Bulletin de la S. M. F.

B. Gambier

Sur une formule déduite de la théorie des cubiques planes

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 220-223

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__220_0>

SUR UNE FORMULE DÉDUITE DE LA THÉORIE DES CUBIQUES PLANES;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. M. Hadamard a publié, sous ce titre, une Note très courte au tome 51, 1923, p. 295-296 de ce Bulletin; il y exprime le désir de voir déduire divers théorèmes, concernant les fonctions elliptiques, de l'étude géométrique directe des cubiques planes, tandis qu'en général, les géomètres ont, au contraire, déduit, de l'étude directe de ces fonctions, des propriétés géométriques des cubiques.

M. Hadamard signalait que la constance du rapport anharmonique des quatre tangentes, issues à une cubique de genre un d'un point de cette courbe, entraîne la formule

$$(1)\qquad \frac{f(u)-f(u+\omega_1)}{f(u)-f(u+\omega_2)} : \frac{f(u+\omega_3)-f(u+\omega_1)}{f(u+\omega_3)-f(u+\omega_2)} = \text{const.} = \frac{p\omega_2-p\omega_3}{p\omega_1-p\omega_3}$$

en posant

$$(2)\qquad f(u) = \frac{p''u}{p'u}.$$

La quantité $f(u)$ est la pente, au point u, de la tangente à la courbe d'équations paramétriques

$$(3)\qquad x = pu, \qquad y = p'u.$$

J'ai, dans ce même Bulletin (tome 54, 1926, p. 38-52), démontré, *analytiquement*, la formule (1) par une méthode plus simple que celle suggérée par M. Hadamard : en adoptant les notations du traité d'Appell et Lacour (les périodes sont appelées 2ω et $2\omega'$), la formule (1) s'écrit

$$(1')\qquad \frac{[f(u)-f(u+\omega)][f(u+\omega')-f(u+\omega+\omega')]}{[f(u)-f(u+\omega+\omega')][f(u+\omega')-f(u+\omega)]} = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

J'ai montré que le numérateur et le dénominateur de (1') *sont séparément constants, égaux à* $16(e_2-e_3)$ *et* $16(e_1-e_3)$ *respectivement.* La démonstration analytique repose sur les formules

$$\text{(I)}\qquad (pu-e_1)(p\overline{u+\omega}-e_1)=(e_1-e_2)(e_1-e_3),$$

$$\text{(II)}\qquad \frac{p'u}{pu-e_1}+\frac{p'\overline{u+\omega}}{p\overline{u+\omega}-e_1}=0,$$

$$\text{(III)}\qquad \frac{p\overline{u+\omega'}-e_1}{e_3-e_1}=\frac{pu-e_2}{pu-e_3},$$

$$\text{(IV)}\qquad \frac{p'u}{pu-e_1}-\frac{p'\overline{u+\omega'}}{p(\overline{u+\omega'})-e_1}=4(e_2-e_3),$$

$$\text{(V)}\qquad \frac{p''u}{p'(u)}-\frac{p''(u+\omega)}{p'(u+\omega)}=\frac{2p'u}{pu-e_1}.$$

La première est classique; la troisième, au fond, coïncide avec la première et les autres se déduisent de (I) ou (III) par des dérivations logarithmiques. Mais j'ai fait remarquer que les formules (I), (II), (III), (IV) peuvent s'obtenir directement par une étude géométrique de la cubique plane $x=pu$, $y=p'u$. Je n'avais pas aperçu le moyen d'obtenir également (V) par voie géométrique : M. Delens a bien voulu me signaler la démonstration géométrique élégante qui suit, fondée sur la méthode de résiduation : cette méthode, relativement peu employée par les géomètres, sauf en Italie, donne pourtant de nombreux résultats élégants, comme l'a prouvé M. Lebesgue en reprenant aux *Annales de Toulouse* (3e série, t. XIII, 1921, p. 61-91, et t. XIV, 1922, p. 153-159) les méthodes de Cayley pour les polygones de Poncelet. La formule (V) a un intérêt intrinsèque indépendant de la formule (1) et cet article peut être lu indépendamment des deux articles précédents.

2. L'axe de symétrie Ox coupe la cubique aux points $A_3(\omega')$, $A_2(\omega+\omega')$, $A_1(\omega)$, qui sont réels si 2ω est réelle et $2\omega'$ imaginaire pure (la question de réalité ou non est d'ailleurs indifférente ici). Le point I à l'infini Oy est inflexionnel et obtenu pour $u=0$. La fraction $\frac{p''u}{p'u}$ est la pente de la tangente au point $M(u)$, et $\frac{-p''(u+\omega)}{p'(u+\omega)}$ est celle de la tangente au point M'_1 de paramètre $-(u+\omega)$; les points A_1, M'_1, M sont alignés en vertu de la relation

$$\omega+(-u-\omega)+u=0,$$

tandis que le point M' symétrique de M'_1 relativement à Ox est l'un des cotangentiels de M. La quantité $\frac{p'u}{pu - e_1}$ est la pente de la droite $AM'_1 M$; dire que trois droites ont leurs pentes liées par la relation

$$m + m'_1 = 2\mu$$

signifie que les parallèles à ces droites issues de l'origine percent la droite $x = 1$ aux points de cote m, m'_1, μ tels que le troisième soit le milieu du segment formé par les deux premiers : donc les deux droites de pente m, m'_1 sont conjuguées harmoniques par rapport au couple formé par la troisième et Oy. Si donc les tangentes en M et M'_1 se coupent en T, il suffit de démontrer que la droite TI coupe MM'_1 au milieu du segment MM'_1, ou, si l'on préfère, que la parabole tangente en M et M'_1 à la cubique admet Oy pour direction de son axe; autrement dit le système (M, M, M'_1, M'_1) doit être *résiduel* du système (I, I); la droite de l'infini étant tangente inflexionnelle en I, et la tangente en A_1 étant $A_1 I$, on voit que I admet les deux résiduels différents (A_1, A_1) et (I, I): il revient donc au même de démontrer que (M, M, M'_1, M'_1) est résiduel de (A_1, A_1); or c'est évident, car (M, M'_1) est résiduel de A_1. C. Q. F. D.

3. Je vais montrer, conformément à ce que j'ai déjà fait dans l'article cité pour les formules (I), (II), (III), (IV), comment on peut présenter la démonstration pour donner à la formule (V) un caractère projectif.

Soient un point P d'une cubique plane de genre *un* et A, B, C, D les points de contact des tangentes issues de P; chaque groupe (A, A), (B, B), (C, C), (D, D) est corésiduel aux autres, P étant un résiduel commun; si M, N sont les points d'intersection de la cubique avec une sécante issue de A, (M, N) est résiduel de A, donc (M, M, N, N) est résiduel de (A, A) et par suite de (B, B); il existe donc une conique *tritangente* à la cubique en M, N, B (et une seconde et troisième tritangentes en M, N, C ou M, N, D). La proposition (V) s'obtient en faisant venir P en I, A en A_1, B en I. Une vérification analytique simple de la formule (V) s'obtient aussi en écrivant l'équation

$$y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

sous la forme

$$[y - \lambda(x - e_1)]^2 = (x - e_1)[4(x - e_2)(x - e_3) + \lambda^2(x - e_1) - 2\lambda y],$$

ce qui prouve que l'on obtient ∞^1 paraboles tritangentes par l'équation

$$4(x - e_2)(x - e_3) + \lambda^2(x - e_1) - 2\lambda y = 0.$$

La parabole (λ) touche la cubique en I et aux deux points autres que A_1 situés sur la droite $y - \lambda(x - e_1) = 0$.