BULLETIN DE LA S. M. F.

GEORGES GIRAUD

Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 1-54
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PROBLÈMES DE VALEURS A LA FRONTIÈRE RELATIFS A CERTAINES DONNÉES DISCONTINUES;

PAR M. GEORGES GIRAUD.

Introduction.

Si l'on étudie les solutions des équations du type elliptique dans le cas où toutes les données sont continues (les coefficients des dérivées secondes dans l'équation étant, en outre, höldériens), on est amené à employer des transformations conduisant à des équations dont les coefficients et le second membre ne sont pas tous continus. Cela justifie une étude consacrée spécialement à ces cas.

Dans les pages qui suivent, on montre d'abord que la méthode de Fredholm est applicable aux noyaux de certaines catégories dont la généralité dépasse sensiblement ce qui est utile pour les problèmes visés. Ensuite on s'attache aux équations du type elliptique dans lesquelles les coefficients des dérivées secondes sont höldériens, mais les autres coefficients et le second membre peuvent être discontinus aux points d'une variété à $m - 1$ dimensions (m étant le nombre des dimensions de l'espace); on suppose seulement que si l'on multiplie chacun de ces coefficients et le second membre par la puissance $1 - k$ de la distance à cette variété ($0 < k \leq 1$), les produits sont bornés. On trouvera plus loin (II, 1, 2) la manière précise de poser dans ce cas les problèmes qui généralisent ceux de Neumann et de Dirichlet. L'introduction de ces discontinuités se montre spécialement avantageuse pour la résolution du problème de Dirichlet (III, 10, note). Enfin on indique des conditions suffisantes pour que les dérivées premières ou secondes de la solution d'un problème de Dirichlet soient höldériennes avec un exposant donné h inférieur à un (Chap. IV); pour le théorème qui concerne les dérivées premières, les discontinuités s'introduisent encore d'une façon, pour ainsi dire, spontanée. On trouvera aussi là (IV, 3) une généralisation de résultats antérieurs, relatifs à des extrema atteints sur la frontière [1].

Sommaire.

I. Application de la théorie de Fredholm à certains noyaux. — II. Opérations du type elliptique dont les coefficients admettent certaines discontinuités. — III. Solution élémentaire principale. Problèmes de valeurs à la frontière. — IV. Dérivées premières et secondes aux points de la frontière dans le problème de Dirichlet.

CHAPITRE I.

APPLICATION DE LA THÉORIE DE FREDHOLM A CERTAINS NOYAUX.

1. **Lemme.** — *Soient* R *et h deux variables positives, et soit α une constante inférieure à l'entier positif m. Nous considérons l'intégrale*

$$I = \int^{(m)} (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 + h^2)^{(\alpha - m)/2}\, dV,$$

étendue à la région

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 < R^2;$$

dV désigne l'élément de domaine $d(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Je dis que si h est borné, I *admet la limitation* [2]

$$I = \begin{cases} O(R^\alpha) & (0 < \alpha < m), \\ O[\log(1 + R/h)] & (\alpha = 0), \\ O(h^\alpha) & (\alpha < 0). \end{cases}$$

---

[1] Pour abréger, on désignera par des lettres certains travaux antérieurs, ainsi qu'il suit : *a*, *Ann. sc. Éc. Norm.*, t. 43, 1926, p. 1 à 128; *b*, *id.*, t. 46, 1929, p. 131 à 245; *c*, *Bull. Sc. math.*, t. 53, 1929, p. 367 à 395; *d*, *Ann. scient. Éc. Norm.* t. 47, 1930, p. 197 à 266; *e*, *id.*, t. 49, 1932, p. 1 à 104 et 245 à 308; *f*, *Journ. de Math.*, t. 11, 1932, p. 389 à 416; *g*, *Bull. Sc. math.*, t. 56, 1932, p. 248 à 272, 281 à 312, 316 à 352, *Errata*, p. 384.

[2] On emploie le symbole O de Landau (*g*, I, 9, note; *voir* au même endroit la définition du symbole o).

En effet, si nous introduisons les coordonnées polaires, il vient

$$I\,\Gamma(m/2) = 2\pi^{m/2}\int_0^R (\rho^2 + h^2)^{(\alpha-m)/2}\rho^{m-1}\,d\rho.$$

Si $0 < \alpha < m$, la dernière intégrale écrite est moindre que

$$\int_0^R \rho^{\alpha-1}\,d\rho = \frac{R^\alpha}{\alpha}.$$

Si $\alpha \leqq 0$, elle est égale à

$$h^\alpha \int_0^{R/h} (1 + t^2)^{(\alpha-m)/2} t^{m-1}\,dt.$$

Si α est nul et $R \geqq h$, c'est moindre que

$$\int_0^1 (1 + t^2)^{-m/2} t^{m-1}\,dt + \int_1^{R/h} \frac{dt}{t};$$

si $\alpha = 0$ et $R < h$, c'est moindre que

$$\int_0^{R/h} t^{m-1}\,dt.$$

Si $\alpha < 0$, c'est moindre que

$$h^\alpha \int_0^{+\infty} (1 + t^2)^{(\alpha-m)/2} t^{m-1}\,dt = h^\alpha \frac{\Gamma(m/2)\Gamma(-\alpha/2)}{\Gamma[(m-\alpha)/2]}.$$

Dans tous les cas, l'énoncé est donc vérifié.

2. **Lemme.** — *Soit* D *le domaine des points* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *tels qu'en posant*

$$r^2 = \sum_{n=m-p+1}^{m} a_n^2, \qquad r > 0 \qquad (1 \leqq p \leqq m),$$

on ait $r < R$, R *étant donné, et tels qu'en outre* $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p})$ *soit dans un domaine borné donné* (si $p = m$, cette dernière partie de l'énoncé disparaît). *Soient* α, β, γ *des constantes telles qu'on ait*

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0, \qquad 0 < \gamma < p, \qquad \alpha + \gamma > p, \qquad \beta + \gamma > p.$$

Soient G(X, A) *et* H(Ξ, A) *des fonctions continues quand* A [1] *appartient à* D, *et* X *et* Ξ *à des domaines bornés donnés*, A *étant en outre différent de* X *et de* Ξ *et non situé sur* $r = 0$. *On suppose enfin qu'on a* [2]

$$G(X, A) = O[L^{\alpha-m}(X, A)], \qquad H(\Xi, A) = O[L^{\beta-m}(\Xi, A)].$$

Soit alors

$$K(X, \Xi) = \int_D^{(m)} G(X, A) H(\Xi, A) r^{\gamma-p}\, dV_A;$$

je dis que K *admet la limitation suivante :*

$$K(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{\alpha+\beta+\gamma-m-p}(X, \Xi)] & (\alpha+\beta+\gamma < m+p), \\ O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)] & (\alpha+\beta+\gamma = m+p), \\ O(1) & (\alpha+\beta+\gamma > m+p); \end{cases}$$

L_0 *est une constante donnée, supérieure à la borne supérieure de* L(X, Ξ). *Dans le dernier cas*, K *reste continu même si* X *et* Ξ *viennent à se confondre.*

Commençons par le cas où $\alpha+\beta+\gamma > m+p$. Soit η un nombre positif; l'intégrale étendue à la partie D_1 de D telle qu'on ait à la fois $L(X, A) \geqq \eta$, $L(\Xi, A) \geqq \eta$ vaut

$$O\left[\eta^{\alpha+\beta-2m} \int_D^{(m)} r^{\gamma-p}\, dV\right],$$

c'est-à-dire qu'elle est bornée; elle est, en outre, continue quels que soient X et Ξ. Soit D′ la partie restante de D. Dans la partie D_2 de D′ où l'on a $r \geqq L(X, A)$, l'intégrale est

$$O\left[\int^{(m)} L^{\alpha+\gamma-p-m}(X, A) L^{\beta-m}(\Xi, A)\, dV_A\right];$$

si $L(X, A) \leqq L(\Xi, A)$, ce qui entraîne $L(X, A) < \eta$, l'intégrale vaut donc

$$O\left[\int^{(m)} L^{\alpha+\beta+\gamma-p-2m}(X, A)\, dV_A\right] = O(\eta^{\alpha+\beta+\gamma-p-m});$$

---

[1] Nous désignons par une majuscule A le point $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, dont les coordonnées sont notées par la minuscule correspondante.

[2] L(X, A) désigne la distance des deux points.

même résultat si $L(\Xi, A) < L(X, A)$. Même résultat aussi dans la partie D_3 de D' où l'on a $L(X, A) > r \geqq L(\Xi, A)$. Dans la partie restante de D', r est inférieur à η. Dans la région D_4 de $D' - D_2 - D_3$ où l'on a $L(\Xi, A) \geqq L(X, A)$, l'intégrale étudiée vaut

$$O\left[\int^{(m)} r^{\gamma-p} L^{\alpha+\beta-2m}(X, A)\, dV_A\right],$$

intégrale qui existe certainement, car $\alpha + \beta > m + p - \gamma > m$. Si $\alpha + \beta < m + p$, intégrons d'abord par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}$, procédé légitime puisque la fonction intégrée est positive; le premier lemme (§ 1) nous donne

$$O\left[\int^{(p)} r^{\gamma-p} \rho^{\alpha+\beta-m-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right],$$

avec

$$\rho^2 = \sum_{n=m-p+1}^{m} (x_n - a_n)^2, \qquad \rho > 0,$$

de sorte que $\rho \leqq L(X, A) < \eta$; dans la région où l'on a $r \geqq \rho$, la dernière intégrale est moindre que

$$\int^{(p)} \rho^{\alpha+\beta+\gamma-m-2p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m),$$

étendue à la région $\rho < \eta$, ce qui fait $O(\eta^{\alpha+\beta+\gamma-m-p})$; même résultat dans la région où l'on a $r < \rho$. Si $\alpha + \beta \geqq m + p$, nous pouvons, dans cette fin de calcul, remplacer $\alpha + \beta$ par une constante positive plus petite, comprise entre $m + p - \gamma$ et $m + p$. On raisonnerait de même dans la partie restante de D', où l'on a $r < L(\Xi, A) < L(X, A)$. On voit ainsi que l'intégrale étendue à D' est $O(\eta^{\lambda+\gamma-m-p})$, avec $\lambda = \alpha + \beta$ si $\alpha + \beta < m + p$ et $m + p - \gamma < \lambda < m + p$ dans le cas contraire. Cela nous montre non seulement que l'intégrale étendue à D est bornée (il suffit pour cela de donner à η une valeur particulière quelconque), mais encore qu'elle est continue : en effet, K est la limite pour $\eta \to 0$ de l'intégrale étendue à D_1; or, cette dernière est continue, et la convergence est uniforme, d'après la limitation de l'intégrale étendue à D'.

Soit maintenant $\alpha + \beta + \gamma \leqq m + p$.

Dans la partie D_1 de D où l'on a $r \geqq L(X, A)$, l'intégrale est

$$O\left[\int^{(m)} L^{\alpha+\gamma-p-m}(X, A) L^{\beta-m}(\Xi, A)\, dV_A\right],$$

et cette expression a une limitation du type de l'énoncé (*b*, II, th. 3, p. 150). De même dans la partie D_2 de D où l'on a

$$L(X, A) > r \geqq L(\Xi, A).$$

Dans la partie restante de D, on a à la fois

$$(1) \qquad r < L(X, A), \qquad r < L(\Xi, A).$$

Soit D_3 la région où l'on a, en outre, $L(X, A) \leqq \frac{L(X, \Xi)}{2}$, et soit I_3 l'intégrale étendue à cette région :

$$I_3 = O\left[L^{\beta-m}(X, \Xi) \int^{(m)} L^{\alpha-m}(X, A) r^{\gamma-p}\, dV_A\right],$$

d'où, d'après le lemme précédent (§ 1),

$$I_3 = \begin{cases} O\left[L^{\beta-m}(X, \Xi) \int^{(p)} \rho^{\alpha-p} r^{\gamma-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right] & (\alpha < p), \\ O\left[L^{\beta-m}(X, \Xi) \int^{(p)} r^{\gamma-p} \log \frac{L(X, \Xi)}{\rho}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right] & (\alpha = p), \\ O\left[L^{\alpha+\beta-m-p}(X, \Xi) \int^{(p)} r^{\gamma-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right] & (\alpha > p); \end{cases}$$

si $\alpha = p$, on observera, pour avoir la limitation ci-dessus, que

$$1 + \frac{\sqrt{L^2(X, \Xi) - 4\rho^2}}{2\rho} \leqq \frac{L(X, \Xi)}{\rho\sqrt{2}}.$$

Dans les cas $\alpha < p$ et $\alpha > p$, on en conclut sans peine que I_3 a une limitation du type de l'énoncé (si $\alpha < p$, on sépare D_3 en deux, selon qu'on a $r \leqq \rho$ ou $r > \rho$). Si $\alpha = p$, nous allons évaluer l'intégrale

$$\int^{(p)} r^{\gamma-p} \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m),$$

étendue à toute la région $r < \frac{L(X, \Xi)}{2}$, qui comprend D_3 et où la fonction intégrée est positive, car si D_3 existe, en posant

$$l^2 = \sum_{n=m-p+1}^{m} x_m^2, \qquad l > 0,$$

on a

$$l \leqq r + \rho < 2L(X, A) \leqq L(X, \Xi),$$

ce qui entraîne, quand A varie dans la nouvelle région,

$$\rho \leqq r + l < 3L(X, \Xi)/2.$$

Exprimons $a_{m-p+1}, \ldots, a_m$ en fonctions de p autres variables, l'une de celles-ci étant r, et les $p - 1$ autres $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ étant telles que les $\frac{a_n}{r}$ $(m - p < n \leqq m)$ soient indépendants de r. Notre intégrale devient

$$\int^{(p)} r^{\gamma-1} \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho} \varphi(c_1, \ldots, c_{p-1}) \, d(r, c_1, \ldots, c_{p-1}) \qquad (\varphi > 0),$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int^{(p-1)} \frac{r^\gamma - l^\gamma}{\gamma} \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho} \varphi(c_1, \ldots, c_{p-1}) \, d(c_1, \ldots, c_{p-1})$$
$$+ \int^{(p)} \frac{r^\gamma - l^\gamma}{\gamma\rho} \frac{\partial\rho}{\partial r} \varphi(c_1, \ldots, c_{p-1}) \, d(r, c_1, \ldots, c_{p-1}).$$

Du reste,

$$\rho^2 = r^2 + l^2 - 2lr\cos\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \rho \geqq |r - l\cos\theta|;$$

en observant que θ est indépendant de r, on en tire

$$\frac{\partial\rho}{\partial r} = \frac{r - l\cos\theta}{\rho}, \qquad \left|\frac{\partial\rho}{\partial r}\right| \leqq 1.$$

D'autre part on a, pour $\gamma \leqq 1$,

$$(2) \qquad \left|\frac{r^\gamma - l^\gamma}{r - l}\right| \leqq r^{\gamma-1},$$

car, si $r > l$, cela équivaut à

$$r^\gamma - l^\gamma \leqq r^\gamma - l r^{\gamma-1},$$

ce qui est (l'égalité a lieu seulement si $\gamma = 1$), et la vérification se fait aussi pour $r < l$. Donc, si $\gamma \leqq 1$,

$$\left| \frac{r^\gamma - l^\gamma}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial r} \right| \leqq r^{\gamma-1} \frac{|r-l|}{\rho} \leqq r^{\gamma-1};$$

l'intégrale d'ordre p est donc, en valeur absolue, inférieure à

$$\frac{L^\gamma(X, \Xi)}{2^\gamma \gamma^2} \int^{(p-1)} \varphi(c_1, \ldots, c_{p-1})\, d(c_1, \ldots, c_{p-1}) = O[L^\gamma(X, \Xi)].$$

