u_n\} = 0$, $\sigma\{u_n\} = \sigma_n$. Mais si l'on suppose que ces variables dépendent de lois constituant une famille normale, une condition moins restrictive est donnée par la *loi du logarithme itéré*. Nous nous occuperons surtout dans la suite du cas où σ_n varie régulièrement avec n; nous supposerons pour fixer les idées $\sigma_n = n^\alpha \omega(n)$, α étant supérieur à $-\frac{1}{2}$, et $\omega(n)$ variant assez lentement pour que $n \log \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)}$ tende vers zéro. Si cette condition est vérifiée, et que les u_n

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, 17 novembre 1930.

dépendent de lois constituant une famille normale, la loi du logarithme itéré s'applique sous la forme

$$\mathfrak{T}\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n^2}{2M_n^2 \log\log n}\right\} = 1 \quad (^1),$$

de sorte que, pour l'application de la loi forte des grands nombres, il est nécessaire et suffisant que $\frac{M_n^2 \log\log n}{n^2}$ tende vers zéro $\left(\text{ou } \frac{\sigma_n^2 \log\log n}{n}\text{; cela revient au même puisque } n\sigma_n^2 \sim (\alpha + 1) M_n^2\right)$.

Ces résultats nous serviront dans la suite. Étudions maintenant la sommabilité de Σu_n. Nous allons montrer que :

Théorème I. — *Quel que soit le procédé de sommation considéré, si une série aléatoire à termes indépendants les uns des autres est essentiellement divergente, la probabilité qu'elle soit sommable est nulle.*

Pour que Σu_n soit sommable, il faut d'abord que $\mathfrak{S}(t)$, qui peut lui-même être la somme d'une série, ait un sens pour tout t assez grand. Dans le cas qui nous occupe, on peut montrer que la

---

(1) Les conditions où nous nous plaçons ne sont pas celles habituellement indiquées. Mais la vérification est facile en partant des conditions suffisantes indiquées par M. Kolmogoroff (*Math. Annalen*, 101). Observons d'abord que nous pouvons écrire indifféremment $\log\log n$ ou $\log\log M_n$, ces quantités étant équivalentes dans les conditions où nous nous plaçons. D'après M. Kolmogoroff une condition suffisante pour l'application de la loi du logarithme itéré $|u_n| \leqq U_n = o\left(\frac{M_n}{\sqrt{\log\log n}}\right)$; cela revient ici au même d'écrire $o\left(\sigma_n\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\right)$. Distinguons alors les valeurs de $|u_n|$ inférieures à $\frac{\sigma_n\sqrt{n}}{\log\log n}$, celles qui sont supérieures à $\sigma_n\sqrt{n}$, et celles qui sont comprises entre ces limites. Si les premières existent seules, le résultat de M. Kolmogoroff s'applique. Or, si les u_n dépendent de lois constituant une famille normale, nous avons observé que nous pouvons remplacer la suite des u_n par une suite équivalente dont les termes sont toujours $\leqq \sigma_n\sqrt{n}$. Il n'y a plus qu'à considérer les valeurs de $|u_n|$ comprises entre les deux limites indiquées ci-dessus. Même si, l'indice variant de 0 à n, leur nombre p était de l'ordre de $\sqrt{n}$, cela ne mettrait pas en défaut la loi du logarithme itéré; il suffit que $p = o(\sqrt{n \log\log n})$. Or p dépend de la loi des petites probabilités, et $\mathcal{E}\{p\} = o(\log\log n)$; au point de vue de la loi forte des grands nombres, on trouve aisément pour les grandes valeurs de p une borne supérieure bien inférieure à celle qui serait nécessaire; on a en effet $p = o(\log\log n)$.

probabilité de cette circonstance est toujours o ou 1. Mais il est inutile d'insister sur cette remarque, notre objet étant de montrer qu'en tout cas la probabilité que $\mathcal{S}(t)$ ait un sens et tende vers une limite est nulle. Si, en effet, elle avait une valeur positive α, on pourrait, d'après les remarques du paragraphe **2**, faire correspondre à tout système de nombres positifs ε et $\eta < \alpha$ (même très petits) un nombre T tel que, pour tout $t > T$, on ait

$$(2) \qquad \mathfrak{P}\{\,|\,\mathcal{S}(t) - \mathcal{S}(T)\,| < \varepsilon\,\} > \alpha - \eta.$$

Nous allons montrer que cela est impossible, si p est suffisamment grand.

Désignons par $\bar{\mu}_n$ les poids qui interviennent dans le calcul de $\mathcal{S}(T)$. D'après le principe que nous venons déjà d'appliquer, on peut choisir un nombre N assez grand pour que l'on ait

$$(3) \qquad |\,\bar{\mu}_1 S_1 + \ldots + \bar{\mu}_N S_N - \mathcal{S}(T)\,| < \varepsilon$$

toutes les fois que $\mathcal{S}(T)$ est défini, sauf peut-être dans des cas de probabilité inférieure à η. On peut ensuite, à cause de l'augmentation infinie de la dispersion dans les séries essentiellement divergentes, choisir n assez grand pour que l'on ait (l étant un nombre donné)

$$(4) \qquad \mathcal{D}_\eta\{\,u_{N+1} + \ldots + u_n\,\} > 2\,l.$$

Or $\mathcal{S}(t)$ est la somme de deux parties, que nous désignerons respectivement par $\mathcal{S}'(t)$ et $\mathcal{S}''(t)$; la première comprend les termes en $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et tend vers S_n pour t infini; la seconde est indépendante de la première, de sorte que la dispersion de la somme $\mathcal{S}(t)$ est au moins égale à celle de $\mathcal{S}'(t)$. En désignant par $\mathcal{D}'$ des dispersions calculées dans l'hypothèse où $u_1, u_2, \ldots, u_N$ sont connus, et tenant compte de (4), on a donc pour t assez grand

$$\mathcal{D}'_{2\eta}\{\,\mathcal{S}(t)\,\} \geqq \mathcal{D}'_{2\eta}\{\,\mathcal{S}'(t)\,\} \geqq \mathcal{D}'_\eta\{\,S_n\,\} - 2\varepsilon > 2(l - \varepsilon).$$

Or, si $l > 3\varepsilon$, $4\eta > \alpha$, ce qu'on peut supposer, cette formule est en contradiction avec les formules (2) et (3), d'après lesquelles, $u_1, u_2, \ldots, u_N$ et par suite $S_1, S_2, \ldots, S_N$ étant connus,

$$\bar{\mu}_1 S_1 + \ldots + \bar{\mu}_N S_N$$

est le milieu d'un intervalle de longueur $4\varepsilon < 2(l - \varepsilon)$ contenant $\mathfrak{S}(t)$ dans des cas de probabilité $\alpha - 2\eta > 2\eta$. Le théorème énoncé est donc établi.

Il faut remarquer que, une série essentiellement divergente conservant ce caractère si l'on ajoute à ses termes des constantes quelconques, on ne peut pas la rendre sommable par cette addition de termes constants. Le problème de la sommabilité des séries à termes indépendants est donc résolu dans tous les cas : *la probabilité de cette sommabilité est toujours* o *et* 1, *ce dernier cas étant celui des séries décomposables en une série numérique sommable et une série aléatoire convergente.*

4. Variables enchaînées. Premier exemple. — Nous étudierons d'abord le cas où l'on a

$$(\mathcal{C}) \qquad |u_n| \leqq 1,$$

$$(\mathcal{C}') \qquad \mathcal{E}_{n-1}\{u_n\} = 0,$$

$$(\mathcal{C}'') \qquad \mathcal{E}_{n-1}\{u_n^2\} = \sigma_n^2,$$

$\mathcal{E}_{n-1}$ désignant une valeur probable évaluée en supposant connus $u_1, \ldots, u_{n-1}$; σ_n est une constante numérique (fonction de n seulement) et

$$\mathcal{E}\{S_n^2\} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 = M_n^2$$

est supposé augmenter indéfiniment avec n. Dans ces conditions, j'ai montré dans un travail antérieur (¹) que $\frac{S_n}{M_n}$ dépend d'une loi tendant pour n infini vers celle de Gauss. On peut naturellement dans cet énoncé remplacer S_n par $-S_N$, N étant aussi grand que l'on veut, mais fixe.

