BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL VINCENSINI

Sur certains mouvements de figures invariables. Hélicoïdes pseudo-sphériques et couples de sphères. Transformation par polaires réciproques

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 186-208

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__186_0>

SUR CERTAINS MOUVEMENTS DE FIGURES INVARIABLES. HÉLICOÏDES PSEUDO-SPHÉRIQUES ET COUPLES DE SPHÈRES. TRANSFORMATION PAR POLAIRES RÉCIPROQUES.

PAR M. P. VINCENSINI.

I. — Introduction.

Dans un Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* ([1]), j'ai recherché les surfaces et les courbes, de forme et de grandeur invariables, susceptibles d'engendrer au cours d'un mouvement hélicoïdal déterminé, des volumes (ou des aires) proportionnels aux aires des cloisons tracées sur les surfaces (ou aux longueurs des arcs pris sur les courbes).

L'objet de la première partie du Mémoire actuel est de compléter les résultats du précédent, en recherchant toutes les surfaces et les courbes invariables auxquelles on peut imprimer un mouvement (inconnu), au cours duquel, pendant un intervalle de temps quelconque, les différentes cloisons que l'on peut tracer sur les surfaces (ou les différents arcs que l'on peut prendre sur les courbes) engendrent des volumes proportionnels aux aires des cloisons (ou des aires proportionnelles aux longueurs des arcs portés par les courbes).

Je rappelle les deux résultats suivants, établis dans le Mémoire cité :

Les surfaces (S) qui, au cours d'un mouvement hélicoïdal quelconque d'axe (Δ) et de pas réduit h, engendrent des volumes proportionnels aux aires des cloisons qu'elles portent, sont les développantes suivant une famille de géodésiques (déduites d'une géodésique déterminée par déplacement hélicoïdal), des différents hélicoïdes d'axe (Δ) et de pas réduit h.

([1]) *Aires courbes en perspective, surfaces et volumes hélicoïdaux*, 2e partie (*Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1931).

Les courbes (C) qui, par un mouvement hélicoïdal quelconque de pas réduit h autour d'un axe (Δ), donnent des aires proportionnelles aux arcs, sont les trajectoires orthogonales des différentes familles de géodésiques (déduites d'une géodésique arbitraire par déplacement hélicoïdal), tracées sur une surface hélicoïde arbitraire d'axe (Δ) et de pas h.

En ce qui concerne le problème général que nous nous proposons, nous montrerons que les seules solutions (si on laisse de côté le cas relativement banal où le mouvement se réduit à une translation), sont les surfaces (S) et les courbes (C) indiquées dans le Mémoire rappelé, les mouvements associés étant les mouvements hélicoïdaux (ou révolutifs) correspondants.

Le cas des surfaces (S) donnant des volumes proportionnels aux aires des cloisons qu'elles portent, conduit à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre de la forme

$$qx - py - \mathcal{F}(p, q) = 0, \tag{1}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction arbitraire de p et de q.

Cette équation s'intègre immédiatement, par une seule quadrature, en effectuant d'abord la transformation de Legendre

$$x = P, \qquad y = Q, \qquad z = PX + QY - Z, \qquad p = X, \qquad q = Y,$$

puis en prenant pour variables indépendantes ρ et ω, tels que

$$X = \rho \cos\omega, \qquad Y = \rho \sin\omega.$$

J'ai montré d'autre part [1], qu'on peut attribuer une signification géométrique à toute équation du type (1) :

Intégrer (1) *revient à chercher les congruences rectilignes à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne* donnée.

Cette interprétation conduit à un procédé d'intégration plus long que le procédé analytique, mais que nous exposerons cependant parce qu'il conduira à des remarques géométriques (n^{os} VI et suiv.) qui nous ont paru présenter quelque intérêt.

Ces remarques sont relatives aux hélicoïdes pseudo-sphériques, dont il est donné une définition mettant nettement en évidence les

[1] *C. R. Acad. Sc.* t. 195, 1932, p. 18.

trois types distincts, et aux relations existant entre les polarités et les *involutions biaxiales* utilisées par M. B. Gambier dans son étude sur les « *Sous-groupes du groupe des homographies* » [1].

II. — Cas des mouvements de translation.

Pour ce cas, particulièrement simple, nous nous bornerons aux énoncés suivants.

Les surfaces qui, par translation, engendrent des volumes proportionnels aux aires des cloisons qu'elles portent sont :

a. Le plan, animé d'un mouvement de translation *arbitraire*.

b. Les développables, lieux des tangentes à une hélice tracée sur un cylindre quelconque, animées d'un mouvement de translation parallèle aux génératrices du cylindre.

Les courbes donnant des aires proportionnelles aux arcs, sont constituées par :

a. Les droites, animées d'un mouvement de translation *arbitraire*.

b. Les hélices tracées sur un cylindre arbitraire, animées d'un mouvement de translation parallèle aux génératrices du cylindre.

III. — Cas général.

Soit (S) une surface en mouvement, telle que les différentes cloisons que l'on peut tracer sur elle engendrent des volumes proportionnels à leurs aires.

Envisageons le mouvement hélicoïdal $(\mathcal{M}_t)$, *tangent* au mouvement de (S), à un instant quelconque t.

Soient, (Δ) l'axe de ce mouvement hélicoïdal et h le pas réduit correspondant.