Si $\gamma > 1$, on écrit, d'après le théorème des accroissements finis,

$$r^\gamma - l^\gamma = (r-l)\, O[L^{\gamma-1}(X, \Xi)],$$

par suite,

$$\left| \frac{r^\gamma - l^\gamma}{\gamma\rho} \frac{\partial\rho}{\partial r} \right| = O[L^{\gamma-1}(X, \Xi)],$$

de sorte que l'intégrale d'ordre p est encore $O[L^\gamma(X, \Xi)]$. Dans l'intégrale d'ordre $p-1$, il y a, en réalité, deux termes, dans l'un desquels $r = 0$ (ce terme étant à changer de signe), et dans l'autre $r = \frac{L(X, \Xi)}{2}$; si $r = 0$, on a $l = \rho$, et

$$\left| \frac{r^\gamma - l^\gamma}{\gamma} \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho} \right| \leqq \frac{2^\gamma}{e\gamma^2} L^\gamma(X, \Xi),$$

le second membre représentant le maximum du premier quand ρ varie; ce terme est donc bien $O[L^\gamma(X, \Xi)]$; si $r = \frac{L(X, \Xi)}{2}$ et $\gamma \geqq 1$, on écrit

$$\left| \frac{r^\gamma - l^\gamma}{\gamma} \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho} \right| = \left| \frac{r^\gamma - l^\gamma}{r-l} \frac{r-l}{\gamma\rho} \rho \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho} \right| = O[L^\gamma(X, \Xi)].$$

ce qui redonne la même limitation pour l'intégrale; si $\gamma < 1$, on a

$$\left| \frac{r^\gamma - l^\gamma}{\gamma} \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho} \right| < r^{\gamma-1} \frac{\rho}{\gamma} \log \frac{2L(X, \Xi)}{\rho} = O[L^\gamma(X, \Xi)],$$

d'où toujours le même résultat. Ainsi, même dans le cas où $\alpha = p$, on a

$$I_3 = O[L^{\alpha+\beta+\gamma-m-p}(X, \Xi)].$$

On a évidemment la même limitation pour l'intégrale I_4 étendue au domaine D_4, où l'on a, outre (1),

$$L(X, A) > L(X, \Xi)/2 \geqq L(\Xi, A).$$

Soit maintenant D_5 le domaine où l'on a, outre (1),

$$L(X, \Xi)/2 < L(X, A) \leqq 2L(X, \Xi), \qquad L(\Xi, A) > L(X, \Xi)/2,$$

et soit I_5 l'intégrale correspondante. On a

$$\begin{aligned} I_5 &= O\left[L^{\alpha+\beta-2m}(X, \Xi)\int^{(m)} r^{\gamma-p}\, dV\right] \\ &= O\left[L^{\alpha+\beta-m-p}(X, \Xi)\int^{(p)} r^{\gamma-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right], \end{aligned}$$

ou encore $O[L^{\alpha+\beta+\gamma-m-p}(X, \Xi)]$, puisque $r < 2L(X, \Xi)$.

Soit enfin D_6 le domaine où, outre (1), on a

$$(3) \qquad L(X, A) > 2L(X, \Xi);$$

on a alors aussi

$$L(\Xi, A) > L(X, A) - L(X, \Xi) > L(X, A)/2,$$

de sorte que l'intégrale I_6 correspondante est

$$I_6 = O\left[\int^{(m)} L^{\alpha+\beta-2m}(X, A)\, r^{\gamma-p}\, dV_A\right].$$

Soient X_1 le point $(x_1, \ldots, x_{m-p}, 0, \ldots, 0)$ et A_1 le point $(a_1, \ldots, a_{m-p}, 0, \ldots, 0)$. Considérons le domaine où, outre (1) et (3), on a

$$r \leqq L(X, \Xi), \qquad L(X_1, A_1) \leqq 2L(X, \Xi);$$

l'intégrale étendue à ce domaine vaut

$$\begin{aligned} &O\left[L^{\alpha+\beta-2m}(X, \Xi)\int^{(m)} r^{\gamma-p}\, dV\right] \\ &= O\left[L^{\alpha+\beta-m-p}(X, \Xi)\int^{(p)} r^{\gamma-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right] \\ &= O[L^{\alpha+\beta+\gamma-m-p}(X, \Xi)]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la partie de D_6 où l'on a

$$r \leqq L(X, \Xi), \qquad L(X_1, A_1) > 2L(X, \Xi);$$

l'intégrale étendue à ce domaine peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\mathrm{O}\left[\int^{(m)} \mathrm{L}^{\alpha+\beta-2m}(\mathrm{X}_1, \mathrm{A}_1)\, r^{\gamma-p}\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\right] \\ &= \mathrm{O}\left[\mathrm{L}^{\alpha+\beta-m-p}(\mathrm{X}, \Xi)\int^{(p)} r^{\gamma-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right] \\ &= \mathrm{O}[\mathrm{L}^{\alpha+\beta+\gamma-m-p}(\mathrm{X}, \Xi)]. \end{aligned}$$

Étendons maintenant l'intégrale au domaine où l'on a, outre (1) et (3),

$$r > \mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi), \qquad \rho \leqq \mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi);$$

comme

$$\mathrm{L}^2(\mathrm{X}_1, \mathrm{A}_1) = \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mathrm{A}) - \rho^2 > 4\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \Xi) - \rho^2,$$

on voit que

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}_1, \mathrm{A}_1) > \sqrt{3}\,\mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi);$$

l'intégrale se limite donc comme dans le cas précédent, puisque l'intégrale $\int^{(p)} r^{\gamma-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)$ est encore $\mathrm{O}[\mathrm{L}^\gamma(\mathrm{X}, \Xi)]$.
Il reste la partie de D_6, où l'on a

$$r > \mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi), \qquad \rho > \mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi),$$

dans ce domaine, l'intégrale s'écrit (§ 1)

$$\mathrm{O}\left[\int^{(p)} \rho^{\alpha+\beta-m-p}\, r^{\gamma-p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right],$$

si $\rho \geqq r$, cela fait

$$\begin{aligned} &\mathrm{O}\left[\int^{(p)} r^{\alpha+\beta+\gamma-m-2p}\, d(a_{m-p+1}, \ldots, a_m)\right] \\ &= \begin{cases} \mathrm{O}[\mathrm{L}^{\alpha+\beta+\gamma-m-p}(\mathrm{X}, \Xi)] & (\alpha+\beta+\gamma < m+p); \\ \mathrm{O}[\log \mathrm{L}_0 - \log \mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi)] & (\alpha+\beta+\gamma = m+p); \end{cases} \end{aligned}$$

le résultat est évidemment le même dans la partie où l'on a $\rho < r$. On a donc encore pour I_6 une limitation du type de l'énoncé.

Notre lemme est ainsi entièrement démontré.

3. **Théorème.** — *Soit* D *un domaine borné quelconque, contenant des points de la variété* $a_n = 0$ $(m - p < n \leqq m)$, *ou ayant de tels points sur sa frontière. Soit* $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ *une fonction continue quand* X *et* A *sont situés dans* D *et différents l'un de l'autre,* $r(\mathrm{A})$ *étant en outre non nul* (r a la même

signification qu'au paragraphe précédent); *on suppose que*

$$G(X, A) = O[L^{\alpha-m}(X, A)\, r^{\beta-p}(A)] \qquad (0 < \alpha \leqq m,\ 0 < \beta \leqq p,\ \alpha + \beta > p).$$

Alors la théorie de Fredholm est applicable à l'équation en u

$$u(X) - \lambda \int_{D}^{(m)} G(X, A)\, u(A)\, dV_A = \varphi(X),$$

où λ est un paramètre et φ une fonction donnée, bornée et continue (¹).

Si $\alpha = m$, il n'y a pas de difficulté, car si l'on pose

$$G(X, A) = K(X, A)\, r^{\beta-p}(A),$$

on voit que (avec une notation évidente par elle-même)

$$G\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \end{pmatrix} (r_1 r_2 \ldots r_n)^{\beta-p},$$

donc

$$\left| \lambda^n \int^{(m)} \int^{(m)} \cdots \int^{(m)} G\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \end{pmatrix} dV_{A_1}\, dV_{A_2} \ldots dV_{A_n} \right|$$
$$\leqq \left(M \lambda \sqrt{n} \int^{(m)} r^{\beta-p}\, dV \right)^n,$$

M étant la borne supérieure de $|K|$. La série nommée fonction déterminante de Fredholm converge donc pour toute valeur de λ. On démontre de même la convergence de la série qui forme le numérateur de l'expression du noyau résolvant découverte par Fredholm [ce numérateur est le produit de $r^{\beta-p}(A)$ par une fonction bornée], et par suite la théorie s'applique. Dans cette conclusion, on doit entendre que la théorie s'applique aussi à l'équation associée

$$v(X) - \lambda \int_{D}^{(m)} G(A, X)\, v(A)\, dV_A = \text{fonction donnée};$$

pour celle-ci, le numérateur du noyau résolvant est le produit de $r^{\beta-p}(X)$ par une fonction bornée.

Si maintenant $\alpha < m$, remarquons que le noyau itéré de rang n est un noyau analogue à G, avec la même valeur pour β,

---

(¹) M. Maurice Gevrey a mentionné le cas où $\alpha = p = 1$ (*Journal de Math.*, t. IX, 1930, spécialement n° 9, p. 41).

mais α est remplacé par $n(\alpha+\beta-p)-\beta+p$, pourvu que cette constante soit inférieure à m : si cette constante est égale à m, le noyau itéré vaut $O[\log L_0 - \log L(X, A)]\, r^{\beta-p}(A)$; enfin si cette constante dépasse m, c'est-à-dire si

$$n > (m+\beta-p)/(\alpha+\beta-p),$$

α doit être remplacé par m pour le noyau itéré, qui est continu quels que soient X et A pour $r(A) \neq 0$. La théorie s'applique donc toujours à certains noyaux itérés, et par suite, elle s'applique au noyau G lui-même [1].

4. **Lemme.** — *Soit* D *un domaine borné quelconque. On suppose qu'à l'intérieur de* D *ou sur sa frontière se trouvent des points appartenant à des variétés* $M_n (n = 1, 2, \ldots, q)$ *qui sont des ensembles fermés définis de la façon suivante : les coordonnées des points de* M_n *sont des fonctions de* $m-\mu_n$ *paramètres* $(0 < \mu_n \leqq m$; *si* $\mu_n = m$, M_n *se réduit à un point*), *et les dérivées de ces fonctions existent et remplissent une condition de Hölder* (*le champ de variation des paramètres étant borné pour chaque* M_n); *les déterminants fonctionnels d'ordre* $m-\mu_n$ *ne s'annulent nulle part simultanément, et l'on suppose aussi que les* M_n *peuvent être prolongés au delà de leurs frontières, quand ils en ont, sans cesser de satisfaire aux autres hypothèses. Soient* $r_n(A)$ *les plus courtes distances de* A *aux* M_n. *Soient* $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$ *des constantes remplissant les conditions*

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0; \qquad 0 < \gamma_n < \mu_n, \qquad \alpha + \gamma_n > \mu_n,$$
$$\beta + \gamma_n > \mu_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, q).$$

On considère deux fonctions $G(X, A)$ *et* $H(\Xi, A)$ *continues quand* A *varie dans* D, *et* X *et* Ξ *dans des domaines bornés donnés,* A *étant en outre différent de* X *et de* Ξ *et non situé sur l'ensemble des* M_n; *on suppose que*

$$G(X, A) = O[L^{\alpha-m}(X, A)],$$
$$H(\Xi, A) = O\left[L^{\beta-m}(\Xi, A) \sum_{n=1}^{q} r_n^{\gamma_n-\mu_n}(A)\right].$$

---

(1) Édouard Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, 2e éd., Chap. XXXI, section II, p. 391 et suiv.

Soit alors

$$K(X, \Xi) = \int_D^{(m)} G(X, A) H(\Xi, A)\, dV_A$$

et soit δ la plus petite des constantes positives $\alpha + \beta + \gamma_n - \mu_n$; je dis que

$$K(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{\delta - m}(X, \Xi)] & \text{si } \delta < m, \\ O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)] & \text{si } \delta = m, \\ O(1) & \text{si } \delta > m; \end{cases}$$

L_0 *est une constante supérieure à la borne supérieure de* $L(X, \Xi)$. *Dans le dernier cas, la fonction* K *est continue même si* X *et* Ξ *viennent se confondre.*

L'énoncé n'interdit pas aux M_n d'avoir des points communs; en particulier, ils peuvent avoir deux à deux des régions communes.

Soit M une de nos variétés M_n, et soit μ la valeur correspondante de μ_n. Tout d'abord, on peut étendre le champ de variation de $t_1, t_2, \ldots, t_{m-\mu}$, les dérivées des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$ continuant de remplir des conditions de Hölder dans le champ étendu. Soit P un point fixe de M, et soient

$$c_{\alpha,\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu,\ \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

les cosinus directeurs de μ directions, formant avec les cosinus directeurs des tangentes aux courbes t_γ variable ($\gamma = 1, 2, \ldots, m - \mu$) passant par P un déterminant non nul. Si nous supposons que les paramètres sont tous nuls en P (cela ne diminue pas la généralité), et si

$$x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{m-\mu}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

est la représentation paramétrique de M, les équations

$$x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{m-\mu}) + \sum_{\alpha=1}^{\mu} c_{\alpha,k} t_{m-\mu+\alpha} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

définissent une correspondance entre les deux systèmes de variables, et cette correspondance est biuniforme dans un domaine contenant P à son intérieur; les dérivées des variables d'un système par rapport à celles de l'autre existent et sont höldériennes; les paramètres t_n ($n > m - \mu$) sont nuls sur M. Chaque point de la variété M donnée (non étendue) étant intérieur à une telle région, la variété M entière, frontière comprise, peut être recouverte par un nombre fini de telles régions. On peut même aller un peu plus loin : on peut prendre pour la région contenant P une hypersphère de centre P dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et choisir un nombre fini de ces hypersphères de façon que les hypersphères concentriques de rayons moitiés suffisent à recouvrir tout M. Cette variété M sera alors considérée comme décomposée en autant de variétés que nous avons utilisé d'hypersphères, chaque variété nouvelle étant contenue dans l'hypersphère concentrique à une des hypersphères employées, avec un rayon moitié. Nous ferons de même pour toutes les variétés données et, changeant la notation, ce sont les variétés nouvelles que nous désignerons maintenant par M_n; les hypothèses restent satisfaites après cette transformation.

