

# BULLETIN DE LA S. M. F.

S. MANDELBROJT

## **Quelques relations fonctionnelles entre les séries de Dirichlet générales**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 58 (1930), p. 230-244

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1930\\_\\_58\\_\\_230\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__230_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RELATIONS FONCTIONNELLES ENTRE LES SÉRIES  
DE DIRICHLET GÉNÉRALES;

PAR M. S. MANDELBROJT.

1. Nous commençons par généraliser la relation fonctionnelle bien connue de Riemann qui existe entre  $\zeta(s)$  et  $\zeta(1-s)$

$$(1) \quad \zeta(1-s) = 2\Gamma(s) \frac{\cos \frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s} \zeta(s).$$

Une partie de notre méthode consiste à employer la formule de Poisson sous les différentes formes que lui a données M. Mordell <sup>(1)</sup>.

Voici les deux énoncés de M. Mordell.

L'énoncé A : on a

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2n\pi ix} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [f(n-0) + f(n+0)].$$

si les conditions suivantes ont lieu :

a.  $f(x)$  est de variation bornée dans les intervalles

$$\varepsilon < |x| < N$$

quelles que soient les quantités positives  $\varepsilon$  et  $N$ .

b.  $f(x)$  est absolument intégrable pour

$$|x| < N$$

c.  $f(x)$  possède une dérivée du second ordre pour  $|x| > N$ .

$$d. \quad \lim_{|x|=\infty} f(x) = \lim_{|x|=\infty} f'(x) = 0.$$

---

<sup>(1)</sup> Voir pour A : *Proceedings of the Cambridge Phil. Society*, vol. XXIV, Partie 4, 1928, p. 586 et, pour B, *Journal of the London Mat. Society*, vol. 4, Partie 4, 1929, p. 286.

e. Les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx, \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx$$

sont convergentes.

f. La série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(n-0) + f(n+0)]$$

converge.

L'énoncé B : on a

$$(3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2n\pi i x} dx$$

si les conditions suivantes ont lieu.

a'. Même condition que d.

b'.  $f(x)$  et  $f'(x)$  sont continues.

c'. Les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx$$

convergent.

Le symbole  $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$  a la signification suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=-\lambda}^{\lambda}$$

C'est en employant A que M. Mordell démontre (1) (1), et il démontre la relation d'Hurwitz

$$\zeta(1-s, a) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ \cos \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi na)}{n^s} + \sin \frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi na)}{n^s} \right\}$$

où

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s},$$

en employant B (2).

(1) *Proceeding of the Cambridge Phil. Society, loc. cit.*

(2) *Journal of the London. Math. Society, loc. cit*

Outre la formule de Poisson, nous employons une formule due à M. Hadamard et concernant les séries de Dirichlet admettant une abscisse de convergence absolue. M. Perron l'a généralisée en substituant l'abscisse de convergence absolue à celle de convergence simple. Nous employons ce théorème sous la forme très générale que lui a donnée M. Marcel Riesz (1). Rappelons quelques définitions et théorèmes de la théorie de sommabilité des séries de Dirichlet également dus à M. M. Riesz.

La série  $\sum a_n$  est dite sommable  $(\lambda, k)$  où  $k > 0$ , si

$$(1) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^k a_m}{\omega^k}$$

existe.

C. Si  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  est sommable  $(\lambda, k)$ ,  $\sum a_n e^{-\lambda_n s'}$  est sommable

$$\sigma > \sigma' \quad (s = \sigma - it, s' = \sigma' - it').$$

Il existe donc une abscisse  $\sigma = \sigma_k$  de sommabilité  $(\lambda, k)$ . L'expression

$$\sum_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^k a_m e^{-\lambda_m s}$$

tend d'ailleurs uniformément vers une fonction analytique  $f(s)$ , quand  $\omega$  tend vers l'infini,  $s$  restant dans un domaine borné tel que  $\sigma > \sigma_k + \varepsilon > \sigma_k$ .

D. De même la série  $\sum a_n \lambda_n^p e^{-\lambda_n s}$  est uniformément sommable  $(\lambda, k)$  dans D et l'expression

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^k a_m \lambda_m^p e^{-\lambda_m s}}{\omega^k}$$

y représente la fonction  $(-1)^p f^{(p)}(s)$ .