Dans le mouvement $(\mathcal{M}_t)$, qui fait passer la surface envisagée, de la position (S) qu'elle occupe à l'instant t à la position (S')

---

[1] Bertrand Gambier. — *Invariants projectifs de quatre droites. Complexes particuliers. Sous-groupes du groupe des homographies* (*Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, 1926, t. VIII).

qu'elle occupe à l'instant $t + dt$, les diverses cloisons portées par (S) engendrent des éléments de volumes proportionnels à leurs aires. Il en résulte (*Mémoire cité*) que (S) est une développante d'une certaine surface hélicoïde ($\mathcal{H}$) d'axe (Δ) et de pas réduit h, normale aux tangentes à une famille de géodésiques de ($\mathcal{H}$) déduites de l'une d'entre elles par déplacement hélicoïdal autour de (Δ).

La surface hélicoïde ($\mathcal{H}$) est l'une des nappes de la développée de (S). Elle est donc *invariablement liée* à (S).

Son axe (Δ) est par suite, lui aussi, *invariablement lié* à (S). (Δ) est l'axe instantané de rotation et de glissement du mouvement auquel (S) est supposée soumise. Cet axe est *fixe* par rapport à la surface mobile (S). Il est par suite *fixe* dans l'espace dans lequel se déplace (S).

Il résulte de ces remarques, que le mouvement de (S) est nécessairement un mouvement hélicoïdal d'axe (Δ) et de pas réduit h.

Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Les seuls mouvements (*avec les translations précédemment indiquées*) *que l'on puisse imprimer à une surface, pour que les différentes cloisons portées par cette surface engendrent des volumes proportionnels à leurs aires, sont les mouvements hélicoïdaux.*

Les surfaces (S) *correspondant à un mouvement hélicoïdal déterminé d'axe* (Δ) *et de pas h, sont les développantes des différents hélicoïdes d'axe* (Δ) *et de pas h suivant une famille quelconque de géodésiques déduites de l'une d'elles par déplacement hélicoïdal.*

Un raisonnement analogue au précédent montre sans peine, que les seules courbes auxquelles on peut imprimer un mouvement au cours duquel, les différents arcs portés par ces courbes engendrent des aires proportionnelles à leurs longueurs, sont *les trajectoires orthogonales des différents systèmes de géodésiques* (*déduites de l'une d'elles par déplacement hélicoïdal*) *des hélicoïdes les plus généraux.*

Les mouvements à imprimer à ces courbes sont les mouvements hélicoïdaux associés.

Si l'on a égard aux mouvements d'une courbe plane invariable dans son plan, le résultat général ci-dessus conduit à l'énoncé suivant :

En dehors de la translation (arbitraire) de la droite, les seuls mouvements que l'on puisse imprimer à une courbe (C), pour que, au cours d'un de ces mouvements, les différents arcs de (C) engendrent des aires proportionnelles à leurs longueurs, sont les mouvements *de rotation autour d'un point* O.

Les courbes (C) sont les *développantes des différentes circonférences de centre* O.

Les différentes familles de géodésiques dont il est question plus haut, se réduisent en effet ici aux familles de tangentes aux diverses circonférences de centre O [1].

IV. — Sur les équations aux dérivées partielles de la forme.

$$qx - py - \mathcal{F}(p, q) = 0. \tag{1}$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces (S) déterminées au numéro précédent, s'obtient sans difficulté.

Si Oz est l'axe du mouvement hélicoïdal, h le pas réduit et K une constante arbitraire, cette équation est [2] :

$$\frac{py - qx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \mathrm{K}.$$

Elle rentre dans le type (1).

Nous allons exposer ici, pour les équations de ce type (pour la raison signalée dans l'Introduction), le mécanisme d'intégration signalé dans la Note des *Comptes rendus* indiquée plus haut. Nous l'appliquerons ensuite au cas particulier de la recherche des surfaces (S).

Soit (Σ) une surface intégrale de l'équation (1). Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de (Σ), que

---

[1] Pour ce cas particulier, on peut voir un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques: Sur une propriété de la développante de cercle et de l'hélicoïde développable;* janvier 1925.

[2] *Aires courbes en perspective* (*Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1931).

nous supposerons exprimées en fonction de deux paramètres u et v; et par X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale au point x, y, z.

On a

$$p = -\frac{X}{Z}, \qquad q = -\frac{Y}{Z}.$$

Nous adopterons, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique de (Σ), les notations habituelles

$$ds^2 = S\, dX^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

et nous poserons

$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

Avec la représentation sphérique particulière dont il sera fait usage plus loin :

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \sin u \cos v, \\ Y = \sin u \sin v, \\ Z = \cos u, \end{cases}$$

on a

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2,$$
$$H = \sin u,$$

$$(3)\qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{tang} u \cos v, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\operatorname{tang} u \sin v.$$

Envisageons (Σ) comme la suface *génératrice* d'une congruence de Ribaucour (Γ) à surface plane (Oxy).

On sait qu'on obtient (Γ), en projetant chaque point M de (Σ) sur Oxy, en faisant tourner la projection de 90° autour de O, puis en menant par le point obtenu, m, la parallèle à la normale en M à (Σ).

La connaissance de (Γ) entraînera celle de (Σ). Le procédé d'intégration que nous allons exposer, consiste précisément à substituer à la recherche des surfaces (Σ) celle des congruences (Γ) correspondantes.

Les coordonnées du point central m de (Γ), correspondant au point $M(x, y, z)$ de (Σ), sont

$$(4)\qquad x_1 = -y, \qquad y_1 = x, \qquad z_1 = 0;$$

et les cosinus directeurs du rayon (D) de (Γ), issus de M, sont X, Y, Z [cosinus directeurs de la normale en M à (Σ)].