$H(\Xi, A)$ peut être considéré comme la somme de plusieurs fonctions de la façon suivante. Soit N une constante telle qu'on ait partout

$$|H(\Xi, A)| < NL^{\beta-m}(\Xi, A)\sum_{n=1}^{q} r_n^{\gamma_n-\mu_n}(A).$$

Nous considérons la fonction H_1 égale à H aux points où

$$|H| < NL^{\beta-m}(\Xi, A)r_1^{\gamma_1-\mu_1}(A);$$

si l'on a

$$H \geqq NL^{\beta-m}(\Xi, A)r_1^{\gamma_1-\mu_1}(A) \qquad \text{ou} \qquad H \leqq -NL^{\beta-m}(\Xi, A)r_1^{\gamma_1-\mu_1}(A).$$

nous prenons H_1 égal au second membre de celle des inégalités qui est satisfaite. Si nous avons déjà défini les H_n pour $n \leqq p < q$, nous définirons maintenant H_{p+1} de la façon suivante : si

$$\left| H - \sum_{n=1}^{p} H_n \right| < NL^{\beta-m}(\Xi, A)r^{\gamma_{p+1}-\mu_{p+1}}(A),$$

on prend

$$H_{p+1} = H - \sum_{n=1}^{p} H_n;$$

si l'inégalité ci-dessus n'est pas remplie, on prend H_{p+1} égal au produit du second membre par 1 ou par — 1, selon que

$$H - \sum_{n=1}^{p} H_n$$

est positif ou négatif.

Je dis qu'on a identiquement

$$H = \sum_{n=1}^{q} H_n.$$

En effet on a, quels que soient Ξ et A,

$$|H - H_1| < NL^{\beta - m}(\Xi, A) \sum_{n=2}^{q} r_n^{\gamma_n - \mu_n}(A),$$

car l'inégalité contraire ne pourrait avoir lieu que si

$$|H| > NL^{\beta - m}(\Xi, A) r_1^{\gamma - \mu_1}(A),$$

puisque autrement $H_1 = H$; mais, dans ce cas, puisque H et H_1 sont de même signe, on aurait

$$|H| = |H_1| + |H - H_1| > NL^{\beta - m}(\Xi, A) \sum_{n=1}^{q} r_n^{\gamma_n - \mu_n}(A),$$

ce qui n'est pas. On passe de là à $H - H_1 - H_2$, et ainsi de suite jusqu'à la relation annoncée.

On a donc

$$K(X, \Xi) = \sum_{n=1}^{q} \int_D^{(m)} G(X, A) H_n(\Xi, A)\, dV_A.$$

Nous sommes ainsi ramenés à démontrer que chaque terme du second membre a la limitation annoncée; cela revient à nous placer dans le cas où $q = 1$, ce qui permet de supprimer les indices des lettres M, H, r. Dans une hypersphère S, notre changement de variables est valable, et notre limitation a lieu (§ 2); hors de S, on a

$$H(\Xi, A) = O[L^{\beta - m}(\Xi, A)],$$

car r est supérieur à un minimum positif; la limitation a donc lieu. Le lemme est établi.

5. **Théorème.** — *Conservons aux lettres* D *et* M_n ($n = 1, 2, \ldots, q$) *le même sens que ci-dessus* (§ 4). *Soient* α *et* β_n *des constantes telles qu'on ait*

$$0 < \alpha \leqq m, \qquad 0 < \beta_n \leqq \mu_n, \qquad \alpha + \beta_n > \mu_n.$$

Considérons une fonction G(X, A), *continue quand* X *et* A *appartiennent à* D *et sont différents, et quand en outre* A *n'appartient à aucun des* M_n; *on suppose que*

$$G(X, A) = O\left[L^{\alpha-m}(X, A)\sum_{n=1}^{q} r_n^{\beta_n-\mu_n}(A)\right].$$

Alors la théorie de Fredholm s'applique à l'équation en u,

$$u(X) - \lambda \int_D^{(m)} G(X, A)\,u(A)\,dV_A = \text{fonction donnée},$$

ce qui implique qu'elle est aussi valable pour l'équation associée.

Même démonstration qu'au paragraphe 3.

6. **Théorème.** — *Soient* X *et* A *des points d'un domaine borné* D *à* n *dimensions; soient, d'autre part,* Y *et* B *des points d'un domaine borné* S *à* $m - 1$ *dimensions. On considère le système d'équations*

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &u(X) - \lambda \int_D^{(m)} G_1(X, A)\,u(A)\,dV_A \\ &\qquad - \lambda \int_S^{(m-1)} G_2(X, B)\,\sigma(B)\,dS_B = f(X), \\ &v(Y) - \lambda \int_D^{(m)} G_3(Y, A)\,u(A)\,dV_A \\ &\qquad - \lambda \int_S^{(m-1)} G_4(Y, B)\,\sigma(B)\,dS_B = \varphi(Y), \end{aligned}\right.$$

où les inconnues sont les fonctions $u(X)$ *et* $v(Y)$, *qui dépendent* *respectivement de m et de $m-1$ variables. Les fonctions données* G_1 *et* G_4 *présentent, la première dans* D *et l'autre dans* S, *des singularités du type de celles du paragraphe* 5 (*les constantes α, β_n et μ_n n'étant pas nécessairement les mêmes pour les deux fonctions*); *la fonction donnée* $G_3(Y, A)$ *est du type* $O\left[\sum_{n=1}^{q} r_n^{\beta_n-\mu_n}(A)\right]$, *les constantes β_n et μ_n étant les mêmes que pour* G_1; *la fonction donnée* $G_2(X, B)$ *a la limitation analogue,* B *étant le point qui figure dans la limitation et les constantes β_n et μ_n étant les mêmes que pour* G_4; *enfin, les fonctions données f et φ sont supposées continues et bornées. On peut affirmer alors que la théorie de Fredholm s'applique à ce système d'équations.*

On peut faire voir d'abord que, par itérations suffisamment répétées, notre système est remplacé par un autre du même type (sauf que les sous-noyaux sont des polynomes en λ), où les exposants de $L(X, A)$ dans la limitation de G_1, de $L(Y, B)$ dans la limitation de G_4, sont remplacés par zéro; c'est immédiat en appliquant le paragraphe 4 aux formules d'itération. Or, en raisonnant comme dans un Mémoire antérieur (*f*, I, 1), on voit immédiatement que, pour le système itéré, les séries de Fredholm peuvent être formées et qu'elles sont convergentes; la théorie de Fredholm s'applique donc.

7. **Théorème.** — *Si* S *est la frontière du domaine borné* D *de l'espace à m dimensions, et si* S *peut être recouvert par un nombre fini de domaines tels que chaque point de* S *soit intérieur à au moins l'un d'entre eux et dans chacun desquels les coordonnées d'un point variable de* S *sont des fonctions continues de $m-1$ paramètres, pourvues de dérivées höldériennes et dont les jacobiens ne s'annulent simultanément nulle part (aucun contact n'ayant lieu non plus entre régions différentes de* S), *le système* (4), *où les sous-noyaux ont toujours les mêmes types de limitation, est encore de ceux auxquels la théorie de Fredholm s'applique.*

La démonstration est immédiate (*f*, I, 6).

CHAPITRE II.

OPÉRATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE DONT LES COEFFICIENTS ADMETTENT CERTAINES DISCONTINUITÉS.

1. Définition des opérations considérées. — Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné de l'espace à m dimensions ($m \geqq 2$); on suppose que sa frontière $\mathfrak{S}$ remplit les conditions déjà indiquées (I, 7). Soit $\mathfrak{M}$ un ensemble fini de variétés à $m-1$ dimensions, appartenant à $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$, et satisfaisant aux hypothèses indiquées un peu plus haut (I, 4, variétés M_n). On désigne par $r(X)$ la distance de X à $\mathfrak{M}$.

Nous considérons l'opération du type elliptique

$$(1) \qquad \mathfrak{F}u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{x_\alpha} + cu$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha};\ a_{\alpha,\alpha} > 0).$$

On suppose que les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent dans $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$ une condition de Hölder avec l'exposant h ($0 < h \leqq 1$); de plus les inégalités qui caractérisent le type elliptique sont satisfaites dans $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$. On suppose que les b_α et c sont continus en tout point de $\mathcal{D}+\mathfrak{S}-\mathfrak{M}$ et valent $O(r^{k-1})$ ($0 < k \leqq 1$). Aux points de $\mathcal{D}-\mathfrak{M}$, l'opération $\mathfrak{F}$ sera définie par (1) si les dérivées secondes de u existent et sont continues; plus généralement l'opération $\mathfrak{F}$ sera supposée définie en ces points de la façon indiquée dans un autre travail (g, I, 2), et l'on supposera que la fonction u est susceptible de cette opération.

Aux points de $\mathfrak{S}+\mathfrak{M}$, il n'y a pas lieu de considérer l'opération $\mathfrak{F}$ (on peut d'ailleurs, si l'on veut, faire porter par $\mathfrak{S}$ une partie quelconque de $\mathfrak{M}$, et $\mathfrak{M}$ peut même comprendre la totalité de $\mathfrak{S}$).

2. Types de problèmes. — Soit $f(X)$ une fonction continue en tout point de $\mathcal{D}+\mathfrak{S}-\mathfrak{M}$ et valant $O(r^{k-1})$. Nous disons que la fonction u est une *solution régulière dans $\mathcal{D}$ de l'équation*

$$(2) \qquad \mathfrak{F}u = f$$

si cette équation est satisfaite en tout point de $\mathcal{D}-\mathfrak{M}$, et si en outre u et ses dérivées sont continus en tout point de $\mathcal{D}$.

Dans les problèmes que nous considérerons, on exige que la fonction u soit continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et qu'elle soit dans $\mathcal{D}$ une solution régulière de l'équation (2). A cela on joint une condition à la frontière.

Dans le problème de Neumann, on se donne deux fonctions $\psi(Y)$ et $\varphi(Y)$ continues (¹) d'un point de $\mathcal{S}$. A l'aide de la fonction ψ, on définit comme dans les travaux antérieurs (g, I, 10) l'opération $\Theta u(Y)$ qui, dans le cas où les dérivées de u sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, se réduit à

$$\Theta u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \varpi_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \psi u,$$

expression où les ϖ_α sont les cosinus directeurs de la normale extérieure. La condition imposée à u sur la frontière est

$$\Theta u = \varphi. \tag{3}$$

Dans le problème de Dirichlet, nous nous donnons une seule fonction φ continue d'un point de $\mathcal{S}$, et la condition imposée est

$$u = \varphi \quad \text{sur} \quad \mathcal{S}. \tag{4}$$

On peut aussi considérer des problèmes mixtes, où une partie de $\mathcal{S}$ porte une donnée de Neumann et la partie restante une donnée de Dirichlet; on suppose que $\mathcal{S}$ n'est pas d'un seul tenant, et que la distance des deux parties précédentes n'est pas nulle. Nous ne nous occuperons pas ici de ces problèmes.

3. **Solution élémentaire.** — On dit qu'une fonction $F(X, \Xi)$ est une solution élémentaire pour l'opération $\mathcal{F}$ dans le domaine $\mathcal{D}$ si :

(¹) On pourrait aussi considérer le cas où les fonctions ψ et φ du problème de Neumann, ou bien la fonction φ du problème de Dirichlet, présentent certaines discontinuités sur $\mathcal{S}$; dans le cas des sauts brusques, on obtient des résultats analogues à ceux qui sont bien connus pour les fonctions harmoniques de deux variables. Pour ne pas allonger cet article, cette étude en est exclue. De même on ne considère pas le cas où c et le second membre sont en outre discontinus sur une variété $\mathfrak{M}'$ à $m - 2$ dimensions; cette variété devrait en core remplir les hypothèses déjà vues (I, 4) et être sans point commun avec $\mathcal{S}$; si r' est la distance à $\mathfrak{M}'$, c et le second membre devraient valoir $O(r^{k-1} + r'^{j-2})$ $(0 < j \leqq 2)$ (*Comptes rendus des séances de la Société mathématique*, 9 novembre 1932). M. Leon Lichtenstein a déjà considéré, dans le cas de deux variables, certains problèmes rentrant dans la classe ici étudiée (*Encyklopädie*, II C 12, p. 1286).

1° Le point Ξ appartenant à $\mathcal{D}$, F est, relativement à X, une solution régulière dans $\mathcal{D}-\Xi$ de l'équation

$$\mathcal{F}\,\mathrm{F}=0.$$

2° X tendant vers Ξ, on a

$$\mathrm{F}(\mathrm{X},\Xi)=[1+o(1)]\,\mathrm{H}(\mathrm{X},\Xi),$$

où H est la fonction déjà employée maintes fois (par exemple *g*, II, 3), c'est-à-dire que, si $\mathrm{F}_1(r)$ est la solution élémentaire principale pour $\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}-g^2u$ ($g=$ constante positive), on pose

$$\mathrm{H}(\mathrm{X},\Xi)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}(\Xi)}}\,\mathrm{F}_1\Big[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}\mathrm{A}_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)}\Big];$$

on rappelle que D désigne ici le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$, et que les $\mathrm{A}_{\alpha,\beta}$ sont définis par les identités

$$\Sigma_\gamma a_{\alpha,\gamma}\mathrm{A}_{\beta,\gamma}=\begin{cases}0 & (\alpha\neq\beta),\\ 1 & (\alpha=\beta).\end{cases}$$

4. Lemme. — *Soit* M *une variété bornée à* $m-\mu$ *dimensions, remplissant les hypothèses déjà indiquées* (I, 4); *soit* k *une constante telle qu'on ait* $0<k\leqq\mu$, *et soit* (pour un instant) $r(\mathrm{X})$ *la distance de* X *à* M. *Si la mesure d'un domaine* D *est assez petite, l'intégrale* $\int_{\mathrm{D}}^{(m)} r^{k-\mu}\,d\mathrm{V}$ *est aussi petite qu'on veut.*

Commençons par recouvrir M par un nombre fini d'hypersphères D_1, D_2, ..., D_n, telles que d'une part tout point de M appartienne à une hypersphère concentrique à l'un des D_λ et de rayon moitié, et que d'autre part, dans chaque D_λ, on puisse introduire de nouvelles variables t_1, t_2, ..., t_m, de façon que l'ensemble des variétés $t_\alpha=0$ $(m-\mu<\alpha\leqq m)$ correspondant aux D_λ contienne tout M; nous faisons en sorte que les fonctions qui définissent le changement de variables aient leurs dérivées höldériennes dans le D_λ correspondant, et que le jacobien soit partout positif (I, 4).

Hors des D_λ, r reste supérieur à un minimum positif δ, de sorte que, si la mesure de D est η, on a

$$\int_{D-D_1-\ldots-D_n}^{(m)} r^{k-\mu}\,dV < \eta\,\delta^{k-\mu}.$$

Plaçons-nous maintenant dans un des D_λ, par exemple dans D_1. La distance r est $O\left(\sqrt{t_{m-\mu+1}^2+\ldots+t_m^2}\right)$, ou bien elle a l'expression analogue relative à un des autres domaines D_λ qui ont en commun avec D_1 le point où l'on évalue r. La partie d'intégrale correspondant à la région DD_1 commune à D et à D_1 est donc moindre qu'une certaine combinaison linéaire de l'intégrale

$$\int_{DD_1}^{(m)} (t_{m-\mu+1}^2+\ldots+t_m^2)^{(k-\mu)/2}\,d(t_1,\ldots,t_m),$$

étendue à la même région, et des intégrales analogues étendues aux autres DD_λ; il en est donc de même de la partie de l'intégrale considérée qui correspond à $D(D_1+\ldots+D_n)$. Dans les régions partielles

$$t_{m-\mu+1}^2+\ldots+t_m^2<\rho^2 \qquad (\rho>0),$$

cette combinaison linéaire d'intégrales vaut évidement $O(\rho^k)$; dans la région restante, elle vaut $O(\eta\,\rho^{k-\mu})$.