E. Si  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  est sommable  $(\lambda, k)$  pour  $s = s'$ , on a uniformément pour  $\sigma > \sigma' + \varepsilon > \sigma'$

$$f(s) = o(t^{k+1})$$

---

(1) HARDY et M. RIESZ. *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge, University Press, 1915 (n° 18).

c'est-à-dire

$$\lim_{|t|=\infty} \left| \frac{f(s)}{t^{k+1}} \right| = 0.$$

F. Enfin voici le théorème de Riesz qui généralise celui de MM. Hadamard et Perron.

Si  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  est sommable  $(\lambda, k)$  on a pour  $k' \geq k$  et en posant

$$\sigma' > \text{Max}(0, \sigma_k).$$

$$(5) \quad \sum_{\lambda_m < \omega} (\omega - \lambda_m)^{k'} a_m = \frac{\Gamma(k' - 1)}{2\pi i} \int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} \frac{f(s)}{s^{k'+1}} ds.$$

Nous conviendrons de dire que  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  est sommable  $(\lambda, 0)$  quand elle converge dans le sens ordinaire de ce mot, et nous désignerons par  $\sigma_0$  son abscisse de convergence simple.

De même nous dirons qu'elle est sommable  $(\lambda, -1)$  si elle converge absolument. Nous désignerons par  $\sigma_{-1}$  son abscisse de convergence absolue.

Aucune ambiguïté n'est à craindre car la sommabilité de M. Riesz n'est définie que pour  $k > 0$ .

G. Il résulte alors, d'après les théorèmes connus, que les théorèmes C, D ont encore lieu si  $k = 0, -1$ . Le théorème E a lieu pour  $k = 0$ ; pour  $k = -1$  on doit remplacer 0 par O, c'est-à-dire on a pour  $\sigma > \sigma_{-1} + \varepsilon$  uniformément

$$f(s) = O(1) = O(|t^n|)$$

autrement dit

$$|f(s)| < M.$$

H. Le théorème F a lieu pour  $k = 0, -1$ , à condition d'y poser  $k' > 0$ .

2. Pour rendre les énoncés plus accessibles, nous énonçons le premier théorème d'abord pour  $k = 0$  et  $k = -1$ , ensuite pour  $k$  quelconque.

**THÉORÈME 1<sup>a</sup>.** — Soit  $\varphi(s)$  une fonction représentée par une série de Dirichlet

$$(6) \quad \sum a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it$$

dont l'abscisse de convergence simple  $\sigma_0$  est négative. Suppo-

sons que

$$(7) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0.$$

Posons

$$\varphi(2\pi ni) = b_n; \quad \varphi(-2\pi ni) = b_{-n}.$$

Pour  $s$  réel et tel que

$$(8) \quad 2 < s < 3$$

la relation suivante a lieu

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{s-1} a_m = \Gamma(s) \frac{1}{(2\pi)^s} \left[ e^{-\frac{\pi is}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s} + e^{\frac{\pi is}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right].$$

Toutes les séries de (9) convergent si (8) a lieu. Les séries du second membre de (9) convergent uniformément dans tout domaine borné situé dans le demi-plan

$$(10) \quad \sigma > 2 + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0)$$

**THÉORÈME I<sup>b</sup>.** — Si (6) possède une abscisse de convergence absolue  $\sigma_{-1}$  négative, et si

$$(11) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0,$$

la relation (9) a lieu pour

$$(12) \quad 1 < s < 2$$

Les séries du second membre de (9) convergent uniformément dans tout domaine borné tel que

$$(13) \quad \sigma > 1 + \varepsilon.$$

**THÉORÈME I<sup>c</sup>.** — Supposons que la série

$$(6) \quad \sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

possède une abscisse de sommabilité  $(\lambda, k)$

$$\sigma_k < 0.$$

Supposons que la fonction correspondante  $\varphi(s)$  (1) est telle

$$(1) \text{ C'est-à-dire } \varphi(s) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\lambda_n < \omega} (\omega - \lambda_n)^k a_n e^{-\lambda_n s}}{\omega^k} \text{ pour } \sigma > \tau_k.$$

