

BULLETIN DE LA S. M. F.

ARNAUD DENJOY

Sur la continuité des fonctions analytiques singulières

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 27-105

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__27_0

© Bulletin de la S. M. F., 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS ANALYTIQUES SINGULIÈRES;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Le présent travail a pour objet l'étude dans le plan complexe de diverses classes d'arcs de Jordan simples γ tels qu'une fonction $F(z)$ continue en tout point d'une région ⁽¹⁾ R contenant γ puisse être holomorphe hors de γ sans l'être sur aucun arc de γ .

Nous ne déterminons pas la totalité de ces classes. En effet, les fonctions $F(z)$ que nous considérons s'expriment par des intégrales $\int_x^\beta \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$, le nombre complexe ξ étant fonction du nombre réel x et parcourant γ quand x décrit $\alpha\beta$. Or, dans tous les cas que nous étudierons, l'intégrale $\int_x^\beta \frac{|f(\xi)|d\xi}{|\xi-z|}$ est bornée indépendamment de z . Aussi, *a priori*, semble-t-il peu vraisemblable que toutes les courbes γ jouissant de la propriété initialement énoncée, se prêtent à des méthodes analogues aux nôtres. Il subsistera, relativement à certaines de ces courbes, une incertitude pareille à celle qui concerne l'existence de fonctions à dérivée bornée au voisinage d'un ensemble singulier d'aire positive, ou l'existence de fonctions bornées au voisinage d'un ensemble singulier de longueur positive finie du type E (ci-après n° 8).

1. La question étudiée est en rapport étroit avec celle de la *détermination de $F(z)$ par ses valeurs sur l'arc singulier γ* .

Soit ζ un point variable de γ et soit $\varphi(\zeta)$ la fonction uniquement définie sur γ et y coïncidant avec $F(z)$.

M. Carleman a montré que si $\varphi(\zeta)$ est holomorphe en tout point de γ , c'est-à-dire coïncide avec la somme d'une série de Taylor en $z - \zeta$, sur la totalité d'un arc $\zeta'\zeta''$ (de γ) contenant ζ , et cela

(1) Une région R est un ensemble de points dont chacun est intérieur à R et dont deux quelconques peuvent être joints par une ligne brisée dont tous les points sont dans R.

quel que soit le point ζ considéré sur γ , en ce cas $F(z)$ est holomorphe dans la totalité de R . Elle y coïncide par conséquent avec le prolongement analytique de $\varphi(\zeta)$. Ceci est exact — et toute l'importance du résultat de M. Carleman réside en ce point — quel que soit l'arc γ , rectifiable ou non ⁽¹⁾.

M. Carleman a en effet établi que si une fonction $F_1(z)$ est continue dans l'ensemble Σ réunissant l'intérieur d'un contour C_1 et ce contour lui-même, si $F_1(z)$ est en outre holomorphe à l'intérieur de Σ et nul sur tout un arc de C_1 , il en résulte que $F_1(z)$ est identique à 0 dans Σ .

Ce résultat a été ensuite démontré très simplement par MM. Lusin et Priwaloff dans un Mémoire qui est fondamental dans cet ordre d'idées, et auquel nous renverrons fréquemment le lecteur ⁽²⁾.

2. Considérons donc le cas général où $\varphi(\zeta)$ n'est pas supposé holomorphe sur γ , et n'est soumis à d'autre condition que la continuité. Alors *les propriétés métriques de l'arc γ interviennent*.

Si γ est rectifiable, M. Painlevé a montré que F est holomorphe sur γ .

En vertu de ceci, il suffit qu'un arc quelconque γ_1 de γ soit rectifiable pour que F soit une fonction analytique possédant l'unité de Weierstrass (liaison de deux éléments quelconques par prolongement analytique) dans le domaine $R - \gamma + \gamma_1$, formé de R d'où ont été supprimés les points de γ étrangers γ_1 .

Un cas se rattachant à celui-ci, et dont je dois la suggestion à M. Lusin, est celui où tout ensemble parfait P (continu ou discontinu) *situé sur γ contient une portion ⁽³⁾ rectifiable*.

⁽¹⁾ CARLEMAN. *Les fonctions quasi analytiques* (Collection Borel, Gauthier-Villars, éditeur, p. 3-5). Ces profonds résultats avaient pour suite naturelle la question posée en tête de ce Mémoire.

⁽²⁾ M. LUSIN et J. PRIWALOFF, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques* (Ann. de l'École Normale, 3^e série, t. XLII, p. 143-192).

⁽³⁾ Une portion de P se définit ainsi : γ étant parcouru par le point

$$\zeta = \xi(t) + i\tau(t)$$

quand t parcourt le segment $0,1$, P correspond à un ensemble parfait p de valeurs de t . Une portion de P sera l'homologue d'une portion de p . Une portion de p est un ensemble parfait p' coïncidant avec p sur l'intervalle joignant les points extrêmes de p' .

En particulier tout arc de γ en contient un autre rectifiable. Donc sur ce dernier arc, $F(z)$ est holomorphe. Par conséquent, si $F(z)$ n'était pas holomorphe en tout point de γ , les points de R où F n'est pas holomorphe formeraient un certain ensemble fermé (en y comprenant éventuellement les points extrêmes de γ) E situé sur γ et non dense sur γ .

E ne pourrait pas avoir de point isolé intérieur à R , puisque F est continu. Donc E serait parfait. Mais alors E contiendrait une portion rectifiable e . Soit ζ un point de e non extrême sur C . Dans un cercle c de centre ζ et de rayon petit, E n'aurait d'autres points que ceux de e . Donc dans c , F serait une fonction uniforme dont l'ensemble de singularités est de longueur finie. Cette fonction ne peut pas être continue dans c sans y être holomorphe (Painlevé).

Donc ζ n'existe pas. E n'a pas de point intérieur à R . F est holomorphe dans R .

3. Supposons maintenant que γ contienne au moins un ensemble parfait dont aucune portion n'est rectifiable. Alors, il suffit de se reporter aux résultats de M. Pompeiu et à ceux que j'ai publiés sur ce sujet, et d'autre part de se rappeler que par tout ensemble parfait discontinu on peut faire passer un arc γ de courbe simple de Jordan, pour voir immédiatement que F n'est plus nécessairement holomorphe dans la totalité de R .

Mais, si γ contient un arc rectifiable, F est holomorphe sur cet arc. F a dans R l'unité analytique de Weierstrass. Il est intéressant de voir comment F peut n'être holomorphe en aucun point de γ .

Nous distinguons un premier cas très simple, où tout arc de γ a une aire positive, puis celui où γ , ayant une longueur infinie en chacun de ses arcs, a cependant une aire nulle.

C'est aux arcs de cette dernière nature qu'est consacré essentiellement ce travail.

Dans une première Partie j'étudie le cas où γ est construit à partir d'ensembles parfaits obtenus par subdivision régulière indéfinie d'un carré. Cette étude bien qu'inédite n'est pas nouvelle. Elle développe des résultats que j'ai plusieurs fois énoncés depuis 1908 (1).

(1) Voir mes Notes *Sur les singularités discontinues des fonctions analyti-*

4. M. Lusin a posé la question suivante : Est-il possible que F ne soit holomorphe en aucun point de γ , dans le cas où γ n'est rencontré qu'en un point par une parallèle à une direction fixe, par exemple dans le cas où γ est le lieu du point $x + i\psi(x)$, pour $a \leq x \leq b$, $\psi(x)$ étant une fonction continue de x ?

La seconde partie de cet article est consacrée à l'étude de ce cas qui peut effectivement être réalisé.

Mais n'y a-t-il pas lieu pour un arc γ dont aucun arc partiel n'est rectifiable, d'envisager un ordre d'infinitude pour sa longueur ? Cet ordre étant supposé défini, intervient-il ou non pour classer les arcs γ en deux catégories suivant qu'une fonction $F(z)$ continue sur γ et holomorphe hors de γ peut ou non n'être holomorphe en aucun point de γ ?

Je propose pour les courbes $\gamma = \psi(x)$ une définition de l'ordre d'infinitude de leur longueur ou plutôt une définition de l'ordre d'infinitude de la variation totale $VT(\psi, a, b)$ de la fonction continue $\psi(x)$ sur un intervalle ab . Je considère, à l'échelle ω , mesurant l'ordre d'espace des points subdivisionnaires utilisés dans la définition du nombre $VT(\psi, a, b)$ quand ce nombre est fini, je considère une *variation totale supérieure* $V(\omega)$ et une *variation totale inférieure* $v(\omega)$, l'une et l'autre infinies avec $\frac{1}{\omega}$. J'évalue dans les cas rencontrés ces nombres $V(\omega)$ et $v(\omega)$ avec assez de précision pour pouvoir exactement comparer leurs ordres quand ω tend vers zéro.

J'étudie de ce point de vue les courbes γ , soit $x + i\psi(x)$ sur lesquelles j'ai démontré la continuité de la fonction

$$F(z) = \int_a^b \frac{d\xi}{\xi + i\psi(\xi) - z}.$$

Je constate que, pour ces courbes, la croissance de $V(\omega)$ ne peut pas descendre au-dessous d'un certain ordre minimum.

Je laisse ouverte la question de rechercher si la continuité sans holomorphie d'une fonction $F(z)$ est possible sur tout arc γ dont chaque arc partiel est non rectifiable, ou si elle est réservée

[comme pour les fonctions particulières $F(z)$ que j'examine] à des arcs γ de longueur « assez fortement » infinie.

PREMIÈRE PARTIE.

COURBES SINGULIÈRES QUELCONQUES.

5. Le résultat de M. Carleman me paraît appeler quelques observations.

Soit R une région du plan complexe. Dans R , soit Γ un ensemble fermé (à l'intérieur de R). Soit $G = R - \Gamma$ l'ensemble ouvert formé des points de R étrangers à Γ . Supposons que Γ vérifie les hypothèses suivantes : 1° Γ est la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'arcs simples $\gamma_{(n)}$ de Jordan (il en résulte que Γ est non dense dans R); 2° tout arc de Jordan γ appartenant à Γ en contient un autre γ_1 , ainsi conditionné : γ_1 rencontre en deux points m et n et en ces points seulement un contour fermé (dépendant de γ_1) simple de Jordan g , les autres points de γ_1 sont tous intérieurs à g , et Γ n'a ni sur g ni à l'intérieur de g d'autres points que ceux de γ_1 . Il en résulte que γ_1 divise l'intérieur de g en deux régions r et r' appartenant toutes deux à G .

Dans ces conditions, il est aisé de voir qu'une fonction $F(z)$ continue dans R et holomorphe dans G est déterminée dans tout R par la connaissance de cette fonction sur un arc σ (de Jordan), si petit soit-il, intérieur à R .

En effet, soit $\varphi(z)$ une seconde fonction vérifiant les mêmes conditions que F . Nous voulons montrer que $\psi(z) = \varphi(z) - F(z)$ est nul en tout point de R .

Montrons d'abord qu'il existe une région R_1 contenue dans C et, telle qu'en tout point de R_1 , on a $\psi = 0$. En effet, si σ a un point ζ dans G , ψ est holomorphe au point ζ et nul sur tout un arc passant par ζ . Donc $\psi = 0$ dans la région de G contenant ζ .

Supposons donc σ en totalité sur Γ . σ contient un arc γ_1 séparant, comme il est dit plus haut, deux régions r , r' de G . ψ étant nul sur γ_1 , le théorème de M. Carleman s'applique. ψ est nul dans r et dans r' . R_1 existe donc, contenant au moins r et r' . En outre la frontière de R_1 ne renferme pas la totalité de σ .

Je dis maintenant que ψ est nul dans la totalité de R . Si R_1 ne coïncide pas avec R , R_1 a une partie Γ_1 de sa frontière à l'intérieur de R . Sur Γ_1 , $\psi = 0$ puisque ψ est continu dans R . Γ_1 n'ayant aucun point dans G est entièrement situé sur Γ . Donc, d'après le raisonnement fait à l'instant sur σ , Γ_1 ne contient aucun arc de Jordan.

Mais si R_1 n'est pas identique à R , il y a des points de R où $\psi(z) \neq 0$. Ces derniers points forment donc des régions. *A fortiori* le complémentaire de $R_1 + \Gamma_1$ dans R , soit G_1 , contient des régions. Soit R'_1 l'une d'elles. Tout point frontière de R'_1 est en même temps frontière de R_1 . Donc, si Γ'_1 est la frontière de R'_1 (intérieure à R), par tout point de Γ'_1 il passe un continu cantorien situé dans Γ_1 . Or $\Gamma = \Sigma \gamma_{(n)}$, chaque $\gamma_{(n)}$ étant un arc de Jordan. Si donc, $\Gamma'_1 \cdot \gamma_{(n)} = \gamma'_{(n)}$ est l'ensemble commun à $\gamma_{(n)}$ et à Γ'_1 , on a $\Gamma'_1 = \Sigma \gamma'_{(n)}$. $\gamma'_{(n)}$ est fermé (à l'intérieur de R). Il n'est pas possible que tous les $\gamma'_{(n)}$ soient non denses sur Γ'_1 . Il existe donc au moins un n tel que $\gamma'_{(n)}$ et Γ'_1 coïncident dans un cercle ayant pour centre un de leurs points communs. Puisque par ce point passe un continu situé dans Γ_1 , donc dans $\gamma'_{(n)}$ et enfin dans $\gamma_{(n)}$, ce continu est un arc de $\gamma_{(n)}$. Or un tel arc de Jordan sur lequel $\psi = 0$ ne peut pas être en totalité sur la frontière de R_1 . D'où la contradiction annoncée. R_1 est identique à R .

Ainsi, dans l'hypothèse admise, les valeurs de $F(z)$ aux divers points de R présentent une sorte de solidarité analytique plus générale que celle que réalise le prolongement analytique de Weierstrass, mais aboutissant cependant à la parfaite détermination de la fonction dans toute la région R par sa connaissance sur un élément d'arc intérieur à R .

Mais il résulte des recherches de MM. Lusin et Priwaloff (*loc. cit.*) qu'un arc de Jordan γ sur lequel $f(z)$ est continu peut appartenir à la fois à la frontière de deux régions r et r' où f est holomorphe, être accessible en chacun de ses points à partir de r et de r' , sans que les valeurs de f de part et d'autre de γ soient solidaires. En ce cas, tout point de γ est limite d'éléments étrangers à γ et frontières de l'une au moins des deux régions r et r' .

Nous donnerons un exemple de ce cas, avec un ensemble singulier Γ somme d'une infinité dénombrable d'arcs de Jordan. Nous montrerons encore un cas de non-détermination, Γ étant constitué

par une famille de courbes analogues à des cercles concentriques admettant un cercle limite sur lequel $f = 0$.

6. On connaît, depuis un exemple de M. Osgood, des courbes γ dont chaque arc possède une aire positive. Soient S l'aire de l'arc de γ d'extrémités a et ζ , et α l'aire totale de γ . ζ est une fonction bien déterminée et continue du paramètre réel S variant de 0 à α . L'intégrale

$$\int_0^\alpha \frac{dS}{\zeta - z} = F(z)$$

est une fonction holomorphe en tout point z étranger à γ . Soient K un carré contenant γ et de côté l , ζ un point parcourant K , r et r' la distance de deux points z et z' à ζ . D'après la théorie du potentiel l'intégrale $F(z)$ a un sens même si z est sur γ et l'on a

$$|F(z)| < \int_K \frac{dS}{r}.$$

D'autre part,

$$|F(z') - F(z)| < \int_K \frac{|z' - z|}{rr'} dS.$$

Soit $|z - z'| = 2a$. Nous augmentons l'intégrale du second membre en l'étendant au cercle K' de centre 0 et de rayon $l\sqrt{2}$ avec $z = a$, $z' = -a$. La borne obtenue ainsi est $2a\omega$ avec

$$\omega = \int_0^{\frac{l}{a^2}} du \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{u^2 - 2u \cos \varphi + 1}}.$$

Soit h la valeur de ω pour $l = a$. On a *a fortiori*

$$\omega < h + 4\pi \int_1^{\frac{l}{a^2} + 1} \frac{du}{u} = h + 4\pi \log \left[1 + \frac{8l^2}{|z - z'|^2} \right],$$

quels que soient z et z' . $F(z)$ est uniformément continue dans tout le plan, sur γ comme hors de γ .

7. Abordons maintenant le cas où tout au moins certains arcs de γ ont une aire nulle. Des raisonnements depuis longtemps classiques nous permettront d'étudier ce cas.

$F(z)$ étant continue dans R qui contient γ , soit ζ un point de γ . Soit K un carré de centre ζ contenu lui aussi dans R . $F(z)$ est continu dans la totalité de K , y compris son contour et est holomorphe dans l'ensemble ouvert $K - \gamma = H$.

Soit z un point de H . Nous décomposons K en p^2 carrés k égaux. Soit δ leur côté. Nous supposons δ inférieur à la demi-distance de z à γ . Distinguons les carrés k en deux sortes, les k_1 dont l'intérieur est dans H et les k_2 qui renferment à leur intérieur au moins un point de γ . z est en général intérieur à un et à un seul carré k_1 , mais z peut aussi appartenir à deux ou à quatre k_1 . En ce cas, nous groupons en un rectangle ou en un carré unique les deux ou quatre carrés k_1 contenant z . Cela posé, nous effectuons la somme

$$\sum \frac{1}{2i\pi} \int_k \frac{F(u)}{u-z} du$$

étendue à tous les k , deux ou quatre d'entre eux pouvant être groupés comme nous venons de le dire.

Cette somme vaut

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{k_2} \frac{F(u)}{u-z} du = \Omega(z).$$

D'autre part, l'intégrale étendue à l'un des k_1 est nulle si z est extérieur à k , elle vaut $F(z)$ pour l'unique carré k_1 ou groupe de carrés k_1 contenant z . Donc

$$F(z) = \Omega(z) - \sum \frac{1}{2i\pi} \int_{k_1} \frac{F(u)}{u-z} du.$$

Soit n le nombre des carrés k_2 et soit $\omega(\delta)$ le maximum de $|F(z') - F(z)|$ si $|z - z'| \leq \delta$, z et z' étant dans K . On voit immédiatement que si $F(z)$ n'est pas holomorphe dans K , $n\delta\omega(\delta)$ ne doit pas tendre vers zéro.

Quand γ a une aire positive α , le produit $n\delta^2$ tend vers α quand δ tend vers zéro. *A priori*, il n'est pas impossible que $F(z)$ sans être holomorphe sur γ vérifie dans K la condition classique de Lipschitz $\omega(\delta) < h\delta$ (h indépendant de δ).

Mais si $F(z)$ est singulier sur la partie de γ intérieure à K et si l'aire de cette partie de γ est nulle, alors le rapport $\frac{F(z') - F(z)}{z' - z}$

ne peut pas être borné dans K . On voit même que $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ doit être infiniment grand avec $\frac{1}{\delta}$.

Mais puisque $\omega(\delta)$ tend vers zéro avec δ , $n\delta$ doit être infiniment grand avec $\frac{1}{\delta}$, si F n'est pas holomorphe sur γ . Donc, *la longueur de tout arc de γ doit être infinie.*

8. Envisageons ce cas. La question suivante se pose donc à nous : γ ayant une aire nulle, mais une longueur infinie, $F(z)$ holomorphe hors de γ peut-elle être continue sur γ sans être holomorphe sur γ ? Formons un exemple de ce cas.

Soit C_0 le carré défini par son côté $z = 0$, $z = 1$ parcouru dans le sens positif relativement à C_0 . De C_0 retenons quatre carrés égaux C_1 , de côtés

$$\delta_1 = \frac{1-\theta}{2},$$

en excluant de C_0 deux bandes parallèles aux axes et de largeur commune θ ($0 < \theta < 1$). Soit E_1 la réunion des quatre carrés C_1 .

Avec le même facteur de proportionnalité θ entre la largeur des bandes et le côté des carrés à éviter, nous excluons de chaque carré C_1 des bandes parallèles aux axes. Nous obtenons 16 carrés C_2 ; et ainsi indéfiniment. A la $n^{\text{ième}}$ opération, nous avons réservé 4^n carrés C_n égaux, de côté

$$\delta_n = \delta_1^n = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^n.$$

Désignons par E_n la réunion de ces 4^n carrés C_n . E_n contient E_{n+1} .

Soit E l'ensemble parfait commun aux E_n . Le périmètre total de E_n est $(2 - 2\theta)^n$. Nous dirons que E a une longueur infinie, finie ou nulle, selon que $\theta < \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\theta > \frac{1}{2}$.

Cela posé, formons la valeur moyenne de $\frac{1}{\zeta - z}$ quand ζ parcourt E_n . Dans chacun des C_n prenons un point ζ_n et considérons

$$\frac{1}{4^n} \sum \frac{1}{\zeta_n - z} = U_n(z).$$

Je dis que, si z est extérieur à E , cette moyenne tend, quand n

croît, vers une limite $U(z)$, indépendante du choix des ζ_n et holomorphe hors de E .

Si z est étranger à E , z n'appartient pas à E_n pour toute valeur de n . Soit $n_0 = n_0(z)$ le plus petit entier tel que z est extérieur à E_{n_0+1} . Soit d la distance de z à E_{n_0+1} . Pour $n > n_0$, on a $|\zeta_n - z| > d$. Donc, $|U_n(z)| < 1/d$.

Par suite l'ensemble des nombres $U_n(z)$ a au moins une valeur limite quand n croît. z reste invariable. Pour montrer que cette limite est indépendante du choix des ζ_n , il suffit de constater que $|U_{n+p}(z) - U_n(z)|$ tend vers zéro quand n croît, quel que soit le choix des ζ_n et des ζ_{n+p} .

En effet, de même que chaque carré C_n donne naissance à 4^p carrés C_{n+p} contenus dans celui-là, pareillement, chaque terme $\frac{1}{4^n} \frac{1}{\zeta_n - z}$ de $U_n(z)$ est remplacé dans U_{n+p} par 4^p termes tels que

$$\frac{1}{4^{n+p}} \frac{1}{\zeta_{n+p} - z}.$$

Or

$$\left| \frac{1}{\zeta_n - z} - \frac{1}{\zeta_{n+p} - z} \right| < \frac{|\zeta_{n+p} - \zeta_n|}{d^2},$$

et comme ζ_n et ζ_{n+p} sont dans le même carré C_n , le numérateur est inférieur à $\sqrt{2} \delta_n$. Cette différence reçoit le coefficient $\frac{1}{4^{n+p}}$ et elle est répétée 4^{n+p} fois. Finalement

$$|U_{n+p}(z) - U_n(z)| < \frac{\sqrt{2} \delta_n}{d^2}.$$

Par suite, quel que soit le choix des ζ_n dans les C_n , $U_n(z)$ tend vers une limite $U(z)$, pourvu que z soit étranger à E . On voit en même temps que $U_n(z)$ converge uniformément vers sa limite dans tout domaine fermé sans point commun avec E . Donc $U(z)$ est holomorphe hors de E . Enfin le produit $U(z)$ tend vers -1 pour z infini, en sorte que $U(z)$ n'est pas identique à zéro.

9. Montrons maintenant que si $\theta < \frac{1}{2}$, $U(z)$ reste *continu* sur E .

Considérant les quatre carrés C_n déduits d'un même carré C_{n-1} , désignons par C'_n les carrés respectivement concentriques et homothétiques aux C_n envisagés, mais admettant chacun pour l'un de

ses sommets le centre du carré générateur commun C_{n-1} . Les C'_n ont leur côté égal à $\delta_n \frac{1+\theta}{1-\theta}$. Un point extérieur à un C'_n est à une distance du C_n concentrique, supérieure à

$$\frac{1}{2} \left(\delta_n \frac{1+\theta}{1-\theta} - \delta_n \right) = \delta_n \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Les 4^n carrés C'_n , pour une même valeur de n , sont deux à deux dépourvus de points intérieurs communs. Un point z est donc intérieur à un carré C'_n au plus. Nous désignerons celui-ci par $C'_n(z)$, quand il existe, et par $C_n(z)$ le carré C_n concentrique à $C'_n(z)$. Si z n'appartient pas à E , $C_n(z)$ ne peut pas exister quel que soit n . Soit n_1 tel que $C_{n_1}(z)$ existe, mais non pas $C_{n_1+1}(z)$. On a

$$n_1 = n_1(z) \geq n_0(z).$$

Si z est dans E , nous dirons que

$$n_1(z) = n_0(z) = \infty.$$

Cela étant, quel que soit z appartenant à E ou étranger à E , posons

$$V_n(z) = \frac{1}{4^n} \sum' \frac{1}{\zeta_n - z},$$

la somme Σ' étant étendue, pour n donné, aux 4^n carrés C_n , exception faite éventuellement du carré $C_n(z)$ quand celui-ci existe.