On a donc, en introduisant certaines constantes positives A et B,

$$\int_{D}^{(m)} r^{k-\mu}\,dV < \eta\,\delta^{k-\mu}+A\,\eta\rho^{k-\mu}+B\rho^k.$$

Le second membre est minimum pour

$$\rho^\mu=\frac{\mu-k}{k}\,\frac{A\,\eta}{B},$$

et ce minimum est $O\left(\eta^{\frac{k}{\mu}}\right)$ quand $\eta\to 0$; le lemme en résulte.

5. **Cas particulier.** — *Si* D *est une hypersphère variable dont le rayon* R *reste borné, on a*

$$\int_{D}^{(m)} r^{k-\mu}\,dV = O(R^{m+k-\mu}).$$

Si l'on a au centre de l'hypersphère $r\geqq 2R$, la proposition se vérifie, car on a dans toute l'hypersphère $r^{k-\mu}\leqq R^{k-\mu}$.

Pour achever la démonstration, nous pouvons nous borner au cas où l'on a $R < l$, l désignant une longueur telle que toute hypersphère de rayon $3l$ et dont le centre est situé sur M, soit entièrement intérieure à un des domaines D_λ. Or puisqu'on a $r < 2R$ au centre de D, D est entièrement intérieur à une hypersphère de rayon 3 R dont le centre est sur M, et par suite D fait entièrement partie d'un domaine D_λ. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_m$ les paramètres qui correspondent à ce domaine D_λ; notre hypersphère de rayon 3R est intérieure à un domaine

$$(5)\qquad (t_1 - t'_1)^2 + \ldots + (t_{m-\mu} - t'_{m-\mu})^2 + t^2_{m-\mu+1} + \ldots + t^2_m < AR^2,$$

où A est indépendant de R; d'autre part on a, tout au moins au centre de D,

$$(6)\qquad r > B\sqrt{t^2_{m-\mu+1} + \ldots + t^2_m} = B\rho,$$

où B est une constante positive; si cette inégalité (6) n'a pas lieu dans tout D, on peut partager D en régions telles qu'une inégalité analogue à (6) ait lieu pour les paramètres d'un autre domaine D_λ, et, relativement à ces paramètres, chacune de ces régions est intérieure au champ défini par une inégalité analogue à (5); il suffit de voir ce qui arrive pour chacune de ces régions. Or on trouve, en intégrant dans l'une d'elles,

$$\int^{(m)} r^{k-\mu}\, dV = O\left[R^{m-\mu}\int^{(\mu)} \rho^{k-\mu}\, d(t_{m-\mu+1}, \ldots, t_m)\right] = O(R^{m+k-\mu}).$$

C. Q. F. D.

6. **Lemme.** — *Soit* M *la même variété que ci-dessus; soient* k *et* λ *des constantes*

$$0 < \lambda \leqq m, \qquad 0 < k \leqq \mu, \qquad \lambda + k > \mu.$$

Soit D *un domaine variable; si la mesure de* D *est assez petite, je dis que l'intégrale*

$$\int_D^{(m)} L^{\lambda-m}(X, A)\, r^{k-\mu}(A)\, dV_A$$

reste aussi voisine de zéro qu'on veut quand X *varie.*

Il suffit évidemment de faire la démonstration pour le cas où D reste dans la région bornée définie par $r < 1$.

Admettons d'abord que **M** soit une région bornée de

$$x_\alpha = 0 \qquad (\alpha = m - \mu + 1, \ldots, m).$$

Posons

$$\int_{\mathrm{D}}^{(m)} r^{k-\mu}\, d\mathrm{V} = s;$$

il suffit (§ 4) de prouver que l'intégrale considérée est aussi petite qu'on veut si s est assez petit.

Soit l une longueur positive quelconque. Dans la partie de D telle qu'on ait $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \geqq l$, on a

$$\int^{(m)} \mathrm{L}^{\lambda-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, r^{k-\mu}(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} < s l^{\lambda-\mu}.$$

Dans la partie de la région restante où l'on a

$$a_{m-\mu+1}^2 + \ldots + a_m^2 \geqq \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mathrm{A}),$$

on trouve (b, I, note de la page 138), en observant que r est au moins égal à $\sqrt{a_{m-\mu+1}^2 + \ldots + a_m^2}$,

$$\int^{(m)} \mathrm{L}^{\lambda-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, r^{k-\mu}(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} < \int^{(m)} \mathrm{L}^{\lambda+k-\mu-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} = \mathrm{O}(l^{\lambda+k-\mu}).$$

Enfin dans la région

$$\sqrt{a_{m-\mu+1}^2 + \ldots + a_m^2} < \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) < l,$$

il suffit de reprendre au Chapitre I, paragraphe 2, l'évaluation de l'intégrale I_3, pour obtenir un résultat $\mathrm{O}(l^{\lambda+k-\mu})$.

Ainsi il existe un nombre positif a tel qu'on ait

$$\int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{L}^{\lambda-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, r^{k-\mu}(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} < a l^{\lambda+k-\mu} + s l^{\lambda-m}.$$

Le second membre est minimum pour

$$l^{m+k-\mu} = \frac{(m-\lambda)s}{(\lambda+k-\mu)a},$$

et le minimum est $\mathrm{O}\left[s^{(\lambda+k-\mu)/(m+k-\mu)}\right]$, de sorte que notre proposition se vérifie.

Si la variété M est la plus générale de notre hypothèse, des changements de variables permettent de retrouver le même résultat.

7. Revenons à l'opération $\mathcal{F}u$ (§ 1).

Théorème. — *Dès que la mesure d'un domaine* D *compris dans* $\mathcal{D}$ *est assez petite :*

1° *Il existe dans* D *une solution élémentaire* (§ 3);

2° *Cette solution élémentaire peut être choisie de façon à être partout positive* (quand X est différent de Ξ).

Soit $\mathcal{F}^\star$ l'opération déduite de $\mathcal{F}$ en remplaçant les b_α par zéro et c par une constante négative $-g^2 (g > 0)$. Nous pouvons prolonger cette opération $\mathcal{F}^\star$ dans tout l'espace, de façon que les b_α soient partout nuls, et c partout constant négatif; quant aux $a_{\alpha,\beta}$, ils seront bornés dans tout l'espace et rempliront partout une condition de Hölder, et leur déterminant sera partout supérieur à une constante positive. L'opération $\mathcal{F}^\star$ admet alors une solution élémentaire principale $G^\star(X, \Xi)$ (g, II, 9), et celle-ci est partout positive et satisfait dans $\mathcal{D}$ à une inégalité

$$G^\star(X, \Xi) > \begin{cases} 3\sigma L^{2-m}(X, \Xi) & (m > 2), \\ 3\sigma[\log L_0 - \log L(X, \Xi)] & (m = 2); \end{cases}$$

σ est une constante positive et L_0 est une longueur quelconque supérieure au diamètre de $\mathcal{D}$ [borne supérieure de $L(X, \Xi)$ quand X et Ξ varient dans $\mathcal{D}$].

Posons, en faisant porter l'opération sur le premier point,

$$\mathcal{F} G^\star(X, \Xi) = K(X, \Xi) = K^{(1)}(X, \Xi),$$

c'est-à-dire

$$K(X, \Xi) = \Sigma_\alpha b_\alpha(X) \frac{\partial G^\star}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) + [c(X) + g^2] G^\star(X, \Xi);$$

on voit que, dans $\mathcal{D}$,

$$K(X, \Xi) = O[r^{k-1}(X) L^{1-m}(X, \Xi)].$$

Posons ensuite

$$K^{(n+1)}(X, \Xi) = \int_D^{(m)} K^{(n)}(X, A) K(A, \Xi) \, dV_A;$$

on a

$$K^{(n+1)}(X, \Xi) = \begin{cases} O[r^{k-1}(X) L^{nk+1-m}(X, \Xi)] & (nk < m-1), \\ r^{k-1}(X) O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)] & (nk = m-1), \\ O[r^{k-1}(X)] & (nk > m-1). \end{cases}$$

Dès que la mesure de D est assez petite, l'intégrale

$$\int_D^{(m)} |K(A, \Xi)|\, dV_A$$

est inférieure à un nombre fixe inférieur à un (§ 5); on en conclut que la série

$$F(X, \Xi) = G^*(X, \Xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_D^{(m)} G^*(X, A)\, K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A$$

converge pour $X \neq \Xi$ (en supposant que les deux points appartiennent à D) et représente une solution élémentaire pour l'opération $\mathcal{F}$ (même raisonnement que dans le mémoire *g*, I, **14**).

On va prouver qu'en outre F est positif si la mesure de D est assez petite. Si λ est un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$, une intégration dans le domaine $L(X, A) < \lambda L(X, \Xi)$ donne (§ 5, **6**)

$$\int^{(m)} G^*(X, A)\, r^{k-1}(A)\, dV_A = O[\lambda^{k+1} L^{k+1}(X, \Xi)] \qquad (m > 2),$$

d'où, puisque $L(\Xi, A) > L(X, \Xi)/2$,

$$\int^{(m)} G^*(X, A) \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A = O[\lambda^{k+1} L^{k+2-m}(X, \Xi)] \qquad (k < 1);$$

si λ est assez petit, ceci est moindre que $\sigma L^{2-m}(X, \Xi)$. Nous choisissons ainsi λ et nous le laissons fixe. En posant

$$\int_D^{(m)} r^{k-1}\, dV = s,$$

et en intégrant dans la partie de D telle qu'on ait $L(X, A) \geqq \lambda L(X, \Xi)$, on trouve (§ **6**)

$$\int^{(m)} G^*(X, A) \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A = O[s^{k/(k+m-1)} \lambda^{2-m} L^{2-m}(X, \Xi)],$$

ce qui est inférieur à $\sigma L^{2-m}(X, \Xi)$ si s est assez petit. On a donc bien alors

$$F(X, \Xi) > \sigma L^{2-m}(X, \Xi) > 0 \qquad (m > 2),$$

et le résultat se retrouve sans peine pour $m = 2$. Le théorème est démontré.

8. **Lemme.** — *Dans un domaine borné* D *contenant la variété* M *du paragraphe* 4, *soit* $G(X, A)$ *une fonction continue de* X *et de* A, *et continûment dérivable par rapport aux* x_α *quand* X *n'est pas en* A, *et telle que*

$$G(X, A) = O[L^{\lambda-m}(X, A)], \qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = O[L^{\lambda-m-1}(X, A)]$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ 0 < \lambda < \mu);$$

soit d'autre part $\rho(A)$ *une fonction mesurable valant*

$$O[r^{k-\mu}(A)] \qquad (\mu - \lambda < k \leqq \mu,\ k \leqq \mu - \lambda + 1).$$

On peut affirmer alors que la fonction

$$F(X) = \int_D^{(m)} G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A$$

remplit dans D *une condition de Hölder avec l'exposant* $\lambda + k - \mu$ *si* $\lambda + k < \mu + 1$; *si* $\lambda + k = \mu + 1$, *on peut affirmer que*

$$F(X) - F(Y) = L(X, Y)\,O[\log L_0 - \log L(X, Y)],$$

où L_0 *est supérieur au diamètre de* D.

Si l'on désigne par D_1 la partie de D définie par $L(X, A) \leqq 2\,L(X, Y)$, on a d'abord (§ 5, 6)

$$\int_{D_1}^{(m)} G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A = O[L^{\lambda+k-\mu}(X, Y)],$$
$$\int_{D_1}^{(m)} G(Y, A)\,\rho(A)\,dV_A = O[L^{\lambda+k-\mu}(X, Y)].$$

Soit maintenant D_2 la partie de D définie par

$$r(A) \geqq L(X, A) > 2L(X, Y);$$

on a

$$\int_{D_2}^{(m)} [G(X, A) - G(Y, A)]\,\rho(A)\,dV_A$$
$$= O\left[L(X, Y)\int_{D_2}^{(m)} L^{\lambda+k-1-\mu-m}(X, A)\,dV_A\right]$$
$$= \begin{cases} O[L^{\lambda+k-\mu}(X, Y)] & \text{si } \lambda + k < \mu + 1, \\ L(X, Y)\,O[\log L_0 - \log L(X, Y)] & \text{si } \lambda + k = \mu + 1. \end{cases}$$

Dans la partie D_3 restante de D, on a

$$r(A) < L(X, A), \quad L(X, A) > 2L(X, Y);$$

par suite

$$\int_{D_3}^{(m)} [G(X, A) - G(Y, A)] \rho(A) \, dV_A$$
$$= O\left[L(X, Y) \int_{D_3}^{(m)} L^{\lambda-1-m}(X, A) \, r^{k-\mu}(A) \, dV_A\right],$$

ce qui a même limitation que pour D_2 (voir I, **2**, intégrale I_6).

Notre proposition est démontrée.

9. **Lemme.** — *Dans un domaine borné* D *contenant la variété* M *du paragraphe* **4**, *soit* G(X, A) *une fonction continue de* X *et de* A *pour* $X \neq A$ *et telle que*

$$G(X, A) = O[L^{\lambda-m}(X, A)] \qquad (0 < \lambda < \mu);$$

soit d'autre part $\rho(A)$ *une fonction mesurable valant*

$$O[r^{k-\mu}(A)] \qquad (0 < k \leqq \mu - \lambda).$$

On va prouver que la fonction

$$F(X) = \int_{D}^{(m)} G(X, A) \rho(A) \, dV_A$$

vaut $O(r^{\lambda+k-\mu})$ *si* $\lambda + k < \mu$, *et* $O(\log R - \log r)$ *si* $\lambda + k = \mu$ ($R =$ const. *supérieure à la borne supérieure de* r).

Nous pouvons nous ramener au cas particulier où l'on aurait en tout point de M $a_n = 0 (n = m - \mu + 1, \ldots, m)$. Posons

$$r_1 = \sqrt{(x_{m-\mu+1} - a_{m-\mu+1})^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2};$$

nous trouvons, en intégrant par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_{m-\mu}$,

$$F(X) = O\left(\int^{(\mu)} r_1^{\lambda-\mu} r^{k-\mu} \, dV\right),$$

d'où résulte la proposition énoncée.

10. **Théorème.** — *Si* F(X, Ξ) *est la fonction du paragraphe* 7, *et si* $\rho(\Xi)$ *est une fonction mesurable valant* $O(r^{k-1})$, *les dérivées*

de la fonction

$$u(\mathrm{X}) = -\int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}$$

existent et sont höldériennes dans D *avec l'exposant* k *si* k *est inférieur à un.*

En effet on peut écrire (§ 7)

$$u(\mathrm{X}) = -\int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{G}^{*}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\mu(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_{\mathrm{A}},$$

$$\mu(\mathrm{X}) = \rho(\mathrm{X}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathrm{D}}^{(m)} \mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\rho(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_{\mathrm{A}};$$

on voit que $\mu = \mathrm{O}(r^{k-1})$. Par suite

$$\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} = -\int_{\mathrm{D}}^{(m)} \frac{\partial \mathrm{G}^{*}}{\partial x_{\alpha}}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\mu(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_{\mathrm{A}},$$

et comme les $\dfrac{\partial^2 \mathrm{G}^{*}}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}$ existent et valent $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})]$, notre théorème en résulte (§ 8); on voit en outre ce qui arrive si $k = 1$.