Le plan moyen relatif à (D) a pour équation

$$X(\xi - x_1) + Y(\eta - y_1) + Z\zeta = 0,$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées courantes; soit en tenant compte des relations (4),

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = \mathfrak{M},$$

avec

$$\mathfrak{M} = Yx - Xy,$$

$\mathfrak{M}$ est la distance du plan moyen à l'origine O des coordonnées.

Si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$Yx - Xy = \frac{\mathcal{F}(p, q)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

on voit que

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathcal{F}(p, q)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

d'où ce résultat :

La distance $\mathfrak{M}$ du point O à chaque plan moyen de direction donnée X, Y, Z (ou p, q) est connue.

Pour la congruence (Γ), on connaît donc outre la surface moyenne (plan xOy), la surface enveloppée moyenne (Ω) [enveloppe du plan $X\xi + Y\eta + Z\zeta = \mathfrak{M}$].

La recherche des congruences (Γ) associées aux surfaces (Σ) solutions de (1) est donc ramenée au problème de la *détermination des congruences à surface moyenne plane* (xOy) *et à enveloppée moyenne donnée* (Ω).

Dans un Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1), nous avons étudié le problème de la recherche des congruences admettant pour surfaces moyenne et enveloppée moyenne deux surfaces arbitrairement données. Dans le cas où la surface moyenne est le plan xOy, nous avons obtenu le résultat suivant.

L'enveloppée moyenne étant définie comme l'enveloppe du plan

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = \mathfrak{M}$$

---

(1) *Sur les congruences rectilignes à enveloppée moyenne donnée;* 1929, § 2.

[X, Y, Z sont les cosinus directeurs de la normale au plan, et $\mathfrak{M}$ sa distance au point O], le rayon D(u, v) de cosinus directeurs X, Y, Z, d'une congruence (Γ) répondant à la question, perce le plan moyen xOy au point dont les coordonnées (x_1, y_1) sont définies par les équations

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{H}\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + \displaystyle\int \mathfrak{M}\,H\,du\right]\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{1}{H}\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} - \displaystyle\int \mathfrak{M}\,H\,dv\right]\dfrac{\partial X}{\partial v} + \mathfrak{M}\,X, \\ y_1 = -\dfrac{1}{H}\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial v} + \displaystyle\int \mathfrak{M}\,H\,du\right]\dfrac{\partial Y}{\partial u} + \dfrac{1}{H}\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} - \displaystyle\int \mathfrak{M}\,H\,dv\right]\dfrac{\partial Y}{\partial v} + \mathfrak{M}\,Y. \end{cases}$$

la fonction Φ étant définie par l'équation

$$(6)\quad -\frac{1}{H}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \int \mathfrak{M}\,H\,du\right]\frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{1}{H}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \int \mathfrak{M}\,H\,dv\right]\frac{\partial Z}{\partial v} + \mathfrak{M}\,Z = 0,$$

qui exprime que le plan moyen est le plan $z = 0$.

X, Y, Z, H, sont des fonctions connues des deux variables u et v qui fixent un rayon quelconque de (Γ). Si l'on adopte la représentation sphérique (2), l'équation (6) prend la forme

$$F\left(u, v, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) = 0,$$

et s'intègre par une quadrature.

Une fois la fonction Φ connue, les formules (5) donnent x_1 et y_1, et font connaître les congruences (Γ).

Pour avoir les surfaces (Σ) solutions de (1), il ne reste plus qu'à prendre les surfaces génératrices des congruences (Γ).

Leurs équations s'obtiennent immédiatement; ce sont :

$$(7)\quad \begin{cases} x = y_1, \\ y = -x_1, \\ z = \displaystyle\int p\,dx + q\,dy = \int p\,dy_1 - q\,dx_1 \end{cases}$$

[p et q ont les expressions (3)].

V. — Détermination explicite des surfaces (S) du n° III.

Nous allons appliquer maintenant les considérations générales du numéro précédent, à la détermination analytique des surfaces (S) définies au n° III.

Ces surfaces interviennent d'ailleurs dans d'autres questions de géométrie. Ainsi, G. Darboux [1] les a rencontrées comme surfaces (égales à leurs parallèles) susceptibles d'engendrer une famille de Lamé par mouvement hélicoïdal.

Leur équation, rappelée plus haut, peut s'écrire

$$(8) \qquad qx - py - h + \mathrm{K}\sqrt{1+p^2+q^2} = 0.$$

Ici

$$\mathcal{F}(p, q) = h - \mathrm{K}\sqrt{1+p^2+q^2},$$

et par suite

$$(9) \qquad \mathfrak{M} = \frac{h}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \mathrm{K}.$$

(9) prouve que l'enveloppée moyenne des congruences à surface moyenne plane (Γ), associées aux surfaces (S) solutions de (8), est une *sphère* de rayon K ayant pour centre le point de Oz de cote h.

Ainsi :

Les surfaces (S) *cherchées sont les surfaces génératrices des congruences à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne sphérique.*

Avec la représentation sphérique (2), indiquée au n° IV, on a

$$\mathfrak{M} = h\cos u - \mathrm{K},$$

et l'équation (6) devient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \int(h\cos u - \mathrm{K})\sin u\,du + (h\cos u - \mathrm{K})\cos u = 0;$$

d'où immédiatement, Φ et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = hv\sin u\cos u + \mathrm{U},$$

U étant une fonction arbitraire de u seul.