que

$$(14) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(m_k+2)}(0) = 0$$

où

$$(15) \quad m_k = [k] \quad (1).$$

Ces conditions étant vérifiées, la relation

$$(9) \quad \sum_n \sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{s-1} a_m = \Gamma(s) \frac{1}{(2\pi)^s} \left[ e^{-\frac{\pi is}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s} + e^{\frac{\pi is}{2}} \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_n}{n^s} \right]$$

a lieu pour  $s$  réel tel que

$$(16) \quad k+2 < \sigma < m_k+3.$$

Les séries du second membre de (9) convergent uniformément dans tout domaine borné de la variable  $s$ , tel que

$$\sigma > k+2+\varepsilon.$$

Remarquons que d'après les conventions de la page 233, les théorèmes I<sup>a</sup> et I<sup>b</sup> peuvent être considérés comme cas particuliers du théorème I<sup>c</sup> énoncé pour  $k \geq 0$  et  $k = -1$ .

Démonstration des théorèmes I<sup>a</sup>, I<sup>b</sup> et I<sup>c</sup>.

Il s'agit donc de démontrer le théorème I<sup>c</sup> pour  $k \geq 0$  et  $k = -1$ .

Soit  $z$  un nombre réel tel que

$$(17) \quad k+1 < z < m_k+2.$$

On a d'après F (pour  $k > 0$ ) et d'après H (pour  $k = 0, -1$ ), pour  $n$  entier positif

$$(18) \quad \sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^z a_m = \frac{\Gamma(z+1)}{2\pi i} \int_{\sigma'-1-i\infty}^{\sigma'+1-i\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{1+z}} e^{ns} ds,$$

où  $\sigma' > 0$ .

Il résulte de (14) et (17) que la fonction

$$(19) \quad F_n(s) = \frac{\varphi(s) e^{ns}}{s^{1+z}}$$

(1)  $[x]$  désigne le plus petit entier non supérieur à  $x$ .

est holomorphe dans le rectangle ouvert de côtés

$$\sigma \leq 0, \quad \sigma = \sigma', \quad t = t_0 > 0, \quad t \leq -t_0,$$

et continue dans ce rectangle fermé. C étant la frontière de ce rectangle on a

$$(20) \quad \int_C F_n(s) ds = 0.$$

Cette égalité a d'ailleurs lieu pour tout  $n$  [voir (19)] positif, négatif ou nul.

D'après (17) et d'après E (pour  $k > 0$ ) et G (pour  $k = 0, -1$ ), on voit que

$$\lim_{|t_0| \rightarrow \infty} F_n(\sigma + it_0) = 0$$

uniformément par rapport à  $\sigma$  qui varie dans l'intervalle

$$0 \leq \sigma \leq \sigma'.$$

On a donc, d'après (18), (19), (20) et (21),

$$\sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{-\varepsilon} a_m = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(it)}{(it)^{\varepsilon+1}} e^{nit} dt$$

ou, en posant

$$(22) \quad \sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{-\varepsilon} a_m = \frac{\Gamma(\varepsilon + 1) e^{-\frac{\pi i(\varepsilon+1)}{2}}}{(2\pi)^{\varepsilon+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\pi ix)}{x^{\varepsilon+1}} e^{2n\pi ix} dx,$$

$n$  étant entier positif.

$x$  et  $\alpha$  étant réels, on pose

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x},$$

avec

$$\log x = \log |x| - i\pi \quad \text{pour } x < 0,$$

et

$$\log x \text{ réel pour } x > 0.$$

Posons

$$\frac{\varphi(2\pi ix)}{x^{\varepsilon+1}} + T(x) = T_1(x) + iT_2(x).$$



Il est facile de voir que les fonctions réelles  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$  satisfont aux conditions du théorème A. En effet :

$a$  a lieu, car  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$  sont analytiques en  $x$  pour

$$|x| > N.$$

$b$  et  $c$  sont évidemment vérifiés.

$d$  et  $e$  résultent immédiatement de D, (17) et E pour  $k > 0$ , et de G pour  $k = 0, -1$ .

$f$  a lieu d'après (17) et E pour  $k > 0$ , et G pour  $k = 0, -1$ .