11. **Lemme.** — *Supposons que la mesure du domaine* D *soit assez petite pour que le procédé du paragraphe* 7 *permette de former une solution élémentaire positive* $\mathrm{F}(\mathrm{X}, \Xi)$ *dans un domaine contenant* D *et sa frontière* S. *On suppose que la fonction* c *est négative ou nulle en tout point de* $\mathrm{D} - \mathcal{M}$. *On considère une fonction* $u(\mathrm{X})$ *continue dans* $\mathrm{D} + \mathrm{S}$ *et solution régulière dans le domaine* D *de l'équation* (2) *où* f *est positif ou nul en tout point de* $\mathrm{D} - \mathcal{M}$. *Alors la borne supérieure de* u *dans* D *n'est pas supérieure à la fois à zéro et à la borne supérieure de* u *sur* S.

Posons

$$\omega(\mathrm{X}) = \int_{\mathcal{M}}^{(m-1)} \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},$$

où $d\mathrm{S}$ est l'élément de $\mathcal{M}$ (si $\mathcal{M}$ a une frontière intérieure à D, cette variété est prolongée de façon à supprimer cette circonstance). Cette fonction ω est positive; c'est un potentiel de simple couche dont la densité remplit une condition de Hölder : donc de chaque côté de $\mathcal{M}$, les dérivées coïncident avec des fonctions continues même sur $\mathcal{M}$ (e, VII, 5; g, II, 17), et, au passage de $\mathcal{M}$, ces dérivées éprouvent le saut brusque bien connu (car si l'on considère la fonction analogue à ω obtenue en mettant G^* à la place de F, les dérivées de la différence des deux fonctions sont continues même sur $\mathcal{M}$). Or si notre énoncé est faux, si par conséquent la borne supérieure de u dans D est positive et supérieure à la borne supérieure de u sur S, la borne supérieure de $u - \eta\omega$ dans D est positive et supérieure à la borne supérieure de $u - \eta\omega$ sur S, pourvu seulement que la constante positive η soit assez petite. Cette borne supérieure sera atteinte par la fonction $u - \eta\omega$ en un point P de D; mais P ne peut appartenir à $D - \mathcal{M}$, à cause de l'équation

$$\mathcal{F}(u - \eta\omega) = f$$

(g, I, 7); P ne peut davantage appartenir à $\mathcal{M}$: car autrement, si l'on trace par P une droite Δ, non tangente à $\mathcal{M}$, sur laquelle on choisit un sens positif, la dérivée de la valeur prise par $u - \eta\omega$, considérée comme fonction de l'abscisse d'un point de Δ, aurait une limite positive ou nulle quand le point tendrait vers P par le côté négatif ou nul de Δ; mais alors, en vertu du saut brusque, cette dérivée aurait une limite positive du côté positif, ce qui fait une contradiction. Le lemme est établi.

12. **Lemme.** — *Si la mesure du domaine borné* D, *de frontière* S, *est assez petite, on peut trouver une fonction positive* $w(X)$ *et des fonctions* $\varphi_\alpha(X)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ *telles que le changement d'inconnues et de variables*

$$u = wv, \tag{7}$$

$$y_\alpha = \varphi_\alpha(X) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

soit biunivoque dans D + S *et change l'équation* (2) *en une équation analogue où les coefficients qui remplacent les* b_α *et* c *sont partout continus, celui qui remplace* c *étant en outre négatif; si le second membre* f *est continu,* v *est une solution de la nouvelle équation dans tout le domaine transformé de* D.

Si $\rho(X)$ est une fonction continue positive dans D + S, la mesure de ce champ étant assez petite pour que le procédé du paragraphe 7 permette de former une solution élémentaire positive $F(X, \Xi)$ dans un domaine contenant $D + S$, nous posons

$$w(X) = \int^{(m)} F(X, A)\rho(A)\, dV_A,$$

l'intégrale étant étendue à un domaine contenant $D + S$. Si l'on remplace alors u par vw et qu'on divise par w qui est positif, les coefficients $a_{\alpha,\beta}$ sont transportés sans changement à la nouvelle opération, relative à la fonction v; le coefficient b_α est remplacé par

$$b_\alpha + 2\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} \frac{\partial \log w}{\partial x_\beta},$$

qui est continu en tout point n'appartenant pas à $\mathfrak{M}$ et vaut $O(r^{k-1})$; enfin c est remplacé par la fonction continue négative $-\frac{\rho}{w}$, et f par $\frac{f}{w}$.

Nous pouvons donc, en changeant la notation, nous borner à ajouter à l'énoncé l'hypothèse que c est continu et négatif. Nous restreignons au besoin le domaine D, de façon que le procédé du paragraphe 7 permette de former, dans un domaine contenant $D + S$, une solution élémentaire positive $F(X, \Xi)$ pour la nouvelle opération. Posons

$$\varphi_\alpha(X) = x_\alpha + \int^{(m)} F(X, A)[b_\alpha(A) - \mu_\alpha(A)]\, dV_A \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où les μ_α sont des fonctions uniformément continues; l'intégrale est étendue à un domaine contenant $D + S$. Les dérivées des fonctions φ_α sont höldériennes avec l'exposant k si $k < 1$ (§ 10); de plus

$$\mathcal{F}\varphi_\alpha - c\varphi_\alpha = \mu_\alpha(X) - c(X)[\varphi_\alpha(X) - x_\alpha],$$

résultat continu. Prenons $\mu_\alpha = b_\alpha$ en tout point où l'on a $r > \eta$, et réservons-nous de choisir dans un instant la constante positive η; dans le reste du champ, on choisit μ_α de façon à respecter la continuité et à avoir la limitation

$$\mu_\alpha = O(\eta^{k-1});$$

si η est assez petit on aura partout

$$\left| \frac{\partial(\varphi_\alpha - x_\alpha)}{\partial x_\beta} \right| < \varepsilon \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m).$$

où ε est une constante inférieure à $\frac{1}{m}$. Alors le changement de variables (8) est biunivoque (démonstration incluse dans g, II, 17) et donne lieu à une nouvelle équation

$$(9) \qquad \mathcal{F}_1 v = f_1$$

conforme à notre énoncé.

Si f est continu, f_1 l'est aussi. Il nous reste à prouver qu'alors l'équation (9) est satisfaite même aux points de la variété $\mathfrak{M}_1$ transformée de $\mathfrak{M}$. Remarquons que les dérivées de v sont partout continues. Soit D_1 le domaine transformé de D, et soit S_1 sa frontière; en restreignant D_1 aussi peu que nous voulons, nous pouvons supposer que S_1 remplit les conditions auxquelles nous savons résoudre le problème de Neumann pour l'opération $\mathcal{F}_1$ (g, IV); nous définissons l'opération Θ en prenant pour ψ une fonction continue positive sur S_1. Soit v_1 la solution régulière dans D_1 de l'équation

$$\mathcal{F}_1 v_1 = f_1,$$

telle qu'on ait sur S_1

$$\Theta v_1 = \Theta v;$$

cette fonction existe et est unique (g, IV, 4). On a donc

$$\mathcal{F}_1(v - v_1) = 0 \quad \text{dans } D_1 - \mathfrak{M}_1, \qquad \Theta(v - v_1) = 0 \quad \text{sur } S_1.$$

La fonction $v - v_1$ ne peut, à cause de la seconde condition, atteindre un maximum positif ou un minimum négatif en un point de S_1. Un maximum positif ne peut donc être atteint que dans D_1, et par suite il est supérieur à la borne supérieure des valeurs prises par $v - v_1$ sur S_1; mais cela est impossible (§ 11). De même il n'y a pas de minimum négatif. Donc $v = v_1$ et le lemme est démontré.

13. **Théorème.** — *Si la fonction c est identiquement nulle dans $\mathcal{D}$, et la fonction f positive ou nulle dans $\mathcal{D} - \mathfrak{M}$, et si la solution u de l'équation* (2) *est régulière dans $\mathcal{D}$ et bornée supérieurement, sa borne supérieure* M *ne peut être atteinte dans $\mathcal{D}$, à moins que u ne soit constant dans $\mathcal{D}$* (ce qui entraîne $f = 0$).

Cette proposition a déjà été démontrée, à l'aide d'un raisonnement de M. Hopf, dans le cas où $\mathfrak{M}$ n'existe pas (g, I, 6). La démonstration revient à prouver que s'il existe dans $\mathcal{D}$ des points où $u = \mathrm{M}$, l'ensemble de ces points n'a pas de frontière dans $\mathcal{D}$. Pour la transporter au cas actuel, nous raisonnons par l'absurde et, si Q est un point-frontière de cet ensemble, nous décrivons une hypersphère de centre Q et de rayon assez petit pour qu'on puisse y pratiquer le changement de variables du paragraphe **12**, dont le résultat est de nous ramener au cas où les b_α sont continus. On reproduit les raisonnements du passage cité (g, I, **6**), en remplaçant $\mathcal{D}$ par cette hypersphère; on arrive encore à une contradiction (§ **11**).

14. Théorème. — *Si* $c \leqq 0$ *et* $f \geqq 0$ *dans* $\mathcal{D} - \mathcal{M}$, *la fonction* u, *solution régulière de l'équation* (2) *dans le domaine* $\mathcal{D}$, *ne peut atteindre en aucun point de* $\mathcal{D}$ *un maximum positif* M, *à moins d'être partout égale à* M (ce qui entraînerait $c = f = 0$).

Même démonstration que quand $\mathcal{M}$ n'existe pas (g, I, **7**).

15. Théorème. — *Si* $f \geqq 0$ *dans* $\mathcal{D} - \mathcal{M}$, *la fonction* u, *solution régulière de l'équation* (2) *dans le domaine* $\mathcal{D}$, *ne peut atteindre en aucun point de* $\mathcal{D}$ *un maximum nul, à moins d'être nulle dans tout* $\mathcal{D}$ (ce qui entraînerait $f = 0$).

On ne fait pas ici d'hypothèse particulière sur c. Raisonnant par l'absurde, nous supposons que l'ensemble des points où $u = 0$ admet un point-frontière Q dans $\mathcal{D}$; dans un domaine contenant Q et de mesure assez petite, nous appliquons le paragraphe **12** qui nous ramène au cas où les b_α et c sont continus; les raisonnements antérieurs (g, I, **8**) s'appliquent alors.

16. Théorème. — *Soient* M_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, m$) *des ensembles finis de variétés à* $m - \lambda$ *dimensions* (M_m *se réduit à un nombre fini de points*), *remplissant les hypothèses du Chapitre 1, paragraphe* 4 (en particulier chaque M_λ est un ensemble fermé de points); *les variétés* M_λ *sont intérieures à* $\mathcal{D}$. *Soit* u *une solution régulière dans* $\mathcal{D} - \mathrm{M}_1 - \ldots - \mathrm{M}_m$, *de l'équation* (2). *On suppose* u *continu en tout point de* $\mathcal{D} - \mathrm{M}_2 - \ldots - \mathrm{M}_m$; *par tout point de* P *de* $\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2 - \ldots - \mathrm{M}_m$, *on suppose que passe un axe* Δ, *tel que la dérivée des valeurs prises par* u *sur* Δ, *consi-*

dérées comme fonction de l'abscisse estimée suivant cet axe, ait une valeur déterminée même en P. *Si* $r_\lambda(X)$ *est la distance de* X *à* M_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, m)$, *on suppose que*

$$u = o\left(-\log r_2 + \sum_{\lambda=3}^{m} r_\lambda^{2-\lambda}\right) \quad \text{quand } r_2 r_3 \ldots r_m \to 0$$

(la dernière somme disparaît si $m = 2$). *Alors u est une solution régulière dans* $\mathcal{D}$ *de l'équation* (2).

Enfermons $M_1 + \ldots + M_m$ dans un domaine D de mesure assez petite pour que nous puissions appliquer la transformation du paragraphe **12**; la frontière S de D avec laquelle $M_1 + \ldots + M_m$ est sans point commun doit en outre satisfaire aux conditions dans lesquelles nous savons résoudre le problème de Neumann quand $\mathcal{M}$ n'existe pas (g, IV). Par changement d'inconnue et de variables (§ **12**), nous nous ramenons au cas où les b_α et c sont continus dans D + S, c étant en outre négatif. Nous prolongeons alors les coefficients de l'opération $\mathcal{F}$ hors de D + S, de manière que c soit inférieur dans tout l'espace à une constante négative, et que les autres conditions qui, jointes à celle-ci, assurent l'existence d'une solution élémentaire principale $G(X, \Xi)$ (g, II) soient remplies. Soit dS_λ la mesure d'un élément du domaine $M_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots, m-1)$; soient $P_q (q = 1, 2, \ldots, p)$ les points qui composent M_m; en prolongeant au besoin les $M_\lambda (\lambda < m)$ de façon que ces variétés soient sans frontières, nous posons

$$\omega(X) = \sum_{\lambda=1}^{m-1} \int_{M_\lambda}^{(m-\lambda)} G(X, A)\, dS_\lambda + \sum_{q=1}^{p} G(X, P_q).$$

Soient $\varpi_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ les cosinus directeurs de la normale à S dirigée vers l'extérieur; l'expression $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_\beta}$ reste bornée quand X varie sur S; comme d'autre part ω est continu et positif sur S, nous pouvons trouver une constante positive A telle qu'on ait sur tout S

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_\beta} + A\omega > \text{constante positive.}$$

Choisissons la constante A comme fonction ψ pour définir l'opération Θ sur S. On peut trouver une fonction v, solution régulière de (2) dans $\mathcal{D}$, qui satisfait sur S à la condition $\Theta v = \Theta u$; il suffit pour cela de former les équations de Fredholm qui résolvent la question dans le cas où il n'y a pas de discontinuités (g, IV, 2); ces équations ont, dans les hypothèses actuelles, une et une seule solution, malgré les discontinuités de f, et l'on en déduit une fonction v qui répond à la question. Si μ est une constante positive quelconque, on a

$$\Theta(v - u + \mu\omega) > 0 \quad \text{sur S};$$

par suite $v - u + \mu\omega$ ne peut atteindre de minimum négatif sur S. Mais cette fonction, qui est infinie positive aux points de $M_2 + \ldots + M_m$, car on prouve facilement l'existence d'une constante positive a telle qu'on ait

$$\omega > a\left(-\log r_2 + \sum_{\lambda=3}^{m} r_\lambda^{2-\lambda}\right)$$

dès que $r_2 r_3 \ldots r_m$ est assez petit, ne peut non plus atteindre un minimum négatif en un point de D, car celui-ci serait nécessairement inférieur au minimum sur S, ce qui est impossible (§ 11); donc

$$v - u \geqq -\mu\omega.$$

De même

$$v - u \leqq \mu\omega;$$

comme la constante μ est arbitraire; $u = v$ et le théorème est démontré.

CHAPITRE III.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE PRINCIPALE. PROBLÈMES DE VALEURS A LA FRONTIÈRE.