En remplaçant $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}$ par leurs expressions dans les équa-

[1] G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, p. 86.

tions (5), on obtient

$$x_1 = -U \sin v + h \operatorname{cotg} u \cos v - K \frac{\cos v + v \sin^2 u \sin v}{\sin u},$$

$$y_1 = U \cos v + h \operatorname{cotg} u \sin v - K \frac{\sin v - v \sin^2 u \cos v}{\sin u}.$$

Les équations définissant les surfaces (S) cherchées, sont les équations (7) où x_1 et y_1 ont les expressions ci-dessus.

L'intégration donnant z s'effectue sans difficulté; en tenant compte des expressions (3) de p et q, on trouve

$$z = v(K \cos u - h) - \int \operatorname{tang} u \, d(U).$$

Les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles (8), sont donc définies par les équations :

$$(10) \quad \begin{cases} x = U \cos v + h \operatorname{cotg} u \sin v - K \dfrac{\sin v - v \sin^2 u \cos v}{\sin u}, \\ y = U \sin v - h \operatorname{cotg} u \cos v + K \dfrac{\cos v + v \sin^2 u \sin v}{\sin u}, \\ z = v(K \cos u - h) - \displaystyle\int \operatorname{tang} U \, d(U); \end{cases}$$

où U est une fonction arbitraire de u.

Remarques. — Si dans les équations (10) on fait $h = 0$, on obtient les surfaces qui, *par rotation autour de* Oz, engendrent des volumes proportionnels aux aires. D'où ce résultat :

Les surfaces qui mises en rotation autour d'un axe, engendrent des volumes proportionnels aux aires, sont les surfaces génératrices des congruences à surface moyenne plane dont l'enveloppée moyenne est une sphère centrée dans le plan moyen.

Si $K = 0$, on a les surfaces *hélicoïdales* d'axe Oz; donc :

Les surfaces hélicoïdales d'axe Oz *sont les génératrices des congruences à surface moyenne plane et à enveloppée moyenne point.*

Enfin, si $h = K = 0$, on obtient les surfaces de révolution. Par suite :

Les surfaces de révolution sont les génératrices des con-

gruences à surface moyenne plane, ayant pour enveloppée moyenne un point du plan moyen.

Ces remarques seront utilisées dans la suite.

VI. — Hélicoïdes pseudo-sphériques et couples de sphères.

Toute surface peut être regardée (d'une triple infinité de façons) comme génératrice d'une congruence de Ribaucour à surface moyenne plane.

Les résultats qui terminent le numéro précédent, vont nous permettre d'établir, qu'en envisageant les hélicoïdes pseudo-sphériques à ce point de vue, il est possible de donner de ces surfaces une définition très simple, attachant à tout hélicoïde pseudo-sphérique un *couple de sphères*, et rendant géométriquement intuitifs certains résultats connus tels que, l'existence de trois types distincts d'hélicoïdes pseudo-sphériques ou la définition des hélicoïdes de Dini comme surfaces de Joachimsthal.

L'existence de trois types distincts d'hélicoïdes pseudo-sphériques (ou de surfaces pseudo-sphériques de révolution) est habituellement déduite de la comparaison des valeurs des constantes qui figurent dans les expressions que l'on a à intégrér pour obtenir ces surfaces. Il nous a semblé intéressant de montrer comment une introduction opportune de la géométrie peut rendre cette existence évidente.

Un intérêt de nature différente, est sans doute attaché au fait que, comme on le verra, une tranformation *réelle*, permet de passer d'un couple de sphères à une surface hélicoïdale *pseudo-sphérique*.

VII. — Relations entre une congruence à surface moyenne plane et sa génératrice.

Nous avons rappelé, au n° IV, la construction d'une congruence à surface moyenne plane (Γ) à partir de sa surface génératrice (S).

On obtient (Γ) en projetant orthogonalement chaque point M de (S) sur xOy, en faisant tourner la projection d'un angle droit autour de O, et en menant par le point m ainsi obtenu la parallèle (D) à la normale en M à (S).

K désignant la courbure totale de (S) au point M, γ l'angle aigu de la normale en M avec Oz, et ρ la distance mF (ou mF') du point central m aux foyers F, F′ portés par le rayon (D) de (Γ), on a la relation [1]

$$\frac{\rho}{\cos\gamma} = \sqrt{-\frac{1}{K}}. \tag{11}$$

La relation (11) montre que les congruences à développables *réelles* correspondent aux surfaces à courbure *négative*; les congruences à développables *imaginaires* correspondent aux surfaces à courbure *positive*. Nous n'insisterons pas davantage sur cette remarque, et nous supposerons dans la suite $K < 0$.

Nous avons vu d'autre part (n° V) que les hélicoïdes d'axe Oz sont caractérisés par ce fait que les congruences (Γ) correspondantes ont pour enveloppées moyennes les différents points de Oz.

A un point I de Oz correspondent les différents hélicoïdes de pas réduit $h = OI$.

Les surfaces de révolution autour de Oz, correspondent à $h = 0$ (I est en O).

VIII. — Surfaces associées.

Envisageons le point μ de la perpendiculaire en m au plan xOy, se projetant orthogonalement sur le rayon (D) de (Γ), en F.

On a évidemment

$$m\mu = \frac{mF}{\cos\gamma} = \frac{\rho}{\cos\gamma} = \sqrt{-\frac{1}{K}}. \tag{12}$$

Le lieu du point μ est une certaine surface (Σ), que [pour simplifier l'exposition] nous dirons *associée* à (S) [ou à (Γ)].