Si z est étranger à E , on a

$$V_n(z) = U_n(z) \quad \text{pour } n \geq n_1 + 1$$

et alors

$$\lim_{n=\infty} V_n(z) = U(z).$$

Nous allons montrer que, quel que soit z , $V_n(z)$ tend vers une limite que nous désignerons dans tous les cas par $U(z)$. Nous montrerons ensuite la continuité de cette fonction $U(z)$ définie dans tout le plan complexe.

Établissons d'abord que $|V_n(z)|$ est borné indépendamment de z et de n .

En effet, z étant donné, plaçons dans chaque carré C_n concou-

rant à Σ' le point ζ_n en la position ζ'_n la plus proche de z , et soit

$$\omega_n(z) = \frac{1}{4^n} \sum' \frac{1}{|\zeta'_n - z|}.$$

Évidemment

$$\omega_n(z) > |V_n(z)|.$$

Si nous augmentons n d'une unité, chaque terme $\frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{|\zeta'_n - z|}$ de $\omega_n(z)$ est remplacé dans $\omega_{n+1}(z)$ par quatre termes $\frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{|\zeta'_{n+1} - z|}$. Les quatre points ζ'_{n+1} figurant dans ces termes appartiennent respectivement aux quatre carrés C_{n+1} retenus dans ce C_n . Donc

$$|\zeta'_{n+1} - z| \geq |\zeta_n - z|$$

(l'égalité ayant lieu pour un au plus des quatre carrés C_{n+1}). Ainsi chaque terme de $\omega_n(z)$ est remplacé dans $\omega_{n+1}(z)$ par un nombre moindre. Donc, si $C_n(z)$ n'existe pas, si tous les C_n sont représentés dans $\omega_n(z)$, on a

$$\omega_{n+1}(z) < \omega_n(z).$$

Ceci se produit quand z est étranger à E avec $n \geq n_1 + 1$. A partir de cette valeur de n , $\omega_n(z)$ ne cesse de décroître.

Si z est étranger à E avec $n \leq n_1$, ou si z est dans E , $C_n(z)$ existe et n'est pas représenté dans $\omega_n(z)$. Au contraire, les trois (si $n < n_1$) ou les quatre (si $n = n_1$) carrés C_{n+1} provenant de la décomposition de $C_n(z)$ sont représentés dans $\omega_{n+1}(z)$. z n'étant dans aucun des C'_{n+1} concentriques à l'un de ces mêmes C_{n+1} , la distance de z à chacun de ces derniers surpasse $\frac{0}{1-\theta} \delta_{n+1}$, comme nous l'avons vu. Donc, pour $n \leq n_1$,

$$\omega_{n+1}(z) < \omega_n(z) + \frac{1}{4^n} \frac{1-\theta}{\theta} \frac{1}{\delta_{n+1}} = \omega_n(z) + \frac{2}{\theta(2-2\theta)^n}.$$

D'ailleurs $\omega_1(z) < \frac{2}{\theta}$. Finalement

$$\omega_n(z) < \frac{2}{\theta} \sum_0^{n-1} \frac{1}{(2-2\theta)^m}.$$

Introduisons maintenant l'hypothèse $\theta < \frac{1}{2}$ (longueur de E infinie). Alors, la série $\Sigma(2-2\theta)^{-m}$ converge, et dans cette

hypothèse

$$\omega_n(z) < \frac{4(1-\theta)}{\theta(1-2\theta)} = \eta \quad (1).$$

Donc $|V_n(z)| < \eta$ quel que soit z étranger à E ou situé sur E .
En particulier, cette borne s'applique à $U(z)$ si z est étranger à E .

10. Montrons maintenant l'existence et la continuité de $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(z)$ quand z est sur E .

Considérons un certain carré C_k déterminé. n surpassant k , formons la somme

$$V_{k,n}(z) = \frac{1}{4^n} \sum_{(k)}' \frac{1}{\zeta_n - z}$$

(1) Si l'on suppose que tout carré C_n de côté δ_n se remplace par quatre carrés C_{n+1} de côtés $\delta_{n+1} = \frac{1-\theta}{2} \delta_n$, et si l'on exclut de la somme Σ , pour n donné, la contribution de tous les carrés distants de z de moins de δ_n , on exclut au plus neuf termes, et l'on en déduit

$$\omega_{n+1}(z) < \omega_n(z) + \frac{36}{4^{n+1}} \cdot \frac{1}{\delta_{n+1}}.$$

La condition que E ait un périmètre infini est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \delta_n = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n (2 - 2\theta_n) = \infty,$$

La somme $\sum' \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{|\zeta_n - z|}$ sera bornée et $U(z)$ sera continue sur E , si en outre la série $\sum \frac{1}{4^n \delta_n}$ converge.

Soit $L(\omega)$ le périmètre total des carrés contenant E dans un quadrillage de côté ω . La condition précédente équivaut à la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\alpha \frac{d\omega}{\omega L(\omega)}.$$

Dans les mêmes conditions, tout le reste du chapitre subsiste. On construit une courbe Γ pour laquelle

$$(20) \quad T(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

est continue sur Γ avec $\int_0^1 \frac{|\varphi(\xi)| d\xi}{|\xi - z|}$ borné, l'intégrale $\int_0^\alpha \frac{d\omega}{\omega L(\omega)}$ étant convergente, mais aussi lentement qu'on le veut. Dans cette dernière expression, le périmètre $L(\omega)$ est relatif à Γ .

étendue aux seuls C_n contenus dans le carré C_k considéré, $C_n(z)$ étant toujours exclu de la sommation s'il existe et s'il est dans C_k . En raisonnant comme ci-dessus, on trouve quel que soit z , appartenant ou non à C_k ,

$$|V_{k,n}(z)| < \frac{2}{\theta} \sum_k^{n-1} \frac{1}{(\varrho - 2\theta)^{n-k}} < \frac{\tau_k}{(\varrho - 2\theta)^k} = \tau_k;$$

τ_k tend vers zéro quand k croît.

Cela posé, je dis que $V_n(z)$ tend vers une limite quand n croît, même si z est sur E.

Soit en effet ε positif donné. Nous pouvons prendre k assez grand pour que $\tau_k < \frac{\varepsilon}{3}$; k dépend de ε seul et restera invariable avec ε . z étant dans E appartient à l'un des C_k . Celui-ci est le carré déjà désigné par $C_k(z)$. C'est relativement à ce carré $C_k(z)$ que nous définissons le nombre $V_{k,n}(z)$ envisagé plus haut. $C_n(z)$ existe et est dans $C_k(z)$ ($n > k$). z est extérieur aux $4^k - 1$ carrés C_n autres que $C_k(z)$. Tous les C_n situés dans l'un de ces derniers C_k sont représentés dans $V_n(z)$ par des termes $\frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{\varrho - z}$ dont la somme est un certain nombre $W_{k,n}(z)$. On a

$$V_n(z) = V_{k,n}(z) + W_{k,n}(z).$$

D'après le premier cas étudié (z étranger à E), $W_{k,n}(z)$ tend, quand n croît, vers une limite $W_k(z)$ indépendante du choix des ζ_n dans les C_n correspondants [étrangers à $C_k(z)$]. Il existe donc un nombre $N > k$ tel que, si n et $n' > N$,

$$|W_{k,n'}(z) - W_{k,n}(z)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

quel que soient les choix des ζ_n et des $\zeta_{n'}$ respectivement dans les C_n et les $C_{n'}$ étrangers à $C_k(z)$.

D'après

$$V_n(z) = V_{k,n} + W_{k,n}, \quad V_{n'}(z) = V_{k,n'} + W_{k,n'}, \quad |V_{k,n}| \quad \text{et} \quad |V_{k,n'}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

on en conclut

$$|V_{n'}(z) - V_n(z)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n, n' > N,$$

quel que soit le choix des ζ_n , $\zeta_{n'}$ respectivement dans tous les carrés C_n et $C_{n'}$ représentés dans les sommes $V_n(z)$ et $V_{n'}(z)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(z)$ existe, même si z est dans E. Comme nous l'avons dit, nous désignons encore par $U(z)$ cette limite.

Appliquons ce résultat à la fonction $V_{k,n}(z')$ définie quel que soit z' , relativement au carré particulier C_k identique à $C_k(z)$. Il en résulte que, k restant fixe et n croissant, $V_{k,n}(z')$ tend vers une limite $V^{(k)}(z')$, quel que soit z' . En outre,

$$|V^{(k)}(z')| \leq \tau_k < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit d_k la plus petite des demi-distances de deux carrés C_k quelconques ($d_k = \theta \delta_k$). Supposons $|z' - z| < d_k$. z' est extérieur à tous les C_k distincts de $C_k(z)$. On a donc

$$V_n(z') = V_{k,n}(z') + W_{k,n}(z')$$

et, passant à la limite,

$$U(z') = V^{(k)}(z') + W_k(z').$$

Mais quand n croît, $W_{k,n}(z')$ converge uniformément dans le cercle $|z' - z| < d_k$. $W_k(z')$ est donc continu dans ce cercle. Soit δ positif inférieur à d_k tel que l'inégalité $|z' - z| < \delta$ entraîne

$$|W_k(z') - W_k(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dès lors

$$|U(z') - U(z)| < \varepsilon \quad \text{si } |z' - z| < \delta.$$

La continuité de $U(z)$ est donc établie même quand z est dans E. Donc $U(z)$ est continue dans tout le plan. Observons que $U(z)$ étant nul à l'infini, $|U(z)|$ atteint son maximum sur E.

$U(z)$ n'étant pas identique à zéro admet au moins un point singulier dans C_0 . Mais la même conclusion vaut pour tout carré C_k . Donc tous les points de E sont singuliers pour $U(z)$.

11. Les propriétés de $U(z)$ vont nous permettre de répondre aux questions laissées en suspens au n° 5. Considérons la fonction

$$f(z) = \prod_1^{\infty} (1 - z^{2^n} z^{1^n}) = \prod_1^{\infty} t_n(z).$$

Le produit infini converge absolument dans le cercle c défini par $|z| < 1$.

Soit C_n la région des points $z = re^{i\theta}$ vérifiant

$$1^\circ \quad r_{n-1} < r < r_n \quad \text{si } 1 = 2^{2^n} r_n^{4^n},$$

et

$$2^\circ \quad |t_n(z)| = |1 - 2^{2^n} z^{4^n}| > 4^n 2^{-2^n}.$$

Cette dernière condition exclut du plan complexe 4^n orbes égaux γ_n , coïncidant sensiblement avec des cercles de centres $r_n e^{\frac{2ik\pi}{4^n}}$ et de rayon $2^{-2^n+1} r_n$.

Le minimum de $|f(z)|$ dans C_n est sur la frontière de C_n . Plaçons-nous d'abord sur le bord extérieur β_n'' . Posons

$$g_n(z) = \prod_1^{n-1} t_m(z), \quad h_n(z) = \prod_{n+1}^{\infty} t_m(z).$$

Des calculs élémentaires donnent pour

$$|z| \geq r_n, \quad |g_n(z)| > 2^{2^n-3};$$

pour

$$|z| \leq r_n, \quad |h_n(z)| > \frac{1}{2}.$$

Donc aux points de β_n'' où $|z| = r_n$,

$$|f(z)| > 2^{2^n-4} \cdot 4^n \cdot 2^{-2^n} = 4^{n-2}.$$

Sur les parties de β_n'' appartenant aux orbes γ_n , la modification relative maximum subie par $|z|$ est équivalente à 2^{-2^n+1} . Elle n'altère le produit

$$\prod' t_m (m \neq n)$$

que d'un facteur infiniment voisin de 1 quand n croît.

Donc $|f(z)| > A 4^n$ sur β_n'' , A étant indépendant de n . On voit d'une façon analogue que sur le bord intérieur β_n' de C_n ,

$$|f(z)| > A \cdot 4^{n-1}.$$

Donc $\frac{1}{f(z)}$ tend vers zéro avec $1 - |z|$ dans la région obtenue en retranchant de c l'intérieur des 4^n orbes γ_n , pour toutes les valeurs de n .

II bis. Désignons par $U(z, E)$ la fonction

$$U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \sum' \frac{1}{\zeta_n - z}$$

définie ci-dessus (8) et relative à l'ensemble parfait E inscrit dans C₀. Soient g le cercle circonscrit à C₀, ζ son centre.

On a $|U(z, E)| < \eta$ quel que soit z.

D'autre part, soient z extérieur à g. Si u parcourt l'intérieur de g, $\frac{1}{u-z}$ parcourt un cercle, qui contient par conséquent le point moyen U(z), et par suite $\frac{1}{U(z, E)}$ est un point du cercle u - z, u étant dans g. C'est donc *a fortiori* $\zeta - z + \delta$, avec $|\delta| < 1$; par suite

$$U(z, E) = \frac{1}{\zeta - z + \delta}.$$

Cette relation nous servira si $|\zeta - z| > 2$. Dans ce cas, elle entraînera toujours

$$\frac{2}{3} < |\zeta - z| |U(z, E)| < 2.$$

Pour $|\zeta - z| \leq 2$, nous nous en tenons à $|U(z, E)| < \eta$.

Soient maintenant E' un ensemble parfait semblable à E, C' et g' son carré et son cercle circonscrits, ζ' son centre. Une transformation $z = a + lz_1 e^{i\alpha}$ change E' parcouru par z en E parcouru par z₁. l est le côté de C'.

Soit

$$U(z, E') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \frac{1}{\zeta'_n - z},$$

ζ'_n parcourant les 4ⁿ carrés égaux élémentaires contenant E' dans la construction-type. On a évidemment

$$U(z, E') = \frac{e^{-i\alpha}}{l} U\left(e^{-i\alpha} \frac{z-a}{l}\right).$$

D'où $|U(z, E')| < \frac{\eta}{l}$ quel que soit z, et, si $|z - \zeta'| > 2l$,

$$U(z, E') = \frac{1}{\zeta' - z + \delta l} \quad \left[\text{en particulier } \frac{2}{3} < |\zeta' - z| |U(z, E')| < 2 \right].$$

Donc, si petits que soient α et ε positifs, nous pouvons, avec une erreur relative qui reste inférieure à ε hors du cercle

$$|z - \zeta'| < \alpha,$$

remplacer la fonction $\frac{1}{z-z}$ de z par une fonction continue dans tout le plan, holomorphe hors de ce petit cercle, ayant pour singularité un ensemble totalement discontinu d'aire nulle.

Telle est la remarque utilisée ci-après.

12. Considérons le cercle g_n défini par $|1-u| \leq 4^{n-1} 2^{-2^n} \sqrt{2}$. Dans g_n inscrivons un carré C_n de côtés parallèles ou perpendiculaires à l'axe réel, et dans C_n un ensemble parfait e_n semblable à E . Le côté de C_n est $t_n = 2 \cdot 4^{n-1} \cdot 2^{-2^n}$. Posons

$$U_n(z) = U(2^{2^n} z^{4^n}, e_n).$$

On a, pour $|1 - 2^{2^n} z^{4^n}| \geq 4^n \cdot 2^{-2^n}$, donc en dehors des orbés γ_n ,

$$U_n(z) = \frac{1}{1 - 2^{2^n} z^{4^n} + 2 \delta_n \cdot 4^{n-1} 2^{-2^n}} \quad (\delta_n < 1),$$

et, si $|1 - 2^{2^n} z^{4^n}| \leq 4^n \cdot 2^{-2^n}$, donc à l'intérieur des orbés γ_n et sur elles, $U(z) < 2 \cdot 2^{2^n} 4^{-n}$.

Soit

$$F(z) = \prod_1^{\infty} U_n(z).$$

Dans chaque couronne C_n et sur son contour, $F(z)$ est holomorphe. Son maximum est atteint sur ce contour. Si l'on considère par exemple le bord extérieur β_n'' , chacun des produits $\prod_1^{n-1} U_m$,

$\prod_{n+1}^{\infty} U_m$ équivaut respectivement à $g_n(z)$ et à $h_n(z)$. D'autre part,

$$\frac{2}{3} < |U_n(z) t_n(z)| < 2$$

hors de γ_n . Donc, $F(z)$ tend vers zéro comme $\frac{1}{f(z)}$, avec $1 - |z|$, z évitant tous les γ_n . Mais à l'intérieur d'un γ_n , U_n reste continu et sa borne supérieure γ est la même que celle de $\frac{1}{t_n(z)}$ sur le contour γ_n , à un facteur borné près. Donc $F(z)$ est partout continu, singulier sur les ensembles parfaits $e_{n,\mu}$ déduits de e_n décrit par u par la transformation $z = 2^{-2^n} u^{4^n}$, ces ensembles $e_{n,\mu}$ de longueur infinie étant situés à l'intérieur des divers γ_n . Enfin $F(z)$ converge uniformément vers zéro avec $1 - |z|$.

MM. Lusin et Priwaloff (*loc. cit.*) ont les premiers donné un exemple de fonctions de cette nature. Ici l'aire totale des singularités est nulle.

On pourrait joindre les ensembles $e_{n,\mu}$ correspondant à une même valeur de n par une chaîne d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits $\eta_{n,m}$ semblables à E , comme dans la construction donnée plus loin (17-18), de façon qu'après adjonction des points limites on ait une courbe de Jordan simple Λ_n d'aire nulle, s'écartant peu du bord extérieur β''_n de C_n . A chacun de ces ensembles parfaits, et pour toutes les valeurs de n on attache une fonction continue $\varphi_{n,m}(z)$ proportionnelle à $U(z, \eta_{n,m})$, holomorphe hors de $\eta_{n,m}$, bornée en module par 1. La fonction égale dans c à

$$F(z) \prod_{n,m}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n^2 m^2} \varphi_{n,m}(z) \right],$$

nulle hors de c et sur c , est continue dans tout le plan. Elle admet une famille de lignes singulières sensiblement concentriques Λ_n tendant vers le cercle c et, sauf sur les Λ_n et c , elle est holomorphe. Le fait qu'elle s'annule sur c montre, comme MM. Lusin et Priwaloff l'ont signalé, que les conditions géométriques réalisées par l'ensemble des lignes singulières Λ_n excluent la possibilité de la détermination d'une fonction analytique par ses valeurs sur un arc élémentaire.

Cette même impossibilité subsistera si l'on dispose les $\eta_{n,m}$ de façon à former des courbes de Jordan simples fermées $\gamma_{n,\mu}$, chacune intérieure à un orbe γ_n et y contenant l'ensemble $e_{n,\mu}$ correspondant. Chaque point de c serait alors accessible à partir de la région V obtenue en retranchant de c l'intérieur de tous les $\gamma_{n,\mu}$.

Ces exemples, peut-être un peu plus simples que ceux de MM. Lusin et Priwaloff, mais n'ajoutant rien d'essentiellement nouveau à la question par eux traitée, montrent la difficulté d'élargir les hypothèses dans la proposition du n° 5.

Revenons à l'étude de la fonction $U(z, E)$.

13. Observons que le calcul définissant $U(z)$, du moins pour z étranger à E , est une intégration de Stieltjes.

A E nous allons faire correspondre ponctuellement un ensemble

parfait η épais situé sur un arc rectiligne $O\xi$, et nous attribuerons à toute portion de E une mesure conventionnelle égale à la mesure naturelle (selon Borel-Lebesgue), de la portion correspondante de γ .

Soit $\Sigma\theta_n$ une série convergente à termes positifs décroissants avec $\theta_1 < 1$.

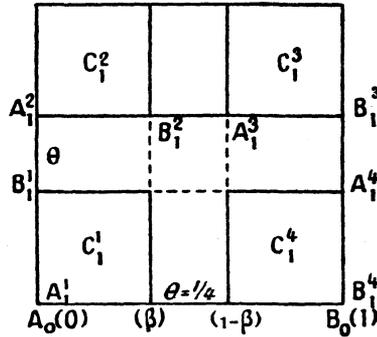
Au carré C_0 du plan des z faisons correspondre le segment $0, 1$ ou σ_0 de l'axe des ξ . Aux points $A_0(0)$ et $B_0(1)$ regardés respectivement comme l'origine et l'extrémité de C_0 , correspondront de même les points 0 et 1 de σ_0 .

Nous divisons σ_0 en sept parties, savoir quatre segments égaux σ , séparés par trois intervalles égaux i , de façon que $3i = \theta$, d'où

$$\sigma = \frac{1 - \theta}{4}.$$

Aux quatre σ , numérotés dans l'ordre de leur rencontre sur

Fig. 1.



l'axe $O\xi$ parcouru positivement, savoir $\sigma_1^1, \sigma_1^2, \sigma_1^3, \sigma_1^4$, nous faisons respectivement correspondre les quatre carrés C_1 , soient $C_1^1, C_1^2, C_1^3, C_1^4$ dont les origines et extrémités respectives sont

$$\begin{aligned} A_1^1(0) &\equiv A_0 \text{ et } B_1^1(i\beta) && \text{pour } C_1^1; \\ A_1^2(\overline{1-\beta}i) &\text{ et } B_1^2[\beta + (1-\beta)i] && \text{pour } C_1^2; \\ A_1^3[(1-\beta)(1+i)] &\text{ et } B_1^3[1 + (1-\beta)i] && \text{pour } C_1^3; \\ A_1^4(1+\beta i) &\text{ et } B_1^4(1) && \equiv B_0 \text{ pour } C_1^4. \end{aligned}$$

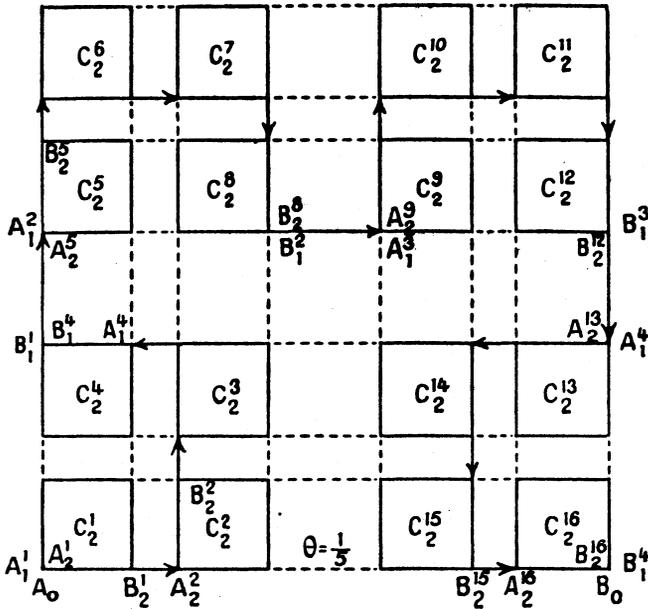
Origines et extrémités des segments et des carrés de mêmes indices se correspondent respectivement (*fig. 1*).

Par une transformation analogue à celle de σ_0 en les quatre σ_1 et appliquée à chacun des segments σ_1^i , nous changeons celui-ci en quatre segments égaux σ_2 séparés par trois intervalles égaux i_2 de longueur totale $\theta_2 \sigma_1$, en sorte que chaque σ_2 est égal à

$$\frac{1}{16} (1 - \theta_1) (1 - \theta_2).$$

La substitution au carré C_1^i de quatre carrés C_2 est géométriquement semblable (avec correspondance respective de l'origine et de l'extrémité de C_1^i à A_0 et à B_0) à la substitution à C_0 des quatre C_1 . Nous conservons cette similitude pour l'ordre de succession des

Fig. 2.



quatre carrés C_2 déduits de C_1^i et pour le choix d'une origine et d'une extrémité pour chacun de ces carrés C_2 (fig. 2).

