BULLETIN DE LA S. M. F.

H. CARTAN

Sur les fonctions de deux variables complexes. Les transformations d'un domaine borné *D* en un domaine intérieur à *D*

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 199-219
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__199_0>

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES COMPLEXES. LES TRANSFORMATIONS D'UN DOMAINE BORNÉ D EN UN DOMAINE INTÉRIEUR A D;

PAR M. HENRI CARTAN.

1. Soit, dans l'espace des deux variables complexes x et y, un domaine D, univalent ou non [1]. Par définition, un domaine Δ sera dit *intérieur* à D s'il existe dans Δ un point O qui coïncide avec un point intérieur à D, et si, étant donnée une courbe quelconque intérieure à Δ et fermée dans Δ, partant de O et y revenant, cette courbe est aussi intérieure à D et fermée dans D. En particulier, si D possède une variété de ramification intérieure à Δ, cette variété est aussi une variété de ramification pour Δ.

Cela posé, si Δ est intérieur à D, deux cas sont possibles : ou bien il existe une courbe intérieure à Δ, fermée dans D et non fermée dans Δ, ou bien il n'existe pas de telle courbe. Dans le second cas, Δ sera dit *univalent par rapport à* D; cette convention est toute naturelle, car, dans le cas où D est univalent, Δ est univalent s'il est univalent par rapport à D, et réciproquement.

Dans tout ce qui suit, nous envisagerons un domaine *borné* D contenant l'origine ($x = y = 0$) à son intérieur et non ramifié à l'origine; nous envisagerons en même temps des systèmes de deux fonctions

$$X = f(x, y) \equiv ax + by + \ldots, \qquad Y = g(x, y) \equiv a'x + b'y + \ldots, \quad [2]$$

---

[1] J'adopte ici, en ce qui concerne les domaines non univalents, les conventions que j'ai exposées dans mon Mémoire : « *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique* », qui doit paraître sous peu dans le *Journal de Mathématiques* (*voir*, au Chapitre I, les numéros 1 et 3). Ce travail sera désigné ici par la lettre [A]. Je rappelle que, sauf avis contraire, je ne considère que des domaines *ouverts*, c'est-à-dire dont tous les points sont *intérieurs*.

[2] Cette notation abrégée signifie

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0,$$
$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = b,$$
$$\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} = a', \qquad \frac{\partial g(0, 0)}{\partial y} = b'.$$

holomorphes et uniformes dans D, telles que le domaine Δ, engendré ([1]) par le point X, Y lorsque le point x, y décrit l'intérieur de D, soit lui-même intérieur à D; mais nous ne supposerons pas *a priori* que Δ soit univalent par rapport à D. Nous dirons aussi, pour abréger, que les fonctions f et g transforment D en un domaine intérieur à D.

Par exemple, si D est le domaine suivant

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1,$$

nous supposerons $f(x, y)$ et $g(x, y)$ holomorphes et uniformes dans ce domaine, avec

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0,$$
$$|f| < 1, \qquad |g| < 1.$$

2. Rappelons une proposition fondamentale ([2]) qui peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème I. — *Soit* D *un domaine borné contenant l'origine et non ramifié à l'origine. Si les fonctions*

$$f(x, y) \equiv x + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv y + \ldots$$

transforment D *en un domaine intérieur à* D, *on a nécessairement*

$$f(x, y) \equiv x, \qquad g(x, y) \equiv y.$$

([1]) Dans mon Mémoire déjà cité, j'ai convenu de ne parler de « domaine engendré par deux fonctions f et g » que dans le cas où les équations

$$f(x, y) = a, \qquad g(x, y) = b$$

ont seulement des solutions isolées quelles que soient les constantes a et b. Ici, je ne ferai pas cette convention restrictive; d'ailleurs, au lieu de dire, comme dans le texte : « le domaine engendré par le point X, Y est intérieur à D », je pourrais dire : « lorsque le point x, y décrit une courbe quelconque intérieure à D et fermée dans D, le point X, Y décrit une courbe intérieure à D et fermée dans D ».

([2]) Henri Cartan, *Les transformations analytiques des domaines cerclés les uns dans les autres* (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 190, 1930, p. 718, § 2). *Voir* aussi une démonstration un peu simplifiée dans [A] (Chap. II, n° 6, théorème VII).

