HAAG.

Théorème sur les surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 166-170
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__166_1>

Théorème sur les surfaces; par M. Haag.

(Séance du 11 juillet 1877.)

Soit

$$u = f(\mu, \nu) \tag{1}$$

l'équation géométrique d'une surface dont u est le rayon vecteur [1]; μ, ν sont des variables algébriques indépendantes et la fonction f une fonction géométrique représentant une grandeur géométrique déterminée lorsqu'on attribue à μ et à ν des valeurs quelconques.

On a, par différentiation,

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{d\mu}\frac{d\mu}{dt} + \frac{df}{d\nu}\frac{d\nu}{dt}, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{d^2f}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{d\mu\, d\nu}\frac{d\mu}{dt}\frac{d\nu}{dt} \\ &\quad + \frac{d^2f}{d\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 + \frac{df}{d\mu}\frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{df}{d\nu}\frac{d^2\nu}{dt^2}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et ainsi de suite.

---

[1] Nous n'emploierons pour la démonstration que nous avons en vue que les formules les plus simples du *Calcul géométrique*: ces formules ne sont qu'une extension aux quantités géométriques des règles du calcul algébrique ordinaire.

Ces formules représentent les accélérations d'ordre successif d'un point m qui se meut arbitrairement sur la surface.

Supposons d'abord que μ et ν varient d'une manière absolument quelconque. Le point m décrira, à partir d'une position initiale, une courbe quelconque sur la surface. Les coefficients géométriques $\frac{df}{d\mu}, \frac{df}{d\nu}$ auront alors des valeurs déterminées, tandis que les quantités algébriques $\frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$ seront arbitraires.

L'équation (2) de la forme

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{d\mu}x + \frac{df}{d\mu}y$$

montre que *l'extrémité de la vitesse se trouve dans un plan fixe, quelle que soit la trajectoire que l'on suive.*

C'est le *théorème du plan tangent.*

Supposons maintenant que $\frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$ soient déterminés, ce qui revient à se donner la vitesse $\frac{du}{dt}$ du point mobile. Ce point se trouvera dès lors assujetti à décrire sur la surface une trajectoire tangente à une direction donnée qui est celle de sa vitesse. L'équation (3), dans laquelle toutes les quantités géométriques et algébriques sont déterminées à l'exception de $\frac{d^2\mu}{dt^2}, \frac{d^2\nu}{dt^2}$ qui restent arbitraires, fait voir que l'accélération est de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \mathrm{A} + \frac{df}{d\mu}x + \frac{df}{d\nu}y,$$

A étant une constante géométrique.

Ainsi, *lorsqu'un point mobile se déplace sur une surface donnée avec une vitesse donnée, l'extrémité de son accélération se trouve dans un plan parallèle au plan tangent à la surface.*

Interprétons géométriquement ce résultat. L'accélération en question se décompose, comme on le sait, en deux composantes, l'une tangentielle, égale en grandeur à $\frac{dv}{dt}$, en désignant par v la vitesse, l'autre dirigée suivant la normale principale et égale à $\frac{v^2}{\rho}$, en appelant ρ le rayon de courbure de la trajectoire. La seconde de ces composantes est seule à considérer pour obtenir la projection de l'accélération sur la normale à la surface : or, d'après le théorème précédent, cette projection est constante; ce théorème s'exprime donc par la relation

$$\frac{v^2}{\rho}\cos\varphi = \text{const.},$$

en désignant par φ l'angle que fait la normale principale à la trajectoire avec la normale à la surface ou en d'autres termes l'angle du plan osculateur avec le plan de la section normale correspondante. Soit R le rayon de courbure de cette section, l'équation précédente deviendra

$$\frac{v^2}{\rho}\cos\varphi = \frac{v^2}{R} \quad \text{ou} \quad \rho = R\cos\varphi :$$

c'est le *théorème de Meusnier*.

On voit aisément que les remarques auxquelles les expressions de la vitesse et de l'accélération ont donné lieu peuvent s'étendre aux accélérations d'ordre quelconque. On est ainsi conduit à un théorème général qui s'énonce de la manière suivante :

Lorsqu'un point mobile est assujetti à se déplacer sur une surface à partir d'une position donnée m, si sa vitesse et ses $n-1$ premières accélérations sont données, son accélération d'ordre n est assujettie à avoir son extrémité dans un plan parallèle au plan tangent à la surface en m.

Ce théorème, dont nous avons donné les interprétations géométriques dans le cas de la vitesse et de l'accélération, est encore susceptible pour la suraccélération d'une interprétation assez simple.

On sait qu'en appelant $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ le rayon de courbure de la trajectoire et ses dérivées successives par rapport à l'angle de contingence ([1]) et r le rayon de seconde courbure $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{ds}{\varepsilon}, \varepsilon \text{ étant l'angle de deux plans osculateurs consécutifs}\right)$, on a pour

([1]) Dérivées qui deviennent, dans le cas des courbes planes, les rayons de courbure des développées successives de la courbe.

les composantes de l'accélération de second ordre :

Suivant la tangente.......................... $\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho_1^2}$

Suivant la normale.......................... $\frac{3v\,dv}{\rho_1\,dt} - \frac{v^3\rho_2}{\rho_1^3}$

Suivant la binormale (perp. au plan osculateur). $\frac{v^3}{\rho_1 r}$

Le théorème général montre que, pour toutes les trajectoires suivies, la somme des projections des deux dernières composantes sur la normale mN à la surface doit être constante, ce qui s'exprime par la relation

$$\left(\frac{3v\,dv}{\rho_1\,dt} - \frac{v^3}{\rho_1^3}\rho_2\right)\cos\varphi + \frac{v^3}{\rho_1 r}\sin\varphi = \text{const.}$$

Mais, puisque la vitesse et l'accélération sont données, les quantités $\frac{dv}{v\,dt}$, ainsi que l'angle φ et le rayon ρ_1, sont les mêmes pour toutes les trajectoires que le point m peut suivre.

L'équation précédente revient donc à

$$\rho_2 - \frac{\rho_1^2 \operatorname{tang}\varphi}{r} = \text{const.}$$

D'ailleurs, si ω est le centre de la sphère osculatrice et R son rayon, on a, par une formule connue,

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\sqrt{R^2 - \rho_1^2}}{r} = \frac{\overline{n\omega}\rho_1}{r};$$

donc

$$\frac{n\omega - \rho_1 \operatorname{tang}\varphi}{r} = \text{const.}$$

ou

$$\frac{n\omega - n\text{N}}{r} = \text{const.},$$

ou enfin

$$\frac{\text{N}\omega}{r} = \text{const.},$$

résultat qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soient différentes courbes osculatrices entre elles tracées sur *une même surface à partir d'un point m. Si l'on porte sur la binormale commune à toutes ces courbes une longueur mr égale au rayon de seconde courbure de la courbe choisie et si l'on joint le point ainsi obtenu au centre ω de la sphère osculatrice, la droite ωr rencontre la normale à la surface en un point i qui est le même quelle que soit la courbe choisie.*