On fait correspondre ensuite les σ_2^j et les C_2^j de même rang (indice supérieur), les origines et extrémités de σ_2^j et de C_2^j étant respectivement homologues.

On continue de proche en proche. Si un carré C_2^p d'extré-

mités A_q^p, B_q^p a été défini comme homologue au segment σ_q^p , on remplace C_q^p par quatre carrés C_{p+1} , semblablement à la substitution à C_0 des quatre carrés C_1 , A_q^p étant homologue de A_0 et B_q^p de B_0 . Par là même, l'ordre de succession des quatre carrés C_{q+1} déduits de C_q^p et le choix de l'origine et de l'extrémité de chacun d'eux sont définis.

Pareillement on divise σ_q^p en quatre segments égaux σ_{q+1} séparés par trois intervalles égaux i_{q+1} avec $3 i_{q+1} = \theta_{q+1} \sigma_q$, d'où

$$4 \sigma_{q+1} = (1 - \theta_{q+1}) \sigma_q.$$

Le numérotage des σ_{q+1} se fait suivant leur ordre géométrique; les σ_{q+1} correspondent aux C_{q+1} de même rang, avec correspondance respective entre les origines et les extrémités déjà définies. Soit ω_q la réunion des 4^q segments σ_q pour une valeur définie de q .

L'ensemble ω commun à tous les ω_q est parfait. Les points de ω et ceux de E se correspondent continûment. ω a pour mesure

$$\prod_1^{\infty} (1 - \theta_q) = l$$

qui est non nul, d'après $\Sigma \theta_q$ fini.

Soit ξ , dans l'ensemble ω , l'homologue du point ζ de E . ζ est une fonction de ξ , définie et continue sur ω . On vérifie immédiatement l'égalité

$$lU(z) = \int_{\omega} \frac{d\xi}{\zeta - z}.$$

14. Nous allons maintenant faire passer par E une courbe simple Γ dont chaque arc renfermera un ensemble analogue à E , et relativement à Γ nous définirons une fonction $F(z)$ continue dans tout le plan et singulière seulement sur Γ .

Définissons une première courbe auxiliaire Γ_0 contenant E . Nous introduisons pour cela les segments rectilignes $B_q^{p-1} A_q^p$ joignant l'extrémité de C_q^{p-1} à l'origine de C_q^p (*fig. 2*). La représentation paramétrique correspondante s'obtiendra en faisant correspondre linéairement à z décrivant $B_q^{p-1} A_q^p$ le point ξ décrivant l'intervalle contigu à l'ensemble η et joignant l'extrémité de σ_q^{p-1} à l'origine de σ_q^p .

Si l'on suppose établis les segments de jonction pour les C_n

avec $n < q$, il est aisé de voir que l'introduction du système de segments de jonction relatifs aux C_q conserve les segments déjà placés. Car si C_q^{p-1} et C_q^p sont dans un même carré C_{q-1}^i , le segment joignant C_q^{p-1} à C_q^p est en totalité sur le contour ou à l'intérieur de C_{q-1}^i . Il n'a pu être déjà placé. Si C_q^{p-1} et C_q^p appartiennent à deux C_{q-1} différents, ces C_{q-1} sont consécutifs. Ce seront C_{q-1}^{i-1} et C_{q-1}^i . Mais alors C_q^{p-1} qui est le dernier des quatre carrés C_q déduits de C_{q-1}^{i-1} a même extrémité que celui-ci. B_q^{p-1} et B_{q-1}^{i-1} sont identiques. Pareillement, C_q^p est le premier des quatre carrés C_q déduits de C_{q-1}^i , et C_q^p et C_{q-1}^i ont même origine. Donc le segment $B_q^{p-1}A_q^p$ est identique au segment déjà placé $B_{q-1}^{i-1}A_{q-1}^i$. Donc chaque fois que q s'accroît d'une unité, la règle d'établissement des segments de jonction en crée de nouveaux, mais elle maintient les précédents.

15. La règle de construction de Γ se présentera peut-être plus simplement si nous introduisons la notation suivante :

Soient C_0 et C deux figures semblables, c'est-à-dire susceptibles d'être amenées en coïncidence après une homothétie suivie ou non d'une symétrie par rapport à une droite. Si C_0 peut coïncider avec lui-même de diverses manières, il faudra spécifier un ou deux couples de points homologues dans la similitude de C_0 et de C . Par exemple si C_0 et C sont deux carrés, nous définirons sur chacun deux sommets non opposés et qualifiés l'un d'origine, l'autre d'extrémité du carré considéré. La similitude faisant correspondre respectivement les origines et les extrémités des deux carrés, définit sans ambiguïté tous les couples de points homologues pris respectivement dans l'un et dans l'autre carré.

Cela étant, si $F(C_0)$ est une figure géométrique construite sur C_0 , $F(C)$ sera par définition la figure homologue de $F(C_0)$ dans la similitude exactement précisée de C_0 et de C . En outre si un ensemble d'éléments de $F(C_0)$ a été ordonné, les éléments homologues de $F(C)$ seront supposés ordonnés de la même manière.

Si s_0 et s sont deux segments, leur similitude ponctuelle est définie dès que l'origine (et par conséquent l'extrémité) de chacun d'eux est spécifiée, étant convenu que dans la similitude des deux segments les origines sont homologues.

Si $\varphi(s_0)$ est un ensemble situé sur s_0 , $\varphi(s)$ sera par définition l'homologue de $\varphi(s_0)$ dans la similitude que nous venons de préciser. Si les éléments de $\varphi(s_0)$ sont ordonnés, les éléments homologues de $\varphi(s)$ seront ordonnés de la même manière.

Ainsi, C_0 et C_1^i étant les carrés considérés plus haut, l'équation géométrique

$$(1) \quad E(C_0) = E(C_1^1) + E(C_1^2) + E(C_1^3) + E(C_1^4)$$

jointe à la condition pour $E(C_0)$ d'être fermé, situé dans C_0 et de contenir au moins un point, caractérise l'ensemble E défini plus haut. Il n'est pas même nécessaire pour cela d'orienter chaque carré. Cette relation montre que $E(C_0)$ est contenu dans la réunion E_1 des quatre carrés C_1^i , et possède un point dans chacun d'eux. Le même raisonnement montre que $E(C_0)$ est dans les seize C_2^j et admet un point dans chacun d'eux. Et ainsi indéfiniment. Donc, $E(C_0)$ est sur E , partout dense sur lui; étant fermé, il est identique à E .

En même temps la condition suggère la suite d'approximations :

$$E_0(C_0) = C_0 \\ E_{n+1}(C_0) = E_n(C_1^1) + E_n(C_1^2) + E_n(C_1^3) + E_n(C_1^4).$$

Ces égalités formulent la construction progressive décrite plus haut des 4^n carrés C_n pour toutes les valeurs successives de n . On a encore

$$E_n(C_0) = \sum_{i=1}^{4^n} E_0(C_n^i) = \sum_i C_n^i.$$

16. De nouvelles conventions très simples vont nous permettre d'ordonner E . D'abord, préalablement à l'attribution des indices supérieurs i , nous poserons que tout point de $E(C_1^i)$ est antérieur à tout point de $E(C_1^{i+1})$ ($i = 1, 2, 3$) conformément à l'écriture de la relation (1).

D'autre part : 1° nous choisirons successivement, parmi les quatre C_1 , chacun des carrés $C_1^1, C_1^2, C_1^3, C_1^4$ (six combinaisons possibles); 2° nous choisirons sur chacun de ces quatre carrés un sommet homologue de A_0 et un sommet homologue de B_0 (huit choix pour chaque carré). Nous dirons que par là C_1^i est orienté

par rapport à C_0 . Dès lors, les notations $E(C_i^1)$ ont un sens défini.

Ces conventions déterminent de proche en proche, pour chaque n , l'ordre de succession des 4^n carrés C_n et, sur chacun de ces carrés C_n , les sommets homologues respectifs de A_0 et de B_0 . Enfin d'après l'égalité $E(C_0) = \sum_i E(C_n^i)$, le rang de tout point de E contenu dans C_n^i est antérieur au rang de tout point de E contenu dans $C_n^{i'}$, si $i < i'$.

Dès lors, l'ordre mutuel de deux points quelconques M et M' de E est déterminé. En effet, on finit par atteindre une valeur n , telle que M et M' soient dans un même C_{n-1}^j et ne soient pas dans le même C_n^i . Leur ordre de succession est à ce moment définitivement fixé.

L'origine ou point initial de D sera le point coïncidant avec son homologue dans la similitude de C_1^1 à C_0 . De même l'extrémité de E sera le point analogue relatif à C_1^1 et à C_0 (1).

De même que E , l'ensemble Γ_0 , soumis aux conditions d'être fermé et inclus dans C , peut être défini par l'équation géométrique

$$(2) \quad \Gamma_0(C_0) = \Gamma_0(C_1^1) + B_1^1 A_1^2 + \Gamma_0(C_1^2) + B_1^2 A_1^3 + \Gamma_0(C_1^3) + B_1^3 A_1^4 + \Gamma_0(C_1^4).$$

Nous supposons que les homologues de $A_0 B_0$ dans C_i^1 sont les points A_i^1, B_i^1 définis au n° 13 (2).

(1) Chacun de ces points est susceptible de six positions différentes que l'on détermine aisément (ces six points sont sur le cercle conjugué par rapport aux centres des deux carrés, passant par le sommet commun et normal à la diagonale commune). Si A_0 est le sommet de C_1^1 correspondant au sommet A_0 de C_0 , A_0 est l'origine de E . De même si dans la similitude de C_1^1 et de C_0 , B_0 est son propre homologue, B_0 est l'extrémité de E . Mais chacune des combinaisons (en nombre égal à 6.8^4) signalées plus haut pour définir l'ordonnance des points de E donnera une distribution plus ou moins complexe qu'il serait curieux d'étudier du point de vue arithmétique. Les abscisses et les ordonnées des points de E , l'une et l'autre de la forme $(1 - \beta) \sum_0^\infty \alpha_n \beta^n \left(\alpha_n = 0 \text{ ou } 1, \beta = \frac{1-\theta}{2} \right)$, forment des successions très mouvementées, quand le rang linéaire de ces points croît (on pourra considérer l'ensemble des homologues ζ_n^i d'un point ζ de E , par exemple l'origine ou l'extrémité de E , dans les divers C_n).

(2) Il serait intéressant de savoir si l'équation (2) admettrait pour solution un arc simple de Jordan dans tous les cas où A_i^1 et B_i^1 sont respectivement l'origine et l'extrémité de $E(C_i^1)$.

Par exemple la solution existe si le côté homologue de $A_0 B_0$, pour chacun

$\Gamma_0(C_0)$ serait le résultat des approximations obtenues en remplaçant dans l'équation (2) au premier membre $\Gamma_0(C_0)$ par $\gamma_{n+1}(C_0)$ et au second membre $\Gamma_0(C_1^i)$ par $\gamma_n(C_1^i)$, avec $\gamma_0[C_0] = E(C_0)$.

Observons que si la longueur de E est nulle ($\theta > \frac{1}{2}$), la longueur de Γ_0 est inférieure à Σp_n , p_n étant le périmètre de E_n . Donc, elle est finie.

Si la longueur de E est infinie, la longueur totale des parties rectilignes de Γ_0 est elle-même infinie, car cette longueur surpasse $\frac{3}{4} \theta$ fois le périmètre de C_0 et par suite $\frac{3}{4} \theta (p_0 + p_1 + \dots + p_n)$. Pour la même raison, la longueur de Γ_0 est infinie si celle de E est finie non nulle ($\theta = \frac{1}{2}$).

17. La courbe Γ ou $\Gamma(C_0)$ annoncée plus haut se définira pareillement de la façon suivante :

Tout d'abord, sur chaque segment rectiligne $B_n^i A_n^{i+1}$ de Γ_0 , nous plaçons un ensemble parfait $P(B_n^i A_n^{i+1})$ ayant pour origine B_n^i et pour extrémité A_n^{i+1} . Pour plus de simplicité nous construisons une fois pour toutes relativement à un segment BA un ensemble $P(BA)$ auquel nous imposerons cette condition, indispensable pour la suite, que tout intervalle contigu $B'A'$ de $P(BA)$ vérifie les conditions

$$B'A' \leq BB' \quad \text{et} \quad B'A' \leq A'A.$$

Par exemple nous obtiendrons P comme limite d'un système de 2^n segments égaux de longueur s_n , s_{n-1} donnant naissance à deux segments s_n par suppression d'un intervalle médian égal à $\omega_n s_{n-1}$, avec $\omega_n \leq \frac{1}{3}$. Selon que la série $\Sigma \omega_n$ est divergente ou convergente, P a une longueur nulle ou positive.

Soit Q ou $Q(C_0)$ l'ensemble $E + \Sigma P(B_n^i A_n^{i+1})$. C'est l'ensemble

des C_1^i est le côté inférieur horizontal dirigé comme $A_0 B_0$. Il suffit, conservant à jonction rectiligne $B_1^i A_1^i$, de relier B_1^i à A_1^{i+1} et B_1^{i+1} à A_1^i par deux arcs ou lignes brisées intérieurs à C_0 ne se rencontrant pas non plus que $B_1^i A_1^i$ et par exemples symétriques par rapport à $x = \frac{1}{2}$.

fermé, inclus dans C_0 , et défini par l'équation géométrique :

$$({}^2) Q(C_0) = Q(C_1^+) + P(B_1^+ A_1^+) + Q(C_1^+) + P(B_1^+ A_1^+) + Q(C_1^+) + P(B_1^+ A_1^+) + Q(C_1^+).$$

Q est parfait, il est situé sur Γ_0 . Il est par là même ordonné.

Appliquons Q sur le segment σ_0 . E est déjà appliqué sur ϖ . Aux points B et A , origine et extrémité d'un segment rectiligne de Γ_0 et qui appartiennent à E , correspondent l'origine β et l'extrémité α d'un intervalle contigu à ϖ . Sur $\beta\alpha$ nous plaçons un ensemble parfait $p(\beta\alpha)$, dont nous faisons correspondre les points à ceux de $P(BA)$ avec conservation du rang mutuel.

Il sera utile pour la suite que $p(\beta\alpha)$ soit de *mesure nulle*. On prendra par exemple pour $p(\beta\alpha)$ l'ensemble parfait type de Cantor coïncidant avec un ensemble de la nature de $P(\beta\alpha)$ pour lequel ω_n serait constamment égal à $\frac{1}{3}$. A la $n^{\text{ème}}$ opération, les 2^n segments contenant $p(\beta\alpha)$ et les 2^n segments contenant $P(BA)$ se correspondront dans leur ordre.

Dès lors $Q(C_0)$ est appliqué sur l'ensemble parfait γ ou $\gamma(C_0) = \varpi + \Sigma p(\beta_n^i \alpha_n^{i+1})$. Nous désignerons par u un intervalle contigu quelconque de l'un des $P(B_n^i A_n^{i+1})$, orienté dans le sens $B_n^i A_n^{i+1}$, qui est en même temps le sens de u en tant qu'arc de Γ_0 . Tout intervalle contigu à γ est contigu à l'un des $p(\beta_n^i \alpha_n^{i+1})$. Nous désignerons par γ le contigu à γ ayant pour origine et pour extrémité les homologues respectifs de l'origine et de l'extrémité de u . Sur chaque intervalle u construisons un carré $C(u)$ ayant même origine et même extrémité que u et situé par rapport à u du côté négatif.

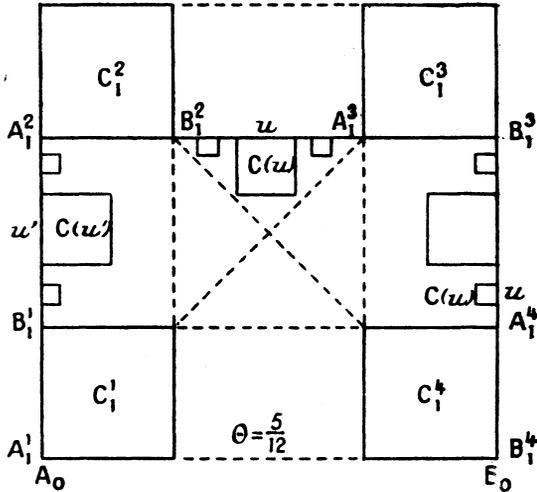
Si nous effectuons cette construction pour les u appartenant à $B_1^+ A_1^+$, $B_1^+ A_1^+$ (*fig. 3*), nous voyons que les $C(u)$ correspondants sont intérieurs à C_0 , et n'atteignent pas ($\omega_n \leq \frac{1}{3}$) les diagonales de C_0 . Si u est sur $B_1^+ A_1^+$, $C(u)$ est intérieur à C_0 , $C(u)$ est par rapport à $B_1^+ A_1^+$ du côté du centre de C_0 et $C(u)$ peut atteindre (si l'un au moins des ω_n vaut $\frac{1}{3}$), mais jamais franchir les diagonales de C_0 . Donc, pour les u appartenant à $B_1^+ A_1^+$, $B_1^+ A_1^+$, $B_1^+ A_1^+$:

Deux carrés $C(u)$, $C(u')$ différents sont sans points communs entre eux. Aucun $C(u)$ n'a de point commun avec l'un des quatre carrés C_1^i . Aucun $C(u)$ ne contient un point de $P(B_1^+ A_1^+)$,

$P(B_1^2 A_1^3)$, $P(B_1^3 A_1^2)$ autres que les extrémités de la base u de ce même $C(u)$.

Dès lors, quel que soit u contigu à l'un des $P(B_n^i A_n^{i+1})$, le

Fig. 3.



carré $C(u)$ ne contiendra d'autres points de Q que les extrémités de $C(u)$, deux carrés $C(u)$ et $C(u')$ seront sans points communs si u et u' sont différents.

Cela posé, désignons par g l'un quelconque des carrés $C(u)$. Pour plus de précision, on pourrait retrancher de g son origine et son extrémité. Dans l'ensemble H_0 ou $H_0(C_0) = Q + \Sigma g$, deux éléments quelconques sont distincts. Nous l'ordonnons comme $\Gamma_0 = Q + \Sigma u$, u étant l'intervalle contigu base de g ; ou comme $\sigma_0 = \chi + \Sigma \gamma$, γ étant l'intervalle contigu à χ ayant pour origine et pour extrémité les homologues de l'origine et de l'extrémité de u .

18. Dès lors la courbe \mathbf{F} ou $\Gamma(C_0)$ sera l'ensemble défini par l'équation géométrique

$$(3) \quad \Gamma(C_0) = Q + \Sigma \Gamma(g)$$

jointe à la condition que Γ est fermé et contenu dans C_0 . Γ s'obtient par cette suite d'approximations dont chacune indique une construction géométrique

$$H_0(C_0) = Q + \Sigma g, \quad H_1(C_0) = Q + \Sigma H_0(g), \dots, H_n(C_0) = Q + \Sigma H_{n-1}(g).$$

$H_0(C_0)$ est la courbe Γ_0 accrue des carrés g . H_1 s'obtient en remplaçant dans $H_0(C_0)$ chacun des carrés g par l'ensemble semblable à $H_0(C_0)$ et relatif à g , etc.

On a $H_n(C_0) = Q_n + \Sigma g_n$, Q_n étant un ensemble parfait et les g_n étant des carrés « émondés » de leurs extrémités, celles-ci appartenant à Q_n . Q_n est de proche en proche défini par les formules de construction récurrente

$$\begin{aligned} Q_0(C_0) &= Q, & Q_1(C_0) &= Q + \Sigma Q_0(g), & \dots, \\ Q_n(C_0) &= Q + \Sigma Q_{n-1}(g). \end{aligned}$$

Si G_n ou $G_n(C_0)$ est la réunion Σg_n de tous les carrés g_n pour une valeur donnée de n , $G_n(C_0)$ se définit de même par la suite de constructions

$$\begin{aligned} G_0(C_0) &= \Sigma g, & G_1(C_0) &= \Sigma G_0(g), & \dots, & G_n(C_0) &= \Sigma G_{n-1}(g), \\ & & & & & & H_n(C_0) = Q_n + G_n. \end{aligned}$$

$H_{n+1}(C_0)$ est inclus dans $H_n(C_0)$. Q_n est au contraire contenu dans Q_{n+1} , et par suite G_{n+1} ainsi que les points de $Q_{n+1} - Q_n$ sont contenus dans G_n .

Soit $K = \Sigma Q_n$. H_n contenant H_{n+1} , K est commun à tous les H_n . Les points communs à H_n et étrangers à K sont donc communs à tous les $G_n(C_0)$ et réciproquement. Soit donc G l'ensemble commun aux $G_n(C_0)$. L'ensemble commun aux H_n est $K + G$.

K et G sont sans points communs, puisque Q_n n'a pas de points communs avec $G_n = \Sigma g_n$. Mais un point m de K ne peut ni être contenu dans un g_n ni même être origine ou extrémité d'un g_n , dès que n surpasse un certain nombre dépendant de m . Car m étant dans K appartient à un $Q_r (r \geq 0)$ que nous choisissons le plus petit possible. m est un point non extrême d'un certain carré g_{r-1} , soit g'_{r-1} . m appartient à l'ensemble parfait $Q(g'_{r-1})$, situé lui-même sur $\Gamma_0(g'_{r-1})$. Tout g_r étant contenu dans un carré g_{r-1} est extérieur à tout autre g_{r-1} . Donc m est extérieur à tous les g_r non situés dans g'_{r-1} . m est aussi extérieur aux g_r situés dans g'_{r-1} , à moins que m ne soit origine ou extrémité d'un intervalle $u(g'_{r-1})$. Mais alors m est extérieur à tout g_{r+1} . Donc, si nous considérons une suite de carrés $g_{r+1}, \dots, g_{r+n}, \dots$, dont

chacun contient le suivant, même si ces carrés ont en commun un point frontière, celui-ci sera différent de m .

D'après l'équation (3), Γ appartient à tous les H_n puisqu'il est dans C_0 , donc dans $Q + \Sigma g = H_0(C_0)$, etc. Γ contient tous les Q_n puisqu'il contient Q . Donc Γ contient K .

Soit M un point de G . M appartient à un g_n pour toute valeur de n . Le côté du plus grand des g_n , pour une valeur donnée de n , tend vers zéro quand n croît. D'autre part, les extrémités de g_n sont dans Q . Donc m est limite de K . Donc, M est dans Γ qui est fermé. Finalement Γ est l'ensemble commun aux $H_n(C_0)$. Γ est donc continu et $\Gamma = K + G$.

Pour ordonner Γ , faisons cette convention que si M et M' sont deux points distincts de $\Gamma(C_0)$ n'appartenant pas à la fois comme points non extrêmes à un même carré g , l'ordre mutuel de M et de M' est le même que celui des éléments respectifs coïncidant avec M , M' ou contenant M , M' dans l'ensemble déjà ordonné $Q + \Sigma g$. Cette règle ordonne les éléments de $\Gamma(C_0)$ contenus dans chacun des $H_0(g)$ et par suite les éléments de $H_i(C_0)$, et de proche en proche les éléments de $H_n = Q_n + \Sigma g_n$.

Les éléments de H_n sont les points de Q_n et les carrés g_n « émondés » de leurs extrémités. Dès que n est assez grand, M et M' cessent d'être inclus dans un même g_n . L'ordre mutuel de M et de M' est dès lors établi.

19. L'application ordonnée de Γ sur σ_0 sera aisée.

Nous avons appliqué ponctuellement $Q = E + \Sigma P(B_n^i A_n^{i+1})$ sur

$$\chi = \varpi + \Sigma p(\beta_n^i z_n^{i+1}).$$

Au carré g ou $G(u)$ émondé de ses extrémités B' et A' qui sont aussi les extrémités, situés sur Q , de l'intervalle u contigu à un $P(B_n^i A_n^{i+1})$ nous faisons correspondre *globalement* l'intervalle γ contigu à χ et dont les extrémités en tant que points de χ sont respectivement homologues des extrémités de u , qui appartiennent à Q .