Nous allons montrer que dans ces conditions le résultat du paragraphe 3 subsiste : *la probabilité que la série Σu_n soit sommable est nulle.*

Le principe du raisonnement est le même qu'au paragraphe 2. Si la série est sommable dans des cas de probabilité positive α, cela veut dire, S étant la somme généralisée obtenue, que, dans des cas de probabilité α,

$$\lim_{t\to\infty}\ \lim_{n\to\infty} (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \ldots + \mu_n S_n) = S,$$

(¹) Ce travail est actuellement à l'impression (*Bull. Sc. math.*, 1935).

et que par suite, dans des cas de probabilité $> \alpha - \eta$, pour

$$t \geqq T = \varphi(\varepsilon, \eta) \qquad \text{et} \qquad n \geqq N = \psi(t, \varepsilon, \eta),$$

on a

$$|\mu_1 S_1 + \ldots + \mu_n S_n - S| < \varepsilon.$$

On aura donc, dans des cas de probabilité supérieure à $\alpha - 2\eta$,

$$(5) \qquad |(\mu_1 S_1 + \ldots + \mu_n S_n) - (\overline{\mu}_1 S_1 + \ldots + \overline{\mu}_N S_N)| < 2\varepsilon.$$

Or la seconde partie de cette différence ne dépend que de $u_1, u_2, \ldots, u_N$. La première partie comprend des termes en $u_1, u_2, \ldots, u_N$, et en outre les termes

$$(6) \qquad u_{N+1}(m_n - m_N) + u_{N+2}(m_n - m_{N+1}) + \ldots + u_n \mu_n.$$

Or les premiers coefficients numériques sont tous aussi voisins qu'on veut de l'unité si l'on prend d'abord t, puis n assez grands. Donc la somme

$$(m_n - m_N)^2 \sigma_{N+1}^2 + \ldots + \mu_n^2 \sigma_n^2 = N^2$$

peut être rendue arbitrairement grande. Le résultat rappelé au début de ce paragraphe s'applique donc à l'expression (6); cette expression, divisée par N, dépend d'une loi tendant vers celle de Gauss. Sa dispersion, pour une probabilité arbitrairement petite η, augmente indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre de l'inégalité (5), si l'on considère les probabilités calculées en connaissant $u_1, u_2, \ldots, u_N$, et il y a lieu de remarquer que, d'après ce qui précède, sa dispersion se trouve dépasser un nombre donné l pour des valeurs de n et t fonctions de N et η, mais indépendantes de $u_1, u_2, \ldots, u_N$. D'après le principe de l'augmentation de la dispersion (*voir* note de la page 8), ce résultat est vrai aussi pour les probabilités *a priori*. Si $l > 4\varepsilon$ et $\alpha > 3\eta$, ce qu'on peut toujours supposer, cela est en contradiction avec la formule (5). Donc la série étudiée n'est pas sommable.

C. Q. F. D.

5. **Second exemple.** — Dans l'exemple précédent, conservons les conditions $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et supprimons la condition $(\mathcal{C}'')$. Nous pouvons d'ailleurs conserver la notation σ_n; mais φ_n devient une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Supposons que (sauf dans des cas de

probabilité nulle) la somme

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2=M_n^2$$

augmente indéfiniment avec n. Prenons dans chaque cas pour n la plus grande valeur pour laquelle elle soit au plus égale à une valeur donnée τ. La valeur atteinte à ce moment par S_n est une variable aléatoire, fonction de τ, que nous désignerons par $X(\tau)$. J'ai montré dans le Mémoire cité plus haut que $\frac{X(\tau)}{\sqrt{\tau}}$ dépend d'une loi qui tend, pour τ infini, vers celle de Gauss. Si l'on étudie ainsi $S_n=X(\tau)$ en fonction de τ, on est exactement dans les mêmes conditions que si la condition $(\mathcal{C}'')$ était vérifiée, et on peut conclure que la série étudiée n'est pas sommable par une formule du type

$$\lim_{t\to\infty}\Sigma S_n\Delta\varphi(M_n),$$

$\varphi(M_n)$ augmentant avec M_n de o à 1, et tendant vers zéro pour M_n fixe et t infini. Mais si l'on prend comme variable n, et non τ (ou M_n), les résultats sont différents. Il peut arriver que la série Σu_n soit sommable.

Nous allons le montrer par un exemple; considérons d'abord le jeu de pile ou face, à enjeu égal à l'unité. On sait que la probabilité que le gain après n coups, S_n, conserve indéfiniment le même signe, est nulle. Une partie de pile ou face indéfiniment prolongée se décompose donc en séries successives de $2p_1, 2p_2, \ldots, 2p_h, \ldots$ coups, le gain total s'annulant à la fin de chaque série. Tous les p_h dépendent d'ailleurs d'une même loi de probabilité qui donne à chaque entier p une probabilité α_p équivalente, pour p infini, à $\frac{1}{2\sqrt{\pi p^3}}$ (1).

Prenons alors pour suite des u_n les gains successifs réalisés par un joueur au cours d'une partie de pile ou face, mais en faisant suivre chacune des séries de $2p_h$ termes égaux à ± 1 par une série de q_h termes nuls. Si q_h croît rapidement avec h, la suite S_n comprendra de longues suites de zéros, séparées par des suites moins longues de valeurs non nulles. Il est bien évident qu'on peut ainsi

(1) *Cf.* le *Traité* de M. Émile Borel, t. I, fasc. I, chap. V, ou mes *Mémoires* cités dans la note suivante.

rendre la série Σu_n sommable et de somme nulle. Proposons-nous par exemple de déterminer q_h de manière que cette série soit sommable par la méthode de la moyenne arithmétique, c'est-à-dire que, sauf dans des cas de probabilité nulle:

$$T_n = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$$

tende vers zéro pour n infini.

Posons

$$n_h = 2p_1 + q_1 + \ldots + 2p_{h-1} + q_{h-1},$$
$$S_n^{(h)} = S_{n_h+n},$$
$$S_1^{(h)} + S_2^{(h)} + \ldots + S_{2p_h}^{(h)} = U_p^{(h)} = U_p = V_h,$$

l'une ou l'autre des notations U_p et V_h étant employée suivant que la valeur p de p_h est supposée connue ou non. On a donc

$$\mathfrak{P}\{V_h \geqq u\} = \sum_1^\infty \alpha_p \mathfrak{P}\{U_p \geqq u\}. \tag{7}$$

Il est clair que, pour que la série Σu_n soit sommable, il suffit que, d'une part, chaque série partielle de $2p_h$ termes non nuls soit suivie d'une série de q_h termes nuls, $\frac{q_h}{V_h}$ augmentant indéfiniment avec h, et que d'autre part les grandes valeurs de V_h n'aient chance d'être réalisées qu'après un grand nombre de coups, afin que $\frac{V_h}{n_h}$ tende vers zéro. Il est d'ailleurs *nécessaire et suffisant* que

$$\mathfrak{P}\left\{\lim \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_h}{n_h} = 0\right\} = 1. \tag{8}$$

Il faut avant tout étudier les lois de probabilité dont dépend $U_p = V_h$, en commençant par le cas où p est connu; la formule définissant asymptotiquement, pour p très grand, la loi dépend U_p, *semble être*

$$\lim \mathfrak{P}\left\{|U_p| > \frac{\pi}{2}\xi p\sqrt{p}\right\} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_\xi^\infty x^2 e^{-x^2} dx, \tag{9}$$

de sorte que l'on a en particulier

$$\mathcal{E}\{|U_p|\} \sim p\sqrt{p\pi}, \tag{10}$$

l'exactitude de cette dernière formule étant facile à vérifier.