(12) montre qu'aux lignes de (S) le long desquelles la courbure totale est constante, correspondent les lignes de niveau (relatives à xOy) de la surface associée (Σ). En outre les sections par des plans passant par Oz se correspondent sur les deux surfaces, ainsi que les sections par les différents cylindres de révolution d'axe Oz.

L'introduction de (Σ) permet de transformer certains problèmes de recherche de familles de surfaces définies par une propriété de la courbure.

Ainsi par exemple, le problème de la recherche des surfaces (S)

---

[1] Voir un Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques* (*Congruences à surface moyenne plane et questions qui s'y rattachent*), novembre 1932.

admettant pour lignes de courbure constante (variable d'une ligne à l'autre) un système de courbes tracées sur des cylindres de révolution coaxiaux (axe Oz), revient à celui de la recherche des surfaces (S) admettant pour associées des surfaces de révolution autour de Oz.

De même, les surfaces (S) admettant pour lignes de courbure constante leurs sections par un faisceau de plans (d'axe Oz), sont celles qui admettent pour associées les conoïdes droits d'axe Oz.

Les surfaces pseudo-sphériques de courbure $K = -\frac{1}{a^2}$, sont celles qui admettent pour surface associée le plan parallèle à xOy de cote

$$d = \sqrt{-\frac{1}{K}} = a. \tag{13}$$

On conçoit que la remarque qui précède, relative à la transformation du problème de la détermination des surfaces (S), définies par une propriété de la courbure, puisse faciliter l'obtention, sinon de la famille complète des surfaces (S), du moins de solutions isolées ou de familles partielles de solutions.

C'est dans cet ordre d'idées que nous avons été conduit aux paragraphes suivants relatifs aux hélicoïdes pseudo-sphériques.

Il est clair que toute congruence à surface moyenne plane de révolution autour de Oz, admet une surface génératrice (S) pour laquelle la surface associée (Σ) est elle-même de révolution autour de Oz.

De toute congruence (Γ) à surface moyenne plane, de révolution autour de Oz, on peut donc déduire une surface (S), admettant pour lignes de courbure constante les sections de la surface par la famille des cylindres de révolution d'axe Oz.

Si l'enveloppée moyenne de (Γ) se réduit à un point, on a le cas banal où (S) est hélicoïdale (ou de révolution).

IX. — Surfaces pseudo-sphériques de révolution.

Nous avons vu au numéro précédent, que les surfaces pseudo-sphériques de courbure $K = -\frac{1}{a^2}$, sont les surfaces (S) admettant pour surface associée le plan $P(z = a)$.

Imposons aux congruences à surface moyenne plane (Γ) dont les (S) sont les génératrices, la condition supplémentaire d'avoir pour enveloppée moyenne le point I de Oz de cote $\overline{OI} = h$.

Nous obtiendrons ainsi les hélicoïdes pseudo-sphériques, de courbure $= -\frac{1}{a^2}$ et de pas réduit h.

On est facilement conduit à la construction des congruences (Γ) à surface moyenne plane ($z = 0$) admettant pour enveloppée moyenne le point I et pour surface associée le plan P précédemment défini, en envisageant d'abord le cas particulier où I est en O ($h = 0$), qui correspond aux formes *révolutives* des surfaces pseudo-sphériques.

Dans ce cas, la solution apparaît immédiatement.

Les congruences (Γ) *sont constituées par les tangentes communes à deux sphères* ÉGALES, σ *et* σ', *de rayon* ARBITRAIRE R, *centrées aux points de* Oz *de cotes* $+a$ *et* $-a$.

En se donnant analytiquement chaque rayon par les coordonnées x_1, y_1 du point m où il perce xOy, et par ses paramètres directeurs p, q, -1, qui se calculent au moyen de x_1, y_1, on pourra définir les surfaces pseudo-sphériques de révolution par les équations (7) du n° IV.

Si l'on néglige une translation parallèle à Oz, on voit qu'en dehors du paramètre a qui correspond à une homothétie, les surfaces pseudo-sphériques de révolution dépendent du seul paramètre de forme R.

La figure constituée par les deux sphères σ, σ' définissant (Γ), peut affecter trois formes géométriquement distinctes :

1° σ et σ' *ne se coupent pas* ($R < a$);
2° σ et σ' *se coupent* ($R > a$);
3° σ et σ' *sont tangentes* ($R = a$).

Aux trois cas précédents correspondent des formes déterminées pour (Γ), et par suite les formes correspondantes bien connues (*elliptique*, *hyperbolique*, *parabolique*), pour les surfaces pseudo-sphériques génératrices (S).

Aux rayons de (Γ) disposés suivant les génératrices du cylindre circonscrit à σ et σ' correspondent visiblement un ou plusieurs parallèles de rebroussement (de rayon a) sur (S).

Au cercle d'intersection de σ, σ', ou au cône circonscrit aux deux sphères, correspondent sur (S) des cercles de gorge (de rayon $\sqrt{R^2 - a^2}$), ou des points coniques situés sur Oz, les cônes tangents ayant un demi-angle au sommet α, complémentaire de celui du cône circonscrit $\left(\cos\alpha = \frac{R}{a}\right)$.

Les particularités que présentent les trois formes de surfaces pseudo-sphériques de révolution s'expliquent, comme on le voit, de la façon la plus simple, par la considération des congruences (Γ) correspondantes.