Nous avons là une application élément à élément (point à point, carré g à intervalle γ) de l'ensemble $H_0(C_0) = Q + \Sigma g$ sur l'ensemble $\eta_0(\sigma_0) = \chi + \Sigma \gamma$. Nous désignons cette application par

$$z_0 = z[H_0(C_0) \sim \eta_0(\sigma_0)].$$

On forme $H_1(C_0)$ en remplaçant chaque carré g par $H_0(g)$ et l'on obtient ainsi $H_1(C_0) = Q_1 + \Sigma g_1$. Pareillement soit

$$\tau_1(\sigma_0) = \chi + \Sigma \tau_0(\gamma) = \chi_1 + \Sigma \gamma_1.$$

χ_1 est l'ensemble parfait $\chi + \Sigma \chi(\gamma)$. γ_1 est un contigu quelconque à l'un des $\chi(\gamma)$, donc un contigu quelconque à χ_1 . Appliquons chacun des $H_0(g)$ sur $\eta_0(\gamma)$ par $\alpha[H_0(g) \sim \eta_0(\gamma)]$, si le carré g et l'intervalle γ contigu à χ sont homologues par α_0 . Nous obtenons ainsi l'application α_1 de $H_1(C_0)$ sur $\tau_1(\sigma_0)$. Q_1 est appliqué sur χ_1 et chaque carré g émondé de ses extrémités est globalement appliqué sur un intervalle γ_1 .

Et ainsi définiment. Si γ_n désigne l'un quelconque des intervalles contigus à l'ensemble parfait χ_n , soit $\eta_n(\sigma_0) = \chi_n + \Sigma \gamma_n$ l'ensemble dont les éléments sont les points de χ_n et les intervalles γ_n . χ_{n+1} se définit par $\chi_{n+1} = \chi_n + \Sigma \chi(\gamma_n)$.

Si $H_n(C_0) = Q_n + \Sigma g_n$ est appliqué élément à élément sur $\eta_n(\sigma_0)$, savoir les points de Q_n sur ceux de χ_n , et chaque carré « émondé » g_n globalement sur un contigu γ_n de χ_n , l'application α_{n+1} de $H_{n+1}(C_0)$ sur $\eta_{n+1}(\sigma_0)$ se fera en appliquant, pour chaque couple (g_n, γ_n) homologue, $H_0(g_n)$ sur $\eta_0(\gamma_n)$ par

$$\alpha[H_0(g_n) \sim \eta_0(\gamma_n)].$$

$\sum_1^\infty \chi_n$ forme un ensemble x qui est appliqué sur K . μ_n étant pour chaque valeur donnée de n l'ensemble ponctuel $\Sigma \gamma_n$, le complémentaire μ de x sur σ_0 est formé par les points communs à tous les μ_n .

Observons que les contigus γ sont des contigus aux divers $p(\beta_n^i \alpha_n^{i+1})$. Ce sont donc des intervalles au plus égaux au tiers du plus grand des $\beta_n^i \alpha_n^{i+1}$, donc à $\frac{1}{9}$. Les γ_n sont inférieurs chacun à $\frac{1}{9^n}$. Donc, si chacun des intervalles d'une suite $\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+p}, \dots$ contient le suivant, ces intervalles ont en commun au plus un point. Ce point existe d'ailleurs toujours parce que, tout point de χ_n étant un point de deuxième espèce de χ_{n+1} , tout segment γ_{n+p} est intérieur à l'intervalle γ_{n+p-1} qui le précède dans la suite. Donc le point commun à tous les segments γ_{n+p} est intérieur à chacun d'eux. Il est donc commun à tous les intervalles γ_{n+p} . Aussi ce point ξ est-il étranger à tous les χ_n . Le point ξ

sera l'homologue, sur σ_0 , du point unique ζ commun aux g_{n+p} homologues des γ_{n+p} de la suite, et réciproquement.

L'application de Γ sur σ_0 est ainsi achevée.

20. Il est essentiel de remarquer que, la mesure de ϖ étant l , et la mesure de chacun des $p(\beta_n^i \alpha_n^{i+1})$ étant nulle, la mesure de $\chi = \varpi + \Sigma p(\beta_n^i \alpha_n^{i+1})$ est l et la mesure de $\mu_0 = \Sigma \gamma$ est $1 - l$. De même la mesure de $\chi(\gamma)$ est $l \times$ longueur de γ , comme celle de $\varpi(\gamma)$. La mesure totale des γ_i situés sur γ est $(1 - l) \times$ longueur de γ . Donc la mesure de $\mu_1 = \Sigma \gamma_i$ est $(1 - l)^2$. Et ainsi de suite. La mesure de μ_n est $(1 - l)^n$. La mesure de μ est nulle.

Soit $\varpi_n = \varpi(\gamma_n)$ et soit $e_n = E(g_n)$. Pour chaque valeur de n , il y a une infinité dénombrable de couples d'ensembles parfaits ϖ_n, e_n . Donc en tout, pour toutes les valeurs de n , une infinité dénombrable de tels couples (ϖ_n, e_n) . Soit $\varphi(\xi)$ une fonction de ξ définie et sommable sur σ_0 . Soit ζ le point de Γ homologue de ξ . Puisque $\sigma_0 = \Sigma \Sigma \varpi_n + \psi$, ψ étant de mesure nulle (la double sommation indiquant qu'on ajoute tous les ϖ_n pour une même valeur de n , puis tous les ensembles ainsi obtenus pour les diverses valeurs de n), on a, z étant extérieur à Γ ,

$$T(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\zeta - z} = \Sigma \Sigma \int_{\sigma_n} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\zeta - z}.$$

Soient λ_n le côté de e_n et γ_n la longueur du segment γ_n relativement auquel $\varpi_n = \varpi(\gamma_n)$. Selon que le carré g_n tel que $e_n = E(g_n)$ est de sens direct comme C_0 ou de sens rétrograde, nous désignons par a_n, u_n respectivement les origines de e_n et γ_n ou au contraire leurs extrémités. Dans les deux cas, nous faisons le changement de variable $\zeta' = \frac{\zeta - a_n}{\lambda_n} e^{im\frac{\pi}{2}}$, m étant un entier définissant l'orientation du segment de base du carré g_n (ce segment étant un u_n ou celui-ci retourné de bout en bout). ζ' décrit E quand ζ décrit e_n . De même soit $\zeta' = \pm \frac{\xi - a_n}{\gamma_n}$ (+ si a_n est l'origine de γ_n , — si a_n en est l'extrémité). ζ' décrit ϖ quand ξ décrit ϖ_n . Alors

$$T_n(z) = \int_{\sigma_n} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\zeta - z} = \frac{\gamma_n}{\lambda_n} e^{im\frac{\pi}{2}} \int_{\varpi} \frac{\varphi_1(\xi') d\xi'}{\zeta' - \frac{z - a_n}{\lambda_n} e^{im\frac{\pi}{2}}},$$

$$\varphi_1(\xi') = \pm \varphi\left(\pm \frac{\xi - a_n}{\gamma_n}\right).$$

Sur ϖ_n , posons $\varphi(\xi) = \pm \lambda_n$. Alors,

$$T_n(z) \equiv \gamma_n e^{im\frac{\pi}{2}} lU\left(\frac{z - a_n}{\lambda_n} e^{im\frac{\pi}{2}}\right).$$

Donc $T_n(z)$ est continu dans tout le plan, et en outre

$$|T_n(z)| < \int_{\varpi_n} \frac{|\varphi(\xi)| d\xi}{|\xi - z|} < \gamma_n l\tau_n.$$

Observons que les mêmes conclusions, continuité de $T_n(z)$ et valeur de la limite supérieure de $|T_n(z)|$, subsisteraient si, sur ϖ_n , $\varphi(\xi)$ vérifiait simplement la condition $|\varphi(\xi)| \leq \lambda_n$.

Évaluons

$$\Sigma \Sigma \gamma_n = \text{mes } \sigma_0 + \text{mes } \mu_0 + \text{mes } \mu_1 + \dots + \text{mes } \mu_n + \dots$$

La série est convergente et de somme $\frac{1}{7}$. Donc $\Sigma \Sigma T_n(z)$ est une série normalement convergente dans tout le plan, c'est-à-dire telle que les modules maximums de chaque terme forment une série convergente. La somme $T(z)$ de la série double est donc une fonction continue dans tout le plan, et d'ailleurs holomorphe hors de Γ . Enfin

$$|T(z)| < \int_0^1 \frac{|\varphi(\xi)| d\xi}{|\xi - z|} < \eta.$$

20 bis. Montrons que $T(z)$ est singulière en tout point de Γ .

Généralement, soit $f(\xi)$ sommable et tel que l'ensemble $f(\xi) \neq 0$ soit épais (de mesure positive) sur tout segment contenu dans l'intervalle $0, 1$.

Je dis que si $\int_0^1 \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = T(z)$ est continu dans tout le plan et si $\int_0^1 \frac{|f(\xi)| d\xi}{|\xi - z|}$ est borné et inférieur à k , la fonction $T(z)$ est singulière sur tout arc de Γ .

En effet, soient ξ_1 et ξ_2 ($0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$) deux points quelconques de l'intervalle $0, 1$. Soient ζ_1 et ζ_2 leurs homologues respectifs sur Γ . Je dis que $T(z)$ a des singularités sur l'arc $\zeta_1 \zeta_2$.

$$\text{Considérons } T(\zeta_1, \zeta_2, z) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Supposons que $T(\zeta_1, \zeta_2, z)$ ne soit pas identique à zéro. L'égalité

$$T(z) = \int_0^{\xi_1} + T(\zeta_1, \zeta_2, z) + \int_{\xi_2}^1 \frac{f d\xi}{\xi - z}$$

montre que, sur l'arc $\zeta_1 \zeta_2$ de Γ , $T(\zeta_1, \zeta_2, z)$ est continu et possède les mêmes points singuliers que $T(z)$, sauf éventuellement en ce qui concerne les extrémités ζ_1 et ζ_2 . Si donc $T(z)$ n'avait pas de singularité sur l'arc-intervalle $\zeta_1 \zeta_2$ de Γ , $T(\zeta_1, \zeta_2, z)$ serait continu et holomorphe en tout point du plan complexe, sauf éventuellement en ζ_1 et ζ_2 . Mais, ceci est impossible d'après

$$|T(\zeta_1, \zeta_2, z)| < k.$$

Donc $T(z)$ a une infinité de singularités sur l'arc $\zeta_1 \zeta_2$, à moins que $T(\zeta_1, \zeta_2, z)$ ne soit nul indépendamment de z . Or en ce dernier cas, d'après

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (-z)T(\zeta_1, \zeta_2, z) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi,$$

cette dernière intégrale serait nulle. Soit $\omega(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$. A tout intervalle $\xi_1 \xi_2$ sur lequel $\omega(x)$ n'est pas constant, correspond sur Γ un arc où $T(z)$ a des points singuliers. Mais, si sur un tel intervalle $\omega(x)$ est constant, l'ensemble $f(\xi) \neq 0$ est de mesure nulle entre ξ_1 et ξ_2 , ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'ensemble des singularités de $T(z)$ est donc partout dense sur Γ . Cet ensemble étant fermé coïncide avec Γ .

En résumé, *l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z} = T(z),$$

où ξ décrit l'arc simple à aire nulle Γ quand ξ parcourt le segment $(0, 1)$, est une fonction continue dans tout le plan, holomorphe hors de Γ et singulière en tout point de Γ .

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE D'UNE CLASSE DE COURBES SINGULIÈRES.

21. Une question naturelle se pose. Relativement à toute courbe C dont chaque arc est non rectifiable, existe-t-il une fonc-

tion uniforme de z , continue dans tout le plan, holomorphe hors de C et singulière en tout point de C ?

Il est sans doute très malaisé de répondre à cette question dans toute sa généralité. Voici quelques remarques situant l'intérêt des exemples des courbes C étudiées dans ce Mémoire.

Pour ces courbes C , nous effectuons une représentation paramétrique $\zeta(\xi)$, ξ parcourant un segment rectiligne $\alpha\beta$ pendant que ζ décrit C . Nous montrons ensuite l'existence d'une fonction

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\xi) d\xi}{\zeta - z} = F(z),$$

f étant sommable (même borné), telle que $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{|f(\xi)| d\xi}{|\zeta - z|}$ soit bornée indépendamment de z , et nous en déduisons la continuité de $F(z)$ sur C .

Mais il est bien vraisemblable *a priori* qu'opérant ainsi, nous ne pouvons pas atteindre la généralité des courbes C dépourvues d'arcs rectifiables, même si nous remplaçons au sens de Stieltjes l'élément différentiel $f(\xi) d\xi$ par $d\omega(\xi)$. Toujours est-il que, dans les deux cas que j'étudie et où il est aisé d'évaluer un ordre d'infinitude de la longueur de C , on trouve chaque fois une limitation inférieure pour cet ordre. La longueur de C ne saurait devenir trop lentement infinie pour l'application de nos méthodes.

La courbe Γ du premier Chapitre présentait cette particularité de dessiner des méandres se repliant indéfiniment sur eux-mêmes. Cette circonstance jouait-elle un rôle essentiel dans la propriété de Γ relative aux fonctions analytiques? Pour établir qu'il n'en est pas ainsi, nous montrons, en répondant à une question de M. Lusin, l'existence de courbes C du type $\zeta = \xi + i\psi(\xi)$ rencontrées en un seul point par une parallèle à une direction fixe. Ici, quel que soit ζ sur C et ζ' tendant vers ζ sans quitter C , la demi-droite $\zeta\zeta'$ ne saurait, comme pour certains points ζ de Γ , passer une infinité de fois par toute direction. En effet, cette demi-droite n'est jamais parallèle à l'axe imaginaire et elle varie continûment sur chacun des deux arcs de C séparés par ζ .

Les courbes C envisagées seront d'une configuration très définie et très particulière. Mais elles nous permettront de démontrer les propriétés des fonctions $F(z)$ sans faire aucun appel à la

théorie des ensembles. Enfin, nous atteindrons des ordres d'infini-
tude pour la longueur de C, inférieurs à ceux des courbes Γ.

22. Examinons *a priori* ce nouveau cas.

En retranchant de $F(z)$ l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{F(u) du}{u-z}$, si C' est un
contour renfermant C et z à son *intérieur*, il reste une fonction
continue sur C, holomorphe hors de C, nulle à l'infini. Nous sup-
posons cette réduction déjà faite. Alors, quel que soit C' contenant
C et z *extérieure* à C' ,

$$F(z) = - \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} \frac{F(u) du}{u-z}.$$

Désignons par $\gamma(\xi', \xi'')$ le contour d'un rectangle $[u = \xi + iI(u)]$

$$\xi' < \xi < \xi'', \quad \mu' < I(u) < \mu'',$$

si μ' et μ'' sont respectivement le minimum et le maximum de $\psi(\xi)$
sur l'intervalle $\xi' \leq \xi < \xi'' \leq \beta$.

Formons la suite ξ_p avec

$$\xi_0 = z, \quad \xi_n = \beta, \quad 0 < \xi_p - \xi_{p-1} \leq \delta \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

et soit $\gamma_p = \gamma(\xi_{p-1}, \xi_p)$. z étant à une distance de C supérieure
à $d > 0$, nous prenons δ assez petit pour que la plus grande dimen-
sion de γ_p soit inférieure à d .

On a

$$F(z) = \sum_{p=1}^{n-1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_p} \frac{F(u) du}{u-z} = \sum_{p=1}^n f_p(z).$$

Soit $\omega(x) = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(x, x')} F(u) du$. Pour $x' > x$,

$$\omega(x') - \omega(x) = - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(x, x')} F(u) du$$

tend vers zéro, comme la longueur du contour de $\gamma(x, x')$,
quand x' tend vers x (il suffirait pour cela que F fût borné).

Si $\xi_p = \xi_{p-1} + i\psi(\xi_p)$, soit ξ'_p un point quelconque de l'arc $\xi_{p-1} \xi_p$
de C. u étant sur γ_p , remplaçons $\frac{1}{u-z}$ par $\frac{1}{\xi'_p - z} + \frac{\xi'_p - u}{(u-z)(\xi'_p - z)}$.
 u décrivant l'arc $\xi_{p-1} \xi_p$, le point $F(u)$ décrit un certain arc de

diamètre Δ_p . Quand u décrit γ_p , le diamètre de l'arc décrit par $F(u)$ sera $\Delta'_p \geq \Delta_p$. Soit Ω_p le maximum de $|\zeta' - \zeta|$ quand ζ et ζ' décrivent $\zeta_{p-1}\zeta_p$, c'est-à-dire le diamètre de $\zeta_{p-1}\zeta_p$. La longueur de γ_p surpasse $2\Omega_p$ et est inférieure à $2\Omega_p + 2(\xi_p - \xi_{p-1})$.

Il est évident que si $\Sigma \Delta'_p \Omega_p^2$ tend vers zéro avec δ en particulier $\Sigma [\psi(\xi_p) - \psi(\xi_{p-1})]^2$ est borné, on a

$$(4) \quad F(z) = \lim_{\sigma=0} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\omega(\xi_p) - \omega(\xi_{p-1})}{\zeta'_p - z}$$

et cela indépendamment du choix de ζ'_p sur $\zeta_{p-1}\zeta_p$. Donc

$$(5) \quad F(z) = \int_x^{\beta} \frac{d\omega(\xi)}{\zeta - z},$$

l'intégrale étant prise au sens de Stieltjes. Il est à remarquer que les conditions trouvées n'exigent pas que $\omega(x)$ soit à variation totale bornée.

A priori il n'est nullement certain que la convergence du second membre de (4), uniforme dans tout champ [dist. $(z, C) > d > 0$], vers une limite indépendante du choix des ζ_p et des ζ'_p , suffise pour que cette limite soit identique à $F(z)$.

Indiquons une condition nécessaire de la convergence du second membre de (4) indépendamment du choix des ζ'_p , les ζ_p étant supposés donnés.

Soit $\Delta''_p = |\omega(\xi_p) - \omega(\xi_{p-1})|$. (Observons que $\Delta''_p < k\Omega_p \Delta'_p$.) Si $|\zeta'_p - \zeta''_p| = \Omega_p$, l'échange de ζ'_p et ζ''_p modifie le $p^{\text{ième}}$ terme du second membre de (4) de $\pm \frac{\Omega_p \Delta''_p e^{i\theta_p}}{|\zeta'_p - z| \cdot |\zeta''_p - z|}$, le signe pouvant être pris à volonté, si la convergence vers la même limite a lieu aussi bien avec l'un et avec l'autre choix des deux points intermédiaires ζ'_p et ζ''_p . Le module de la somme de ces variations pour toutes les valeurs de p n'est par inférieure à $\frac{\sqrt{\Sigma \Omega_p^2 \Delta''_p^2}}{[\text{écart max}(z, C)]^2}$.

Donc $\sum \Omega_p^2 \Delta''_p^2$ doit tendre vers zéro avec δ . Cette condition est nécessaire, mais sans doute insuffisante, pour que l'intégrale de Stieltjes située au second membre de (5) ait un sens. Cette dernière circonstance n'entraîne pas *a priori*, nous l'avons dit, l'égalité des deux membres de (5).

23. Mais les courbes C dont nous établirons la propriété relativement à une fonction $F(z)$, réaliseront des cas beaucoup moins généraux. Non seulement l'intégrale de Stieltjes correspondante va converger absolument, mais nous allons tout simplement chercher des courbes C, [$\zeta = \xi + i\psi(\xi)$] telles que

$$F(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{\zeta + i\psi(\xi) - z}$$

reste continu sur C et que $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{|\zeta - z|}$ converge uniformément sur C. Posons

$$z = x + i[\psi(x) + h], \quad \xi = x + \delta,$$

d'où

$$\zeta - z = \delta - i[h + \psi(x) - \psi(x + \delta)].$$

Soit $\theta(u)$ une fonction paire, croissante avec $|u|$ [condition (III a) ci-après], continue et nulle pour $u = 0$, telle enfin que $\int_0^a \frac{du}{\theta(u)}$ ait un sens [condition (III b) ci-après]; par exemple

$$\theta(u) = |u|^{\eta} \quad \text{avec} \quad 0 < \eta < 1.$$

Nous allons chercher une fonction $\psi(x)$ telle que l'ensemble $j(x, h)$ ou $j(z)$ des nombres δ vérifiant

$$(1) \quad |h + \psi(x) - \psi(x + \delta)| < \theta(\delta)$$

soit suffisamment rare au point x , pour que l'intégrale

$$\int_{j(x, h)} \frac{d\delta}{|\delta|}$$

ait un sens. On conçoit la possibilité de cette propriété si l'oscillation de $\psi(\xi)$ est suffisamment ample et rapide dans tout intervalle.

Considérons l'intégrale

$$F(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{\zeta - z}.$$

Nous utiliserons l'inégalité $|\zeta - z| > |\delta|$ si δ est dans $j(z)$ et l'inégalité $|\zeta - z| \geq \theta(\delta)$ si δ est étranger à $j(z)$. De cette façon

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\xi}{|\zeta - z|} < \int_{j(z)} \frac{d\delta}{|\delta|} + 2 \int_0^{\beta - \alpha} \frac{du}{\theta(u)}.$$

L'intégrale $F(z)$ aura donc un sens quel que soit z . Mais nous obtiendrons en outre la continuité de $F(z)$ si la première intégrale converge uniformément, c'est-à-dire si l'intégrale $\int \frac{d\delta}{|\delta|}$ étendue à la partie de $j(z)$ distante de l'origine de moins de ε (positif) tend vers zéro avec ε , uniformément quand z est quelconque dans le plan complexe.

24. Nous prenons pour ψ une fonction de Weierstrass

$$\psi(x) = \sum_1^{\infty} a_n \cos b_n x.$$

Nous supposons :

(1 a) $\frac{a_m}{a_{m-1}}$ décroissant et tendant vers zéro quand m croît.

(1 b) $\frac{b_m}{b_{m-1}}$ infini avec m ;

(1 c) $\frac{a_n b_m}{a_{m-1} b_{m-1}}$ croissant indéfiniment avec m .

De la sorte

$$\sum_{n=m+1}^{n=\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{n=m-1} a_n b_n$$

sont respectivement un infiniment petit et un infiniment grand équivalents à a_{m+1} et à $a_{m-1} b_{m-1}$.

Soit

$$t_m(\delta) = a_m [\cos b_m x - \cos b_m (x + \delta)],$$

d'où

$$t'_m(\delta) = a_m b_m \sin b_m (x + \delta).$$

On a

$$|t_m(\delta)| < a_m b_m |\delta| \quad \text{et} \quad |t_m(\delta)| < 2a_m; \quad |t'_m(\delta)| \leq a_m b_m.$$

Les considérations ultérieures paraîtront toutes naturelles si l'on présente à l'esprit la configuration de la courbe

$$y = \omega(\delta) = \psi(x) - \psi(x + \delta) + h.$$

Soit

$$y_1(\delta) = h + \sum_{n=1}^{n=m-1} t_n(\delta), \quad y_2(\delta) = y_1(\delta) + t_m(\delta).$$

Nous utiliserons l'échelle b_m pour les δ , et $\frac{1}{a_m}$ pour y_1, y_2, y .