L'ordre de grandeur de $|U_p|$ étant seul important pour la suite, nous nous contenterons d'établir deux bornes de la probabilité étudiée, qui montrent que l'on commet sur $|U_p|$ une erreur relative finie en l'assimilant à la variable aléatoire définie par la formule (9). Nous utiliserons ce résultat connu (¹) que si, sans connaître p, on sait seulement que $2p > n$, c'est-à-dire si l'on étudie les séries non arrêtées avant le $n^{\text{ième}}$ coup ou à ce coup, on a (²)

$$(11) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}' \{ |S_n| > x\sqrt{n} \} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Si $2p > n$ est connu, les probabilités des différentes valeurs de $|S_n|$, d'après le principe des probabilités des causes, sont proportionnelles aux produits des probabilités déduites de la formule précédente pour $|S_n|$ et $|S_{2p-n}|$. On peut ainsi calculer aisément les valeurs probables de $|S_1|, \ldots, |S_{2p}|$, et vérifier la formule (10). Pour $n = p$ on a en particulier

$$(12) \qquad \lim_{p \to \infty} \mathfrak{T}' \{ |S_p| > \xi\sqrt{p} \} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_\xi^\infty x^2 e^{-x^2} dx.$$

Considérons alors la somme

$$U'_p = S_1 + S_2 + \ldots + S_p,$$

On peut grouper deux à deux les parties possibles de p coups, en prenant les mêmes valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dans un ordre et dans l'ordre inverse; la valeur finale de S_p est la même dans les deux cas, et la somme des deux valeurs de U'_p est pS_p. Mais les parties pour lesquelles $|U'_p|$ est le plus petit (pour une valeur donnée positive de S_p) ont le plus de chances d'être arrêtées avant le $p^{\text{ième}}$ coup par le fait que S_n s'annule dans l'intervalle. Il y a donc au moins une chance sur deux que $2|U'_p| \geqq p|S_p|$.

La même remarque s'appliquant à la somme U_p (en intervertissant en même temps l'ordre des p premiers termes et celui des

(¹) *Voir* par exemple la formule (15) de mon Mémoire du *Giornale dell'Istituto italiano degli attuari*, 1931, fasc. 2. Un résumé en français a été publié en 1932 dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

(²) La lettre $\mathfrak{T}'$ indique d'une manière générale une probabilité évaluée dans des hypothèses indiquées dans le contexte; la probabilité étant indépendante de h, nous écrivons S_n au lieu de $S_n^{(h)}$.

p derniers), il vient, compte tenu de (12)

$$(13) \qquad \liminf_{p \to \infty} \mathfrak{P}\{\,|\,\mathrm{U}_p\,| > p\xi\sqrt{p}\,\} \geqq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\xi}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx.$$

Soit d'autre part s_p le plus grand terme de U_p. Dans une partie normale de pile ou face, q étant un entier positif, on a, d'après une remarque connue de Désiré André,

$$\frac{1}{2}\mathfrak{P}'\{\,s_p \geqq q\,\} \leqq \mathfrak{P}'\{\,\mathrm{S}_{2p} \geqq q\,\},$$

car, quelle que soit la valeur de n pour laquelle on a pour la première fois $\mathrm{S}_n = q$, il y a à partir de ce moment autant de chance d'avoir un gain positif qu'un gain négatif, donc au moins une chance sur deux d'avoir un gain positif ou nul. Les parties pour lesquelles $\mathrm{S}_{2p} \geqq q$ ayant moins de chances que les autres d'être arrêtées avant le coup de rang $2p$ par une valeur nulle de S_n, la formule de Désiré André s'applique *a fortiori* si l'on sait que pour $n < 2p$ tous les S_n ont été positifs. Le second membre, pour p très grand, se déduit de la formule (11). Le premier ne peut que diminuer si, au lieu de supposer $\mathrm{S}_{2p} \geqq 0$, on suppose $\mathrm{S}_{2p} = 0$. Il vient ainsi, pour $x > 0$,

$$\limsup_{p \to \infty} \mathfrak{P}\{\,|\,s_p\,| > 2x\sqrt{p}\,\} \leqq 2e^{-x^2}$$

et par suite

$$(14) \qquad \limsup_{p \to \infty} \mathfrak{P}\{\,|\,\mathrm{U}_p\,| > 4p\xi\sqrt{p}\,\} \leqq 2e^{-\xi^2}.$$

A cause de la rapidité de la décroissance de l'exponentielle, la différence entre les seconds membres des formules (9), (13) et (14) est, pour ξ très grand, négligeable à côté de la modification du coefficient de $p\xi\sqrt{p}$ au premier membre. Les inégalités (13) et (14) justifient donc notre affirmation qu'en admettant la formule (9) on commet en tout cas une erreur relative finie sur U_p, donc aussi sur V_h.

Compte tenu de (7), et à cette erreur près, on a, pour u très grand,

$$\mathfrak{P}\{\,|\,\mathrm{V}_h\,| \geqq u\,\} \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\alpha_p \int_{\xi_p}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx \qquad \left(\xi_p = \frac{2u}{\pi p\sqrt{p}}\right)$$

(les valeurs de p^3 de l'ordre de u^2 interviennent en effet seules si u est très grand), c'est-à-dire

$$\mathfrak{P}\left\{|V_h| \geqq u\right\} \sim \sum_1^\infty \frac{2u}{\pi p^3}\, e^{-\frac{4u^2}{\pi^2 p^3}} \sim \int_0^\infty \frac{2u}{\pi t^3}\, e^{-\frac{4u^2}{\pi t^3}}\, dt,$$

et enfin

$$\mathfrak{P}\left\{|V_h| \geqq u\right\} \sim A\, u^{-\frac{1}{3}}, \tag{15}$$

A étant la valeur de l'intégrale de la formule précédente pour $u = 1$. Si cette formule n'est pas exacte, nous savons du moins que V_h, et la variable aléatoire définie par la formule précédente, sont comprises entre deux limites dont le rapport est 4. L'erreur peut sûrement être compensée par une variation de A entre deux limites dont le rapport est $4^{\frac{1}{3}}$; en admettant la formule (15), nous ne pouvons faire sur la probabilité étudiée qu'une erreur relative finie.

L'expression V_h, d'après cette formule, peut prendre de grandes valeurs dans des cas dont la probabilité ne décroît pas rapidement. Les sommes

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_h, \qquad |V_1| + |V_2| + \ldots + |V_h| \tag{16}$$

sont d'un type que j'ai étudié à plusieurs reprises dans des travaux antérieurs [1]. Leur ordre de grandeur probable augmente avec h, moins par l'effet de l'addition que parce que la répétition des expériences rend h fois plus grande la probabilité des grandes valeurs, et par suite h^3 fois plus grande les valeurs ayant une probabilité déterminée d'être réalisées. Si l'on désigne respectivement ces deux sommes par $h^3 v$ et $h^3 v'$, v et v' dépendent de lois tendant vers les lois stables que j'ai appelées dans mes travaux antérieurs L_α et $L_{\alpha,-1}$ $\left(\alpha = \frac{1}{3}\right)$.