X. — Hélicoïdes pseudo-sphériques.

Le résultat obtenu au numéro précédent, relatif aux congruences à surface moyenne plane (Γ) attachées aux surfaces pseudo-sphériques de révolution, conduit naturellement à se demander si les congruences (Γ) attachées aux hélicoïdes pseudo-sphériques, ne seraient pas les congruences des *tangentes à deux sphères quelconques*.

Cette hypothèse, légitimée d'ailleurs par ce fait, qu'à une homothétie près, l'ensemble des couples de sphères dépend de *deux* paramètres tout comme l'ensemble des hélicoïdes pseudo-sphériques, se vérifie comme il suit.

Soient σ et σ' deux sphères quelconques, centrées sur Oz, et admettant le plan xOy pour plan radical.

Désignons par I le milieu de la ligne des centres $\omega\omega'$. La congruence (Γ) des tangentes aux deux sphères admet pour plan moyen xOy, et pour enveloppée moyenne le point I.

Soit (D) un rayon quelconque de (Γ), m le point où il perce le plan xOy, menons par m la parallèle (δ) à Oz. Le plan déterminé par (δ) et (D) coupe les deux sphères σ et σ' suivant deux cercles C et C', et les foyers portés par (D), F et F', sont les points où (D) touche C et C'.

Le point μ de la surface *associée* définie au n° VIII, est évidemment situé sur le rayon de C aboutissant en F.

En projection sur un plan issu de Oz parallèle au plan (Dδ) (que l'on peut supposer être le plan xOz), on a la figure 1.

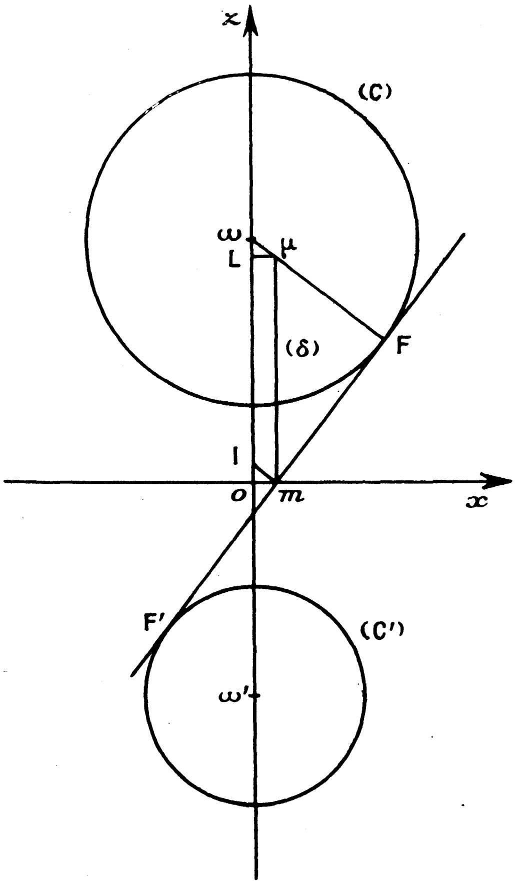
On lit sur cette figure (où L est la projection orthogonale de μ

sur Oz) que $\overline{L\omega} = \overline{OI}$, et que par suite

$$\overline{OL} = \overline{I\omega} = \frac{\overline{\omega'\omega}}{2} = \text{const.} \tag{14}$$

La surface *associée* est donc *un plan parallèle* à xOy $\left(\text{de cote } \frac{\overline{\omega'\omega}}{2}\right)$. Il résulte de là que la surface hélicoïde génératrice

Fig. 1.



de (Γ) est une surface à courbure totale constante négative

$$K = -\frac{1}{\overline{I\omega}^2} = -\frac{4}{\overline{\omega'\omega}^2}.$$

Le pas réduit de cette surface est, comme on sait,

$$h = \overline{\mathrm{OI}} = \frac{\rho^2 - \rho'^2}{2\,\overline{\omega'\omega}} = \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2}{2\,\overline{\omega'\omega}}$$

(ρ et ρ' sont les rayons de C et C'; R et R' ceux des sphères σ et σ').

En fixant ω' et ω, et en faisant varier R et R', on obtient ∞^2 congruences (Γ); les ∞^2 surfaces génératrices de ces congruences (qui se déterminent comme on l'a rappelé au numéro précédent, constituent *la totalité des hélicoïdes pseudo-sphériques de courbure déterminée* $\mathrm{K} = -\dfrac{1}{\overline{\omega'\omega}^2}$.

Ici, comme dans le cas des surfaces pseudo-sphériques de révolution, la considération des congruences (Γ), explique géométriquement l'existence des trois types connus de surfaces pseudo-sphériques hélicoïdales, qui correspondent aux cas où les deux sphères σ et σ' sont extérieures, sécantes ou tangentes.

Hélicoïdes de Dini. — Les hélicoïdes pseudo-sphériques pour lesquels les deux nappes focales des congruences (Γ) associées sont *deux sphères tangentes* σ et σ' ne sont autres que les *hélicoïdes de Dini*, engendrés comme l'on sait par le mouvement hélicoïdal d'une tractrice autour de son asymptote Oz.