Considérons la fonction

$$\omega_m(\lambda) = \frac{1}{a_m} \omega\left(\frac{\lambda}{b_m}\right).$$

On a

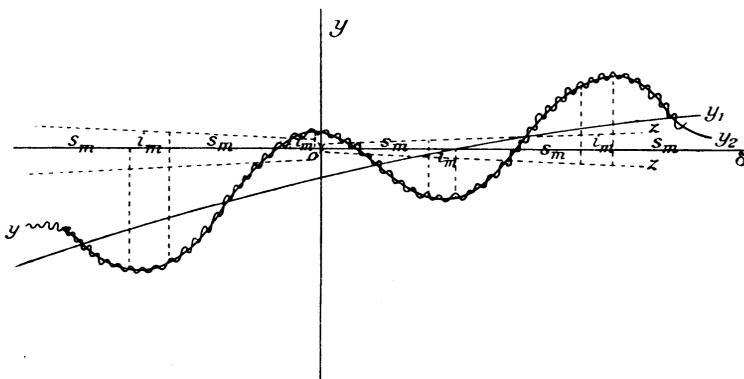
$$\omega_m(\delta) = \frac{h}{a_m} + \cos b_m x - \cos(b_m x + \lambda) + U_1 + U_2,$$

avec

$$U_1 = \sum_{n=1}^{n=m-1} \frac{1}{a_m} t_n\left(\frac{\lambda}{b_m}\right), \quad U_2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{a_m} t_n\left(\frac{\lambda}{b_m}\right).$$

$\left|\frac{dU_1}{d\lambda}\right|$ est sensiblement borné par $\frac{a_{m-1} b_{m-1}}{a_m b_m}$, donc est très petit quand m est grand. U_1 , nul avec λ , n'atteint l'unité qu'à une distance minimum $\frac{a_m b_m}{a_{m-1} b_{m-1}}$, très grande en même temps que m . $|U_2|$ est au plus $\frac{2a_{m+1}}{a_m}$. Il est très petit. U_2 n'intervient qu'au voisinage de l'origine, et son rôle dépend de la valeur de $\sin b_m x$, dérivée

Fig. 4.



à l'origine du premier terme de $\omega_m(\lambda)$. Donc $\omega_m(\lambda)$ est essentiellement représenté par la sinusoïde $\frac{h}{a_m} + \cos b_m x - \cos(b_m x + \lambda)$. Les termes de $\psi(x)$ antérieurs au $m^{\text{ième}}$ ajoutent sensiblement à cette sinusoïde l'ordonnée d'une droite passant à l'origine et de pente infiniment petite avec $\frac{1}{m}$. Les termes postérieurs au $m^{\text{ième}}$ donnent autour de la sinusoïde un très petit feston qui ne prend d'importance qu'au voisinage de $\lambda = 0$ (fig. 4).

24 bis. Soit

$$S_m(\delta) = t_1(\delta) + \dots + t_m(\delta).$$

L'ensemble $j(z)$ des δ vérifiant l'inégalité (1) sera contenu dans l'ensemble $\lambda_m(z)$ défini par

$$(2) \quad |h + S_m(\delta)| < \theta(\delta) + 2 \sum_{m+1}^{\infty} a_n.$$

Car si l'inégalité (1) est vérifiée, il en est de même *a fortiori* de (2). En remplaçant $2 \sum_{m+1}^{\infty} a_n$ par $3a_{m+1}$, nous agrandissons $\lambda_m(z)$ dès que m est assez grand.

En raison de l'allure de la fonction ψ étudiée quelques lignes plus haut, nous n'envisageons cette approximation de l'ensemble $j(z)$ par $\lambda_m(z)$ que dans le champ D_m formé sur l'axe des δ par les deux intervalles

$$\frac{\pi}{b_m} < |\delta| < \frac{\pi}{b_{m-1}}$$

(avec en outre $\alpha < x + \delta < \beta$).

Soit $j_m(z)$ la partie de $j(z)$ appartenant au champ D_m . Nous allons chercher ψ vérifiant

$$\int_{j_m(z)} \frac{d\delta}{|\delta|} < \omega_m,$$

ω_m étant indépendant de z et $\sum_1^{\infty} \omega_m$ étant fini.

La convergence uniforme de l'intégrale $\int_{j(z)} \frac{d\delta}{|\delta|}$ sera ainsi réalisée et $F(z)$ sera continue.

$S'_m(\delta)$ a le signe de $t'_m(\delta)$ tout au moins quand

$$a_m b_m |\sin b_m(x + \delta)| > \sum_1^{m-1} a_n b_n.$$

Soit u_m positif, inférieur à $\frac{\pi}{2}$, tendant vers zéro quand l'entier m croît.

L'inégalité $|\sin b_m \xi| \geq \sin u_m$ définit, sur l'axe des ξ , des segments

$$\frac{k\pi + u_m}{b_m}, \quad \frac{(k+1)\pi - u_m}{b_m}$$

(k entier réel), que nous appelons les segments s_m , séparés par des intervalles i_m tels que

$$\frac{k\pi - u_m}{b_m}, \quad \frac{k\pi + u_m}{b_m}.$$

Enfin ces segments s_m et intervalles i_m doivent être, le cas échéant, réduits à leur partie située sur D_m (fig. 4).

Supposons qu'à partir d'une certaine valeur m_0 de m , on ait

$$(Ha) \quad \frac{a_m b_m u_m}{a_{m-1} b_{m-1}} > 2.$$

(L'hypothèse que $\frac{a_m b_m}{a_{m-1} b_{m-1}}$ est infiniment grand avec m est incluse dans celle-ci.)

Il est évident que, si $x + \delta$ varie sur un segment s_m , $S'_m(\delta)$ a un signe constant et surpasse en valeur absolue $\frac{a_m b_m u_m}{3}$ dès que m est suffisamment grand.

Étudions, quand $x + \delta$ est sur un tel segment s_m , l'ensemble $\lambda_m(z)$ des δ vérifiant (2).

Soit $x + \beta_m$ l'extrémité de ce segment s_m la plus éloignée de x . Si $x + \delta$ est sur s_m et δ dans $\lambda_m(z)$, δ est inclus dans l'ensemble défini par

$$(3) \quad -\theta(\beta_m) - 3\alpha_{m+1} < h + S_m(\delta) < \theta(\beta_m) + 3\alpha_{m+1}.$$

Comme $h + S_m(\delta)$ varie dans un sens constant sur s_m , la double inégalité précédente, si elle est vérifiée en certains points de l'intervalle s_m , y définit un intervalle dont la longueur est inférieure à $6 \frac{\theta(\beta_m) + 3\alpha_{m+1}}{a_m b_m u_m}$.

Si α_m est l'extrémité de s_m la plus voisine de x , l'intégrale $\int \frac{d\delta}{|\delta|}$ étendue à la partie de $j_m(z)$ située sur s_m est donc inférieure à

$$\frac{6}{\alpha_m} \frac{\theta(\beta_m) + 3\alpha_{m+1}}{a_m b_m u_m}.$$

Soit de même α'_m l'extrémité la plus voisine de x d'un i_m (ou de la partie d'un i_m) située sur D . L'intégrale $\int \frac{d\delta}{|\delta|}$ étendue à la partie de $j_m(z)$ située sur cet i_m est inférieure à $\frac{2u_m}{b_m} \cdot \frac{1}{\alpha'_m}$. Nous

exigerons que

$$\sum_1 = \sum \frac{0(\beta_m) + \alpha_{m+1}}{x_m \alpha_m b_m u_m} \quad \text{et} \quad \sum_2 = \frac{u_m}{b_m} \sum \frac{1}{x_m},$$

étendues respectivement à tous les s_m et à tous les i_m réduits à leur partie commune avec D_m soient inférieures à un nombre positif w_m terme général d'une série convergente. Il en résultera

$$\int_{j_m(z)} \frac{d\delta}{|\delta|} < \sum_1 + \sum_2 < 2w_m.$$

23. Déplaçons-nous sur l'axe réel, à partir de x , soit vers la droite, soit vers la gauche, en évaluant les nombres α_m et β_m pour les segments s_m successivement rencontrés sur D_m .

Le premier peut être un segment s_m partiellement réduit par la suppression de l'intervalle $x - \frac{\pi}{b_m}, x + \frac{\pi}{b_m}$. C'est le cas où x est intérieur à un s_m . On aura alors

$$x_m = \frac{\pi}{b_m} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{b_m} < \beta_m \leq \frac{2\pi - 2u_m}{b_m}.$$

Le premier segment s_m non entamé (qui sera le premier ou le second segment s_m rencontré sur D_m) donnera

$$\frac{\pi}{b_m} \leq x_m < \frac{2\pi}{b_m}, \quad \frac{2\pi - 2u_m}{b_m} \leq \beta_m < \frac{3\pi - 2u_m}{b_m}.$$

Pour le $p^{\text{ème}}$ segment s_m non entamé par la suppression de

$$\left(x - \frac{\pi}{b_m}, x + \frac{\pi}{b_m} \right),$$

$$\frac{p\pi}{b_m} \leq x_m < \frac{(p+1)\pi}{b_m}, \quad \frac{(p+1)\pi - 2u_m}{b_m} \leq \beta_m < \frac{(p+2)\pi - 2u_m}{b_m}.$$

Enfin, pour que ce segment s_m ne soit pas étranger à l'intervalle $x - \frac{\pi}{b_{m-1}}, x + \frac{\pi}{b_{m-1}}$, il faut et il suffit que $\alpha_m < \frac{\pi}{b_{m-1}}$. Le maximum N de p est donc tel que

$$\frac{N}{b_m} < \frac{1}{b_{m-1}} < \frac{N+2}{b_m} \quad \text{ou} \quad \frac{b_m}{b_{m-1}} - 2 < N < \frac{b_m}{b_{m-1}}.$$

En résumé les valeurs minimums de α_m , pour les s_m successivement

rencontrés à droite ou à gauche de x et situés sur D_m , sont

$$\left(\frac{\pi}{b_m}\right), \frac{\pi}{b_m}, \frac{2\pi}{b_m}, \dots, \frac{(N-1)\pi}{b_m}, \frac{N\pi}{b_m}.$$

Les valeurs maximums correspondantes des β_m sont inférieures à

$$\left(\frac{2\pi}{b_m}\right), \frac{3\pi}{b_m}, \dots, \frac{(N-1)\pi}{b_m}, \frac{(N-2)\pi}{b_m}.$$

Les deux premiers termes entre parenthèses dans ces suites correspondent au cas du segment s_m initial entamé par la suppression de l'intervalle $x - \frac{\pi}{b_m}, x + \frac{\pi}{b_m}$.

De tout ceci résulte que

$$\sum_1^{\infty} \frac{2}{\pi a_m u_m} \left[\theta\left(\frac{2\pi}{b_m}\right) - \sum_{p=2}^{p \leq N} \theta\left(\frac{p-2}{b_m} \pi\right) + a_{m+1} \right].$$

Comme les α'_m , extrémités plus voisines des i_m réduits à leur partie située sur D_m , coïncident avec les β_m (sauf quand un α'_m ou un β_m sont l'une des quatre extrémités de D_m), les limites inférieures des α'_m successivement rencontrés dans D_m sont

$$\frac{\pi}{b_m}, \frac{2\pi - 2u_m}{b_m}, \dots, \frac{(p-1)\pi - 2u_m}{b_m}, \dots \quad (p \leq N-1).$$

Donc

$$\sum_2^{\infty} \frac{2u_m}{\pi} \left(2 \dots \frac{1}{2} \dots \dots \dots \frac{1}{\sqrt{p-1}} \right).$$

Finalement, w'_m, w''_m, \dots désignant des nombres positifs termes généraux de séries convergentes, les conditions complémentaires cherchées sont

$$(III c) \quad \frac{1}{a_m u_m} \theta\left(\frac{2\pi}{b_m}\right) = w'_m.$$

$$(III d) \quad \frac{1}{a_m u_m} \int_{\frac{\pi}{b_m}}^{\frac{\pi}{b_m - 1}} \frac{\theta(u)}{u} du = w''_m.$$

$$(III b) \quad \frac{a_{m+1}}{a_m u_m} \log \frac{b_m}{b_{m-1}} = w'''_m.$$

$$(III e) \quad u_m \log \frac{b_m}{b_{m-1}} = w''''_m.$$

D'après (IIc), et $\frac{b_{m+1}}{b_m}$ étant infiniment grand avec m , u_m tend vers zéro et même la série Σu_m converge.

26. Cherchons par exemple à réaliser le cas $\vartheta(u) = u^\eta$ ($\eta < 1$). Les conditions (IIIc) et (III d) sont équivalentes entre elles. Posons

$$a_m = \frac{1}{[m!]^p}, \quad b_m = [m!]^q, \quad u_m = \frac{1}{m^r}.$$

Les conditions (IIa), (IIb), (IIc) et (III d) donnent

$$-p + q - r > 0, \quad p > r + 1, \quad r > 1, \quad p < r q.$$

Supposons donné η . Le nombre r définissant la quantité auxiliaire u_m pourra toujours être déterminé si $p > 2$, $q > p + 1$. Si η est inférieur à $\frac{2}{3}$, la condition $q > \frac{p}{\eta}$ entraîne la seconde.

Il reste alors $p > 2$, $q > \frac{p}{\eta}$. On choisira r dans le champ

$$1 < r, \quad r < p - 1, \quad r < q - p.$$

Enfin, si p et q vérifient la condition $2 < p < q - 1$, les résultats vaudront pour tout nombre η vérifiant $1 > \eta > \frac{p}{q}$.

Donc, si $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, la fonction

$$\psi(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{[m!]^{2+\varepsilon}} \cos [m!]^{3+\varepsilon'} x$$

est telle que

$$F(z) = \int_x^\beta \frac{d\xi}{\xi + i\psi(\xi) - z}$$

est continue dans tout le plan et singulière sur la ligne décrite par le point

$$\xi + i\psi(\xi) \quad (\alpha \leq \xi \leq \beta).$$

En outre si ε , vérifie

$$\varepsilon < \varepsilon_1 < 1 + \varepsilon',$$

l'ensemble $j(x, h)$ défini par

$$|h + \psi(x) - \psi(x + \delta)| < |\delta|^{\frac{2+\varepsilon_1}{3+\varepsilon'}}$$

est tel que l'intégrale

$$\int_{j(x,h)} \frac{d\delta}{|\delta|}$$

est uniformément convergente au point $\delta = 0$ quels que soient x et h .

Pour employer une locution dont l'origine et le sens s'expliquent d'eux-mêmes, l'ensemble $j(x, h)$ a, au point x et à la distance ε une *mesure logarithmique* finie, tendant uniformément vers zéro avec ε , x et h variant arbitrairement dans le champ réel (1).

27. Nous avons donc montré l'existence de courbes C , d'équations $z = x + i\psi(x)$ telles que l'intégrale $F(z)$ reste continue sur C . Il est évidemment très intéressant de rechercher le degré de généralité de ces courbes C .

A priori la forme de la fonction $\psi(x)$ les particularise beaucoup. Mais le plus important ne semble pas être là.

Chaque arc de C est infini. On conçoit la possibilité, et nous la réaliserons ci-après, de définir un ordre d'infinitude pour la longueur de C . Il s'agira alors de savoir si cet ordre admet ou non une borne inférieure commune à tous les exemples dont nous avons montré la validité. Il est clair que les circonstances sont d'autant moins favorables à la continuité de $F(z)$ que C se rapproche davantage d'une courbe de longueur finie. Parmi les faibles ordres d'infinitude de la longueur de C , certains ne sont-ils pas inaccessibles à la méthode et aux démonstrations exposées plus haut ? C'est ce que nous devons examiner. Nous préciserons d'abord la nature des courbes C .

Observons que C , et aussi $F(z)$, sont caractérisées par ψ uniquement, donc par les suites a_m, b_m , et que les nombres u_m , la fonction $\theta(u)$ ne jouent qu'un rôle auxiliaire. Nous allons éliminer progressivement des conditions trouvées ces variables étrangères pour obtenir des conditions contenant uniquement a_m et b_m .

(1) E étant un ensemble linéaire situé sur Ox , nous appelons *mesure logarithmique* de E , au point a et à la distance ε , la mesure de l'ensemble décrit par le point $\xi = \log \frac{\varepsilon}{|x-a|}$, si $|x-a| < \varepsilon$, $\xi(x-a) > 0$, x dans E . Cette mesure est finie ou infinie. Elle est égale à l'intégrale $\int \frac{dx}{|x-a|}$ étendue à la partie de E située dans l'intervalle $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

28. Nous avons dû, pour la validité de nos raisonnements, admettre trois groupes d'hypothèses (distincts ou non), savoir le groupe (I) ne renfermant que les a_m et les b_m , sans les u_m ni $\theta(u)$, le groupe (II) contenant les u_m , mais non pas $\theta(u)$, le groupe (III) renfermant $\theta(u)$. Voici ces conditions :

$$\begin{aligned} \text{(I a)} \quad & \frac{a_m}{a_{m+1}} \text{ infini avec } m, \\ \text{(I b)} \quad & \frac{b_{m+1}}{b_m} \text{ infini avec } m, \\ \text{(I c)} \quad & \frac{a_{m+1} b_{m+1}}{a_m b_m} \text{ infini avec } m, \\ \text{(II a)} \quad & \frac{a_m b_m u_m}{a_{m-1} b_{m-1}} > 2, \\ \text{(II b)} \quad & \sum_{m=1}^{m \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m u_m} \log \frac{b_m}{b_{m-1}} \text{ fini,} \\ \text{(II c)} \quad & \sum u_m \log \frac{b_m}{b_{m-1}} \text{ fini,} \end{aligned}$$

nous ajouterons cette condition

$$\begin{aligned} \text{(II d)} \quad & a_m u_m \text{ décroissant,} \\ \text{(III a)} \quad & \theta(u) \text{ croissant,} \\ \text{(III b)} \quad & \int_0^h \frac{du}{\theta(u)} \text{ converge,} \\ \text{(III c)} \quad & \sum \frac{1}{a_m u_m} \theta\left(\frac{2\pi}{b_m}\right) \text{ fini,} \\ \text{(III d)} \quad & \sum_{m=1}^{m \infty} \frac{1}{a_m u_m} \int_{\frac{\pi}{b_m}}^{\frac{\pi}{b_{m-1}}} \frac{\theta(u)}{u} du \text{ fini,} \end{aligned}$$

29. Éliminons θ des relations (III). En vertu de (III b) et de (III d) réunis, la série

$$\sum_{m=1}^{m \infty} \int_{\frac{\pi}{b_m}}^{\frac{\pi}{b_{m-1}}} \left(\frac{1}{\theta(u)} + \frac{1}{a_m u_m} \frac{\theta(u)}{u} \right) du \text{ converge.}$$

Nous diminuons le $m^{\text{ème}}$ terme en y remplaçant le coefficient dif-

férentiel par $\frac{2}{\sqrt{u \alpha_m u_m}}$. On en conclut la condition

$$(He) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha_m b_{m-1} u_m}} \text{ fini.}$$

Supposons-la remplie. Alors, posons $\vartheta(u) = \sqrt{u \alpha_m u_m}$ pour $\frac{\pi}{b_m} < u < \frac{\pi}{b_{m-1}}$. Les conditions (IIIb) et (III d) sont satisfaites. D'après la condition (II d), la condition (III a), savoir la croissance de $\vartheta(u)$ sera remplie quel que soit $\vartheta \left(\frac{\pi}{b_m} \right)$ choisi entre

$$\sqrt{\pi \frac{\alpha_m u_m}{b_m}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\pi \frac{\alpha_{m+1} u_{m+1}}{b_m}}.$$

Enfin, la condition (III c) équivaut à $\sum \frac{1}{\sqrt{\alpha_m b_m u_m}}$ fini, ce qui est inclus dans (He), d'après $b_m > b_{m-1}$.

Ainsi, il est possible, et nous en avons donné le moyen, de calculer $\vartheta(u)$ vérifiant toutes les conditions requises par les raisonnements où figure cette fonction, dès qu'on aura pu calculer un nombre u_m vérifiant les conditions (II a) à (II e). Les conditions (I) et (II a) à (II e) sont donc nécessaires et suffisantes pour la possibilité de ces raisonnements.

29 bis. Pour éliminer u_m des conditions (II), appliquons ce principe évident que si deux séries à termes positifs $\Sigma r_m, \Sigma r'_m$ sont convergentes, il en est de même de $\Sigma r_m^\theta r'_m^{1-\theta}$, quel que soit θ vérifiant $0 < \theta \leq 1$, ou sous une autre forme, que si l'on pose $r_m^\lambda r'_m^\mu = z_m^{\lambda+\mu}$ ($\lambda, \mu > 0$), la série Σz_m converge. Il suffit de remarquer que si r'_m est le plus grand des deux nombres r_m et r'_m (ou même leur somme), $\Sigma r'_m$ converge, et que $z_m \leq r'_m$.

Cela étant, r_m, r'_m, r''_m désignant des termes généraux de séries convergentes, (II b) et (II c) donnent

$$(Id) \quad \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \log^2 \frac{b_m}{b_{m-1}} = r_m^2.$$

De même (II c) et (II e) donnent

$$(Ie) \quad \frac{1}{\alpha_m b_{m-1}} \log \frac{b_m}{b_{m-1}} = r_m^3.$$

Enfin (IIa) et (IIc) donnent

$$(If) \quad \frac{\alpha_{m-1} b_{m-1}}{\alpha_m b_m} \log \frac{b_m}{b_{m-1}} = \frac{1}{2} \tau_m''.$$

Réciproquement, supposons ces conditions (Id), (Ie), (If) vérifiées, outre les conditions (Ia), (Ib), (Ic). Je dis qu'il est possible de trouver u_m vérifiant les conditions (IIa) à (IIe), sauf peut-être (II d).

Prenons en effet u_m tel que $u_m \log \frac{b_m}{b_{m-1}}$ soit le plus grand, savoir ζ_m , des trois nombres τ_m , τ_m' , τ_m'' . (IIc) est évidemment vérifié. (IIa) est rempli, d'après

$$\frac{\alpha_m b_m u_m}{\alpha_{m-1} b_{m-1}} = \frac{\alpha_m b_m \zeta_m}{\alpha_{m-1} b_{m-1} \log \frac{b_m}{b_{m-1}}} = 2 \frac{\zeta_m}{\tau_m''} \geq 2.$$

(IIb) est vérifiée d'après

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m u_m} \log \frac{b_m}{b_{m-1}} = \frac{\tau_m^2}{u_m \log \frac{b_m}{b_{m-1}}} = \frac{\tau_m^2}{\zeta_m} \leq \tau_m.$$

(IIe) résulte de

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_m b_{m-1} u_m}} = \sqrt{\frac{\log \frac{b_m}{b_{m-1}}}{\alpha_m b_{m-1} \zeta_m}} < \sqrt{\frac{\tau_m^2}{\zeta_m}} \leq \tau_m'.$$

Quant à (II d), c'est une condition très peu restrictive. Il suffit, pour qu'elle soit vérifiée, que $\frac{\alpha_m}{\log \frac{b_m}{b_{m-1}}}$ décroisse ainsi que chacun

des nombres τ_m , τ_m' , τ_m'' . C'est ce que nous supposons.

Observons que si (Ib) est posé d'abord, (Ia) et (Ic) résultent ensuite *a fortiori* de (Id) et de (If).

30. Finalement, nos raisonnements suffiront à prouver la *continuité de F(z) sur toute courbe C telle que les conditions (Ib), (Id), (Ie), (If) soient satisfaites*. Ces conditions ne renferment plus que les coefficients α_m et b_m . Elles nous permettront de limiter très strictement l'ordre d'infinitude de la longueur de C tel que nous le définirons plus loin.

Mais auparavant, tirons de (Ie) la conséquence $\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} < \alpha_{m-1} b_{m-1}$

à partir d'une certaine valeur de m . Cette inégalité nous servira plus loin sous le forme

$$\log \frac{a_m}{a_{m+1}} < \log a_m b_m.$$

Celle-ci ne peut pas être sensiblement améliorée, comme le montre l'exemple suivant d'une courbe C_0 pour laquelle les deux infiniment grands (avec m) $\log \frac{a_m}{a_{m+1}}$ et $\log a_m b_m$ sont équivalents (ce que nous noterons en les reliant par le signe \sim).