Le but essentiel de ce travail est d'établir le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit* D *un domaine borné contenant l'origine, et non ramifié à l'origine. Supposons que les fonctions*

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv ax + by + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv a'x + b'y + \ldots$$

transforment D *en un domaine* Δ *intérieur à* D. *Alors :*

1° *On a*

$$|ab' - ba'| \leqq 1;$$

2° *Dans le cas où*

$$|ab' - ba'| = 1,$$

le domaine Δ *est nécessairement identique à* D; *autrement dit, la transformation* (1) *est une transformation biunivoque de* D *en lui-même.*

Ce théorème est en quelque sorte une extension aux fonctions de deux variables du théorème connu : « Soit

$$f(x) \equiv ax + \ldots$$

une fonction holomorphe pour $|x| < 1$, de module inférieur à *un*. Alors :

1° On a

$$|a| \leqq 1;$$

2° Dans le cas où

$$|a| = 1,$$

on a nécessairement

$$f(x) \equiv ax. \text{ »}$$

La première partie du théorème II se démontre presque immédiatement, et n'est d'ailleurs sans doute pas nouvelle. Mais la seconde partie est plus intéressante; en outre, son exactitude ne pouvait nullement être prévue; je vais en effet indiquer une proposition analogue qui, elle, n'est pas exacte.

Considérons pour cela le lemme de Schwarz : « Soit

$$f(x) \equiv ax + \ldots$$

une fonction holomorphe pour $|x| < 1$, de module inférieur à *un*. Alors :

1° On a

$$|f(x)| \leqq |x|;$$

2° Si, en un point particulier x_0, on a

$$|f(x_0)| = |x_0|,$$

alors on a partout

$$|f(x)| = |x|. »$$

Essayons d'étendre cette proposition aux fonctions de deux variables, holomorphes dans un domaine borné. Limitons-nous au cas de l'hypersphère

$$|x|^2 + |y|^2 < 1;$$

la première partie du lemme de Schwarz se généralise de la façon suivante [1] : « Si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont holomorphes dans l'hypersphère, et nulles au centre, et si l'on a

$$|f(x, y)|^2 + |g(x, y)|^2 < 1,$$

alors on a

$$|f(x, y)|^2 + |g(x, y)|^2 \leqq |x|^2 + |y|^2. »$$

Mais il n'y a rien d'analogue à la seconde partie du lemme de Schwarz; l'égalité

$$|f(x, y)|^2 + |g(x, y)|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

peut en effet avoir lieu en un point particulier x_0, y_0 différent de l'origine, sans avoir lieu partout. Prenons par exemple

$$f(x, y) \equiv x + \frac{y^2}{4}, \qquad g(x, y) \equiv \frac{y}{2};$$

l'égalité a lieu toutes les fois que y est nul; mais, si y n'est pas nul, on a (en remarquant que $|x| < 1$, $|y| < 1$)

$$\begin{aligned} |f(x, y)|^2 + |g(x, y)|^2 &\leqq |x|^2 + |x| \frac{|y|^2}{2} + \frac{|y|^4}{16} + \frac{|y|^2}{4} \\ &\leqq |x|^2 + \frac{|y|^2}{2} + \frac{|y|^2}{16} + \frac{|y|^2}{4} < |x|^2 + |y|^2. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

3. Avant d'aborder la démonstration du théorème II, j'établirai plusieurs propositions préliminaires.

---

[1] La démonstration sera indiquée au n° 4 de ce travail.

Lemme 1. — *Soit D un domaine borné contenant l'origine, et non ramifié à l'origine. Si les fonctions*

$$(1) \qquad f(x,y) \equiv ax + by + \ldots \qquad g(x,y) \equiv a'x + b'y + \ldots$$

transforment D en un domaine intérieur à D, alors les modules des racines λ' et λ'' de l'équation

$$(2) \qquad \lambda^2 - (a + b')\lambda + ab' - ba' = 0$$

sont au plus égaux à un.

L'on sait en effet qu'au moyen d'une même substitution linéaire effectuée sur x, y et sur X, Y, la substitution

$$(3) \qquad X = ax + by, \qquad Y = a'x + b'y$$

peut prendre la forme

$$X = \lambda' x, \qquad Y = \lambda'' y,$$

sauf dans le cas où $\lambda' = \lambda''$; dans ce dernier cas, la substitution peut être ramenée à la forme

$$X = \lambda' x + by, \qquad Y = \lambda' y.$$

Par conséquent, en effectuant sur le domaine D une transformation linéaire convenable, on peut supposer que la transformation (1) a l'une des deux formes suivantes

$$(4) \qquad f(x,y) \equiv \lambda' x + \ldots, \qquad g(x,y) \equiv \lambda'' y + \ldots,$$
$$(4') \qquad f(x,y) \equiv \lambda' x + by + \ldots, \qquad g(x,y) \equiv \lambda' y + \ldots.$$

Itérons cette transformation, et posons, d'une manière générale,

$$f_n(x,y) \equiv f[f_{n-1}(x,y), g_{n-1}(x,y)] \equiv f_{n-1}[f(x,y), g(x,y)],$$
$$g_n(x,y) \equiv g[f_{n-1}(x,y), g_{n-1}(x,y)] \equiv g_{n-1}[f(x,y), g(x,y)].$$

