BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 190-193

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__190_1>

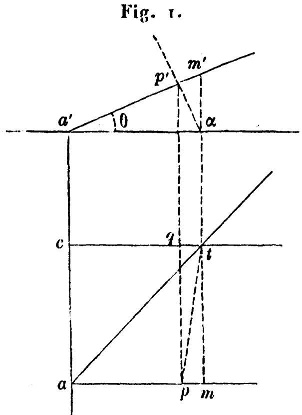
Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée;
par M. A. Mannheim.

(Séance du 25 juillet 1877.)

Soit G la génératrice d'une surface réglée (G). Le paraboloïde dont nous allons nous occuper est le lieu des normales à (G) issues de tous les points de la génératrice G.

Prenons (*fig.* 1) pour plan horizontal de projection le plan tangent à (G) au point qui est à l'infini sur G et pour plan vertical de projec-

Fig. 1.



tion un plan perpendiculaire à G. Désignons par c le point central sur G. Le plan central est le plan mené par G perpendiculairement au plan horizontal, et alors la normale à ce plan, élevée du point central, est la perpendiculaire menée à G dans le plan horizontal à partir du point c. Cette perpendiculaire appartient au paraboloïde des normales : elle constitue avec G la trace horizontale de ce paraboloïde.

Menons, à partir d'un point (a', a) de G, la normale à (G) ; soient $(a'm', am)$ les projections de cette droite. Elle appartient au paraboloïde. La génératrice de ce paraboloïde, qui passe par le point (m', m) de cette droite, étant parallèle au plan directeur de ce paraboloïde, qui n'est autre que le plan central de (G), se projette horizontalement suivant mt. La trace horizontale de cette droite est au point t et par suite la trace horizontale du plan tangent en m au paraboloïde est la droite at.

Le plan central relatif à la génératrice $(am, a'm')$ du paraboloïde est le plan $(m'a'a)$. Nous avons donc pour la droite $(am, a'm')$ le plan central et le plan tangent en m au paraboloïde. Il est alors facile pour cette droite de déterminer le paramètre de distribution des plans tangents au paraboloïde.

Ce paramètre, que nous désignons par K_1, est égal au segment $a'm'$ divisé par la tangente de l'angle que font entre eux le plan central $(m'a'a)$ et le plan tangent en m au paraboloïde. Pour déterminer cette tangente, menons par le point t un plan perpendiculaire à la droite $(a'm', am)$. Ce plan a pour traces $p'\alpha t$, il coupe le plan central $(m'a'a)$ suivant une droite projetée horizontalement suivant pq et le plan tangent en m au paraboloïde suivant la droite tp. L'angle compris entre ces deux droites est l'angle dont nous devons prendre la tangente. Cette tangente est égale à $\frac{\alpha p'}{pq}$.

Le paramètre K_1 est donc égal à

$$\frac{a'm'}{\frac{\alpha p'}{pq}} = \frac{ac}{\sin\theta\cos\theta},$$

en appelant θ l'angle que la normale am fait avec la normale ct.

Le paramètre de distribution des plans tangents à (G) pour G est

$$K = \frac{ac}{\operatorname{tang}\theta};$$

on a donc

$$K_1 = \frac{K}{\cos^2\theta}.$$

Telle est la valeur du paramètre de distribution des plans tangent au paraboloïde des normales pour une génératrice quelconque am.

On peut arriver plus rapidement à ce résultat de la manière suivante. On a

$$K = \frac{ac}{\tan\theta}.$$

En différentiant, il vient

$$\frac{K}{\cos^2\theta} = \frac{d.ac}{d\theta}.$$

$d.ac$ est la plus courte distance entre *am* et la normale de (G) qui est infiniment voisine de *am*.

$d\theta$ est l'angle de ces deux normales.

$\frac{d.ac}{d\theta}$ est donc K_1.

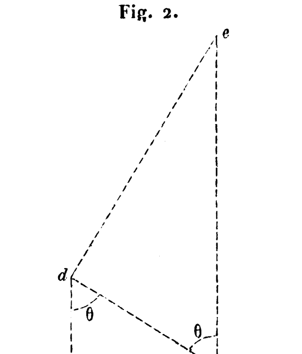
On a alors

$$K_1 = \frac{K}{\cos^2\theta}.$$

Lorsque θ est nul, c'est-à-dire lorsque l'on considère la droite *ct*, le paramètre relatif à cette droite est égal au paramètre relatif à (G).

Construisons K_1. Prenons (*fig.* 2) dans un plan quelconque mené

Fig. 2.



par G, à partir du point central c, sur la perpendiculaire à G, une longueur *cd* égale à K. En joignant le point *d* au point quelconque

a, on a l'angle cda qui est égal à l'angle θ que la normale à a à (G) fait avec la normale en c au plan central de cette surface.

Menons à partir de d la perpendiculaire de à da : on a

$$ae = \frac{da}{\cos\theta} = \frac{dc}{\cos^2\theta} = \frac{\mathrm{K}}{\cos^2\theta};$$

ainsi

$$ac = \mathrm{K}_1.$$

La construction que nous trouvons ainsi n'est autre que celle qui donne pour le point a le segment ae qui est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure principaux de (G) en a. Nous trouvons donc, d'après cette remarque, que pour la génératrice am du paraboloïde des normales, lequel est une normalie de (G), le paramètre de distribution des plans tangents est égal à la moyenne proportionnelle des rayons de courbure principaux de (G) pour le point a. Cette propriété, comme l'on sait, est vraie pour une surface quelconque, lorsque la normalie que l'on considère a pour directrice une ligne asymptotique de cette surface ([1]) (voir *Mémoire sur les pinceaux de droite*, etc., Chap. XXXI).