Posons

$$b_m = [2^{m-1} 3^{m-2} \dots (m-1)^2 m]^q.$$

On a

$$\frac{b_m}{b_{m-1}} = (m!)^q, \quad \log \frac{b_m}{b_{m-1}} \sim qm \log m, \quad \log b_m \sim \frac{q}{2} m^2 \log m.$$

Posons

$$a_m = \frac{m^p}{b_{m-1}} \log \frac{b_m}{b_{m-1}} \quad \text{pour } m \geq 2, \quad \text{avec } a_1 = 1.$$

On a

$$\frac{a_m}{a_{m-1}} \sim (m!)^q, \quad a_m b_m \sim (m!)^q q m^{p+1} \log m,$$

d'où

$$\log \frac{a_m}{a_{m+1}} \sim \log a_m b_m \sim qm \log m$$

(propriété annoncée). D'ailleurs,

$$\frac{a_m b_m}{a_{m-1} b_{m-1}} \sim m^q.$$

Or,

$$\tau_m^2 \sim (m!)^{-q+\varepsilon_m}, \quad \tau_m^3 \sim m^{-p}, \quad \tau_m'' \sim 2q m^{-q+1} \log m.$$

Si $q > 2$, $p > 3$, les trois séries $\Sigma \tau_m$, $\Sigma \tau_m'$, $\Sigma \tau_m''$ sont convergentes. Donc, la fonction $F(z)$ relative à C_0 est continue sur C_0 , qui jouit en outre de la propriété spéciale annoncée ci-dessus.

31. L'ordre d'infinitude de la longueur d'une courbe C sera ci-après caractérisée par deux fonctions $V(\omega)$ et $v(\omega)$ infiniment grandes quand la variable ω tend vers zéro. $V(\omega)$ qui surpasse $v(\omega)$ vaut, à un facteur près compris entre des limites positives indépendantes de m ,

$$a_m b_m, \quad \text{pour } \beta_m = \pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m} < \omega \leq \beta_m = \frac{\pi}{b_m}$$

et

$$\pi \frac{\alpha_{m+1}}{\omega} \quad \text{pour} \quad \beta_{m+1} = \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega < \beta'_m.$$

Nous allons évaluer une borne inférieure pour l'ordre de la fonction $V(\omega)$ relative aux courbes C auxquelles notre méthode s'applique.

Cherchons une borne inférieure (asymptotique) de

$$A(\omega) = \frac{\log^2 V(\omega)}{\log \frac{1}{\omega} \log_2 \frac{1}{\omega}}.$$

Pour $\beta'_m < \omega < \beta_m$, le numérateur est équivalent à $\log a_m b_m$.
Le minimum est atteint pour $\omega = \beta'_m$.

Pour $\beta_{m+1} < \omega < \beta'_m$, il suffit de poser

$$\log \frac{1}{\omega} = t, \quad \log \frac{1}{\pi a_{m+1}} = x$$

et de constater que la fonction $\frac{(t-x)^2}{t \log t}$ croît avec t ($> \alpha > e$).
pour trouver qu'ici encore le minimum est atteint pour $\omega = \beta'_m$.

En résumé, pour $\beta_{m+1} < \omega < \beta_m$,

$$A(\omega) > (1 - \varepsilon_m) \frac{\log^2 a_m b_m}{\log \frac{a_m b_m}{a_{m+1}} \log_2 \frac{a_m b_m}{a_{m+1}}}.$$

Mais, d'après (1e),

$$\frac{1}{a_{m+1} b_m} < 1, \quad \frac{a_m b_m}{a_{m+1}} < a_m b_m^2.$$

Posons $a_m b_m = B_m$,

$$A(\omega) > \frac{\log^2 B_m}{(\log B_m + \log b_m) \log_2 B_m b_m}.$$

(1e) donne encore

$$\frac{b_m}{b_{m-1}} < a_m b_m = B_m.$$

D'où

$$\log b_m < \log B_m + \log B_{m-1} + \dots$$

Mais, d'après (1f), $m \eta_m''$ tendant vers zéro, puisque η_m''

décroit, $\frac{B_m}{B_{m-1}} > m$.

$$\log B_{m-1} < \log B_m - \log m, \quad \log B_{m-2} < \log B_m - \log m(m-1), \quad \dots,$$

$$\log b_m < m \log B_m - (1 - \varepsilon_m) \frac{m^2}{2} \log m \quad (\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0),$$

$$A(\omega) > \frac{\log^2 B_m}{m \left(\log B_m - \frac{m}{2} \log m \right) (\log_2 B_m + \log m)}.$$

Mais,

$$B_m > m!, \quad \log B_m > m \log m.$$

La borne de $A(\omega)$ est croissante avec $\log B_m$ (supposé supérieur à $m \log m$). D'où, en faisant

$$\log B_m = m \log m, \quad A(\omega) > 1,$$

inégalité asymptotique, bien entendu. En résumé,

$$\log V(\omega) > (1 - \varepsilon) \sqrt{\log \frac{1}{\omega} \log_2 \frac{1}{\omega}}$$

(ε positif donné), dès que ω est assez petit.

Il serait sans doute aisé de doubler le coefficient sous le radical. En tout cas, la valeur asymptotique de $A(\omega)$ est $q > 2$, pour les courbes C_0 étudiées plus haut (30). On aurait

$$\lim A(\omega) = q,$$

si, avec la même expression donnée de a_m , on posait

$$\frac{b_m}{b_{m-1}} = (m!)^2 (\log 2 \dots \log m)^q \quad (q > 2).$$

32. On pourrait de même limiter inférieurement la croissance de la seconde fonction $v(\omega)$ caractéristique des courbes C.

Le rapport $\frac{V(\omega)}{v(\omega)}$ tend vers 1 sur un ensemble d'épaisseur droite égale à 1 au point $\omega = 0$, pour toute courbe dont l'ordonnée est une fonction

$$\psi(x) = \sum a_n \cos b_n x,$$

si a_n et b_n vérifient les conditions (1a), (1b), (1c). En particulier, pour les courbes C de notre étude,

$$\overline{\lim}_{\omega=0} \frac{\log v(\omega)}{\sqrt{\log \frac{1}{\omega} \log_2 \frac{1}{\omega}}} \geq \lim_{\omega=0} \frac{\log V(\omega)}{\sqrt{\log \frac{1}{\omega} \log_2 \frac{1}{\omega}}} \geq 1.$$

On a une idée de la borne inférieure de $\log v(\omega)$ par l'exemple suivant, obtenu en réalisant assez strictement les conditions (Id) et (Ie). C_0 et la moindre croissance de $\Lambda(\omega)$ correspondaient aux conditions (Ic), (If) strictement assurées.

Soit $\lambda_m = \log \frac{b_m}{b_{m-1}}$. Posons

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \lambda_m^2 = \frac{1}{m^3}, \quad \frac{\lambda_m}{a_m b_{m-1}} = \frac{1}{2^{m-1}}, \quad \text{d'où} \quad \lambda_{m+1} = \frac{e^{tm}}{2m^3 \lambda_m}.$$

Moyennant $\lambda_1 \geq 5$, λ_m est infini avec m ($\lambda_m > m^2$, quel que soit m). On en conclut que λ_m surpasse e_{m-k} si $e_{n+1} = e^{e^n}$ (k indépendant de m).

D'après

$$\log a_{m+2} b_{m+1} \sim \log \lambda_{m+1} \sim \lambda_m \sim \log a_n b_m,$$

on a

$$\log v\left(\frac{\pi}{b_{m+1}}\right) \sim \lambda_m.$$

Or,

$$\log \frac{\pi}{b_{m+1}} \sim \lambda_{m+1}.$$

Donc

$$\log v(\omega) \sim \log_2 \frac{1}{\omega} \quad \text{pour} \quad \omega = \frac{\pi}{b_{m+1}}.$$

Observons que la condition (Ie) aboutit à limiter inférieurement les a_m et supérieurement les b_m . C est une somme de sinusoïdes dont la fréquence b_m ni l'amplitude a_m ne peuvent croître ni décroître trop vite quand m augmente. (Ie) joint à la décroissance de a'_m donne

$$\log \frac{b_{m+1}}{b_m} < \frac{b_m}{b_{m-1}} \log^{-1} \frac{b_m}{b_{m-1}}.$$

La croissance de b_m ne peut atteindre celle de e_m .

Les variations totales extrêmes d'une fonction « à l'échelle ω ».

33. Nous allons maintenant examiner une question soulevée par l'étude précédente.

Puisqu'en tout point de l'arc continu C, décrit par

$$\xi + if(\xi) \quad (\alpha \leq \xi \leq \beta),$$

la fonction

$$F(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\xi)}{\xi - i f(\xi) - z} d\xi$$

est continue et non holomorphe, il faut que tout arc partiel de C ait une longueur infinie. Dans C, intercalons une suite de points M_i se projetant sur l'axe des ξ aux points

$$x_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

avec $x_0 = \alpha$, $x_{n+1} = \beta$, $x_i < x_{i+1}$ si $0 \leq i \leq n$.

La ligne brisée des sommets M_i a une certaine longueur L. Il est évident que si

$$S' = \sum_{i=0}^{i=n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

on a $S' < L < S' + \beta - \alpha$. On verrait même aisément que si f est à variation totale infinie dans tout intervalle, $S' - L$ tend vers zéro en même temps que le plus grand des nombres

$$x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, \dots, n),$$

la subdivision x_i étant alors variable par la position et le nombre de ses points.

f étant une fonction à variation totale infinie sur $\alpha\beta$, nous allons envisager la *variation totale à l'échelle ω de f sur $\alpha\beta$* , et nous la définirons de deux points de vue différents.

Soit x_i une subdivision quelconque vérifiant

$$\alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \beta.$$

Posons

$$S = \sum_{i=1}^{i=n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

(les valeurs $i = 0$ et $i = n$ sont donc exclues).

1° La *variation totale supérieure à l'échelle ω de f sur $\alpha\beta$* sera le *maximum* de la somme S pour toutes les subdivisions vérifiant $x_{i+1} - x_i \geq \omega$ pour $i = 1, \dots, n - 1$.

Nous notons ce nombre $V(\omega, f, \alpha\beta)$, ou plus brièvement $V(\omega, f)$, ou $V(\omega)$ s'il n'y a pas de confusion à craindre.

2° La *variation totale inférieure à l'échelle ω de f sur $\alpha\beta$*

sera le *minimum* de la somme S pour toutes les subdivisions vérifiant $\alpha_{i+1} - \alpha_i \leq \omega$ ($i = 1, \dots, n-1$), et, en outre, $\alpha_1 - \alpha \leq \omega$, $\beta - \alpha_n \leq \omega$.

Nous notons cette seconde variation $\nu(\omega, f, \alpha\beta)$ ou $\nu(\omega, f)$ ou $\nu(\omega)$.

Dans le premier cas, n est borné supérieurement par $\frac{\beta - \alpha}{\omega} + 1$ (1).

Dans le second cas, n est borné inférieurement par $\frac{\beta - \alpha}{\omega} - 1$.
[Exemple : $\beta - \alpha = (n + 1)\omega$, $\alpha_i = \alpha + i\omega$.]

33 bis. Il est évident que, d'après leurs définitions, $V(\omega)$ et $\nu(\omega)$ croissent (plus précisément, ne décroissent pas) quand ω décroît. L'inégalité $\omega' < \omega$ entraîne $V(\omega') \geq V(\omega)$, $\nu(\omega') \geq \nu(\omega)$. D'autre part, considérons parmi les subdivisions de la seconde espèce celles qui sont formées de nombre α_i en progression arithmétique de raison ω . Donc,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha + (i-1)\omega & (i = 1, \dots, n), \\ \alpha_1 - \alpha &\leq \omega, & \beta - \alpha_n \leq \omega. \end{aligned}$$

Si l'on fait varier α_1 dans le champ $\alpha < \alpha_1 \leq \alpha + \omega$, la somme S correspondante a un maximum $V_1(\omega)$ et un minimum $\nu_1(\omega)$. On a, évidemment,

$$\nu(\omega) \leq \nu_1(\omega) \leq V_1(\omega) \leq V(\omega).$$

En particulier, on trouve $\nu(\omega) \leq V(\omega)$, ce qui justifie les qualifications de « supérieure » et d'« inférieure » données respectivement aux variations totales $V(\omega)$ et $\nu(\omega)$.

Les définitions précédentes s'appliquent à toute fonction $f(x)$ continue ou non. Limitons-nous ci-après au cas d'une fonction $f(x)$ continue.

34. Dans le cas d'une fonction f continue sur l'intervalle $\alpha\beta$, $V(\omega)$ ne saurait être infinie sans qu'il en soit ainsi de $\nu(\omega)$.

D'autre part, il est visible que $\omega V(\omega)$ tend vers zéro avec ω .

En effet, soit $U(\omega)$ le maximum de l'oscillation de f sur un

(1) Considérons, par exemple,

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= (n-1+2\varepsilon)\omega, & 0 < 2\varepsilon < 1, & \alpha_1 = \alpha + \varepsilon\omega, \\ \alpha_i &= \alpha + (i-1)\omega + \varepsilon\omega, & \alpha_n &= \beta - \varepsilon\omega. \end{aligned}$$

intervalle de longueur ω situé sur $\alpha\beta$, et soit $U(\beta - \alpha) = \Omega$ l'oscillation de f sur $\alpha\beta$.

Si $\omega < \frac{1}{n}$, soient p le nombre des intervalles $\alpha_i \alpha_{i+1}$ supérieurs en longueur à $\frac{1}{n}$, et q le nombre des autres intervalles s de la subdivision réalisant le maximum $V(\omega)$. On a

$$p < n(\beta - \alpha), \quad q < p + q < \frac{\beta - \alpha}{\omega} + 1.$$

Donc,

$$V(\omega) < n(\beta - \alpha)\Omega - \left(\frac{\beta - \alpha}{\omega} - 1\right)U\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où

$$\overline{\lim}_{\omega=0} \omega V(\omega) \leq (\beta - \alpha)U\left(\frac{1}{n}\right),$$

quel que soit n entier. Donc,

$$\lim_{\omega=0} \omega V(\omega) = 0.$$

Si nous considérons la courbe $y = f(x)$, f étant continue, $V(\omega)$ et $c(\omega)$ caractérisent d'une certaine manière « à l'échelle ω » la longueur de cette courbe (de longueur infinie).

35. Ces notions indispensables étant établies, nous allons évaluer les variations $V(\omega)$ et $c(\omega)$ pour les fonctions

$$\psi(x) = \sum_1^{\infty} a_n \cos b_n x$$

vérifiant les conditions (1a), (1b), (1c), savoir :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{a_{m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1} b_{m+1}}{a_m b_m} = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_{m+1}}{b_m} \right) = \infty.$$

Nous comparerons les variations $V(\omega)$ et $c(\omega)$ de ces fonctions ψ l'une à l'autre. Nous verrons qu'elles ne sont pas indépendantes. Nous aurons ainsi établi les résultats utilisés (31, 32) afin de montrer que, pour les fonctions $\psi(x)$ particulières définissant les courbes C de notre précédente étude, la croissance de la fonction $V(\omega)$ est limitée inférieurement [et de même pour $c(\omega)$]. Il faut donc que la longueur d'une courbe C soit

« assez fortement infinie » pour qu'une fonction analytique puisse rester continue sur elle et holomorphe hors d'elle.

Par contre, nous montrerons qu'avec une fonction $\psi(x)$ soumise aux seules conditions (Ia), (Ib), (Ic), on peut réaliser les inégalités $h \leq \overline{\lim} \frac{v(\omega)}{W(\omega)} \leq \overline{\lim} \frac{V(\omega)}{W(\omega)} \leq k$, h et k finis positifs, quelle que soit la fonction décroissante donnée $W(\omega)$ infinie pour $\omega = 0$, avec $\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega W(\omega) = 0$.

Enfin, pour une fonction continue quelconque, nous constaterons par un exemple l'impossibilité de fixer aucune relation d'ordre de grandeur entre $V(\omega)$ et $v(\omega)$.

36. Calculons les variations $V(\omega, \psi)$ et $v(\omega, \psi)$ sur l'intervalle $\alpha\beta$.

Tout d'abord, évaluons, quand λ est grand, la partie principale de la variation totale $VT(\cos \lambda x, \alpha\beta)$ de $\cos \lambda x$ sur $\alpha\beta$. Si f est dérivable, on a

$$VT(f, \alpha\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} |f'| dx.$$

On en déduit immédiatement

$$2 \left(\frac{\beta - \alpha}{\pi} \lambda - 1 \right) < VT(\cos \lambda x, \alpha\beta) < 2 \left(\frac{\beta - \alpha}{\pi} \lambda + 1 \right).$$

Donc,

$$VT(\cos \lambda x, \alpha\beta) \sim \frac{2}{\pi} (\beta - \alpha) \lambda,$$

si λ est infiniment grand.

Toute borne inférieure de $V_i(\omega)$ en est une pour $V(\omega)$. Toute borne supérieure de $v_i(\omega)$ vaut aussi pour $v(\omega)$. De là l'intérêt de calculer de telles bornes de $V_i(\omega)$ et de $v_i(\omega)$ pour certaines valeurs remarquables de ω . La décroissance de $V_i(\omega)$ et de $v_i(\omega)$ permet ensuite de conclure pour toutes les valeurs de ω :

Soit

$$S(\psi) = \sum_{i=1}^{n-1} |\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)|$$

pour

$$x_i = x_1 + (i-1)\omega, \quad 0 < x_1 - \alpha \leq \omega, \quad 0 < \beta - x_n \leq \omega.$$

Faisons

$$\omega = \frac{\pi}{b_m} = \beta_m \quad \text{et} \quad x_i = \frac{(k+i)\pi}{b_m} \quad (k \text{ entier indépendant de } i).$$

Posons

$$a_p(\cos b_p z_{i+1} - \cos b_p z_i) = u_{p,i}.$$

Nous avons

$$\psi(z_{i+1}) - \psi(z_i) = \sum_{p=1}^{p=\infty} u_{p,i}, \quad \text{avec } u_{m,i} = 2(-1)^{k+i+1} a_m, \quad u_{p,i} \leq 2a_p.$$

Donc, la différence $|\psi(z_{i+1}) - \psi(z_i)| - 2a_m$ est en valeur absolue inférieure à $\sum_{p=1}^{p=m-1} |u_{p,i}| + 2 \sum_{m+1}^{\infty} a_p$.

Donc, (n pour $n-1$)

$$|S(\psi) - 2na_m| < \sum_{p=1}^{p=m-1} VT(a_p \cos b_p x, z\beta) + 2n \sum_{m+1}^{\infty} a_p.$$

avec

$$n = \frac{\beta - x}{\beta_m} = \frac{\beta - x}{\pi} b_m.$$

à une ou deux unités près.

Au second membre, $VT(a_p \cos b_p x)$ est équivalent à

$$2 \left(\frac{\beta - x}{\pi} b_p + 1 \right) a_p.$$

La somme des termes analogues pour $p \leq m-1$ équivaut à

$$2 \frac{\beta - x}{\pi} a_{m-1} b_{m-1}.$$

d'ordre inférieur à $a_m b_m$. $\sum_{m+1}^{\infty} a_p$ équivaut à a_{m+1} . Finalement,

$$S(\psi) \sim 2 \frac{\beta - x}{\pi} a_m b_m \sim VT(a_m \cos b_m x, z\beta).$$

Donc,

$$V_1(\beta_m) > (2 - \varepsilon) \frac{\beta - x}{\pi} a_m b_m.$$

dès que m est assez grand (ε positif quelconque).

Prenons maintenant

$$z_i = \frac{\pi}{2b_m} + (k+i) \frac{\pi}{b_m}.$$

Nous trouverons $\cos b_m z_i = 0$, donc $u_{m,i} = 0$, et, par suite,

$$S(\psi) < \sum_1^{m-1} VT(a_p \cos b_p x) + 2n \sum_{m+1}^{\infty} a_p \sim 2 \frac{\beta - x}{\pi} (a_{m-1} b_{m-1} + a_{m+1} b_m).$$

Donc, pour m assez grand,

$$v_1(\beta_m) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} (a_{m-1} b_{m-1} + a_{m+1} b_m).$$

Nos hypothèses ne nous permettent de rien conclure sur l'allure du rapport $\frac{a_{m-1} b_{m-1}}{a_{m+1} b_m}$ quand m croit. Notons que le rapport $\frac{v_1\left(\frac{\pi}{b_m}\right)}{V_1\left(\frac{\pi}{b_m}\right)}$ est infiniment petit quand m croit. Des inégalités établies résulte :

Pour $\omega \leq \frac{\pi}{b_m} = \beta_m$,

$$(6) \quad V(\omega) > (2 - \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m;$$

Pour $\omega \geq \beta_m$,

$$(7) \quad v(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} (a_{m-1} b_{m-1} + a_{m+1} b_m).$$

37. Par des raisonnements entièrement analogues, nous trouverons encore des *limitations inférieure de $V(\omega)$ et supérieure de $v(\omega)$* , si $\omega = q \frac{\pi}{b_m}$, q étant un entier plus grand que 1 et inférieur à $\frac{b_m}{b_{m-1}}$.

1° Soit d'abord q impair,

$$q = 2q' + 1, \quad q' \geq 0 \quad \text{et} \quad x_i = (k + i) \frac{q\pi}{b_m}.$$

Comme pour $q' = 0$, cas traité plus haut,

$$|u_{m,i}| = 2a_m, \quad |\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)| > 2a_m - \sum_{p=1}^{p=m-1} |u_{p,i}| - 2 \sum_{m+1}^{\infty} a_p$$

et

$$S > 2na_m - (2 + \varepsilon') \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_{m-1} b_{m-1} - (2 + \varepsilon'') na_{m+1}.$$

On a toujours $n \sim \frac{\beta - \alpha}{\omega}$. D'où cette limitation inférieure, valant pour S et, par suite, pour $V_1(\omega)$ et $V(\omega)$:

Pour $\omega = (2q' + 1) \frac{\pi}{b_m}$,

$$(9) \quad V(\omega) \geq V_1(\omega) > \frac{\beta - \alpha}{\pi} \left[(2 - \varepsilon) \frac{a_m \pi}{\omega} - (2 + \varepsilon) a_{m-1} b_{m-1} \right].$$

2° Soit

$$x_i = \frac{\pi}{2b_m} + (k+i) \frac{q\pi}{b_m}.$$

Comme ci-dessus ($q=1$), on a

$$\cos b_m x_i = 0, \quad u_{m,i} = 0 \quad \text{et} \quad S < \sum_1^{m-1} \text{VT}(a_p \cos b_p x) + 2n \sum_{m+1}^{\infty} a_p,$$

avec

$$n = \frac{\beta - x}{\omega} = \frac{\beta - x}{\pi q} b_m.$$

à une unité près. Nous trouvons pour S une limitation supérieure, valable *a fortiori* pour $v_1(\omega)$ et pour $v(\omega)$, savoir :

$$\text{Pour } \omega = q \frac{\pi}{b_m},$$

$$(8) \quad v(\omega) \leq v_1(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - x}{\pi} \left(a_{m-1} b_{m-1} + \pi \frac{a_{m+1}}{\omega} \right).$$

37 bis. Les inégalités établies jusqu'ici [dans (7), (8) et (9), nous remplaçons m par $m+1$] nous donnent les diverses limitations suivantes avec les champs où elles sont utiles. Les inégalités portent le même numéro (accru de *bis* ou de *ter*) que celles d'où elles sont immédiatement déduites :

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega \leq \frac{\pi}{b_m}, \quad V(\omega) > (2 - \varepsilon) \frac{\beta - x}{\pi} a_m b_m,$$

et pour

$$(2q-1) \frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega \leq (2q+1) \frac{\pi}{b_{m+1}} :$$

$$(9 \text{ bis}) \quad V(\omega) > \frac{\beta - x}{\pi} \left[(2 - \varepsilon) \frac{a_m b_{m+1}}{2q-1} - (2 + \varepsilon) a_m b_m \right],$$

$$(9 \text{ ter}) \quad V(\omega) > \frac{\beta - x}{\pi} \left[(2 - \varepsilon) \frac{2q-1}{2q+1} \pi \frac{a_{m+1}}{\omega} - (2 + \varepsilon) a_m b_m \right],$$

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega < \frac{\pi}{b_m}, \quad v(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - x}{\pi} (a_m b_m + a_{m+2} b_{m+1}),$$

et pour

$$q \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega < (q+1) \frac{\pi}{b_{m+1}} :$$

$$(8 \text{ bis}) \quad v(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - x}{\pi} \left(a_m b_m + \frac{a_{m+2} b_{m+1}}{q} \right),$$

$$(8 \text{ ter}) \quad v(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - x}{\pi} \left(a_m b_m + \frac{a_{m+2}}{\omega} \pi \frac{q+1}{q} \right).$$

38. Cherchons maintenant une *limite supérieure* de $V(\omega)$, puis une limite inférieure de $v(\omega)$.

Quelle que soit la subdivision a_i , on a

$$S < \sum_{p=1}^{p=\infty} \sum_{i=1}^{i=n-1} a_p |\cos b_p x_{i+1} - \cos b_p x_i|,$$

donc, quel que soit m ,

$$S < \sum_1^m VT(a_p \cos b_p x, x\beta) + 2n \sum_{m+1}^{\infty} a_p \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m + 2n a_{m+1}.$$

Supposons maintenant

$$x_{i+1} - x_i \geq \omega, \quad \text{d'où} \quad n < \frac{\beta - \alpha}{\omega} + 1.$$

Les sommes S que nous caractérisons ont pour maximum $V(\omega, \psi)$. Donc, quels que soient m et ω ,

$$V(\omega, \psi) \leq S < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} \left(a_m b_m + \pi \frac{a_{m+1}}{\omega} \right)$$

(dès que m est assez grand).