Il s'agit alors de déterminer $q_1, q_2, \ldots, q_h, \ldots$ de manière à vérifier la condition (8); les p_i étant sûrement négligeables à côté des V_i, et la compensation des signes étant d'après ce qui précède sans effet appréciable sur ΣV_i, il s'agit de rendre

$$Q_h = q_1 + q_2 + \ldots + q_{h-1}$$

---

(1) *Voir* par exemple ce *Bulletin*, 1924 et *Journal de Mathématiques*, 1935.

grand par rapport à $V_1 + V_2 + \ldots + V_h$, ou, ce qui revient au même, par rapport au plus grand terme de cette somme; cette condition doit être réalisée avec une probabilité unité. Il est alors nécessaire et suffisant que, quelle que soit la constante c, la série

$$\Sigma \mathfrak{T}\{|V_h| \geqq c Q_h\} \tag{17}$$

soit convergente. Si en effet cette série est convergente, on sait que, sauf dans des cas de probabilité nulle, on a à partir d'une certaine valeur h' de h, $|V_h| < c Q_h$. Comme les Q_h sont croissants, cela implique que le plus grand des termes $|V_1|, |V_2|, \ldots, |V_h|$ (dont l'indice k ne peut pas, si h est grand, être inférieur à h') soit inférieur à $c Q_k$, donc à $c Q_h$. Inversement, si la série (17) est divergente, on a une infinité de fois $|V_h| \geqq c Q_h$, et la condition (8) n'est pas vérifiée.

D'ailleurs, d'après (15), la condition de convergence de la série (17) est indépendante de c; que A soit constant ou compris entre deux limites positives, il s'agit de rendre convergente la série $\Sigma Q_h^{-\frac{1}{3}}$. Supposons q_h de la forme $h^2\lambda^3(h)$, $\lambda(h)$ étant une fonction à croissance lente et assez régulière pour que $\frac{\delta \log \lambda(h)}{\delta \log h}$ tende vers zéro (δ désignant l'accroissement de la fonction considérée pour $\delta h = 1$); $3 Q_h$ est alors équivalent à $h^3\lambda^3(h)$, et la condition cherchée est la convergence de la série $\sum \frac{1}{h\lambda(h)}$. Le résultat subsiste évidemment si $\frac{\delta \log \lambda(h)}{\delta \log h}$ tend vers une limite (finie ou infinie) autre que zéro. Donc :

Théorème II. — *Dans l'étude d'une partie de pile ou face indéfiniment prolongée, mais interrompue après chaque série partielle* (une série partielle étant terminée chaque fois que le gain s'annule) *par une suite intermédiaire de q_h termes nuls* (h étant le rang de la série partielle), *si q_h est donnée d'avance en fonction de h par une formule de la forme $q_h = h^2\lambda^3(h)$, $h \log \frac{\lambda(h+1)}{\lambda(h)}$ tendant pour h infini vers une limite déterminée, la condition nécessaire et suffisante pour que la série Σu_n soit sommable par la méthode de la moyenne arithmétique est que la série $\sum \frac{1}{h\lambda(h)}$ soit convergente.*

Précisons que si elle est sommable, cela veut dire quelle l'est sauf dans les cas de probabilité nulle; si elle n'est pas sommable, cela veut dire qu'elle n'est sommable que dans des cas de probabilité nulle. La série (17) est en effet convergente ou divergente, et chacun des deux cas entraîne la conséquence indiquée, sans qu'on puisse trouver pour la probabilité de la sommabilité de valeur comprise entre 0 et 1.

On peut aussi se proposer de déterminer q_h en fonction de p_h. L'étude de la sommabilité de la série étudiée est alors un peu plus délicate. L'ordre de grandeur probable des sommes (16) étant h^3, pour être sûr que cette somme soit petite par rapport à Q_h, il faut étudier non seulement la probabilité des valeurs des sommes (16) grandes par rapport à h^3, mais celle des valeurs de Q_h petites par rapport à l'ordre de grandeur probable de cette quantité. Le résultat est d'ailleurs analogue au précédent; on trouve, en prenant $q_h = p_h^{\frac{3}{2}}\lambda^3(p_h)$, que la fonction λ doit remplir la même condition que dans l'énoncé précédent; l'ordre de grandeur probable de Q_h est celui de $h^3\lambda^3(h)$, et si la série $\sum \frac{1}{h\lambda(h)}$ est convergente, il n'y a pas à craindre que cet ordre s'abaisse, en même temps que celui de V_h s'élèverait, pour la même valeur de h, assez pour que V_h cesse d'être négligeable devant Q_h.

Des problèmes analogues à ceux que nous venons de traiter se posent lorsque q_h est donné, non en fonction de p_h ou de h, mais en fonction de Q_h ou de n_h, ou bien si l'on veut étudier la sommabilité au sens du calcul des probabilités. Nous n'insisterons pas sur ces questions, qui ne donnent lieu à aucune difficulté nouvelle.

Notre but, dans ce qui précède, était de montrer la possibilité d'une circonstance exceptionnelle, mais qu'il faut pourtant prévoir. L'exemple est analogue à celui de la ruine du joueur disposant d'une mise A et dont l'adversaire est infiniment riche; le jeu est équitable, mais on peut dire que le gain final a deux valeurs théoriquement possibles, $-A$ et $+\infty$, de probabilités respectives 1 et 0. La circonstance qui arrête le jeu donne au gain égal à $-A$ une probabilité qu'il n'aurait pas si le jeu continuait. De même, dans l'exemple précédent, en arrêtant assez longtemps le jeu chaque fois que S_n a une valeur donnée (on pourrait prendre une valeur autre que zéro), on lui donne un poids qu'elle n'aurait pas dans un jeu normal. Le résultat ainsi obtenu a un caractère exceptionnel.

Pour éliminer la possibilité d'une pareille circonstance, sans faire l'hypothèse précise ($\mathcal{C}''$) faite au paragraphe **2**, il suffit de supposer $\mathcal{E}_{n-1}\{u_n^2\}$ compris entre deux nombres σ_n^2 et $\sigma_n'^2$ dont le rapport soit indépendant de n. L'hypothèse ($\mathcal{C}'$) doit bien entendu être conservée. Quant à l'hypothèse ($\mathcal{C}$), on peut la remplacer par une hypothèse plus large limitant la probabilité des grandes valeurs de u_n, par exemple que ces variables dépendent de lois constituant une famille normale. Dans ces conditions les raisonnements du paragraphe **4** s'appliquent avec quelques changements, et la conclusion subsiste : la probabilité que cette série soit divergente et sommable est nulle ; si $\Sigma\sigma_n^2$ est fini, la série Σu_n est convergente ; si cette somme est infinie, elle est divergente et non sommable.

6. **Troisième exemple.** — Nous nous proposons maintenant d'étudier un exemple de corrélation négative entre le terme u_n et les termes précédents. Nous supposerons à cet effet u_n de la forme

$$(18) \qquad u_n = -\lambda_n S_{n-1} + u'_n \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

les u'_n étant des variables aléatoires indépendantes les unes des autres, et à valeurs probables nulles, et les λ_n étant des coefficients numériques compris entre 0 et 1 (s'ils sont tous égaux, soit à zéro, soit à un, on retombe sur des cas étudiés paragraphe 3). Nous poserons

$$P_n = (1-\lambda_2)(1-\lambda_3)\ldots(1-\lambda_n), \qquad P_1 = 1,$$
$$\sigma_n^2 = \mathcal{E}\{u_n'^2\}, \qquad M_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2.$$

(la définition de σ_n et M_n n'étant donc plus celle du paragraphe 3). On a dans ces conditions :

$$(19) \qquad S_n = \sum_1^n \frac{P_n}{P_\nu} u'_\nu,$$

$$(20) \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_1^n S_\nu = \frac{1}{n}\sum_1^n (P_\nu + P_{\nu+1} + \ldots + P_n)\frac{u'_\nu}{P_\nu},$$

le coefficient de u'_ν dans $n\,T_n$ croissant avec n et tendant vers la limite (finie ou infinie)

$$Q_\nu = \frac{1}{P_\nu}(P_\nu + P_{\nu+1} + \ldots).$$

La série étudiée a d'autant plus de chances d'être sommable que les σ_n sont plus petits et les λ_n plus grands (donc les Q_n plus petits). Nous ferons les hypothèses suivantes au sujet des u'_n : ils dépendent de lois constituant une famille normale, et les σ_n sont de la forme $n^\alpha \omega(n)$, α étant un exposant positif et $\omega(n)$ une fonction telle que $n \log \frac{\omega(n+1)}{\omega(n)}$ tende vers zéro.