Soit (S) l'helicoïde de Dini générateur de la congruence (Γ) des tangentes communes aux deux sphères σ, σ', tangentes en O. Envisageons la surface réglée (R) de (Γ) dont les génératrices (D) percent (xOy) en des points alignés sur une droite Ot issue de O. A cette surface réglée (R), correspond la section de (S) par le plan (π) issu de Oz, normal à Ot. F et F' étant les foyers situés sur (D), tous les triangles rectangles OFF' sont semblables, et admettent Ot pour médiane. Il en résulte que toutes les génératrices de (R) font le même angle avec Ot, donc aussi avec le plan (π).

Comme les normales à (S) le long de sa section par (π) sont parallèles aux génératrices de (R), (π) coupe (S) sous un angle constant et la section est par suite une *ligne de courbure* de (S).

On retrouve la propriété bien connue suivant laquelle les hélicoïdes pseudo-sphériques de Dini sont des surfaces de Joachimsthal.

XI. — Involutions biaxiales et transformations par polaires réciproques.

Dans le Mémoire déjà cité du *Bulletin des Sciences mathématiques*, j'ai montré que les congruences à surface moyenne plane (xOy) attachées à deux surfaces polaires réciproques par rapport au paraboloïde de révolution (π) [$2z = x^2 + y^2$] se correspondent dans l'involution définie par les formules

$$(15)\qquad x' = \frac{y}{z}, \qquad y' = -\frac{x}{z}, \qquad z' = -\frac{1}{z}.$$

L'involution I définie par les formules (15) est une involution *biaxiale*, à axes imaginaires conjugués [et conjugués par rapport à (π)], définis par les équations

$$(16)\qquad \begin{cases} z = i, & z = -i, \\ y = ix, & y = -ix. \end{cases}$$

Il existe donc un lien entre la polarité par rapport à (π) et l'involution biaxiale I, lien qui, moyennant une projectivité quelconque, peut être étendu à une polarité arbitraire et à une involution biaxiale dont les axes sont conjugués par rapport à la quadrique de transformation (supposée sans point double).

Les remarques qui suivent se rattachent à cette idée.

L'involution I fait se correspondre le plan de l'infini et le plan $z = 0$; elle transforme une surface de révolution quelconque autour de Oz en une surface analogue, et deux surfaces quelconques coupant chacun des deux plans précédents suivant la même courbe en deux nouvelles surfaces jouissant de la même propriété.

En particulier I transforme deux quadriques homothétiques, se coupant dans le plan $z = 0$, en deux quadriques analogues.

Il est clair que la polarité (π) transforme un hélicoïde quelconque d'axe Oz, en un hélicoïde de même axe et de pas *opposé*. Si l'on passe aux congruences à surface moyenne plane attachées aux hélicoïdes, et si l'on a égard à la fin du numéro VII, on voit que :

L'involution biaxiale I *transforme toute congruence à surface moyenne plane* (xOy), *admettant pour enveloppée* *moyenne un point ω de Oz, en une autre congruence du même type, le point ω étant remplacé par son symétrique ω′ par rapport au plan xOy.*

Malgré la symétrie des points ω, ω′, par rapport au plan xOy, les deux congruences ne sont généralement pas symétriques par rapport à ce plan. Si elles le sont, il en est de même (à une translation parallèle à Oz près) des hélicoïdes correspondants. On peut donc ramener la recherche des hélicoïdes d'axe Oz que la polarité (π) transforme en leurs symétriques, à la recherche des congruences à surface moyenne plane (xOy) et à enveloppée moyenne, point se transformant en leurs symétriques par rapport à xOy, congruences qui auront d'ailleurs obligatoirement pour nappes focales deux surfaces de révolution autour de Oz.

Pour donner un exemple, choisissons pour nappes focales d'une congruence (Γ) à surface moyenne plane, les deux quadriques homothétiques, de révolution autour de Oz,

$$(Q_1) \qquad x^2+y^2-a z^2+dz+c=0,$$
$$(Q_2) \qquad x^2+y^2+a z^2-e z+c=0.$$

Q_1 et Q_2 se coupent dans le plan xOy, ainsi qu'il le faut pour que ce plan soit le plan moyen de (Γ).

En outre, on vérifie sans peine que les plans moyens de (Γ) passent tous par le point de Oz de cote $h=-\dfrac{d+e}{4}$; de sorte que la surface génératrice de (Γ) est un hélicoïde $(\mathcal{H})$ de pas réduit h.

Les nappes focales de la congruence (Γ'), admettant pour surface génératrice l'hélicoïde $(\mathcal{H}')$ transformé de $(\mathcal{H})$ par rapport à (π), s'obtiennent en appliquant à Q_1 et Q_2 l'involution biaxiale I. Ce sont :

$$(Q'_1) \qquad x^2+y^2-c z^2-dz+a=0,$$
$$(Q'_2) \qquad x^2+y^2+c z^2-e z+a=0.$$

Pour que le couple (Q'_1, Q'_2) soit symétrique du couple (Q_1, Q_2) par rapport au plan xOy, il faut et il suffit, comme on le voit sans peine, que $c=a$.

Ainsi, les hélicoïdes générateurs des congruences admettant pour nappes focales les couples de quadriques (dépendant de trois paramètres)

$$(Q_1) \qquad x^2 + y^2 + a z^2 + d z + a = 0,$$
$$(Q_2) \qquad x^2 + y^2 + a z^2 + e z + a = 0,$$

se transforment, par polaires réciproques par rapport au paraboloïde (π), en leurs symétriques par rapport au plan xOy.

Si $a = 1$, et si (pour la réalité) d et e sont de signes contraires, Q_1 et Q_2 sont deux sphères (extérieures) admettant xOy pour plan radical.