Pour ω donné, la valeur à choisir pour m est celle qui donne au second membre la moindre valeur. En remplaçant successivement m par $m - 1$ et par $m + 1$, écrivant que les nouvelles évaluations obtenues ne sont pas moins qu'équivalentes à la première, et tenant compte de ce que $\frac{a_{m-1} b_{m-1}}{a_m b_m}$, $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ sont infiniment petits avec m , on est conduit à choisir cette limitation supérieure de $V(\omega)$ dans le champ

$$(10) \quad \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega \leq \frac{\pi}{b_m}, \quad V(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} \left(a_m b_m + \pi \frac{a_{m+1}}{\omega} \right).$$

Les deux termes $a_m b_m$ et $\pi \frac{a_{m+1}}{\omega}$ sont égaux pour

$$\omega = \beta'_m = \pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m}.$$

Les rapports $\frac{\beta'_m}{\beta'_{m+1}}$ et $\frac{\beta'_m}{\beta'_m}$ sont infiniment grands avec m . Nous désignerons par λ_m^2 un infiniment grand inférieur aux deux précédents et aussi lentement croissant que l'on voudra.

39. Évaluation de $V(\omega)$. — La comparaison de l'inégalité (10) avec les relations (6 bis) et (9 ter) donne immédiatement les résultats suivants :

$$1^{\circ} \quad \lambda_m \beta'_m < \omega \leq \frac{\pi}{b_m} = \beta_m, \quad V(\omega, \psi) \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m,$$

d'après (6 bis) et (10).

$$2^{\circ} \quad \frac{a_{m+1}}{a_m b_m} = \beta'_m < \omega < \lambda_m \beta'_m, \quad V(\omega, \psi) = h_1 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m,$$

avec $\overline{\lim} h_1 < 4$, d'après (10), et $\underline{\lim} h_1 > 2$, d'après (6 bis).

$$3^{\circ} \quad \frac{\beta'_m}{\lambda_m} < \omega < \beta'_m, \quad V(\omega, \psi) = h_2 (\beta - \alpha) \frac{a_{m+1}}{\omega}.$$

D'après (10), $\overline{\lim} h_2 \leq 4$, car $a_m b_m < \pi \frac{a_{m+1}}{\omega}$. Pour trouver $\underline{\lim} h_2$, notons d'abord que $V(\omega)$ croissant quand ω décroît, on a

$$V(\omega) > 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m = 2 (\beta - \alpha) \frac{a_{m+1}}{\beta'_m}, \quad \text{d'où} \quad h_2 > 2 \frac{\omega}{\beta'_m}.$$

Donc, si $\frac{\beta'_m}{2} < \omega < \beta'_m$, $\underline{\lim} h_2 > 1$.

Si $\frac{\beta'_m}{\lambda_m} < \omega < \frac{\beta'_m}{2}$, d'après (9 ter) où q est infiniment grand, on a encore $\underline{\lim} h_2 > 1$.

$$4^{\circ} \quad \lambda_m b_{m+1} \leq \omega < \frac{\beta'_m}{\lambda_m}, \quad V(\omega, \psi) \sim 2 (\beta - \alpha) \frac{a_{m+1}}{\omega},$$

d'après (10) et (9 ter) où $q > \frac{\lambda_m}{\pi} - 1$ est infiniment grand.

$$5^{\circ} \quad \beta_{m+1} = \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega < \lambda_m \beta_{m+1}, \quad V(\omega, \psi) = h_3 (\beta - \alpha) \frac{a_{m+1}}{\omega}$$

avec $\overline{\lim} h_3 > 2$, d'après (10) et $\underline{\lim} h_3 > \frac{2}{3}$, d'après (9 ter) où l'on fait $q = 1$. D'ailleurs, dans ce même champ des ω , on a

$$h_3 \sim 1, \quad \text{pour } \omega = \beta_{m+1}, \quad \omega = 3\beta_{m+1}, \quad \omega = (2q + 1)\beta_{m+1}.$$

En résumé, $V(\omega, \psi)$ est connu avec une erreur relative infiniment petite dans chacun des champs

$$\lambda_m \pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m} \leq \omega \leq \frac{\pi}{b_m}, \quad \text{où} \quad V(\omega) \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m$$

et

$$\lambda_m \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega < \pi \frac{a_{m+1}}{\lambda_m a_m b_m} \quad \text{où} \quad V(\omega) \sim 2(\beta - \alpha) \frac{a_{m+1}}{\omega}.$$

En outre, pour $\pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m} < \omega < \frac{\pi}{b_m}$, on a

$$V(\omega) = h \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m$$

et pour $\frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega < \pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m}$, on a

$$V(\omega) = h(\beta - \alpha) \frac{a_{m+1}}{\omega},$$

les limites d'indétermination de h étant comprises entre $\frac{2}{3}$ et 4.

Les notations $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ et celle d'équivalence \sim se rapportent à une variation arbitraire de ω dans le champ qui lui est assigné dans chaque cas, m croissant indéfiniment.

40. Occupons-nous maintenant de trouver une *limite inférieure* de $v(\omega)$.

Soit $\omega < \frac{\pi}{b_m}$. Nous envisageons les subdivisions α_i telles que $\alpha_{i+1} - \alpha_i \leq \omega$ pour $i = 0, \dots, n$.

Sur chacun des segments $\frac{k\pi}{b_m} - \frac{\omega}{2}, \frac{k\pi}{b_m} + \frac{\omega}{2}$ entièrement inclus dans $\alpha\beta$, il y a au moins un point subdivisionnaire $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$.

Soit α'_k un tel point, par exemple, le plus près possible de $\frac{k\pi}{b_m}$ (et à gauche en cas d'ambiguïté).

La somme $\sum |\psi(\alpha_{i+1}) - \psi(\alpha_i)|$ étendue aux indices i tels que $\alpha'_k \leq \alpha_i$ et $\alpha_{i+1} \leq \alpha'_{k+1}$ vaut au moins $|\psi(\alpha'_{k+1}) - \psi(\alpha'_k)|$. Ce dernier nombre surpasse

$$a_m |\cos b_m \alpha'_{k+1} - \cos b_m \alpha'_k| - \left(\sum_1^{m-1} + \sum_{m+1}^{\infty} \right) a_p |\cos b_p \alpha'_{k+1} - \cos b_p \alpha'_k|.$$

Le premier terme atteint son minimum pour

$$\alpha'_k = \frac{k\pi}{b_m} \pm \frac{\omega}{2}, \quad \alpha'_{k+1} = \frac{(k+1)\pi}{b_m} \pm \frac{\omega}{2}.$$

Donc,

$$|\cos b_m \alpha'_{k+1} - \cos b_m \alpha'_k| > 2 \cos \frac{\omega}{2} b_m.$$

Finalement,

$$|\psi(x'_{n+1}) - \psi(x'_n)| \geq 2\alpha_m \cos \frac{\omega}{2} b_m - \sum_{p=1}^{p=m-1} \alpha_p |\cos b_p x'_{n+1} - \cos b_p x'_n| - 2 \sum_{m+1}^{\infty} \alpha_p.$$

Les entiers k intervenant sont au nombre de $\frac{\beta - x}{\pi} b_m$, à deux unités près par excès ou par défaut. Donc,

$$S < \left(\frac{\beta - x}{\pi} b_m - 2 \right) \left(2\alpha_m \cos \frac{\omega}{2} b_m - 2 \sum_{m+1}^{\infty} \alpha_p \right) - \sum_{p=1}^{p=m-1} \text{VT}(\alpha_p \cos b_p x, x, \beta).$$

Cette limite vaut pour toutes les subdivisions α_i auxquelles correspondent les sommes S dont $c(\omega, \psi)$ est le minimum. Donc,

$$(11) \quad c(\omega, \psi) > 2 \frac{\beta - x}{\pi} \left[(1 - \varepsilon) \alpha_m b_m \cos \frac{\omega}{2} b_m - (1 - \varepsilon) \alpha_{m-1} b_{m-1} - (1 + \varepsilon) \alpha_{m+1} b_m \right]$$

pour

$$\frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega \leq \frac{\pi}{b_m}.$$

41. Il nous sera utile d'améliorer dans le même champ, mais au voisinage de la borne supérieure $\frac{\pi}{b_m}$, l'inégalité (8^{ter}), q étant l'entier défini par

$$\left(q - \frac{1}{2} \right) \omega \leq \frac{\pi}{2b_m} < \left(q + \frac{1}{2} \right) \omega.$$

considérons la subdivision formée des points intérieurs à $\alpha\beta$ et de valeurs (k entier)

$$\frac{k\pi}{b_m} - \frac{\omega}{2}, \quad \frac{k\pi}{b_m} - 3\frac{\omega}{2}, \quad \dots, \quad \frac{k\pi}{b_m} - \left(q - \frac{1}{2} \right) \omega, \\ \left(\frac{k\pi}{b_m} - \frac{\pi}{2b_m} \right), \quad \left(\frac{k+1\pi}{b_m} - \left(q - \frac{1}{2} \right) \omega \right), \quad \dots, \quad \frac{(k+1)\pi}{b_m} - \frac{\omega}{2}.$$

Le point médian $\frac{k\pi}{b_m} + \frac{\pi}{2b_m}$ ne figure que si sa présence est nécessaire pour que le pas de la subdivision n'excède pas ω ; donc si

$$\frac{\pi}{b_m} - (2q - 1)\omega > \omega,$$

ou si

$$q\omega < \frac{\pi}{2b_m} < \left(q + \frac{1}{2}\right)\omega.$$

En donnant à k toutes les valeurs admissibles, on a une subdivision vérifiant

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i \leq \omega \quad (i = 0, \dots, n+1).$$

Pour les i tels que α_i soit dans la suite ci-dessus relative à l'entier k (nous les appellerons les i_k), toutes les différences

$$\cos b_m \alpha_{i+1} - \cos b_m \alpha_i$$

sont de même signe (la dernière est nulle). Donc,

$$\sum_{i=i_k} a_m |\cos b_m \alpha_{i+1} - \cos b_m \alpha_i|$$

étendue à toutes les valeurs i_k de i , vaut $2a_m \cos \frac{b_m \omega}{2}$. Le nombre des i appartenant aux i_k est $2q$, si $\frac{k\pi}{b_m} + \frac{\pi}{2b_m}$ est dans la suite des α_i , sinon $2q - 1$. Dans tous les cas, ce nombre est inférieur à $\frac{\pi}{\omega b_m}$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=i_k} |\psi(\alpha_{i+1}) - \psi(\alpha_i)| &< 2a_m \cos \frac{b_m \omega}{2} \\ &+ \sum_1^{m-1} a_p \sum_{i=i_k} |\cos b_p \alpha_{i+1} - \cos b_p \alpha_i| + 2 \left(\frac{\pi}{\omega b_m} + 1\right) \sum_{m+1}^{\infty} a_p. \end{aligned}$$

Le nombre des valeurs de k est toujours inférieur à $\frac{\beta - \alpha}{\pi} b_m + 2$.

Finalement

$$\begin{aligned} S &< \left(\frac{\beta - \alpha}{\pi} b_m + 2\right) \left[2a_m \cos \frac{b_m \omega}{2} + 2 \left(\frac{\pi}{\omega b_m} + 1\right) \sum_{m+1}^{\infty} a_p \right] \\ &+ \sum_1^{m-1} \text{VT}(a_p \cos b_p x, \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Les sommes S étudiées sont parmi celles dont $\nu(\omega, \psi)$ est le minimum. Donc,

$$(12) \quad \nu(\omega, \psi) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} \left(a_m b_m \cos \frac{b_m \omega}{2} + a_{m-1} b_{m-1} + \pi \frac{a_{m+1}}{\omega} \right)$$

pour

$$\frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega < \frac{\pi}{b_m}.$$

42. Évaluation de $v(\omega)$. — Les relations (11) et (12), celle-ci complétée par (8 *ter*), conduisent immédiatement aux conséquences suivantes.

Soit ε_m l'infiniment petit défini par l'égalité

$$\frac{\varepsilon_m}{4} = \frac{a_{m-1}b_{m-1}}{a_m b_m} - \frac{a_{m+1}}{a_m}.$$

Pour $\omega = \frac{\pi - \varepsilon_m}{b_m}$, le premier terme de la formule (11) est sensiblement égal au double des deux termes soustractifs. Il est supérieur à ce double si $\omega < \frac{\pi - \varepsilon_m}{b_m}$, et inférieur pour $\omega > \frac{\pi - \varepsilon_m}{b_m}$. En outre $\lambda_m \varepsilon_m$ est infiniment petit d'après nos hypothèses. Donc :

$$1^\circ \quad \frac{\pi - \varepsilon_m}{b_m} < \omega < \frac{\pi}{b_m} = \beta_m,$$

$$(2 - \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_{m-1} b_{m-1} < v(\omega) < h'_1 \frac{\beta - \alpha}{\pi} (a_{m-1} b_{m-1} + a_{m+1} b_m),$$

d'après (11) (où m est remplacé par $m - 1$), et avec $\overline{\lim} h'_1 \leq 6$, d'après (12).

Soit $\beta_{m-1} = \pi \frac{a_{m-1}}{a_{m-1} b_{m-1}}$. Si $\frac{\beta_{m-1}}{\beta_m} = \frac{a_{m+1} b_m}{a_{m-1} b_{m-1}}$ n'est pas borné (voir ci-après), nous sommes obligés de nous arrêter à cette approximation de $v(\omega)$ dans ce premier champ.

$$2^\circ \quad \frac{\pi - \lambda_m \varepsilon_m}{b_m} < \omega < \frac{\pi - \varepsilon_m}{b_m}, \quad v(\omega) = h'_2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m \cos \frac{\omega}{2} b_m,$$

avec $\overline{\lim} h'_2 < 3$, d'après (12), et $\underline{\lim} h'_2 \geq 1$, d'après (11).

$$3^\circ \quad \frac{\pi}{\lambda_m b_m} < \omega < \frac{\pi - \lambda_m \varepsilon_m}{b_m}, \quad v(\omega) \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m \cos \frac{\omega}{2} b_m,$$

en vertu de (11) et de (12).

$$4^\circ \quad \beta_{m+1} = \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \omega < \frac{\pi}{\lambda_m b_m}.$$

Nous abandonnons l'inégalité (12) pour limiter supérieurement $v(\omega)$. Nous adoptons (8 *ter*) pour $\omega > 2\beta_{m+1}$, soit

$$v(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} \left(a_m b_m + \frac{3\pi}{2} \frac{a_{m+2}}{\omega} \right), \quad \left(2\beta_{m+1} < \omega < \frac{\beta_m}{\lambda_m} \right)$$

et (8 bis) pour $\beta_{m+1} \leq \omega \leq 2\beta_{m+1}$, soit

$$v(\omega) < (2 + \varepsilon) \frac{\beta - \alpha}{\pi} (a_m b_m + a_{m+2} b_{m+1}).$$

Nous distinguons divers cas suivant les caractères de $\frac{\beta_m''}{\beta_{m+1}}$ pour m infini.

a. $\frac{a_{m+2} b_{m+1}}{a_m b_m}$ infiniment petit (seul cas réalisé pour les courbes C_0 du n° 30) :

$$\beta_{m+1} = \frac{\pi}{b_{m+1}} \leq \pi \leq \frac{\pi}{\lambda_m b_m}, \quad v(\omega) \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m.$$

Observons que, sous la même hypothèse, en remplaçant m par $m + 1$ dans (12),

$$\frac{\pi - \varepsilon_{m+1}}{b_{m+1}} \leq \omega \leq \frac{\pi}{b_{m+1}}, \quad v(\omega) = h'_3 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m$$

$$\text{avec } \overline{\lim} h'_3 \leq 6, \quad \underline{\lim} h'_3 \geq 2.$$

b. $\overline{\lim} \frac{a_{m+2} b_{m+1}}{a_m b_m} = K$ (K positif, indépendant de m) :

$$\lambda_m \beta_m'' < \omega < \frac{\pi}{\lambda_m b_m}, \quad v(\omega) \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m$$

$$\beta_{m+1} = \frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega < \lambda_m \beta_m'', \quad v(\omega) = h'_4 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m$$

$$\text{avec } \overline{\lim} h'_4 = 2(K + 1), \text{ d'après (8 bis) et } \underline{\lim} h'_4 = 2.$$

De même,

$$\frac{\pi - \varepsilon_{m+1}}{b_{m+1}} < \omega < \frac{\pi}{b_{m+1}} = \beta_{m+1}, \quad v(\omega) = h'_5 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m$$

$$\text{avec } \underline{\lim} h'_5 = 2, \quad \overline{\lim} h'_5 = 6(K + 1).$$

c. $\frac{a_{m+2} b_{m+1}}{a_m b_m}$ ou $\frac{\beta_m''}{\beta_{m+1}}$ infiniment grand avec m :

$$\lambda_m \beta_m'' < \omega < \frac{\pi}{\lambda_m b_m}, \quad v(\omega) \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m \quad (\text{comme pour 4° b}),$$

$$\beta_m'' < \omega < \lambda_m \beta_m'', \quad v(\omega) = h'_6 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m$$

$$\text{avec } 2 \leq \overline{\lim} h'_6 \leq 4,$$

$$\beta_{m+1} = \frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega < \beta_m'', \quad 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m < v(\omega) < h'_7 (\beta - \alpha) \frac{a_{m+2}}{\omega}$$

$$\text{avec } \overline{\lim} h'_7 = 4,$$

sans possibilité de resserrer ces dernières limites qui valent encore pour

$$\frac{\pi - \varepsilon_{m+1}}{b_{m+1}} < \omega < \frac{\pi}{b_{m+1}}$$

[avec toutefois $\overline{\lim} h'_m = 6$].

43. En résumé, si $\frac{a_{m+2} b_{m+1}}{a_m b_m}$ tend vers zéro, quand m croît, $v(\omega)$ est déterminé par les formules précédentes (42) avec une erreur relative infiniment petite, sauf dans un intervalle $\frac{\pi - \varepsilon}{b_m}$, $\frac{\pi}{b_m}$, quel que soit ε positif fixe (et même pour ε égal à l'infiniment petit $\varepsilon_m \lambda_m$).

La valeur de $v(\omega)$ est alors équivalente à

$$2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m \cos b_m \frac{\omega}{2}, \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega < \frac{\pi - \varepsilon}{b_m}.$$

Si $\frac{a_{m+2} b_{m+1}}{a_m b_m}$ surpasse k positif indépendant de m , ou si ce nombre est infiniment grand avec m , la formule d'approximation précédente ne vaut avec exactitude que dans les intervalles

$$\left(\frac{\pi}{b_{m+1}} + \lambda_m \frac{a_{m+2}}{a_m b_m}, \frac{\pi - \lambda_m \varepsilon_m}{b_m} \right),$$

λ'_m étant un infiniment grand aussi lent que l'on veut.

Dans l'intervalle

$$\frac{\pi - \varepsilon_m}{b_m}, \quad \frac{\pi}{b_m} + \lambda_{m-1} \frac{a_{m+1}}{a_{m-1} b_{m-1}}$$

la détermination de $v(\omega)$ est indécise entre $2 h' \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_{m-1} b_{m-1}$ et

$$2 h'' \frac{\beta - \alpha}{\pi} \left(a_{m-1} b_{m-1} + \pi \frac{a_{m+2}}{\omega} \right), \quad [1 \leq \underline{\lim} h', \quad \overline{\lim} h'' < 3].$$

44. Considérons le rapport $\frac{V(\omega)}{v(\omega)}$. Il est infiniment voisin de 1 dans les intervalles $\lambda_m \frac{a_{m+1}}{a_m} \frac{\pi}{b_m}$, $\frac{\pi}{\lambda_m b_m}$, si lentement croissant que soit λ_m , avec λ_m^2 inférieur à $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ et à $\frac{a_{m+1} b_{m+1}}{a_m b_m} = \frac{\beta'_m}{\beta_{m+1}}$. Si par

exemple μ_m^3 est le plus petit de ces deux derniers infiniment grands, le rapport $\frac{V(\omega)}{\nu(\omega)}$ tend vers 1, si $\mu_m \frac{a_{m+1}}{a_m} \frac{\pi}{b_m} < \omega < \frac{\pi}{\mu_m b_m}$.

Donc le rapport $\frac{V(\omega)}{\nu(\omega)}$ tend vers 1 quand ω tend vers zéro sur un certain ensemble d'épaisseur supérieure droite égale à 1 à l'origine.

Mais par contre, dans l'intervalle

$$\beta_{m+1} = \frac{\pi}{b_{m+1}} < \omega < \frac{1}{\mu_m} \pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m} = \frac{1}{\mu_m} \beta'_m,$$

on a

$$\frac{V(\omega)}{\nu(\omega)} > \frac{\pi \frac{a_{m+1}}{\omega}}{a_m b_m + \pi \frac{a_{m+2}}{\omega}} = \frac{1}{\frac{\omega}{\pi} \frac{a_m b_m}{a_{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}} > \frac{1}{\frac{1}{\mu_m} + \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}}.$$

Donc, $\frac{V(\omega)}{\nu(\omega)}$ est infiniment grand avec m . D'après $\mu_m^3 < \frac{\beta'_m}{\beta_{m+1}}$, le rapport $\frac{\beta'_m}{\mu_m}; \beta_{m+1} \geq \mu_m^2$ est infiniment grand. Donc, $\frac{V(\omega)}{\nu(\omega)}$ tend vers ∞ sur un certain ensemble d'épaisseur supérieure droite 1 à l'origine.

Enfin sur l'intervalle $\frac{\alpha}{b_m} < \omega < \frac{\pi - \alpha}{b_m}$, on a sensiblement

$$\cos \frac{\alpha}{2} > \frac{\nu(\omega)}{V(\omega)} > \sin \frac{\alpha}{2},$$

quel que soit α positif indépendant de m .

Donc les limites d'indétermination de $\frac{\nu(\omega)}{V(\omega)}$ sont finies et supérieures à 0 sur un ensemble d'épaisseur supérieure droite positive et aussi voisine de 1 qu'on le veut. On aurait un fait analogue avec des intervalles entourant $\omega = \beta'_m = \pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m}$.

En résumé, $\log \frac{V(\omega, \psi)}{\nu(\omega, \psi)}$ qui est non négatif, admet, quand ω tend vers zéro, la limite unique zéro, sur un ensemble d'épaisseur supérieure droite égale à 1, la limite unique ∞ sur un ensemble d'épaisseur supérieure droite 1, des limites d'indétermination positives et finies sur un ensemble d'épaisseur supérieure droite aussi voisine de 1 qu'on le veut, mais inférieure à 1.

et *a fortiori*

$$V(\omega, \psi, \alpha\beta) < (2 + \varepsilon) W(\omega),$$

d'après $\omega < \beta_m$ et la décroissance de W .