Les fonctions f_n et g_n sont uniformément bornées dans D, car f et g sont bornées, le domaine D étant lui-même borné. Leurs dérivées partielles du premier ordre sont donc uniformément bornées à l'origine. Or on a visiblement

$$\frac{\partial f_n(0,0)}{\partial x} = \lambda'^n, \qquad \frac{\partial g_n(0,0)}{\partial y} = \lambda''^n,$$

ce qui exige donc

$$|\lambda'| \leqq 1, \qquad |\lambda''| \leqq 1.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — On a en particulier

$$|ab' - ba'| \leqq 1,$$

puisque

$$ab' - ba' = \lambda'\lambda'';$$

la première partie du théorème II est donc établie.

Remarque. — On sait que les racines de l'équation (2) restent invariantes si l'on transforme la substitution (3) par une substitution linéaire homogène quelconque de déterminant non nul. Il est bon de remarquer que, si f_n et g_n désignent les itérées d'ordre n de f et g,

$$f_n = a_n x + b_n y + \ldots, \qquad g_n = a'_n + b'_n y + \ldots,$$

l'équation

$$\lambda^2 - (a_n + b'_n)\lambda + a_n b'_n - b_n a'_n = 0$$

a pour racines les puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation (2).

Lemme 2. — *Soit* D *un domaine borné contenant l'origine, et non ramifié à l'origine. Si la transformation*

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv ax + by + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv a'x + b'y + \ldots$$

transforme D *en un domaine intérieur à* D, *et si l'on a*

$$|ab' - ba'| = 1,$$

on peut effectuer sur D *une transformation linéaire de façon que la transformation* (1) *prenne la forme*

$$(5)\; f(x, y) \equiv xe^{i\alpha} + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv ye^{i\beta} + \ldots \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels}).$$

En effet, d'après le lemme 1, on a forcément

$$|\lambda'| = |\lambda''| = 1.$$

Si $\lambda' \neq \lambda''$, la transformation (1) peut prendre la forme (4), et le présent lemme est établi.

Si $\lambda' = \lambda''$, la transformation (1) peut être ramenée à la forme

(4'). On a dans ce cas

$$f_n(x, y) \equiv \lambda'^n x + nb\lambda'^{n-1} y + \ldots,$$
$$g_n(x, y) \equiv \lambda'^n y + \ldots,$$

ce qui exige

$$b = 0,$$

et, par suite, la transformation a bien la forme (5).

Corollaire. — *Si* $|ab' - ba'| = 1$, *et si* $\lambda' = \lambda''$, *alors on a nécessairement*

$$a = b' = e^{i\theta}, \qquad a' = b = 0.$$

En effet, on peut, d'après ce qui précède, transformer la substitution (3) par une substitution linéaire, de façon à lui donner la forme

$$(3') \qquad X = xe^{i\theta}, \qquad Y = ye^{i\theta};$$

mais alors la substitution (3) est identique à sa transformée, et elle a elle-même la forme (3'). C. Q. F. D.

On voit que si l'on a

$$ab' - ba' = \frac{a + b'}{2} = 1,$$

on a $\lambda = \lambda' = 1$; la transformation (1) a donc la forme

$$f(x, y) \equiv x + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv y + \ldots;$$

d'après le théorème I, *elle se réduit à la transformation identique*.

4. La métrique de M. Carathéodory. — La théorie de M. Carathéodory [1] va nous permettre d'étendre le théorème I à un cas plus général; cette extension est indispensable si l'on veut aborder la démonstration du théorème II.

Théorème I *bis*. — *Soit* D *un domaine borné contenant l'origine, et non ramifié à l'origine. Considérons une suite infinie de transformations analytiques*

$$X = f_n(x, y), \qquad Y = g_n(x, y) \qquad [f_n(0, 0) = g_n(0, 0) = 0],$$

---

[1] *Voir*, par exemple, *Ueber die Geometrie der analytischen Abbildungen* (*Math. Sem. Hamburg. Univ.*, 6, 1928, p. 96-145).

dont chacune transforme D *en un domaine intérieur à* D. *Supposons que les fonctions* f_n *et* g_n *convergent respectivement vers deux fonctions holomorphes* f *et* g *de la forme*

$$f(x, y) \equiv x + \ldots \qquad g(x, y) \equiv y + \ldots,$$

la convergence étant uniforme au voisinage de tout point intérieur à D. *On a alors*

$$f(x, y) \equiv x. \qquad g(x, y) \equiv y.$$

Ce théorème n'est pas une conséquence immédiate du théorème I, car rien ne prouve *a priori* que le point $f(x, y)$, $g(x, y)$ reste *intérieur* à D lorsque le point x, y décrit l'intérieur de D; le point f, g, qui est un point limite de points intérieurs à D, pourrait fort bien être un point frontière.