Les ∞^2 hélicoïdes associés sont (à une homothétie près), comme nous l'avons vu plus haut, les différentes surfaces hélicoïdales pseudo-sphériques de type *elliptique*.

Il suffit d'introduire une homothétie arbitraire, pour pouvoir énoncer le résultat suivant :

Les hélicoïdes pseudo-sphériques de type elliptique peuvent être transformés en leurs symétriques par une transformation par polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution convenablement choisi.

Si, en même temps que $a = 1$, on a $d + e = 0$, les deux sphères Q_1 et Q_2 coïncident (dans leur ensemble) avec leurs transformées par l'involution I.

Les surfaces génératrices sont ici les surfaces pseudo-sphériques de révolution autour de Oz, de type elliptique, et l'on peut dire :

Toute surface pseudo-sphérique de révolution de type elliptique, peut être transformée en elle-même, par polaires réciproques, par rapport à un paraboloïde de révolution convenablement choisi.

XII. — Surfaces de révolution se transformant en elles-mêmes par rapport à (π).

Demandons-nous quelles sont, d'une façon générale, les surfaces de révolution autour de Oz, se transformant en elles-mêmes par polaires réciproques par rapport à (π).

Toute surface de révolution autour de Oz, (S), est la génératrice d'une congruence à surface moyenne plane (Γ), dont les nappes focales sont des surfaces de révolution, (Σ_1) et (Σ_2), symétriques par rapport au plan xOy.

Donnons-nous arbitrairement les deux nappes focales de (Γ) par les équations

$$(\Sigma_1) \qquad x^2 + y^2 = f(z),$$

$$(\Sigma_2) \qquad x^2 + y^2 = f(-z),$$

où f est une fonction à déterminer.

Pour que (S) se transforme en elle-même par rapport à (π) à une translation parallèle à Oz près, il faut et il suffit que l'involution biaxiale I, transforme l'une dans l'autre (Σ_1) et (Σ_2).

L'involution I transforme (Σ_2) en

$$(\Sigma'_2) \qquad x^2 + y^2 = z^2 f\left(\frac{1}{z}\right)$$

(Σ'_2) devant être identique à (Σ_1), on devra avoir

$$(16) \qquad z^2 f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z).$$

Il s'agit de déterminer les fonctions f satisfaisant à cette identité. On peut écrire (16)

$$\frac{1}{z} f(z) = z f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Si l'on pose

$$(17) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{z} f(z),$$

l'équation du problème peut s'écrire

$$(18) \qquad \Phi(z) = \Phi\left(\frac{1}{z}\right).$$

Toute fonction $\Phi(z)$ vérifiant (18), fournit une surface de révolution autour de Oz se transformant en elle-même par polaires réciproques par rapport au paraboloïde (π).

Cette surface s'obtient en prenant (par le procédé rappelé plus haut) la surface génératrice de la congruence dont les nappes focales ont [d'après (17)] les équations

$$x^2 + y^2 = z\,\Phi(z), \qquad x^2 + y^2 = -z\,\Phi(-z).$$

Il serait aisé de donner des exemples explicites.

Nous ferons observer en terminant ce paragraphe, que les méridiennes des surfaces de révolution qui viennent d'être déterminées, constituent la *totalité* des courbes se transformant en elles-mêmes par polaires réciproques par rapport à la parabole méridienne de (π).

Une homographie arbitraire donne les courbes se transformant en elles-mêmes dans une polarité par rapport à une conique quelconque.

Le problème de la détermination des courbes se transformant en elles-mêmes par une transformation par polaires réciproques par rapport à une conique, n'est pas nouveau (*voir* G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*). Nous avons tenu à présenter la solution qui précède à cause de son originalité.

XIII. — Involutions biaxiales à axes imaginaires conjugués.

Nous terminerons ce travail par une remarque relative aux involutions biaxiales à axes imaginaires conjugués.

Soient (d) et (D) les axes d'une involution biaxiale réelle I. Ces axes peuvent être réels ou imaginaires conjugués. Tout point de (d) ou de (D) est transformé en lui-même par I; et la congruence linéaire d'axes (d) et (D) est conservée droite par droite, ainsi que toute surface réglée de cette congruence.

Lorsque les axes (d) et (D) sont réels, la construction de la congruence linéaire invariante n'offre aucune difficulté.

Voyons comment on peut construire cette congruence lorsque (d) et (D) sont imaginaires conjugués.

Au moyen d'une projectivité (réelle), on peut toujours donner à (d) et (D), par rapport au système d'axes rectangulaires $Oxyz$, les positions définies par les équations (16) du numéro XI.

Envisageons dès lors le paraboloïde (π) d'équation $2z = x^2 + y^2$. Toute congruence à surface moyenne plane (xOy) se transformant en elle-même (les rayons se changeant les uns dans les autres), admet pour *génératrice* une surface (S), se transformant en elle-même par rapport à (π) *dans son ensemble*.

Pour la congruence linéaire d'axes (d) et (D), il se produit ceci de particulier, que la surface (S) génératrice se transforme en elle-même *point par point*. (S) est donc nécessairement confondue avec le paraboloïde (π) de transformation.

On voit dès lors comment on peut construire la congruence linéaire invariante d'axes (d) et (D).

Cette congruence admettant pour génératrice le paraboloïde (π), on l'obtient en projetant orthogonalement chaque point M de (π) sur xOy, en faisant tourner la projection d'un angle droit autour du point O (dans le plan xOy), et en menant par le point obtenu a parallèle à la normale en M à (π).