1. Définition. — Supposons que l'opération $\mathcal{F} u$ remplisse les hypothèses précédentes (II, 1) dans tout l'espace; notamment une condition de Hölder est valable pour les $a_{\alpha,\beta}$ dans tout l'espace. La variété $\mathfrak{M}$ est supposée bornée; hors d'un domaine borné contenant $\mathfrak{M}$, on suppose que les fonctions $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c (α, $\beta = 1, 2, \ldots, m$) sont bornées; la fonction c est en outre, hors d'un domaine borné, inférieure à une constante négative, et le déterminant D des $a_{\alpha,\beta}$ est, dans tout l'espace, supérieur à une constante positive.

On dit qu'une fonction $G(X, \Xi)$ est une solution élémentaire principale si :

1° C'est une solution élémentaire dans tout l'espace (II, 3);

2° G et les $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}$ tendent exponentiellement vers zéro quand la distance des deux points augmente indéfiniment (g, II, 1).

2. Théorème. — *Si la solution élémentaire principale existe, elle est unique; en particulier elle existe si c est négatif ou nul dans tout l'espace* (hors de $\mathfrak{M}$).

Soient $b_\alpha^\star (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ et $c^\star$ des fonctions bornées et continues dans tout l'espace et coïncidant respectivement avec les b_α et avec c hors d'un domaine borné; on suppose de plus que $c^\star$ est partout négatif ou nul. L'opération $\mathcal{F}^{\star\star}$ définie par les $a_{\alpha,\beta}$, les $b_\alpha^\star$ et $c^\star$ admet une solution élémentaire principale $G^{\star\star}$ (g, II, 9). Posons

$$K(X, \Xi) = \Sigma_\alpha [b_\alpha(X) - b_\alpha^\star(X)] \frac{\partial G^{\star\star}}{\partial x_\alpha}(X, \Xi);$$

cette fonction est nulle dès que X sort d'un certain domaine borné. Considérons l'équation homogène

$$u(\Xi) - \int^{(m)} u(A) K(A, \Xi) \, dV_A = 0,$$

où l'intégration est étendue à tout le domaine où K n'est pas nul, de sorte que la théorie de Fredholm s'applique; je dis qu'elle n'admet que la solution zéro. Il suffit de le prouver pour l'équation associée

$$v(X) - \int^{(m)} K(X, A) v(A) \, dV_A = 0;$$

elle signifie que la fonction

$$w(X) = -\int^{(m)} G^{\star\star}(X, A) v(A) \, dV_A$$

est, dans tout l'espace, une solution régulière de l'équation $\mathcal{F}^\star w = 0$, où $\mathcal{F}^\star$ est l'opération définie par les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et $c^\star$. Cette fonction w est nulle à l'infini; elle ne peut atteindre nulle part un maximum positif ou un minimum négatif (II, **14**); donc elle est identiquement nulle; par suite

$$v = \mathcal{F}^{**} w = 0,$$

comme nous l'avions annoncé. Donc l'équation en G^*

$$G^*(X, \Xi) - \int^{(m)} G^*(X, \Lambda) K(\Lambda, \Xi) dV_\Lambda = G^{**}(X, \Xi)$$

admet une et une seule solution, car on peut, comme dans le cas où $\mathfrak{M}$ n'existe pas (g, II, 9), se ramener au cas où le second membre est borné. La fonction G^*, ainsi définie dans tout l'espace, est une solution élémentaire principale pour $\mathcal{F}^*$, car, d'une part, quand $X \to \Xi$, on a $G^* = [1 + o(1)]G^{**}$; d'autre part on trouve

$$\mathcal{F}^* G^*(X, \Xi) - \int^{(m)} \mathcal{F}^* G^*(X, \Lambda) K(\Lambda, \Xi) dV_\Lambda = 0,$$

d'où $\mathcal{F}^* G^* = 0$; enfin G^* et les $\frac{\partial G^*}{\partial x_\alpha}$ tendent exponentiellement vers zéro quand la distance augmente indéfiniment.

Soit maintenant $c - c^* = \chi$. Un raisonnement identique à celui qui vient d'être fait prouve que si c est partout (hors de $\mathfrak{M}$) négatif ou nul, l'équation en G

$$(1) \qquad G(X, \Xi) - \int^{(m)} G(X, \Lambda) \chi(\Lambda) G^*(\Lambda, \Xi) dV_\Lambda = G^*(X, \Xi)$$

a une solution et une seule, qui est la solution élémentaire principale pour $\mathcal{F}$. Il n'y a pas alors d'autre solution élémentaire principale, car la différence de deux telles solutions est une solution régulière dans tout l'espace (II, 16) de l'équation homogène, et par suite elle ne peut atteindre nulle part un maximum positif ou un minimum négatif: comme elle est nulle à l'infini elle est identiquement nulle.

Enfin en supprimant l'hypothèse que c est partout négatif ou nul, on démontre comme dans le cas où $\mathfrak{M}$ n'existe pas (g, II, 12), que la fonction G, si elle existe, est unique et donnée par l'équation (1) ou, si l'on veut, par l'équation

$$(2) \qquad G(X, \Xi) - \int^{(m)} G^*(X, \Lambda) \chi(\Lambda) G(\Lambda, \Xi) dV_\Lambda = G^*(X, \Xi),$$

qui ont chacune une et une seule solution; réciproquement si une de ces équations a une solution unique, celle-ci est la solution élémentaire principale.

3. **Théorème.** — *Outre les hypothèses générales du paragraphe* **1**, *supposons que la solution élémentaire principale* $G(X, \Xi)$ *existe. Soit* $u(X)$ *une fonction continue ainsi que ses dérivées dans tout l'espace; on suppose aussi que* $\mathcal{F}u$ *existe et est continu en tout point n'appartenant pas à* $\mathfrak{M}$; *dans un domaine borné, contenant* $\mathfrak{M}$ *et l'origine des coordonnées, on suppose que* $\mathcal{F}u = O(r^{k-1})$; *hors de ce domaine, on suppose qu'il existe un nombre positif p tel qu'on ait*

$$u(X) = O[L^p(O, X)], \qquad \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = O[L^p(O, X)] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\mathcal{F}u = O[L^p(O, X)].$$

On peut affirmer alors que l'on a

$$u(X) = -\int^{(m)} G(X, A)\,\mathcal{F}u(A)\,dV_A.$$

Même démonstration que quand $\mathfrak{M}$ n'existe pas (g, II, **11**, **13**, **14**).

4. **Équations limites.** — Remplaçons les fonctions $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c par d'autres fonctions $a^*_{\alpha,\beta}$, b^*_α, c^*. En désignant par η un nombre positif donné, on suppose qu'on a dans tout l'espace

$$|a_{\alpha,\beta} - a^*_{\alpha,\beta}| < \eta, \qquad a^*_{\alpha,\beta}(X) - a^*_{\alpha,\beta}(Y) = O[L^h(X, Y)],$$

où la constante impliquée dans le symbole O est indépendante de η. Dans le domaine $r < \eta$, on suppose que

$$b^*_\alpha = O(r^{k-1}), \qquad c^* = O(r^{k-1})$$

(constantes encore indépendantes de η); dans le reste de l'espace, on suppose que

$$|b_\alpha - b^*_\alpha| < \eta, \qquad |c - c^*| < \eta.$$

Si la solution élémentaire principale existe pour l'opération $\mathcal{F}$, et si η est assez petit, la nouvelle opération $\mathcal{F}^*$ est aussi du type elliptique, et elle admet une solution élémentaire principale G^*; il existe en outre des constantes positives M, a, R telles qu'on ait, dès que η est assez petit

$$|G^*(X, \Xi)| < ML^{2-m}(X, \Xi)\exp[-a L(X, \Xi)],$$

$$\left|\frac{\partial G^*}{\partial x_\alpha}(X, \Xi)\right| < ML^{1-m}(X, \Xi)\exp[-a L(X, \Xi)] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

sous la condition $L(X, \Xi) > R$, en désignant par ε un nombre positif donné, on aura en outre, pour η assez petit,

$$|G(X, \Xi) - G^*(X, \Xi)| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) - \frac{\partial G^*}{\partial x_\alpha}(X, \Xi)\right| < \varepsilon \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m);$$

enfin G^* est partout supérieur à un nombre négatif ou nul fixe (si c est partout négatif, G^* est partout positif). Comme dans le cas où $\mathfrak{M}$ n'existe pas, la démonstration se fait en reprenant seulement la formation de la solution élémentaire principale (§ 2).

5. **Théorème.** — *Dans les hypothèses générales du paragraphe 1, on peut trouver une fonction $w(X)$ et des fonctions $\varphi_\alpha(X)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ telles que le changement de fonctions et de variables*

$$u = wv, \qquad y_\alpha = \varphi_\alpha(X) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

soit biunivoque dans tout l'espace, tel en outre que le jacobien des y_α ne s'annule nulle part, tel enfin que l'opération $\mathcal{F}$ soit changée en une opération analogue où les coefficients analogues aux $a_{\alpha,\beta}$ remplissent dans tout l'espace une condition de Hölder d'exposant égal au plus petit des nombres h et k s'il est inférieur à un, et où les coefficients analogues aux b_α et à c remplissent dans toute région bornée de l'espace une condition de Hölder avec le ***même exposant****.*

Même démonstration que quand $\mathfrak{M}$ n'existe pas (g, II, 17).

6. **Théorème.** — *Si l'opération adjointe à $\mathcal{F}$,*

$$\mathcal{G}v = \Sigma_{\alpha.\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_{\alpha.\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right) - \Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(b_\alpha - \Sigma_\beta\frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial x_\beta}\right)v\right] + cv,$$

existe et satisfait aux mêmes hypothèses que $\mathcal{F}$ (§ 1), sauf peut-être à la condition qu'on ait, hors d'un domaine borné,

$$c - \Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial x_\beta}\right) < -g^2,$$

et si la solution élémentaire principale $G(X, \Xi)$ *existe, on a*

$$\mathcal{G}\, G(X, \Xi) = 0$$

(*l'opération* $\mathcal{G}$ *portant, ici et dans la suite, sur le second point*).

Même démonstration que dans le cas où $\mathcal{M}$ n'existe pas (g, III, 4).

7. **Problème de Neumann.** — Pour résoudre dans toute sa généralité le problème de Neumann déjà énoncé (II, 2), nous choisissons une fonction $c-\chi$, continue en tout point n'appartenant pas à $\mathcal{M}$, valant $O(r^{k-1})$ dans un domaine borné contenant $\mathcal{M}$, bornée dans le reste de l'espace, négative ou nulle dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ et inférieure à un nombre négatif fixe hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$; la fonction χ sera nulle hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, et c coïncidera dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ avec la fonction donnée : le choix de la fonction $c-\chi$ détermine donc c et χ dans tout l'espace. De même les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ et b_α ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$) seront définies hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ de façon que l'opération $\mathcal{F}u-\chi u$ remplisse les hypothèses du paragraphe 1. Soit $G(X, \Xi)$ la solution élémentaire principale pour $\mathcal{F}u-\chi u$. On démontre, comme dans le cas où $\mathcal{M}$ n'existe pas (g, IV) [1], qu'on obtient toutes les solutions du problème en posant

$$u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A,$$

où ρ et σ sont deux inconnues qu'on obtient par le système d'équations de Fredholm

$$\begin{aligned}
\rho(X) - \chi(X)&\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A \\
&+ 2\chi(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A = f(X), \\
\sigma(Y) - &\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \Theta G(Y, A)\,\rho(A)\,dV_A \\
&+ 2\int_{\mathcal{S}}^{m-1} \Theta G(Y, A)\,\sigma(A)\,dS_A = \varphi(Y);
\end{aligned}$$

---

[1] Pour la fonction de Green relative aux opérations $\mathcal{F}u-\chi u$ et $\Theta u-\omega u$, on peut, par changement de variables et d'inconnue, ramener le cas actuel à celui où tout est continu.

de plus, à deux solutions distinctes de ce système, correspondent toujours deux solutions u distinctes du problème proposé. Le problème adjoint se définit aussi comme quand $\mathfrak{M}$ n'existe pas ([1]); le problème homogène correspondant au problème donné et le problème homogène adjoint ont toujours même nombre p de solutions linéairement indépendantes; si p est positif, et si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont des solutions linéairement indépendantes pour le problème homogène adjoint, les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème donné sont

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} f v_n \, dV - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \varphi v_n \, dS = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p).$$

8. **Formule générale de Green.** — Les raisonnements qui conduisent aux résultats du paragraphe précédent, prouvent en particulier que si, dans un domaine $\mathcal{D}$ et sur sa frontière $\mathcal{S}$, l'adjointe $\mathcal{G}v$ de $\mathcal{F}u$ existe et possède les mêmes propriétés que $\mathcal{F}$, et si les $b_\alpha - \Sigma_\beta \dfrac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ sont continus, on a

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} (v\mathcal{F}u - u\mathcal{G}v)\, dV = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} (v\Theta u - u Z v)\, dS,$$

pourvu que Θu et Zv soient continus sur $\mathcal{S}$, que $\mathcal{F}u$ et $\mathcal{G}v$ soient continus en tout point de $\mathcal{D} + \mathcal{S} - \mathfrak{M}$, et que u et v soient réguliers dans $\mathcal{D}$.

9. **Problème de Dirichlet.** — L'opération $\mathcal{F}$, le domaine $\mathcal{D}$ et sa frontière $\mathcal{S}$ remplissant les mêmes hypothèses que pour le problème de Neumann, donnons-nous une fonction $f(X)$, continue en tout point de $\mathcal{D} - \mathfrak{M}$ et valant $O(r^{k-1})$. Nous nous proposons de *trouver une fonction u, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, nulle sur $\mathcal{S}$, et qui soit dans $\mathcal{D}$ une solution régulière de l'équation*

$$\mathcal{F}u = f.$$

Un changement d'inconnue et de variables permet de ramener

(1) Le problème adjoint n'est regardé ici comme un problème de Neumann relatif à l'opération adjointe que si les $b_\alpha - \Sigma_\beta \, \partial a_{\alpha,\beta}/\partial x_\beta$ sont continus; l'autre interprétation est toujours possible.

cette question à celle qui concerne le cas où $\mathcal{M}$ n'existe pas. On en conclut notamment que la fonction de Green $F(X, \Xi)$ relative au problème de Dirichlet dans $\mathcal{D}$ pour l'opération $\mathcal{F}u - \chi u$, où χ est au moins égal à c, existe et possède les mêmes propriétés que quand $\mathcal{M}$ n'existe pas (g, V, 2 et 3) ([1]); en particulier, si l est inférieur à un et au plus égal à h et à k, on a

$$\theta F(X, \Xi) - 2\theta G(X, \Xi) = O[L^{1+l-m}(X, \Xi)],$$

G désignant la solution élémentaire principale relative à $\mathcal{F}u - \chi u$. Cette fonction de Green permet de résoudre directement le problème visé par l'équation de Fredholm

$$u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(X, A)[f(A) - \chi(A)u(A)]\,dV_A,$$

qui est équivalente à ce problème.

Les propriétés relatives aux extrema atteints sur la frontière (g, V, 5, 6) s'étendent aussi aux hypothèses actuelles (*voir* aussi plus loin, IV, 3).