Dans ces conditions l'ordre de grandeur de sommes telles que T_n est donné par sa valeur quadratique moyenne, et la règle du logarithme itéré s'applique, c'est-à-dire que les grandes valeurs de T_n sont équivalentes à $\sigma\{T_n\}\sqrt{2 \log \log n}$; d'autre part on a $M_n^2 \sim \frac{n\sigma_n^2}{2\alpha+1}$.

Nous ferons maintenant des hypothèses particulières sur λ_n et étudierons surtout deux cas simples :

Premier cas. — C'est le cas où $\lambda_n \geqq \lambda > 0$. Faisons d'abord l'hypothèse simple $\lambda_n = \lambda$, d'où $P_n = (1-\lambda)^{n-1}$ et $Q_n = \frac{1}{\lambda}$. Alors T_n a ses coefficients inférieurs, mais peu inférieurs, sauf ceux des derniers termes qu'on peut négliger à côté de la somme, à ceux de l'expression

$$T'_n = \frac{1}{\lambda n}\sum_1^n u'_\nu.$$

L'ordre de grandeur de T_n est donc celui de $\sigma\{T'_n\} = \frac{M_n}{\lambda n}$. On voit donc que : 1° *pour que* Σu_n *soit sommable, au sens du calcul des probabilités, par la méthode de la moyenne arithmétique, il faut et il suffit que* $\frac{M_n}{n}$ $\left(\text{ou } \frac{\sigma_n^2}{n}\right)$ *tende vers zéro;* 2° *pour que* Σu_n *soit, sauf dans des cas de probabilité nulle, sommable, au sens ordinaire, par la méthode de la moyenne arithmétique, il faut et il suffit que* $M_n^2 \frac{\log\log n}{n^2}$ $\left(\text{ou } \sigma_n^2 \frac{\log\log n}{n}\right)$ *tende vers zéro.*

Les résultats sont les mêmes que dans le cas déjà étudié où $\lambda = 1$. On se l'explique en raison de la décroissance rapide du coefficient de chaque terme u'_ν dans les sommes successives S_n; T_n diffère peu de l'expression T'_n, qui est celle que l'on obtient en cherchant la moyenne généralisée des variables u'_ν/λ

Ces résultats subsistent si l'on suppose seulement λ_n compris entre λ et 1; alors $\lambda'_n = \frac{1}{Q_n}$ est aussi compris entre λ et 1; l'expression majorante T'_n est remplacée par

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \frac{u'_\nu}{\lambda'_\nu},$$

et rien d'essentiel n'est changé.

Deuxième cas. — C'est le cas où λ_n tend vers zéro. Nous nous placerons toujours dans l'hypothèse d'une décroissance régulière en supposant que $\frac{1}{\lambda_n} = n^\beta \omega_1(n)$, $n\delta \log \omega_1(n)$ tendant vers zéro; nous supposerons β compris entre 0 et 1, le résultat obtenu pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ sera vrai *a fortiori* pour $\alpha \geqq 1$. Posons $n = \nu + \frac{x}{\lambda_\nu}$. La variation de λ_n (l'indice variant de ν à n) est négligeable, si ν est grand et x fini. Le rapport $\frac{P_n}{P_\nu}$, tant qu'il n'est pas négligeable, est donc équivalent à

$$(1 - \lambda_\nu)^{\frac{x}{\lambda_\nu}} \sim e^{-x},$$

et Q_ν est, pour ν très grand, équivalent à

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\lambda_\nu}.$$

Le raisonnement est le même que dans le premier cas. L'expression qui majore T_n, et donne son ordre de grandeur, est ici

$$T'_n = \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{u'_\nu}{\lambda_\nu},$$

et l'on a

$$\sigma^2\{T_n\} \sim \sigma^2\{T'_n\} = \frac{1}{n^2}\sum_1^n \frac{\sigma_\nu^2}{\lambda_\nu^2} \sim \frac{2\alpha+1}{2(\alpha+\beta)+1}\,\frac{M_n^2}{n^2\lambda_n^2}.$$

Donc : *les conclusions sont les mêmes dans le premier cas, en* *remplaçant* M_n *par* $\frac{M_n}{\lambda_n}$ $\left(\text{ou } \sigma_n \text{ par } \frac{\sigma_n}{\lambda_n}\right)$. *On voit en particulier que pour* $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$ *la série* Σu_n *est toujours sommable; pour* $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$ *elle ne l'est jamais.*

Nous avons dans tout ce qui précède supposé $0 < \lambda_n \leqq 1$; chaque u'_ν se trouve donc toujours dans S_n avec un coefficient positif. Comme exemple d'un cas différent, supposons $\lambda = 2$. Chaque u'_ν donne alors naissance à une série du type d'Euler

$$u'_\nu (1 - 2 + 2 - 2 + \ldots)$$

admettant une somme généralisée nulle. On a dans ce cas

$$\frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{n}(u'_n + u'_{n-2} + u'_{n-4} + \ldots),$$

de sorte que cette série est sommable par la méthode de la moyenne arithmétique et au sens du calcul des probabilités dans les mêmes conditions que si $\lambda = 1$, c'est-à-dire si $\frac{M_n^2}{n^2}$ tend vers zéro.

7. Application des procédés de sommation les plus généraux. — Nous nous sommes occupés dans ce qui précède de la méthode de sommation par des moyennes arithmétiques. Nous allons montrer par un exemple qu'appliquées aux séries aléatoires les autres méthodes de sommation n'ont pas une portée beaucoup plus grande, Ainsi, dans l'exemple du paragraphe 6, une série pour laquelle $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$ ne sera sommable par aucun procédé. C'est seulement si $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ que la possibilité de sommation peut dépendre du procédé employé.

Nous supposerons, dans l'exemple du paragraphe 6, que $\lambda_n = 1$, donc $S_n = u'_n$, et il s'agit d'étudier la limite généralisée des variables indépendantes u'_n; c'est l'étude qui, pour les moyennes arithmétiques, a été faite dès le paragraphe 3. Observons simplement que les résultats obtenus seront susceptibles d'extension; le procédé de raisonnement utilisé paragraphe 6 montre en effet qu'en principe le cas où λ_n tend vers zéro se traite en remplaçant σ_n par $\frac{\sigma_n}{\lambda_n}$ dans les résultats obtenus si $\lambda = 1$. Nous n'insisterons pas sur cette remarque et étudierons maintenant la moyenne des u'_n, définie par la formule

$$\lim_{t \to \infty} \sum_1^\infty \mu_n u'_n.$$

Nous supposerons toujours $\mathcal{E}\{u'_n\} = 0$, et que les u'_n dépendent de lois constituant une famille normale. Cela suffit pour qu'on soit sûr que la valeur de

$$\mathcal{E}\{S^2(t)\} = \sum_1^\infty \mu_n^2 \sigma_n^2$$

ne provienne pas de valeurs des termes très grandes et très peu probables. Par suite la convergence de cette expression vers zéro donne la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $S(t)$ vers zéro, au sens du calcul des probabilités. Or on a

$$(21) \qquad \sum_1^\infty \mu_n^2 \sigma_n^2 \sum_1^\infty \frac{1}{\sigma_n^2} \geqq \left(\sum_1^\infty \mu_n \right)^2 = 1.$$

de sorte que le premier facteur ne peut tendre vers zéro que si la série $\sum \frac{1}{\sigma_n^2}$ est divergente. Si donc cette série converge, aucun procédé de sommation ne peut rendre sommable la série considérée, même en se contentant de sommabilité au sens du calcul des probabilités.