On a donc d'après le théorème A

$$(23) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\pi ix)}{x^{1+z}} e^{2n\pi ix} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2n\pi i)}{n^{1+z}}.$$

Nous allons maintenant démontrer que

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\pi zi)}{x^{1+z}} e^{2n\pi iz} dx = 0,$$

si  $n \leq 0$ .

$n \leq 0$  étant donné, et  $p$  étant positif, on constate que la série

$$\sum_m a_m e^{-(\lambda_m - n + p)s},$$

est sommable  $(\mu, k)$  avec

$$\mu_m = \lambda_m - n + p,$$

pour  $\sigma > \sigma_k$  et que cette série fournit la fonction

$$\psi(s) = \varphi(s) e^{(n-p)s}. \quad (1)$$

Comme on ne restreint pas la généralité en supposant

$$\lambda_1 > 0, \quad (2)$$

on voit que

$$p < \lambda_1 - n + p.$$

(1) Voir HARDY et RIESZ, th. 57.

(2) Car  $\int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} e^{\tau s} s^{-\tau-1} ds = 0$  si  $\tau \leq 0$ .

Comme d'autre part on voit d'après (18) que

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_m - n + p < p} [p - (\lambda_m - n + p)] z a_m &= \frac{\Gamma(1+z)}{2\pi i} \int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} \frac{\psi(s)}{s^{1+z}} e^{ps} ds \\ &= \frac{\Gamma(1+z)}{2\pi i} \int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} \frac{\varphi(s) e^{ns}}{s^{1+z}} ds, \end{aligned}$$

on constate immédiatement que pour  $n \leq 0$  on a

$$\int_{\sigma' - i\infty}^{\sigma' + i\infty} \frac{\varphi(s) e^{ns}}{s^{1+z}} ds = 0,$$

(24) résulte de cette formule et de la formule (21).

Les formules (18), (23) et (24) démontrent les théorèmes I<sup>a</sup>, I<sup>b</sup> et I<sup>c</sup>.

Pour voir que le second membre de (9) converge uniformément dans toute région fermée, située dans le demi-plan

$$\sigma > k + 2 + \varepsilon,$$

il suffit de constater d'après E que

$$b_n = O(n^{k+1}).$$

3. Soit

$$(25) \quad \varphi(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots + a_k e^{-\lambda_k s}$$

si (11) a lieu, on peut écrire pour  $n > \lambda_p$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^p (n - \lambda_m)^z a_m &= n^z \sum_{m=1}^p a_m + z n^{z-1} \sum_{m=1}^p \lambda_m a_m \\ &\quad + \frac{z(z-1)}{2!} n^{z-2} \sum_m \left[ \frac{(z-2)}{3} \lambda_m^2 + \frac{(z-2)(z-3)}{3 \cdot 4} \frac{\lambda_m^3}{n} + \dots \right] \\ &= \frac{z(z-1)}{2!} n^{z-2} f(z, \lambda, n); \end{aligned}$$

$f(z, \lambda, n)$  étant borné quand  $z$  varie dans un domaine borné de la variable complexe.

Il en résulte que

$$\left| \sum_{m=1}^p (n - \lambda_m)^z a_m \right| = O(n^{\alpha z - 2}). \quad (1)$$

---

(1)  $\text{R}z$  désigne la partie réelle de  $z$ .

La série du premier terme de (9) dont le terme général est

$$\sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{s-1} a_m$$

converge donc dans ces conditions, uniformément dans tout domaine borné de la variable complexe  $s$ , situé dans le demi-plan

$$\sigma < 2 - \varepsilon.$$

Posons

$$(26) \quad \begin{cases} n_m = [\lambda_m] + 1, \\ \mu_m = n_m - \lambda_m. \end{cases}$$

On constate immédiatement que pour  $\sigma < 0$ , le premier terme de (9) peut être mis sous la forme

$$\sum_{m=1}^{\rho} a_m \zeta(1-s, \mu_m).$$

Si donc on pose en particulier

$$\varphi(s) = \left(1 - e^{-\frac{s}{2}}\right)^2 = 1 - 2e^{-\frac{s}{2}} + e^{-s},$$

Le théorème I<sup>b</sup> a lieu et l'on peut écrire (9) sous la forme

$$(27) \quad \sum_{m=1}^3 a_m \zeta(1-s, \lambda_m) = 8\Gamma(s) \frac{\cos \frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s} \zeta_1(s),$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= -2, & a_3 &= 1, \\ \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= \frac{1}{2}, & \lambda_3 &= 1, \end{aligned}$$

et où  $\zeta_1(s)$  est la fonction représentée par la série

$$(28) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s).$$

On constate aussi d'après cette dernière égalité, que le premier membre (27) est égal à

$$4 \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(1-s).$$

d'où la relation de Riemann.

4. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — Si  $\sigma_k$  est l'abscisse de sommabilité  $(\lambda, k)$  de la série  $\sum a_n e^{-\lambda n^s}$ , on a pour

$$x > \text{Max}(0, \sigma_k)$$

et pour  $s$  réel supérieur à  $k + 2$ , la relation suivante :

$$(29) \quad \sum_n e^{-nx} \sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^{s-1} a_m = \Gamma(s) \frac{e^{-\frac{\pi i s}{2}}}{(2\pi)^s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x + 2n\pi i)}{\left(n - \frac{x i}{2\pi}\right)^s} \quad (1).$$

Ces séries convergent pour  $s > k + 2$ , le second membre de cette égalité converge absolument et uniformément dans toute région bornée du demi-plan

$$\sigma > k + 2 + \varepsilon$$

Ce théorème est aussi valable pour  $k = -1$  et  $k = 0$ .

Comme dans la démonstration du théorème I<sup>r</sup>, on voit que si

$$x > \text{Max}(0, \sigma_k),$$

$$z > k + 1,$$

on a

$$\sum_{\lambda_m < n} (n - \lambda_m)^z a_m = \frac{\Gamma(z + 1)}{2\pi} e^{n \cdot x} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\varphi(s) e^{int}}{s^{z+2}} dt,$$

où  $s = x + it$ ,  $n > 0$  et

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\varphi(s)}{s^{z+2}} e^{int} dt = 0$$

si  $n \leq 0$ .

En employant d'autre part le théorème B sur la fonction

$$\Gamma(t) = \frac{\varphi(x + 2\pi i t)}{(x + 2\pi i t)^{t+2}} \quad (2).$$

(1)  $\left(n - \frac{x i}{2\pi}\right)^s = A^s = e^{s \log A}$ ,  $\log A = \log |A| + i \varphi_A$ ,  $-\pi < \varphi_A < 0$ .

(2)  $(x + 2\pi i t)^{t+2} = B^{t+2} = e^{(t+2) \log B}$ ,  $\log B = \log |B| + i \varphi_B$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi_B < \frac{\pi}{2}$ .

On peut aussi employer à cet effet le théorème A.

cet emploi étant légitime, comme on le constate immédiatement, on obtient le théorème I<sup>c</sup>.

§. Supposons  $k = -1$  (c'est-à-dire que  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  possède une abscisse de convergence absolue), et soit

$$x > \text{Max}(0, \tau_{-1}).$$

En conservant les notations (26) pour  $m = 1, 2, \dots$  posons en plus

$$L_m = -\log \mu_m = -\log(n_m - \lambda_m).$$

Supposons que

$$\begin{aligned} L_{m+1} &> L_m, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} L_m &= \infty. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que si l'on désigne par  $\sigma'$  l'abscisse de convergence absolue de

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-n_m x} e^{-L_m s},$$

on a

$$(30) \quad \sigma' \leq 0.$$

En effet comme la série

$$\sum |a_m| e^{-\lambda_m s}$$

converge, comme d'autre part

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = 0,$$

la série

$$(31) \quad \sum |a_m| e^{-n_m x}$$

converge aussi, d'où (30).

Posons

$$C_m = a_m e^{-n_m x},$$

et écrivons le premier terme de (29) sous la forme

$$\sum_n \sum_{n_m \leq n} C_m [\mu_m + (n - n_m)]^{s-1} e^{-(n-n_m)x}.$$

Cette expression est composée des termes de la forme

$$C_m(x_m + r)^{s-1} e^{-rx},$$

$m = 1, 2, \dots; \quad r = 0, 1, 2, \dots$

La série

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-rx}}{(x_m + r)^{1-\sigma}} < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-rx}}{r^{1-\sigma}}$$

converge quel que soit  $\sigma$ .