10. Cas où les valeurs données sur la frontière ne sont pas nulles. — La frontière remplissant toujours les mêmes hypothèses (I, 7), nous supposons qu'on se donne sur $\mathcal{S}$ une fonction $\varphi(Y)$; si l'on regarde φ comme fonction des paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ à l'aide desquels s'expriment les coordonnées des points de $\mathcal{S}$, nous supposons que les dérivées de cette fonction existent et sont höldériennes d'exposant h. On propose de *trouver une fonction u, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, prenant sur $\mathcal{S}$ les valeurs φ, et qui soit dans $\mathcal{D}$ une solution régulière de l'équation $\mathcal{F}u = f$.*

Nous commençons par former la fonction v, harmonique dans $\mathcal{D}$, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et qui se réduit à φ sur $\mathcal{S}$. On sait (e, VIII, 6, 7) que les dérivées de v existent et sont höldériennes dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ avec l'exposant h (si $h < 1$). Mais $\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ est encore

([1]) On peut démontrer aussi que $\partial F / \partial x_\alpha = O[L^{1-m}(X, \Xi)]$ quand X et Ξ varient dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; on s'appuie sur ce que (e, VII, 4) l'intégrale

$$\int^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)\,dS_A,$$

étendue à une partie variable de $\mathcal{S}$, est bornée.

une fonction harmonique; on en conclut (e, VIII, 5) que les $s_m \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ (où s_m désigne la même fonction, nulle sur $\mathfrak{S}$, que dans le mémoire auquel on renvoie) sont höldériens dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ avec l'exposant h. Sur $\mathfrak{S}$ ces dernières fonctions sont nulles; on en conclut que

$$\partial^2 v/(\partial x_\alpha \partial x_\beta) = O(|s_m|^{h-1}).$$

Si l'on convient d'englober dans $\mathfrak{M}$ toute la frontière $\mathfrak{S}$, et de calculer r en conséquence, la fonction $\mathfrak{F}v = f_1$ est continue en tout point de $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}$, et elle vaut $O(r^{l-1})$, $l < 1$ étant le plus petit des nombres h et k. La fonction $u - v$ doit être continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, nulle sur $\mathfrak{S}$, et être dans $\mathfrak{D}$ une solution régulière de l'équation

$$\mathfrak{F}(u - v) = f - f_1;$$

nous sommes donc ramenés au paragraphe précédent ([1]). On voit que, dans les hypothèses actuelles, les dérivées de u sont continues dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ (*voir* l'avant-dernière note).

CHAPITRE IV.

DÉRIVÉES PREMIÈRES ET SECONDES AUX POINTS DE LA FRONTIÈRE DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET.

1. **Théorème.** — *Supposons que les dérivées des coordonnées des points de la frontière $\mathfrak{S}$ du domaine $\mathfrak{D}$ soient höldériennes avec l'exposant $k < 1$, et que les dérivées des valeurs de u sur $\mathfrak{S}$ existent et soient höldériennes avec l'exposant k. Dans l'équation du type elliptique*

$$\mathfrak{F}u = f, \tag{1}$$

on suppose que les fonctions $a_{\alpha,\beta}(\alpha; \beta = 1, 2, \ldots, m)$ sont höldériennes avec l'exposant quelconque h, et que les fonctions $b_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, c et f sont continues dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$.

([1]) On remarquera que, même dans le cas où $\mathfrak{M}$ n'existe pas, la question ici traitée est plus générale que celle qui était résolue antérieurement (g, V). On ne peut pas passer des fonctions φ considérées ici à des fonctions continues sans plus, par un passage à la limite, car il n'est pas démontré que le théorème de Harnack soit vrai dans les hypothèses actuelles (ce théorème est vrai dans les hypothèses du Mémoire e).

On peut affirmer alors que les dérivées de u sont höldériennes dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ avec l'exposant k.

Nous démontrerons qu'on peut recouvrir $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ par un nombre fini de régions dans chacune desquelles les dérivées de u sont höldériennes avec l'exposant k. Comme il n'y a pas de difficulté pour un ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$ (g, I, 11), il suffit même d'établir qu'on peut recouvrir $\mathcal{S}$ et son voisinage dans $\mathcal{D}$ par un nombre fini de telles régions.

Prenons pour origine O un point donné de $\mathcal{S}$, et choisissons les axes de façon que Ox_m soit la normale dirigée vers l'intérieur de $\mathcal{D}$. Dans un certain domaine contenant O, $\mathcal{S}$ est donné par l'équation

$$x_m = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}), \tag{2}$$

où les dérivées de la fonction λ existent et sont höldériennes avec l'exposant k. Nous allons remplacer x_m par une autre variable y_m nulle sur $\mathcal{S}$ au voisinage de O. Pour cela nous cherchons une fonction x_m des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m$, définie au voisinage de O pour $y_m \geqq 0$, et se réduisant pour $y_m = 0$ à la fonction λ; si f_1 est, pour $y_m > 0$, une fonction harmonique de nos m variables, se réduisant à λ pour $y_m = 0$, on sait que les dérivées de f_1 existent et sont höldériennes d'exposant k en O et dans son voisinage pour $y_m \geqq 0$ (e, VIII, 6, 7); si d'autre part f_2 est, pour $y_m > 0$, une solution positive de l'équation

$$\sum_{\alpha=1}^{m-1} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y_m^2} = -1,$$

se réduisant à zéro pour $y_m = 0$, on sait encore que f_2 est prolongeable analytiquement au delà de $\mathcal{S}$, et qu'en outre $\frac{\partial f_2}{\partial y_m}$ est positif et non nul pour $y_m = 0$ (g, V, 5); par conséquent, si nous prenons $x_m = f_1 + \mu f_2$, en prenant pour μ une valeur positive constante et suffisamment grande, les dérivées de x_m sont höldériennes avec l'exposant k pour $y_m \geqq 0$, et la dérivée $\frac{\partial x_m}{\partial y_m}$ est positive en O et dans son voisinage. Comme en outre les dérivées de x_m sont des fonctions harmoniques, un raisonnement déjà employé (III, 10) nous montre que les dérivées secondes de x_m valent $O(y_m^{k-1})$. Si l'on prend pour variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m$, la transformation qui fait passer des anciennes variables aux nouvelles, est donc biunivoque dans un domaine contenant O. Après cette transformation, les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ sont remplacées par des fonctions höldériennes d'exposant h, au moins si $h \leqq k$, ce que nous pouvons toujours supposer; b_m est remplacé par une fonction continue pour $y_m > 0$ et valant $O(y_m^{k-1})$; les autres b_α et c restent continus pour $y_m \geqq 0$.

Changeant la notation, nous supposerons donc qu'un domaine de $\mathfrak{S}$, contenant l'origine des coordonnées, est porté par $x_m = 0$, que $\mathcal{D}$ est du côté $x_m > 0$ au voisinage de cette région, que les $a_{\alpha,\beta}$ sont höldériens dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$ avec l'exposant $h \leqq k$, que b_m est continu pour $x_m > 0$ et vaut $O(x_m^{k-1})$, enfin que les autres b_α, c et f sont continus dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$. Comme u est continu dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$, il suffit de retrancher des deux membres le produit de u par une fonction continue positive convenable pour être ramené au cas où c est négatif dans $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$; nous ajouterons donc cette hypothèse.

Nous allons pratiquer un nouveau changement de variables, de façon à particulariser davantage. Soient $y_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ les variables à introduire, et soient $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α, c' les fonctions qui déterminent l'opération $\mathcal{F}$ dans ce système. On a

$$a'_{\alpha,\beta} = \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\gamma,\delta} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\delta},$$
$$b'_\alpha = \mathcal{F} y_\alpha - c y_\alpha,$$
$$c' = c.$$

Nous voulons que, dans une certaine région contenant O et les points voisins situés dans la région $x_m \geqq 0$, le jacobien ne soit pas nul; de plus y_m devra s'annuler en même temps que x_m, la dérivée $\frac{\partial y_m}{\partial x_m}$ étant positive; enfin nous voulons que, pour $y_m = 0$, on ait

$$a'_{m,\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Nous prenons d'abord $y_m = x_m$. Les conditions ci-dessus s'écrivent alors

$$\Sigma_\beta a_{\beta,m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Theta y_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1),$$

à condition de prendre nulle la fonction ψ qui figure dans la définition de l'opération Θ. Soit ψ_α la valeur prise en O par le rapport $-\frac{a_{m,\alpha}}{a_{m,m}}$. En désignant par λ un paramètre positif destiné à être choisi assez petit, nous considérons une région, comprise dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, homothétique d'une région fixe relativement à O et dans le rapport λ, et comprenant toute la partie de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ qui satisfait à la condition

$$L(O, X) \leqq 2\lambda;$$

nous supposons que la frontière de cette région remplit les conditions requises pour la validité de notre solution du problème de Neumann [pour pouvoir appliquer une proposition antérieure (g, V, 5), nous supposerons même que les dérivées secondes des coordonnées des points de cette frontière existent et sont continues; *voir* aussi plus loin, paragraphe 3]. Pour définir l'opération Θ, nous choisissons une fonction ψ identiquement nulle sur toute cette frontière. Sur la partie de cette frontière définie par les relations

$$x_m = 0, \qquad L(O, X) \leqq \lambda,$$

nous prendrons $\Theta y_\alpha = 0$; pour

$$x_m = 0, \qquad \lambda < L(O, X) \leqq 2\lambda,$$

nous prendrons

$$\Theta y_\alpha = \Theta(x_\alpha + \psi_\alpha x_m)[L(O, X)/\lambda - 1];$$

sur le reste de cette frontière, nous prendrons enfin

$$\Theta y_\alpha = \Theta(x_\alpha + \psi_\alpha x_m).$$

A l'intérieur de la même région, nous nous imposons la condition

$$\mathcal{F} y_\alpha - (c + \lambda^{-2}) y_\alpha = \mathcal{F}(x_\alpha + \psi_\alpha x_m) - (c + \lambda^{-2})(x_\alpha + \psi_\alpha x_m).$$

Une et une seule fonction y_α remplit ces conditions dans cette région et sur sa frontière (g, V, 5). Si nous transformons notre région par une homothétie de centre O et de rapport λ^{-1}, les coefficients qui remplacent les $a_{\alpha,\beta}$ dans l'équation transformée sont aussi voisins qu'on veut des valeurs prises en O par les coefficients donnés, et leur coefficient höldérien pour l'exposant h est infiniment petit avec λ; le coefficient qui remplace b_m est $O(\lambda^k x_m^{k-1})$, et les autres b_α sont remplacés par des infiniment petits; le coefficient de y_α devient égal à -1. Les nouvelles valeurs de $\Theta(y_\alpha - x_\alpha - \psi_\alpha x_m)$ sont les anciennes multipliées par λ, et par suite elles sont $O(\lambda^{h+1})$, et leur coefficient de Hölder pour l'exposant h est aussi $O(\lambda^{h+1})$. Nous pouvons donc affirmer (e, VII, 4, 5) qu'après cette homothétie de rapport λ^{-1}, la fonction $y_\alpha - x_\alpha - \psi_\alpha x_m$ vaut $O(\lambda^{h+1})$, ses dérivées ont la même limitation, et enfin ces dérivées remplissent une condition de Hölder d'exposant h et de coefficient $O(\lambda^{h+1})$ [dans le passage indiqué du mémoire e, on supposait que les b_α sont höldériens d'exposant h, mais on a déjà vu (II, 16; g, II, 17) que le cas considéré actuellement se ramène au précédent si $h \leqq k < 1$]. Par suite, avant l'homothétie, cette fonction $y_\alpha - x_\alpha - \psi_\alpha x_m$ vaut $O(\lambda^{h+1})$, ses dérivées valent $O(\lambda^h)$, et le coefficient höldérien de celles-ci pour l'exposant h est $O(1)$. Dès que λ est assez petit, le jacobien $\dfrac{d(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ ne s'annule donc nulle part dans notre région, et en outre la transformation est biunivoque dans une demi-hypersphère de centre O (les hypothèses du théorème ordinaire sur les fonctions implicites ne sont pas satisfaites, mais la démonstration de ce théorème par la méthode des approximations successives s'applique).

Nous choisissons λ de cette façon et nous désignons par R un nombre positif assez petit pour que ces propriétés aient lieu dans la région

$$(3) \qquad y_m \geqq 0, \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 \leqq R^2.$$

Soit v une fonction harmonique par rapport aux x_α et qui prenne pour $x_m = 0$ les mêmes valeurs que u; il est évident que

$$\mathcal{F}v = O(x_m^{k-1}) = O(y_m^{k-1});$$

soit $f' = f - \mathcal{F}v$. Dans la région

$$(4) \qquad y_m < 0, \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 \leqq R^2,$$

nous définissons les fonctions $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$, c' et f' en décidant que dans la région totale

$$(5) \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 \leqq R^2,$$

les $a'_{m,\alpha}$ $(\alpha \neq m)$, b'_m et f' sont des fonctions impaires de y_m, et que les autres coefficients sont des fonctions paires de y_m. On voit que, dans cette région (5), les $a'_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$ sont fonctions höldériennes de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ avec l'exposant h (si $h \leq k < 1$); les $b'_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ et f' sont continus pour $y_m \neq 0$ et valent $O(|y_m|^{k-1})$; enfin c' est continu et négatif dans toute la région; l'opération $\mathcal{F}$ est ainsi définie dans la région (5). Sur la frontière

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 = R^2$$

de cette région, nous définissons l'opération Θ en prenant $\psi = 0$; d'autre part nous définissons sur cette frontière une fonction φ égale à $\Theta(u - v)$ pour $y_m \geq 0$, et qui prend des valeurs opposées en deux points symétriques par rapport à $y_m = 0$; φ est partout continu car $\Theta(u - v) = 0$ pour $y_m = 0$. Nous imposons à une fonction w d'être, à l'intérieur de (5), une solution régulière de l'équation

$$\mathcal{F} w = f',$$

et de satisfaire sur la frontière à la condition

$$\Theta w = \varphi;$$

la fonction w existe et est entièrement déterminée dans (5). Mais $-w(y_1, y_2, \ldots, -y_m)$ satisfait aux mêmes conditions; donc w est une fonction impaire de y_m, et par suite w s'annule pour $y_m = 0$. Alors la fonction $w - u + v$ satisfait, dans l'intérieur de la région (3), à l'équation $\mathcal{F}(w - u + v) = 0$; sur la partie $y_m = 0$ de la frontière de cette région, on a $w - u + v = 0$; sur la partie restante de cette frontière, on a $\Theta(w - u + v) = 0$; la fonction $w - u + v$ ne peut donc atteindre un maximum positif ou un minimum négatif ni à l'intérieur de (3) ni sur sa frontière, et par suite elle est identiquement nulle dans cette région.

Par rapport aux y_α, les dérivées de la fonction w sont höldériennes avec l'exposant k dans le domaine

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 < R^2/2;$$

pour le voir, on met w sous la forme donnée par notre solution du problème de Neumann (III, 7), et l'on raisonne comme dans le cas où $\mathfrak{M}$ n'existe pas (g, I, 11). Nous allons prouver que, par rapport aux x_α, les dérivées de w sont höldériennes avec l'exposant k

dans la région correspondante. On a

$$\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = \Sigma_\beta \frac{\partial w}{\partial y_\beta} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\alpha}.$$

Les $\frac{\partial w}{\partial y_\beta}$ sont, relativement aux x_α, höldériens avec l'exposant k; il n'y a donc pas de difficulté pour le terme correspondant à $\beta = m$. Si $\beta \neq m$, nous savons que $\frac{\partial w}{\partial y_\beta}$ est nul pour $y_m = 0$; cette fonction vaut par conséquent $O(y_m^k)$ ou $O(x_m^k)$.