Réciproquement, supposons cette série divergente et montrons qu'on peut définir un procédé de sommation applicable à la série étudiée. Nous pouvons en effet définir une suite de nombres ε_n décroissants tendant vers zéro ainsi que $\frac{\varepsilon_n}{\sigma_n^2}$ et tels que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n^2}$ soit divergente, puis définir p et q en fonction de t de manière que

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{p+1}^{q} \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n^2} = 1.$$

Pour chaque valeur de t, prenons $\mu_n = \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n^2}$ si $p < n \leqq q$, et $\mu_n = 0$ dans le cas contraire. Ces coefficients définissent un procédé de sommation pour lequel

$$\sum_{1}^{\infty} \mu_n^2 \sigma_n^2 \leq \varepsilon_p \sum_{p+1}^{q} \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n^2} \sim \varepsilon_p \to 0,$$

de sorte que $\mathfrak{S}(t)$ tend vers zéro au sens du calcul des probabilités. Donc :

Théorème III. — *Si les u'_n sont des variables aléatoires indépendantes, à valeurs probables nulles, et dépendant de lois qui constituent une famille normale, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un procédé de sommation tel que la limite généralisée de la suite des u'_n existe au sens du calcul des probabilités est que la série $\sum \frac{1}{\sigma^2\{u'_n\}}$ soit divergente* (¹).

On peut généraliser ce résultat de plusieurs manières. Nous n'insisterons pas sur l'extension qui consiste à étudier la sommabilité proprement dite, et non la sommabilité au sens du calcul des probabilités. Observons seulement qu'elle ne peut conduire qu'à une condition plus restrictive; les premières conditions d'application du théorème étant vérifiées, et la série $\sum \frac{1}{\sigma^2\{u'_n\}}$ étant divergente, aucun procédé ne conduira à une limite généralisée pour la suite des u'_n.

D'autre part, si l'on supprime la condition que les u'_n constituent une famille normale, la condition relative à la divergence de $\sum \frac{1}{\sigma_n^2}$ reste suffisante (la seconde partie de la démonstration du théorème précédant subsistant sans modification). Mais elle n'est plus nécessaire, car il suffit évidemment qu'elle soit vérifiée, non pour la suite des u'_n, mais pour une suite de variables $\overline{u}'_n$ équivalente à la suite étudiée. A la notion de suite équivalente précédemment définie, ou peut même substituer une notion d'équivalence relative au problème étudié. Ainsi, si nous étudions la convergence vers

(¹) Il faut remarquer qu'il peut s'agir ici de procédés pratiquement inacceptables, qui donnent un poids nul à presque tous les u'_n et ne tiennent compte que de ceux qui correspondent à des indices formant une suite de nombres très espacés.

une limite, au sens du calcul des probabilités, de la moyenne arithmétique

$$(22) \qquad \frac{1}{n}(u'_{n+1} + u'_{n+2} + \ldots + u'_{2n}),$$

si l'on pose $\gamma_n = \mathfrak{P}\{\overline{u}'_n \neq u'_n\}$, cette équivalence est définie par

$$\lim_{n \to \infty}(\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} + \ldots + \gamma_{2n}) = 0,$$

condition qui n'implique pas la convergence de la série $\Sigma\gamma_n$; il suffit, pour qu'elle soit vérifiée, que $n\gamma_n$ tende vers zéro.

Plaçons-nous par exemple dans le cas où chaque u'_n dépend de la loi symétrique pour laquelle, pour $U > 1$, on a

$$\mathfrak{P}\{|u'_n| > U\} = U^{-\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqq 2).$$

On sait que dans ce cas, sauf des cas très peu probables, l'ordre de grandeur de la somme (22) est celui de son plus grand terme, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de $n^{\alpha'-1}\left(\alpha' = \frac{1}{\alpha}\right)$, de sorte que la condition cherchée est $\alpha > 1$. Or dans ce cas, en remplaçant par zéro les valeurs de u'_n supérieures en valeur absolue à $n^{\alpha'} \log n$, on obtient des variables $\overline{u}'_n$, constituant une suite équivalente à celle étudiée au point de vue du problème considéré, et pour laquelle $(2\alpha' - 1)\sigma^2\{\overline{u}'_n\} \sim n^{2\alpha'-1}\log^{2-\alpha} n$, de sorte que pour $\alpha \geqq 1$ la série $\Sigma 1/\sigma^2\{\overline{u}'_n\}$ est divergente. La moyenne généralisée des $\overline{u}'_n$ peut donc dans ce cas être définie par un procédé convenable; mais pour $\alpha = 1$ l'équivalence avec la suite des u'_n n'est établie que si ce procédé est défini par la moyenne (22) et par la convergence au sens du calcul des probabilités. Le procédé ainsi défini s'applique d'ailleurs aux u'_n si $\alpha > 1$, mais non si $\alpha = 1$, de sorte qu'on retrouve bien le résultat obtenu directement. Si $\alpha = 1$, on voit aisément que la moyenne des u'_n ne peut être définie par aucun procédé (1).

---

(1) Au point de vue de la théorie des erreurs, j'ai indiqué ailleurs qu'on obtient une moyenne bien définie si l'on écarte, dans une proportion déterminée, les valeurs extrêmes de la suite des u'_ν ($\nu < n$). Cela revient à prendre des coefficients μ_n dépendant, non seulement de n et de t, mais de u'_n; un tel procédé ne rentre pas dans les procédés de sommation que nous étudions ici.

8. Principe d'une méthode pour l'étude de la sommabilité de séries aléatoires d'un type très général (¹). — D'après le paragraphe 2, la recherche des cas de sommabilité se ramène à l'étude des caractères auxquels on sait reconnaître que la probabilité de la sommabilité est égale à o ou 1 ou peu différente d'une de ces valeurs. Nous chercherons à reconnaître dans quels cas cette probabilité a la valeur 1 ; toujours d'après le paragraphe 2, nous savons qu'alors la série est uniformément sommable, sauf dans des cas de probabilité arbitrairement petite. Quelque petits que soient ε et ε', on peut donc déterminer T et $\varphi(t)$ de manière que, pour $t > t' > \mathrm{T}$, $\mathrm{N} > \varphi(t)$, $\mathrm{N}' > \varphi(t')$, on ait

$$\mathfrak{P}\left\{\left|\sum_1^{\mathrm{N}} \mu_n \mathrm{S}_n - \sum_1^{\mathrm{N}'} \mu'_n \mathrm{S}_n\right| > \varepsilon\right\} < \varepsilon', \tag{23}$$

les coefficients μ_n et μ'_n correspondant respectivement aux valeurs t et t'.