D'après (30) la série

$$\sum_m C_m e^{-L_m(s-1)} = \sum_m C_m x_m^{\sigma-1}$$

converge absolument pour  $\sigma > 1$ .

On voit donc que la série [voir (31)]

$$\sum_m |C_m| \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-rx}}{(x_m + r)^{1-\sigma}}$$

converge pour  $\sigma > 1$ .

Il en résulte que si  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  possède une abscisse de convergence absolue  $\sigma_1$ , et si

$$x > \text{Max}(0, \sigma_1)$$

on peut intervertir l'ordre de sommation dans le premier terme de (29), et le théorème II nous donne dans le cas, où  $k = -1$

$$(32) \quad \sum_m C_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-rn}}{(x_m + r)^{s-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-L_m(s-1)} \Gamma(s) \frac{e^{-\frac{\pi i s}{2}}}{(2\pi)^s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(x + 2n\pi i)}{\left(n - \frac{x i}{2\pi}\right)^s},$$

si  $\sigma > 1$ .

$n'_m$  étant une suite quelconque d'entiers positifs et  $x$  étant positif, la formule (32) a lieu chaque fois que l'on pose

$$\zeta(s) = \sum C_m e^{n'_m r} e^{-\lambda_m s}$$

où

$$\lambda_m = n'_m + e^{-L_m},$$

et que la série

$$\sum |C_m| e^{\delta n_m} \quad \delta > 0 \text{ (}\delta \text{ fixe)}$$

converge.

On voit en effet que dans ces conditions la série

$$\sum a_m e^{-\lambda_m s} = \sum C_m e^{n_m x} e^{-\lambda_m s}$$

possède une abscisse de convergence absolue  $\sigma_{-1}$ , et que

$$x > \text{Max}(0, \sigma_{-1}).$$

Pour que (32) ait lieu, il suffit donc que

$$(33) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L |C_m|}{m} < 0$$

et que  $n_m^*$  soit une suite d'entiers positifs croissants.

Ces conditions étant vérifiées posons

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x + 2n\pi i) &= \sum a_m e^{-\lambda_m(x + 2n\pi i)} \\ &= \sum_m C_m e^{-e^{-Lm} e^{-2e^{-Lmn}\pi i}} = z_n^x \quad (n > 0), \\ \varphi(x - 2n\pi i) &= \sum a_m e^{-\lambda_m(x - 2n\pi i)} \\ &= \sum_m C_m e^{-e^{-Lm} e^{-2e^{-Lmn}\pi i}} = \zeta_n^x \quad (n > 0), \\ \varphi(x) &= \sum_m C_m e^{-e^{-Lm} x} = \gamma(x); \end{aligned} \right.$$

$$(35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-r_n x}}{(n+a)^s} = \zeta_r(s, a).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME III.** — Soit  $F(s)$  une fonction représentée par une série de Dirichlet

$$(21) \quad F(s) = \sum_n C_n e^{-L_n s}.$$

Supposons qu'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L |C_n|}{n} < 0.$$

Cette condition étant vérifiée quelle que soit la quantité

fixe  $x > 0$ , on a la relation suivante

$$F(s) = - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \zeta_r(-s, e^{-1/m})$$

$$= \frac{\Gamma(s+1)}{(2\pi)^{s+1}} \left[ \zeta_{(x,F)}(s+1) e^{-\frac{\pi is}{2}} + \gamma(x) (2\pi)^{s+1} x^{-s-1} e^{\pi is} \right]$$

$$= \zeta_{(x,F)}(s+1) e^{+\frac{\pi is}{2}}.$$

où

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{(x,F)}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{x'}}{\left(n - \frac{x}{2\pi i}\right)^s} \\ \zeta_{-(x,F)}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^{x'}}{\left(n + \frac{x}{2\pi i}\right)^s} \end{aligned} \right\} \sigma > 1$$

les  $\alpha^{(x)}$ ,  $\beta^{(x)}$  et  $\gamma^{(x)}$  étant définis d'après (34).

On voit ainsi que des séries de Dirichlet très générales peuvent être exprimées par l'intermédiaire des séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(n+d)^s}$$

où  $d$  est réel ou complexe et les fonctions transcendantes connues.