Pour $\beta_{m+1} < \omega < \beta'_m$,

$$V(\omega, \psi, \alpha\beta) = 2h(\beta - \alpha) \frac{a_{m+1}}{\omega} = h \frac{\beta_{m+1} W(\beta_{m+1})}{\omega} \quad (1 \leq \overline{\lim} h \leq 2).$$

Pour que $V(\omega) : W(\omega)$ reste borné, il faut et il suffit que :

$$(A) \quad \beta_{m+1} \leq \omega < \beta'_m \quad \text{entraîne} \quad \beta_{m+1} W(\beta_{m+1}) \leq k' \omega W(\omega)$$

(k' indépendant de m et au moins égal à 1).

Passons à $v(\omega, \psi, \alpha\beta)$. Nous voulons que $\frac{v(\omega)}{W(\omega)}$ ne tende pas vers zéro, qu'il existe une suite de valeurs de ω tendant vers zéro et telles que $\frac{v(\omega)}{W(\omega)}$ surpasse un nombre positif $\frac{1}{k'}$ indépendant de ω .

A fortiori, pour cette même suite, $\frac{v(\omega)}{V(\omega)}$ surpasse un nombre positif fixe. Donc, si une de ces valeurs ω_m de ω appartient à l'intervalle $\beta_{m+1} \beta_m$, elle vérifie $\eta\beta'_m < \omega_m < \beta_m(1 - \eta)$, η étant un nombre positif indépendant de m . D'où

$$v(\omega_m, \psi, \alpha\beta) \sim 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m \cos \frac{\omega_m b_m}{2} = W(\beta_m) \cos \frac{\omega_m b_m}{2} < W(\beta_m).$$

Donc.

$$\frac{1}{k'} < \frac{v(\omega_m)}{W(\omega_m)} < \frac{W(\beta_m)}{W(\omega_m)}.$$

A fortiori

$$(B) \quad \frac{W(\beta_m(1 - \eta))}{W(\beta_m)} \leq k'$$

pour un certain couple de valeurs de η et de k'' , indépendantes de m ($0 < \eta < 1$, $k'' \geq 1$).

Réciproquement on vérifie que les conditions (A) et (B) suffisent pour entraîner les propriétés annoncées de $V(\omega, \psi)$ et $v(\omega, \psi)$. De là la solution suivante :

Puisque $\omega W(\omega)$ tend vers zéro avec ω , il existe un ensemble de nombres u admettant zéro pour point limite et jouissant de cette propriété que l'inégalité $u < \omega$ entraîne $u W(u) \leq \omega W(\omega)$.

Nous choisissons les $\frac{\beta_m}{2}$ parmi les u . On a alors, faisant en parti-

culier $\omega = \beta_m$ avec $u = \frac{\beta_m}{2}$,

$$\frac{1}{2} W\left(\frac{\beta_m}{2}\right) \leq W(\beta_m) \leq W\left(\frac{\beta_m}{2}\right).$$

Donc (B) est satisfaite avec $\eta = \frac{1}{2}$, $k'' = 2$.

D'autre part, si $\omega > \beta_m$,

$$\omega W(\omega) > \frac{\beta_m}{2} W\left(\frac{\beta_m}{2}\right) > \frac{\beta_m}{2} W(\beta_m).$$

Donc la condition (A) est satisfaite avec $k' = 2$. On en conclut immédiatement

$$V(\omega, \psi, x\beta) < 4W(\omega)$$

à partir d'un certain ω .

D'autre part,

$$v\left(\frac{\beta_m}{2}, \psi, x\beta\right) \sim W(\beta_m) \cos \frac{\pi}{4} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} W\left(\frac{\beta_m}{2}\right).$$

Donc,

$$v\left(\frac{\beta_m}{2}, \psi, x\beta\right) > \frac{1}{4} W\left(\frac{\beta_m}{2}\right)$$

à partir d'une certaine valeur de m .

La proposition est donc établie.

46. Appliquons cette solution à un exemple.

Soient

$$x_n = \frac{\pi}{2(n+2)!}, \quad y_n = 2 \frac{\beta - x}{\pi} n!,$$

et $W(\omega)$ ainsi défini :

$$W(\omega) = y_n \quad \text{pour} \quad x_n \leq \omega < x_{n-1}.$$

Bien que nous n'ayons pas fait ci-dessus l'hypothèse de la continuité de $W(\omega)$, on pourrait ajouter cette propriété au présent exemple, sans changement appréciable dans les résultats, en modifiant $W(\omega)$ sur l'intervalle $x_n \left(1 - \frac{2}{n}\right)$, en faisant par exemple varier linéairement $W(\omega)$ sur le segment de mêmes extrémités.

On a

$$x_n W(x_n) = x_n y_n = \frac{\beta - x}{(n+1)(n+2)},$$

$$x_n W(x_n - 0) = x_n y_{n+1} = \frac{\beta - x}{n+2}.$$

et

$$v(\omega, \psi) \sim \frac{\psi - x}{2\pi} (m^m - 2)! \quad \text{pour } \omega = \frac{\pi}{(m^m)!}.$$

La fonction $W(\omega)$ donnée est équivalente à $\frac{1}{\omega} \left(\frac{\log_2 \frac{1}{\omega}}{\log \frac{1}{\omega}} \right)^{1+\theta}$, avec $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ dans $W(x_n)$, et $\theta = 0$ dans $W(x_n - 0)$.

47. Nous avons calculé les variations $V(\omega)$ et $v(\omega)$ relatives à des fonctions $\psi(x)$ analogues à celles qui définissent les courbes C de notre étude sur les fonctions analytiques. Ces courbes C doivent présenter, au voisinage de chaque point, des fluctuations dont l'amplitude surpasse un minimum donné. Aussi l'allure de ces fonctions $\psi(x)$ tout le long de l'axe réel est-elle assez constante, et c'est pourquoi leurs variations extrêmes $V(\omega)$ et $v(\omega)$ ont des ordres d'infinitude comparables entre eux dans des zones étendues décrites par l'infiniment petit ω .

Mais si l'on considère des fonctions continues $F(x)$ quelconques. Il n'y a aucune relation nécessaire entre les ordres des variations extrêmes $V(\omega)$ et $v(\omega)$ de $F(x)$. Nous allons former des *fonctions continues* $F(x)$, dont il serait aisé de montrer qu'elles admettent une dérivée finie sauf sur un ensemble de mesure nulle, et *pour lesquelles* $V(\omega)$ *surpasse une fonction donnée quelconque, si rapidement croissante soit-elle, de* $v(\omega)$.

Soit $f(x) = f(x, \lambda)$ ($0 < \lambda < \frac{1}{4}$) une fonction de x continue, périodique de période 1, vérifiant la condition $f(x) = f(1-x)$, et ainsi définie entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} f(0) = f(1) = 0, \quad f(x) = 0 \quad \text{pour } 2\lambda \leq x \leq 1 - 2\lambda, \\ f(\lambda) = -1, \quad f(1-\lambda) = 1; \end{aligned}$$

$f(x)$ linéaire sur chacun des quatre segments $(0, \lambda)$, $(\lambda, 2\lambda)$, $(1 - 2\lambda, 1 - \lambda)$, $(1 - \lambda, 1)$ (fig. 5).

Si la série $\sum_1^{\infty} a_n$ à termes positifs est convergente, la fonction définie sur le segment $(0, 1)$ par

$$F(x) = \sum_1^{\infty} a_n f(b_n x, \lambda_n) = \sum_1^{\infty} u_n(x)$$

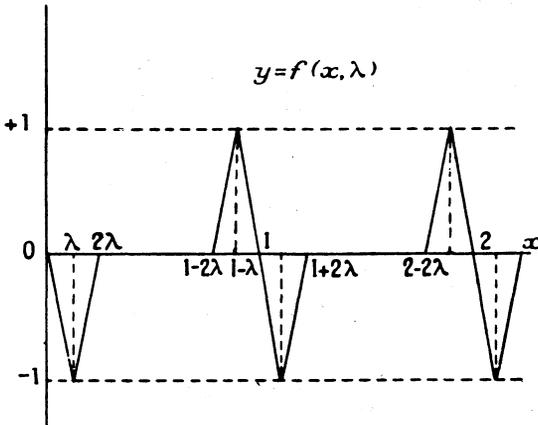
est continue. Pour simplifier, nous supposons $\frac{b_n}{2}$ entier impair.

Nous ferons les hypothèses suivantes, qui nous permettront d'évaluer commodément des limites pour les nombres $V(F, \omega, o, 1)$ et $v(F, \omega, o, 1)$,

$$a_n > a_{n+1}, \quad a_n b_n < a_{n+1} b_{n+1} \quad (\text{d'où } b_n < b_{n+1}); \quad \lambda_n > \lambda_{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} b_{n+1}}{a_n b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \infty.$$

Fig. 5.



Nous concluons de ces conditions que si l'on pose

$$\sum_{m+1}^{\infty} a_n = \varepsilon_m a_m (\sim a_{m+1}), \quad \sum_1^{m-1} a_n b_n = \varepsilon'_m a_m b_m (\sim a_{m-1} b_{m-1}),$$

$$\sum_{m+1}^{\infty} \lambda_n = \varepsilon''_m \lambda_m (\sim \lambda_{m+1}),$$

les trois nombres $\varepsilon_m, \varepsilon'_m, \varepsilon''_m$ tendent vers zéro quand m croît. Observons que, la variation totale de $f(x, \lambda)$ sur $(0, 1)$ étant 4, la variation totale de $a_n f((b_n x), \lambda_n)$ est $4 a_n b_n$.

48. Cela posé, calculons une limite inférieure de $V(\omega, F)$.

Pour $\omega = \frac{2-2\lambda_m}{b_m}$, prenons les points de subdivision $\alpha_0,$

48 bis. Évaluons maintenant une limite supérieure de $v(\omega)$.
 Supposons que $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ soit un entier (impair, dès $n \geq 1$). Alors tous
 les points $\frac{q}{b_m}$ sont parmi les $\frac{q'}{b_{m+p}}$, si q et q' sont entiers.
 Donc $u_{m+p}\left(\frac{q}{b_m}\right) = 0$ quel que soit $p \geq 0$.

Désignons par i_n l'un quelconque des intervalles $\left(\frac{h}{b_n}, \frac{h+2\lambda_n}{b_n}\right)$
 ou $\left(\frac{h+1-2\lambda_n}{b_n}, \frac{h+1}{b_n}\right)$ ($h = 0, \dots, b_n - 1$), sur lesquels $u_n(x) \neq 0$.
 Sur le segment $\left(\frac{q}{b_m}, \frac{q+1}{b_m}\right)$ les intervalles i_{m+p} , pour une valeur
 donnée de $p \geq 1$ ont une longueur totale égale à $\frac{4\lambda_{m+p}}{b_m}$. Donc, pour
 l'ensemble des valeurs de p au moins égales à 1, la longueur totale
 couverte par les i_{m+p} entre $\frac{q}{b_m}$ et $\frac{q+1}{b_m}$ vaut au plus $\frac{4\varepsilon_m''\lambda_m}{b_m}$. Par
 suite, si $\omega = \frac{2+8\varepsilon_m''}{b_m}\lambda_m$, nous pouvons trouver une chaîne de
 points α'_k contenant tous les $\frac{q}{b_m}$ et telle que : 1° α'_k est étranger à
 tous les intervalles i_{m+p} ($p \geq 0$); 2° $\alpha'_k - \alpha'_{k-1} < \frac{2+8\varepsilon_m''}{b_m}\lambda_m$.

Si $\alpha'_0 = 0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{p'} = 1$ sont les points subdivisionnaires, on a

$$u_n(\alpha'_k) = 0 \quad \text{pour } n \geq m.$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{k=p'} |F(\alpha'_k) - F(\alpha'_{k-1})| < \sum_{n=1}^{n=m-1} VT[u_n(x), 0, 1] = (4 + \varepsilon'_{m-1})a_{m-1}b_{m-1};$$

d'où

$$v\left(\frac{2+8\varepsilon_m''}{b_m}\lambda_m\right) < (4 + \varepsilon'_{m-1})a_{m-1}b_{m-1}.$$

Définissons maintenant le choix des λ_m par $\lambda_m = \frac{b_m}{3b_{m+1}}$, ce qui
 entraîne la condition

$$\lim \frac{b_m}{b_{m+1}} : \frac{b_{m+1}}{b_{m+2}} = 0.$$

On a

$$\frac{2+8\varepsilon_m''}{b_m}\lambda_m < \frac{1}{b_{m+1}},$$

dès que $\varepsilon_m'' < \frac{1}{8}$. On pourrait supposer ceci vérifié quel que soit m .

Donc *a fortiori*, pour $\frac{1}{b_{m+1}} \leq \omega < \frac{1}{b_m}$,

$$v(F, \omega, 0, 1) < (1 - \varepsilon'_{m-1}) a_{m-1} b_{m-1}.$$

49. Cela posé, soit $\Phi(u)$ une fonction de l'infiniment grand u aussi rapidement croissante que l'on voudra. Je dis que l'on peut choisir les coefficients a_n, b_n caractérisant la fonction $F(x)$ de façon que

$$V(F, \omega) > \Phi[v(F, \omega)],$$

quel que soit $\omega < \omega_0 < 1$, ω_0 étant assez petit.

Nous supposons $\frac{\Phi(u)}{u}$ croissant indéfiniment. D'après

$$\frac{V(\omega)}{\Phi[v(\omega)]} > \frac{(1 - \tau_m) a_m b_m}{\Phi[(1 + \varepsilon'_{m-1}) a_{m-1} b_{m-1}]},$$

posons l'inégalité

$$a_n b_n \geq 2 \Phi(\gamma a_{n-1} b_{n-1}).$$

Elle entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_{n-1} b_{n-1}} = \infty.$$

Nous joignons à cette inégalité les conditions

$$\lim \frac{a_{n-1}}{a_n} = \lim \frac{b_n b_{n-1}}{b_{n-1}^2} = \infty,$$

$\frac{b_1}{2}$ entier impair, $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ entier impair croissant.

Nous prendrons par exemple $a_n = \frac{1}{n!}$ et $b_1 = 2$. Pour $n \geq 2$, b_n sera le plus petit multiple impair de b_{n-1} , supérieur à $n \frac{b_{n-1}^2}{b_{n-2}}$ et à $2n! \Phi\left[\gamma \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}\right]$.

Les b_n étant ainsi choisis, la fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f\left(b_n x, \frac{b_n}{3b_{n+1}}\right)$$

vérifiera, dès que ω surpassera un certain nombre positif ω_0 , la condition

$$V(F, \omega, 0, 1) > \Phi[v(F, \omega, 0, 1)].$$

Ce sont là des propriétés communes à toutes les fonctions $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions (Ia), (Ib), (Ic).

45. Soit donnée une fonction $W(\omega)$, décroissante (non croissante) en ω , infiniment grande pour ω infiniment petit, et telle que $\omega W(\omega)$ tend vers zéro avec ω .

Est-il possible de construire une fonction

$$\psi(x) = \sum_1^{\infty} a_n \cos b_n x$$

vérifiant (Ia, b, c), $V(\omega, \psi, \alpha\beta) < h W(\omega)$ quel que soit ω , et $v(\omega, \psi, \alpha\beta) > h' W(\omega)$ pour une suite de ω tendant vers zéro, h et h' étant deux nombres positifs indépendants de ω ?

Nous allons montrer qu'il en est ainsi, quel que soit $W(\omega)$ vérifiant les conditions posées.

β_m étant une suite à caractériser ultérieurement, mais en tout cas positive et décroissant quand m croît, nous poserons

$$\frac{\pi}{b_m} = \beta_m, \quad 2 \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m = W(\beta_m).$$

ou

$$b_m = \frac{\pi}{\beta_m}, \quad a_m = \frac{\beta_m}{2(\beta - \alpha)} W(\beta_m).$$

Les conditions

$$\lim \frac{a_m}{a_{m+1}} = \infty, \quad \lim \frac{a_{m+1} b_{m+1}}{a_m b_m} = \infty$$

équivalent à

$$\lim_{m \infty} \frac{\beta_{m+1} W(\beta_{m+1})}{\beta_m W(\beta_m)} = 0, \quad \lim_{m \infty} \frac{W(\beta_{m+1})}{W(\beta_m)} = \infty.$$

Comme $\lim_{\omega=0} W(\omega) = \infty$, $\lim_{\omega=0} \omega W(\omega) = 0$, dans toute suite β_m tendant vers zéro, on pourra raréfier suffisamment les termes pour que, dans la suite β_m réduite, ces deux conditions soient vérifiées.

Moyennant cela, $V(\omega, \psi, \alpha\beta)$ est donné par les formules trouvées plus haut. Posons

$$\beta'_m = \pi \frac{a_{m+1}}{a_m b_m} = \frac{\beta_{m+1} W(\beta_{m+1})}{W(\beta_m)}$$

Pour $\beta'_m < \omega < \beta_m$,

$$V(\omega, \psi, \alpha\beta) = 2h \frac{\beta - \alpha}{\pi} a_m b_m = h W(\beta_m), \quad 1 \leq \overline{\lim} h \leq 2$$

Pour $x_n \leq \omega < x_{n-1}$,

$$\omega W(\omega) = \omega y_n = \frac{\omega}{x_n} \frac{\beta - \alpha}{(n+1)(n+2)}.$$

$\omega W(\omega)$ croît sur le champ $x_n \leq \omega < x_{n-1}$, y est minimum pour $\omega = x_n$, et tend vers zéro avec ω .

Si $x_n \leq u < x_{n-1}$, l'inégalité $\omega W(\omega) \geq u W(u)$ sera une conséquence de $\omega > u$, si elle est vérifiée pour $\omega = x_{n-1}$, ce qui donne

$$\frac{\beta - \alpha}{n(n+1)} \geq \frac{u}{x_n} \frac{\beta - \alpha}{(n+1)(n+2)} \quad \text{ou} \quad x_n \leq u \leq x_n \left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

[Avec la modification rendant continue $W(\omega)$, l'ensemble des u est en tout cas contenu sur les segments $x\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, $x\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ et l'observation que voici subsiste.]

Le rapport $W\left(u \frac{1-\eta}{1-\eta}\right) : W(u)$ (avec $0 < \eta < 1$) est infiniment grand quand u tend vers zéro, quel que soit η indépendant de u .

Si $\frac{\beta_m}{2}$ est choisi égal à un x_n , on a

$$W(\beta_m) = W(2x_n) = y_n, \quad b_m = \frac{\pi}{2x_n} = (n+2)!,$$

$$a_m = \frac{x_n y_n}{\beta - \alpha} \equiv \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

n dépendant de m , nous le notons n_m . Il croît avec m .

$\frac{a_{m+1} b_{m+1}}{a_m b_m} = \frac{y_{n_{m+1}}}{y_{n_m}}$ tend évidemment vers ∞ . La condition

$$\lim \frac{a_m}{a_{m+1}} = \infty$$

équivaut à

$$\lim \frac{n_{m+1}}{n_m} = \infty.$$

On prendra par exemple $n = m^m - 2$. D'où

$$b_m = (m^m)!, \quad a_m = \frac{1}{m^{2m}}.$$

La série

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2m}} \cos(m^m) x$$

est telle que, à partir de certaines valeurs de n et de m ,

$$V(\omega, \psi) < 8 \frac{\beta - \alpha}{\pi} n! \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2(n+2)!} \leq \omega < \frac{\pi}{2(n+1)!}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$, définis par

$$\alpha_{2r} = \frac{4r + \lambda_m}{b_m}, \quad \alpha_{2r+1} = \frac{4r + 2 - \lambda_m}{b_m}$$

avec $\alpha_p < 1 < \alpha_{p+1}$. Donc $p = \frac{b_m}{2}$.

$\varphi(x)$ étant une fonction définie sur $(0, 1)$ posons

$$\tau(\varphi) = \sum_{k=1}^{k=p} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})|.$$

Nous voulons évaluer $\sigma(F)$. Nous écrivons

$$\sigma(F) > \sigma(u_m) - \sum_{n=1}^{n=m-1} \sigma(u_n) - \sum_{m+1}^{\infty} \sigma(u_n).$$

Or,

$$u_m(x_k) - u_m(x_{k-1}) = 2(-1)^{k-1} a_m.$$

Donc,

$$\sigma(u_m) = 2p a_m = a_m b_m.$$

Pour $n \leq m-1$, on a

$$\sigma(u_n) \leq VT(u_n, 0, 1) = 4 a_n b_n.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{n=m-1} \sigma(u_n) < 4 \varepsilon'_m a_m b_m.$$

Pour $n > m$, nous avons

$$|u_n(x_k) - u_n(x_{k-1})| \leq 2 a_n.$$

D'où

$$\sigma(u_n) < 2p a_n = a_n b_m \quad \text{et} \quad \sum_{m+1}^{\infty} \sigma(u_n) < \varepsilon_m a_m b_m.$$

Finalement

$$V\left(F, \frac{2-2\lambda_m}{b_m}\right) > a_m b_m (1 - \varepsilon_m - 4\varepsilon'_m).$$

A fortiori, pour $\omega < \frac{2-2\lambda_m}{b_m}$, et d'autant plus pour $\omega \leq \frac{1}{b_m}$, $V(F, \omega)$ admet cette même limitation inférieure. Nous sommes donc en droit d'écrire :

$$\text{pour } \frac{1}{b_{m+1}} < \omega \leq \frac{1}{b_m}, \quad V(F, \omega) > (1 - \eta_m) a_m b_m \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m = 0 \right).$$

50. Étant donnée une courbe simple de Jordan Γ , d'origine A, d'extrémité B (si B coïncide avec A, on suppose donné un sens sur Γ), à toute représentation paramétrique $x = f(t)$, $y = g(t)$, $[\alpha \leq t \leq \beta]$ correspond relativement à t , une *longueur supérieure* $L(\omega)$ et une *longueur inférieure* $l(\omega)$ de Γ à l'échelle ω .

Soit M_i correspondant à $t = \alpha_i$. $L(\omega)$ est le maximum de la longueur de la ligne brisée $M_1 M_2 \dots M_n$, si

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i \geq \omega \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; \alpha \leq \alpha_1, \alpha_n \leq \beta).$$

$l(\omega)$ sera le minimum de $M_1 M_2 \dots M_n$, si

$$0 < \alpha'_{i+1} - \alpha'_i \leq \omega, \quad \alpha \leq \alpha'_1 \leq \alpha + \omega, \quad \beta - \omega \leq \alpha'_n \leq \beta.$$

On a

$$L(\omega) \geq l(\omega).$$

On aura deux fonctions $L(\omega)$, $l(\omega)$ particulières remarquables en se plaçant dans le cas d'une représentation conforme de l'un des deux voisinages de Γ sur un voisinage du segment (α, β) parcouru par t . Il serait curieux d'examiner si, dans ce cas, les ordres de grandeur de $L(\omega)$ et de $l(\omega)$ sont totalement indépendants, comme ils le sont manifestement avec une représentation paramétrique quelconque.

Une définition *intrinsèque* de ces longueurs extrêmes à l'échelle ω' serait encore la suivante : M_i correspondant toujours à $t = \alpha_i$, et α_i situé sur $\alpha\beta$ croissant avec i , la *longueur supérieure intrinsèque* $\Lambda(\omega')$ de Γ « à l'échelle ω' » sera le maximum de la longueur de $M_1 M_2 \dots M_k$, si chaque distance (rectiligne) $M_h M_{h+1}$ vaut au moins ω' ($1 \leq h \leq k-1$). La *longueur inférieure intrinsèque* $\lambda(\omega')$ de Γ à l'échelle ω' sera le minimum de $M_1 M_2 \dots M_l$ si les distances $M_r M_{r+1}$, AM'_1 , $M'_l B$ valent au plus ω' . On a toujours $\Lambda(\omega') \geq \lambda(\omega')$.