La méthode que nous voulons exposer repose sur une remarque très générale : si la série Σu_n est sommable, il en est de même de $\Sigma \mathcal{E}\{u_n\}$. Cela n'est pas évidemment un théorème toujours vrai, puisque $\mathcal{E}\{u_n\}$ peut n'avoir pas de sens, ou que, même si chaque $\mathcal{E}\{u_n\}$ est fini, il peut arriver que des valeurs très grandes et dont les probabilités forment une série convergente empêchent la série $\Sigma \mathcal{E}\{u_n\}$ d'être sommable. Mais si l'on est assuré que, pour toutes les sommes du type $\Sigma \mu_n \mathrm{S}_n$, les valeurs très peu probables ne peuvent jouer qu'un rôle négligeable dans le calcul de leur valeur probable, il résulte de la formule (23) que

$$\sum_1^{\mathrm{N}} \mu_n \mathcal{E}\{\mathrm{S}_n\} - \sum_1^{\mathrm{N}'} \mu'_n \mathcal{E}\{\mathrm{S}_n\}$$

est très petit. Donc il est nécessaire que la série $\Sigma \mathcal{E}\{u_n\}$ soit sommable, et sa somme sera $\mathcal{E}\{\mathrm{S}\}$.

Nous supposerons que les mêmes hypothèses soient vérifiées pour les lois de probabilité dont dépendent les u_n si l'on connaît $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$. La même conclusion s'applique. Pour que Σu_n

(¹) J'ai déjà indiqué le même principe, sans l'appliquer à l'étude de la sommabilité, dans mon Mémoire déjà cité du *Journal de Mathématiques* (1935) soit sommable, il faut que toutes les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_\nu \{u_n\}$ le soient, $\mathcal{E}_\nu \{u_n\}$ désignant la valeur probable de u_n calculée en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ supposés connus, et les sommes de ces séries seront les valeurs probables successives $\mathcal{E}_\nu \{S\}$ de la somme S qu'il s'agit de définir.

D'ailleurs, compte tenu de l'hypothèse que les cas très peu probables ne jouent pas de rôle dans le calcul des valeurs probables, il résulte de la formule (23) que, pour $\nu > N'$, on a

$$\mathcal{P}\left\{\left|\mathcal{E}_\nu\left\{\sum_1^N \mu_n S_n\right\} - S\right| > \varepsilon_1\right\} \leqq \varepsilon'_1,$$

ε_1 et ε'_1 étant arbitrairement petits. En faisant augmenter indéfiniment N, puis t, la formule reste vraie, de sorte que, si ν est assez grand, $S - \mathcal{E}_\nu \{S\}$ est très petit. S peut être défini comme limite des quantités $\mathcal{E}_\nu \{S\}$, dont chacune constitue une approximation de S, la meilleure possible après la détermination de u_ν.

En posant

$$v_n^{(0)} = \mathcal{E}\{u_n\}, \qquad v_n^{(\nu)} = \mathcal{E}_\nu\{u_n\} - \mathcal{E}_{\nu-1}\{u_n\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

les remarques précédentes nous conduisent à opérer pratiquement de la manière suivante :

1° On étudie successivement les diverses séries $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(\nu)}$. Chacune de ces séries ne dépend que des ν variables $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$. Pour chaque système de valeurs possibles pour ces variables, on cherche si elle est sommable (problème ne relevant pas du calcul des probabilités). Il faut que les cas de sommabilité aient une probabilité égale à l'unité. On obtiendra alors une somme $V^{(\nu)}$, fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$.

2° On étudie la série $\Sigma V^{(\nu)}$, qui est du type étudié paragraphe 5, puisque $\mathcal{E}_{\nu-1}\{V^{(\nu)}\} = 0$. Il faut qu'elle soit convergente [1].

---

[1] L'exemple sur lequel nous avons insisté au paragraphe 5 apparait comme une exception; la série considérée est sommable et de somme nulle, bien que $\mathcal{E}_\nu \{S\} = S_\nu$ ne tende pas vers zéro. Si l'on se place à un moment ou $S_\nu = 1$, par exemple, pour tout $n > \nu$, on a $\mathcal{E}_\nu \{S_n\} = 1$; cela n'empêche pas qu'on aura une infinité de fois $S_n - S_\nu = -1$, et l'arrêt artificiellement marqué au moment

3° Il reste à se demander si la somme S de cette série est bien la limite de $\mathfrak{S}(t)$, c'est-à-dire si l'on a le droit d'intervertir les deux symboles de passage à la limite dans l'expression

$$\lim_{\nu \to \infty} \lim_{t \to \infty} \sum_1^\infty \mu_n \mathcal{E}_\nu \{ S_n \}.$$

Il en sera ainsi dans des cas étendus. D'ailleurs, dans le cas contraire, on pourrait dire que l'on a défini un procédé de sommation, mais qui ne rentre pas dans les types classiques. Il en serait de même si la série $\Sigma V^{(\nu)}$ était sommable sans être convergente, ce qui, d'après le paragraphe 5, est un cas exceptionnel.

La méthode ainsi indiquée, sans être tout à fait générale en raison des hypothèses faites, n'en est pas moins applicable dans des cas étendus. Le résultat justifie ce que nous avons dit dans l'Introduction. Les séries $\sum_{n=1}^\infty v_n^{(\nu)}$ n'ont pas le caractère de séries aléatoires. Si elles sont divergentes et sommables, c'est que $v_n^{(\nu)}$ dépend de u_1, u_2, ..., u_ν par une formule qui assure ce caractère à la série $\Sigma v_n^{(\nu)}$, sans l'intervention du hasard. Les oscillations des sommes successives au voisinage d'une valeur moyenne ont le caractère d'oscillations forcées. Il faut ensuite que les termes $V^{(\nu)}$ qui, pour les expériences déterminant successivement les u_ν, constituent la part du hasard, soient asez petits pour que la série $\Sigma V^{(\nu)}$ soit convergente. Si cette part du hasard n'était pas très petite, le hasard ne produirait ni la convergence, ni la sommabilité.

La recherche des cas de sommabilité, lorsque leur probabilité est comprise entre o et 1, n'est pas plus difficile, si l'on fait

---

où il en est ainsi donne un poids trop grand à cette valeur de S_n, ce qui conduit à $S = 1$. Le phénomène est le même que celui de la ruine du joueur, un joueur qui, jouant contre un adversaire disposant d'un crédit illimité, se ruine sûrement, même si le jeu est équitable. Bien entendu le fait que cet exemple du paragraphe 5 fasse exception aux règles obtenues dans le texte est lié au fait qu'il ne vérifie pas notre hypothèse fondamentale : si en effet $S_\nu \neq 0$, on a à la fois $\mathcal{E}_\nu \{S_n\} = S_\nu$ pour tout $n > \nu$ et $\mathfrak{P}_\nu \{S = 0\} = 1$, ce qui provient de ce que la valeur de $\mathcal{E}_\nu \{S_n\}$, pour n très grand, provient de valeurs très grandes et très peu probables.

toujours la même hypothèse fondamentale. Dans ces cas en effet, après un nombre assez grand d'expériences, la probabilité *a posteriori* de la sommabilité sera voisine de 1 ; les cas peu probables ne jouant que peu de rôle, la série $\Sigma \mathcal{E}_\nu \{u_n\}$ sera presque sommable, si ν est grand, c'est-à-dire que les valeurs de $\mathcal{E}_\nu\{\mathcal{S}(t)\}$ (pour ν fixe et t croissant) oscilleront entre deux limites très peu différentes l'une de l'autre. La différence ε_ν de ces limites sera fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, et il s'agit de chercher pour quelles suites de valeurs des u_ν les ε_ν tendent vers zéro. Les valeurs $\mathcal{E}_\nu\{S\}$, ainsi définies avec une précision croissante, donneront à la limite la valeur de S; au contraire, dans les cas de non sommabilité, ε_ν ne tend pas vers zéro et il n'y a pas de limite bien définie.