Étudions maintenant davantage la fonction y_β, qui est la solution d'un certain problème de Neumann. Soit $G(X, \Xi)$ la solution élémentaire principale d'une opération du type elliptique qui, dans le domaine où il s'agit de déterminer y_β, ne diffère de

$$\mathcal{F} u - (c + \lambda^{-2}) u$$

que par les coefficients des dérivées, lesquels sont nuls dans la nouvelle opération; on supposera que le coefficient de l'inconnue est dans tout l'espace égal à $-\lambda^{-2}$; les b_α sont supposés nuls partout. Posons

$$K(X, \Xi) = K^{(1)}(X, \Xi) = \Sigma_\alpha b_\alpha(X) \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, \Xi),$$

$$K^{(n+1)}(X, \Xi) = \int^{(m)} K^{(n)}(X, A)\, K(A, \Xi)\, dV_A,$$

$$G_p(X, \Xi) = G(X, \Xi) + \sum_{n=1}^{p-1} \int^{(m)} G(X, A)\, K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A,$$

où les intégrales sont étendues à tout l'espace. En désignant par $\mathcal{D}_1$ le domaine où l'on détermine les y_α, par $\mathcal{S}_1$ sa frontière, par f_1 le second membre de l'équation du type elliptique, on peut poser

$$y_\alpha(X) = -\int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} G(X, A)\, \rho(A)\, dV_A + 2 \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} G_p(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A,$$

et les inconnues ρ et σ sont données par les équations

$$\rho(X) - \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} K(X, A)\, \rho(A)\, dV_A + 2 \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} K^{(p)}(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A = f_1(X),$$

$$\sigma(Y) - \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} \theta G(Y, A)\, \rho(A)\, dV_A + 2 \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \theta G_p(Y, A)\, \sigma(A)\, dS_A = \varphi_1(Y),$$

où $\varphi_1(Y)$ est la fonction donnée sur la frontière; les raisonnement usuels montrent que ce système a une et une seule solution, la théorie de Fredholm s'appliquant si p est assez grand pour que $K^{(p)}$ soit continu pour $x_m \neq 0$: on a alors

$$K^{(p)}(X, A) = O(x_m^{k-1});$$

dès lors la théorie de Fredholm s'applique aussi pour $p = 1$ (f, III, **2**). En passant par les équations relatives à une valeur assez grande de p, on voit que, pour $p = 1$, on a $\rho(X) = O(x_m^{l-1})$, où l est un nombre positif quelconque inférieur à k; par suite le terme $\int_{\mathcal{O}_1}^{(m)} \Theta G(Y, A)\rho(A)\,dV_A$ est höldérien, et par suite σ est höldérien (e, VII, **4**; remarquer qu'ici G est la solution élémentaire principale d'une opération dont tous les coefficients sont höldériens); il en résulte alors que, pour $p = 1$, ρ vaut $O(x_m^{k-1})(k < 1)$. Donc les dérivées de

$$\int_{\mathcal{O}_1}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A$$

sont höldériennes avec l'exposant k; dans l'expression $\frac{\partial w}{\partial y_\beta}\frac{\partial y_\beta}{\partial x_\alpha}$, ce qui provient de ces dérivées est donc höldérien avec l'exposant k.

En posant $\mu(X) = \frac{\partial w}{\partial y_\beta}$, et en remarquant que cette fonction est nulle pour $x_m = 0$, nous avons donc à étudier l'expression

$$\int^{(m-1)} [\mu(X) - \mu(A)]\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A,$$

où σ est höldérien, et où l'intégrale est étendue à la variété

$$a_m = 0, \qquad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{m-1}^2 \leqq \lambda^2;$$

il est immédiat (e, I, **7**, **8**) que cette fonction est höldérienne avec l'exposant k, car, si X et le domaine d'intégration varient, l'intégrale $\int^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)\sigma(A)\,dS_A$ reste bornée (e, VII, **4**). Le théorème est donc démontré, car $u = v + w$ et il n'y a pas de difficulté pour v.

2. On a remarqué que, dès notre premier changement de variables, nous avons été ramenés à une équation dont les coefficients n'étaient pas tous continus. Plus généralement, en suivant la même marche ou en se ramenant, par un changement linéaire non homogène d'inconnue suivi d'un changement de variables (II, 10, 12), au cas du paragraphe précédent, on démontre le théorème suivant, qu'il suffit d'énoncer :

THÉORÈME. — *Plaçons-nous dans les hypothèses du Chapitre II, paragraphe 1. Soit $k < 1$ l'exposant des conditions de Hölder auxquelles satisfont les dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$. On suppose que les $\alpha_{\alpha,\beta}$ sont höldériens avec l'exposant h, et que les b_α, c et f valent $O(r^{k-1})$. Si les dérivées des valeurs prises par u sur $\mathfrak{S}$ existent et sont höldériennes avec l'exposant k, les dérivées de u sont höldériennes dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ avec l'exposant k.*

3. Le premier changement de variables effectué au paragraphe 1 permet encore de généraliser les théorèmes relatifs aux extrema atteints sur la frontière (III, 9; g, V, 5, 6). On avait établi ces propositions en supposant que les dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ sont lipschitziennes (c'est-à-dire höldériennes avec l'exposant un); on voit que le résultat subsiste si ces dérivées sont höldériennes avec un exposant quelconque. On a donc, dans ces hypothèses, les deux théorèmes suivants, où *l'on suppose que u n'est pas constant :*

THÉORÈME. — *Si u atteint en Y sur $\mathfrak{S}$ un minimum nul et si en outre on a $f \leqq 0$, il existe un nombre positif M tel qu'on ait, dès que le nombre positif t est assez petit,*

$$u(Y_t) > M t;$$

Y_t désigne le point qui a pour coordonnées les $y_\alpha - t\Sigma_\beta a_{\alpha,\beta}\varpi_\beta$.

THÉORÈME. — *Si $c \leqq 0$ et $f \leqq 0$, et si u atteint en Y sur $\mathfrak{S}$ un minimum négatif, il existe un nombre positif M tel qu'on ait, dès que le nombre positif t est assez petit,*

$$u(Y_t) - u(Y) > M t.$$

4. **Théorème**. — *Supposons que les dérivées secondes des*

coordonnées des points de $\mathcal{S}$ existent et sont höldériennes avec l'exposant $h < 1$. En outre, supposons que tous les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et le second membre f de l'équation (1) *sont höldériens avec l'exposant h. Si les dérivées secondes des valeurs prises par u sur $\mathcal{S}$ existent et sont höldériennes avec l'exposant h, les dérivées secondes de u existent et sont höldériennes dans $\mathcal{O}$ avec l'exposant h.*

Pour un ensemble fermé intérieur à $\mathcal{O}$, il n'y a pas de difficulté (e, IV, 1 à 3). Il nous suffit donc d'établir qu'on peut recouvrir totalement $\mathcal{S}$ et son voisinage dans $\mathcal{O}$ par un nombre fini de régions, à l'intérieur de chacune desquelles les dérivées secondes de u sont höldériennes avec l'exposant h.

Nous commençons par faire en sorte que c soit négatif dans un certain voisinage de $\mathcal{S}$, et nous ne sortirons plus de ce voisinage dans la suite. Par un changement de variables, nous faisons en sorte qu'un domaine de $\mathcal{S}$, contenant un point donné de cette variété, soit situé sur $x_m = 0$, $\mathcal{O}$ étant du côté $x_m > 0$; dans les hypothèses actuelles, cela peut être fait de façon que les dérivées secondes des anciennes variables par rapport aux nouvelles, et de celles-ci par rapport aux anciennes, existent et soient höldériennes avec l'exposant h.

Ensuite nous faisons un nouveau changement de variables, destiné à particulariser davantage. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les nouvelles variables; les coefficients de l'opération $\mathcal{F}u$, dans ce système de variables, seront distingués par des accents. Nous exigeons que la transformation soit biunivoque dans $\mathcal{O} + \mathcal{S}$ au voisinage du point donné de $\mathcal{S}$: nous pouvons mettre en ce point l'origine O relative aux anciennes variables; de plus nous voulons que, dans ce voisinage, $x_m = 0$ se change en $y_m = 0$, $x_m > 0$ en $y_m > 0$, et que pour $y_m = 0$ on ait

$$a'_{m,\alpha} = 0 \quad (\alpha \neq m), \qquad b'_m = 0.$$

Soit $\varphi_1(X)$ une fonction, harmonique dans $\mathcal{O}$ au voisinage de O, et se réduisant à $\dfrac{-b_m}{2a_{m,m}}$ pour $x_m = 0$; nous posons

$$y_m = x_m + x_m^2 \varphi_1;$$

la condition $b'_m = 0$ est satisfaite quand x_m ou y_m s'annule; de plus les dérivées secondes de y_m sont höldériennes avec l'exposant h (e, XVII, 3). Pour les autres variables y_α, nous procédons exactement comme au paragraphe 1.

Ensuite, toujours comme au paragraphe 1, nous choisissons la région

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 \leqq R^2 \tag{6}$$

que nous considérons maintenant. Dans la partie $y_m \geqq 0$ de cette région, les $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α et c' résultent du changement de variables; dans la partie $y_m < 0$, nous procédons comme au paragraphe 1. Les coefficients ainsi définis sont höldériens d'exposant h dans toute la région.

Soit v_1 une fonction de X, harmonique dans $\mathcal{D}$ au voisinage de O, et prenant sur $x_m = 0$ les mêmes valeurs que u. Soit φ_2 une fonction de X, harmonique dans $\mathcal{D}$ au voisinage de O, et prenant sur $x_m = 0$ les mêmes valeurs que $\dfrac{f - \mathcal{F} v_1}{2 a_{m,m}}$; les dérivées secondes de la fonction $v_2 = x_m^2 \varphi_2$ sont höldériennes dans $\mathcal{D}$ au voisinage de O avec l'exposant h (e, XVII, 3). Il en est de même des dérivées secondes de la fonction $v = v_1 + v_2$.

Posons, pour $x_m \geqq 0$,

$$f' = f - \mathcal{F} v,$$

et regardons f' comme une fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_m$; cette fonction, définie pour $y_m \geqq 0$, est höldérienne avec l'exposant h, et elle s'annule pour $y_m = 0$. On la définit pour $y_m < 0$ en décidant qu'elle est fonction impaire de y_m; ainsi elle est höldérienne avec l'exposant h dans toute la région (6).

Sur la frontière de cette région, nous définissons l'opération Θ en prenant $\psi = 0$. Puis nous définissons sur cette frontière la fonction φ, dont les valeurs en deux points symétriques par rapport à $y_m = 0$ sont opposées, et qui, pour $y_m \geqq 0$, est égale à $\Theta(u - v)$; cette fonction est continue sur toute la frontière. La fonction w, assujettie aux conditions

$$\mathcal{F} w = f' \quad \text{à l'intérieur,}$$
$$\Theta w = \varphi \quad \text{sur la frontière,}$$

existe et est unique, et elle coïncide avec $u - v$ dans la partie $y_m \geqq 0$ de notre région (même raisonnement qu'au paragraphe 1). Dans le domaine

(7) $\qquad y_m > 0, \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 < R^2/2,$

les dérivées secondes de w par rapport aux y_α sont höldériennes avec l'exposant h(e, IV, 1 à 3).

Notre théorème sera démontré si nous prouvons qu'il en est de même des fonctions

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sum\nolimits_{\gamma,\delta} \frac{\partial^2 w}{\partial y_\gamma \partial y_\delta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial y_\delta}{\partial x_\beta} + \sum\nolimits_{\gamma} \frac{\partial w}{\partial y_\gamma} \frac{\partial^2 y_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

Au second membre, la première somme ne peut faire de difficulté, puisque les dérivées des y_γ sont höldériennes avec l'exposant h. Dans la seconde somme, le terme correspondant à $\gamma = m$ ne fait pas non plus de difficulté.

Prenons donc un des termes restants de cette seconde somme, c'est-à-dire supposons $\gamma \neq m$. On peut supposer que, λ étant assez petit, y_γ est calculé en prenant

$$y_\gamma(X) = -\int^{(m)} H(X, A)\, \rho(A)\, dV_A + 2\int^{(m-1)} H(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A,$$

où l'intégrale d'ordre m est étendue à un domaine contenant à son intérieur celui où il faut déterminer y_γ et la frontière de celui-ci; ρ devra être höldérien d'exposant h dans le domaine ainsi étendu; quant à l'intégrale d'ordre $m-1$, elle est étendue à la frontière du domaine non étendu, et l'on trouve que σ est höldérien avec l'exposant h(e, VII, 4); la fonction H est celle qui a été définie plus haut (II, 3), en choisissant g égal à λ^{-1} (pour λ assez petit, on peut trouver y_γ de cette façon; voir les travaux antérieurs, notamment g, I, 10). En laissant de côté des termes qui ne font pas de difficulté, et en posant $\frac{\partial w}{\partial y_\gamma} = \mu(X)$, on est ramené à démontrer que

$$\mu(X) \int^{(m-1)} \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A$$

est höldérien dans (7) avec l'exposant h, l'intégration étant étendue à un domaine pris sur $a_m = 0$ et contenant le domaine (7) et sa frontière. On peut d'ailleurs supposer $\alpha \neq m$, car la vérification relative à $\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$ se fera à l'aide de l'équation (1) dès que seront faites les vérifications relatives aux autres dérivées secondes. On sait que μ s'annule avec x_m, et que ses dérivées sont continues; nous pouvons donc nous ramener à l'étude de

$$\int^{(m-1)} [\mu(X)-\mu(A)] \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}(X, A)\,\sigma(A) - \frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}(A, X)\,\sigma(X) \right] dS_A,$$

avec le même domaine d'intégration (dans le second crochet, la notation signifie qu'on a échangé les rôles des deux points pour passer du premier terme au second), car $\mu(A)$ est nul, et le terme ajouté se ramène à une intégrale d'ordre $m-2$, qui est höldérienne avec l'exposant h dans la région (7). Nous pouvons reprendre pour cette expression des raisonnements antérieurs (e, I, 7, 8); le rôle des fonctions w du passage cité est tenu par les fonctions μ, σ, $a_{\alpha,\beta}$; mais les exposants λ et h du passage cité ont ici pour la fonction μ les valeurs respectives h et 1, et pour les fonctions σ et $a_{\alpha,\beta}$ les valeurs respectives 1 et h. Nous avons donc (e, I, 8) à vérifier que les dérivées relatives à $\sigma(X)$ et aux $a_{\alpha,\beta}(X)$ donnent des intégrales bornées quand les coefficients varient de certaines façons ainsi que la région d'intégration : c'est immédiat, car ces dérivées sont $O[x_m L^{-m}(X, A)]$. Notre expression est donc höldérienne avec l'exposant h, et le théorème est démontré [1].

---

[1] Ce théorème rend très facile la démonstration d'un résultat déjà annoncé (*Comptes rendus*, 190, 1930, p. 613) : dans un problème non linéaire de Dirichlet dont les données sont suffisamment régulières, si l'on sait borner l'inconnue et ses dérivées jusqu'au second ordre, et trouver une condition de Hölder remplie par ces dérivées secondes, on peut en déduire des limites supérieures et inférieures des dérivées jusqu'à un ordre donné. Cela entraîne la possibilité de résoudre le problème non linéaire de Dirichlet pour un certain champ de données.