9. **Les séries du type de M. Denjoy.** — La série considérée par M. Denjoy rentre dans le type des séries définies par une relation de récurrence de la forme

$$u_n = u_{n-1} e^{i(\alpha_n a_n + \beta_n)}, \tag{24}$$

les α_n et β_n étant des coefficients réels, qu'on peut sans restriction supposer compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (inclus), et que nous supposerons en outre assujettis à cette seule restriction que le produit $\alpha_n \alpha_{n+1}$ ne tende pas vers zéro pour n infini; on peut supposer $u_0 = 1$ (donc $|u_n| = 1$). Enfin les a_n sont les quotients incomplets du développement en fraction continue d'un nombre x choisi au hasard entre 0 et 1. La loi de probabilité dont dépend x importe peu pourvu qu'elle soit absolument continue, c'est-à-dire qu'à un ensemble de mesure nulle corresponde une probabilité nulle; nous supposerons dans la suite qu'à tout ensemble mesurable corresponde une probabilité égale à sa mesure; mais cette hypothèse n'a rien d'essentiel pour les conclusions, qui ne font intervenir que des probabilités égales à 0 ou 1.

On sait [1] que dans ces conditions a_n dépend d'une loi de probabilité tendant vers une loi limite qui donne à chaque entier h la

---

[1] *Cf.* mon Mémoire paru dans ce *Bulletin* en 1929 (p. 178 à 203), et une Communication de M. E. Kuzmin au Congrès de Bologne (1928).

valeur

$$\frac{1}{\log 2}\log\frac{(h+1)^2}{h(h+2)}\quad(^1).$$

Il en résulte (et c'est un point essentiel pour ce qui suit) que, si $|\alpha_n|$ a une borne inférieure positive, u_n a, lorsque $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont connus, au moins deux valeurs distinctes (correspondant aux valeurs 1 et 2 de a_n), de probabilités bornées inférieurement, la différence de ces deux valeurs de u_n étant aussi bornée inférieurement. On n'a donc pas à craindre la concentration en un point (c'est-à-dire que u_n soit presque sûrement presque égal à une valeur unique). En supposant que $\alpha_n \alpha_{n+1}$ ne tende pas vers zéro, nous supposons que cette circonstance soit vérifiée une infinité de fois pour deux valeurs consécutives de n.

La seule difficulté provient de ce que les a_n ne sont pas indépendants les uns des autres. Elle se résout en remarquant que, si $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sont connus, on a

$$\mathfrak{P}'\{\xi < x_n < \xi + d\xi\} = \frac{1+\lambda}{(\xi+\lambda)^2}\,d\xi,$$

$x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$ étant le quotient complet qui correspond au quotient incomplet a_n, et λ dépendant des quotients connus, mais étant toujours compris entre 0 et 1. Si, pour une même valeur de ξ, on compare les valeurs extrêmes de cette probabilité quand λ varie de 0 à 1, on constate qu'en aucun cas leur rapport ne dépasse 2. Par suite, quelle que soit la propriété de la suite $a_n, a_{n+1}, \ldots$, que l'on considère, sa probabilité peut dépendre de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, mais le rapport de ses valeurs extrêmes ne peut pas dépasser 2.

Supposons alors la série Σu_n sommable, dans des cas de probabilité α. La probabilité *a posteriori* de sa sommabilité, $\mathfrak{P}\{E\}$, devrait (d'après le paragraphe 2) tendre vers 1 ou vers zéro dans des cas de probabilités respectivement égales à α et $1-\alpha$. Mais la

(1) On peut remarquer que la probabilité que p soit impair a la valeur simple $\log_2 \frac{\pi}{2}$ (l'indice indiquant la base du système de logarithmes). Si $\frac{\alpha_n}{\pi}$ est rationnel, les différentes valeurs possibles de $e^{i\alpha_n a_n}$ ont des probabilités qui s'expriment aisément par les fonctions eulériennes.

sommabilité ne dépend que de x_n, de sorte que $\mathfrak{T}_n\{E\}$, d'après ce qui précède, a des valeurs extrêmes dont le rapport ne dépasse pas 2 ; il est donc impossible que cette probabilité soit tantôt voisine de 1, tantôt très petite. Donc $\alpha = \mathfrak{T}\{E\}$, et par suite aussi $\mathfrak{T}_n\{E\}$, sont égaux, soit à 0, soit à 1.

Il est facile de montrer que cette dernière hypothèse n'est pas possible. Si elle était réalisée, la série sommable Σu_n serait (d'après le paragraphe 2) uniformément sommable (sauf dans des cas de probabilité arbitrairement petite; il est facile et d'ailleurs inutile d'écarter cette restriction). En prenant t, puis N, assez grands, l'expression

$$\sum_1^N \mu_n s_n,$$

qui ne dépend que de $a_1, a_2, \ldots, a_N$, différerait de sa limite S de moins de ε, de sorte que S devrait être presque indépendant de $a_{N+1}, \ldots$ (c'est-à-dire de $u_{N+1}, \ldots$). Or, en faisant augmenter t et N, les sommes qui doivent tendre vers S contiennent, en plus de la partie dépendant seulement des n premiers quotients, des termes en $u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$, qui, à cause de la forme de la relation de récurrence (24) et du fait que le poids de u_{N+1} dans les sommes $\mathfrak{S}_p$ tende vers l'unité (pour N fixe et t croissant), sont, à un facteur près de module tendant vers u_n, de la forme

$$u_{N+1}\,\varphi(x_{N+2}),$$

et cette expression devrait différer très peu d'une valeur indépendante de a_{N+1} et x_{N+2}. Or a_{N+1} et x_{N+2} sont presque indépendants en ce sens que les probabilités d'une valeur de x_{N+2} restent toujours comprises entre deux nombres indépendants de a_{N+1} et dont le rapport est 2. Il faut donc, ou bien que le premier facteur soit presque indépendant de a_{N+1}, hypothèse exclue si α_{N+1} n'est pas très petit, ou bien que la valeur $\varphi(x_{N+2})$ soit très petite, ce qui revient à dire qu'on obtient S d'une manière très approchée en remplaçant $u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$, par zéro; comme $|u_{N+1}| = 1$, cela ne peut pas être vrai pour deux valeurs consécutives de n.

Si donc il arrive une infinité de fois que deux coefficients consécutifs α_n et α_{n+1} ne soient pas très petits, l'hypothèse précédente est exclue. *Il y a donc une probabilité égale à l'unité que la* *série Σu_n ne soit pas sommable* (quel que soit d'ailleurs le procédé de sommation envisagé).

Considérons alors la fonction

$$f(z) = \sum u_n z^n,$$

bien définie pour $|z| < 1$, et dépendant du paramètre x. Si nous nous donnons une infinité dénombrable de valeurs de z formant un ensemble partout dense sur la circonférence $|z| = 1$, il y a une probabilité unité que la série qui définit $f(z)$ ne soit sommable en aucun de ces points par la méthode exponentielle. *La fonction $f(z)$ admet donc la circonférence $|z| = 1$ comme coupure, sauf peut-être pour des valeurs de x constituant un ensemble de mesure nulle.*

Le même résultat s'applique évidemment à toute série de Taylor à coefficients de modules donnés et d'arguments choisis au hasard indépendamment les uns des autres (1). La difficulté qui provenait dans ce qui précède la corrélation entre les u_n n'existe plus, et l'étude de la sommabilité de la série sur une circonférence de rayon légèrement supérieur au rayon de convergence donne une démonstration très simple du fait que, sauf dans des cas de probabilité nulle, une telle série a pour coupure la circonférence du cercle de convergence.

(1) On peut même pour chaque argument se donner seulement deux valeurs possibles, non voisines l'une de l'autre, et choisir au hasard entre les deux. La conclusion du texte subsiste.