Avant d'établir le théorème I *bis*, je rappelle brièvement en quoi consiste la méthode de M. Carathéodory.

Soient D un domaine borné (univalent ou non), O un point intérieur que nous supposerons n'être pas un point de ramification. A chaque point M de D, associons un nombre positif ou nul $d(\mathrm{M})$, défini de la façon suivante : étant donné l'ensemble des fonctions $\varphi(x, y)$, nulles en O, holomorphes et de module plus petit que *un* dans D, les modules des valeurs prises en M par ces fonctions admettent une borne supérieure $d(\mathrm{M})$ plus petite que *un*, et, parmi ces fonctions, il en existe au moins une dont le module est égal à $d(\mathrm{M})$ au point M. Cela tient à ce que les fonctions $\varphi(x, y)$ forment une famille normale dans D.

La fonction $d(\mathrm{M})$ varie de façon continue avec le point M; en aucun point intérieur à D, $d(\mathrm{M})$ ne peut admettre de maximum même relatif.

Cela posé, considérons une transformation analytique

$$x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y) \tag{6}$$

qui laisse fixe le point O et transforme D en un domaine intérieur à D [1]. Soient M un point quelconque intérieur à D, M′ son transformé. Je dis que l'on a

$$d(\mathrm{M}') \leqq d(\mathrm{M}).$$

---

[1] *Voir* le n° 1 de cet article, et, en particulier, la note [1] de la page 200.

Soit en effet $\varphi(x, y)$ une fonction holomorphe dans D, nulle en O, dont le module est plus petit que *un* dans D et égal à $d(M')$ au point M'. La fonction

$$\psi(x, y) = \varphi[f(x, y), g(x, y)]$$

est holomorphe et de module plus petit que *un* dans D; elle est nulle en O, et son module est égal à $d(M')$ au point M. On a donc, d'après la définition de $d(M)$,

$$d(M) \geqq d(M').$$

C. Q. F. D.

Plaçons-nous, en particulier, dans le cas où D est l'hypersphère

$$|x|^2 + |y|^2 < 1,$$

le point O étant à l'origine. On a alors

$$d(M) = \sqrt{|x|^2 + |y|^2},$$

x et y désignant les coordonnées du point M. Par conséquent, si une transformation de la forme (6) laisse fixe l'origine et transforme l'hypersphère en un domaine intérieur, on a [1]

$$|f(x, y)|^2 + |g(x, y)|^2 \leqq |x|^2 + |y|^2.$$

Revenons à un domaine borné quelconque D, univalent ou non. Soit O un point intérieur à D, que nous supposerons n'être pas un point de ramification, et que nous prendrons pour origine des coordonnées. Soit Σ une hypersphère de centre O complètement intérieure à D. En tout point de Σ ou de sa périphérie Γ, $d(M)$ est différent de zéro, sauf au point O; en effet, si la constante k est assez petite, les fonctions kx et ky ont leurs modules inférieurs à *un* dans D, et l'une au moins d'entre elles n'est pas nulle au point M. Donc $d(M)$ n'est pas nul.

Cela posé, lorsque M décrit Γ, $d(M)$ admet une borne inférieure ρ qui est atteinte en un point de Γ, puisque $d(M)$ est une fonction continue. Donc ρ *n'est pas nul*. Soit alors r un nombre positif inférieur à ρ, et soit D_r l'ensemble des points M de Σ pour lesquels on a

$$d(M) \leqq r.$$

[1] Nous avions annoncé cette proposition au n° 2 du présent article.

D_r est un domaine fermé complètement intérieur à Σ, et, *a fortiori*, complètement intérieur à D. Si D_r n'est pas connexe, il se compose de domaines connexes dont l'un Δ contient le point O à son intérieur. En tout point *intérieur* à Δ, on a

$$d(M) < r,$$

sans égalité possible, puisque $d(M)$ n'admet aucun maximum relatif.

Je dis que, dans toute transformation analytique du domaine D en un domaine intérieur à D, qui laisse fixe l'origine, *l'intérieur de* Δ *se transforme en un domaine intérieur à* Δ. Dans le cas contraire, en effet, il existerait au moins un point M intérieur à Δ dont le transformé M′ serait un point frontière de Δ; on aurait donc

$$d(M') > d(M),$$

ce qui est impossible, comme nous l'avons vu.

Je dis en outre que le domaine Δ jouit de la propriété suivante :

Lemme 3. — *Étant donné un ensemble infini quelconque de transformations analytiques dont chacune laisse fixe le point* O *et transforme le domaine* D *en un domaine intérieur à* D, *les transformés d'un point quelconque* M_0, *intérieur à* Δ, *non seulement sont tous intérieurs à* Δ, *mais ont tous leurs points limites intérieurs à* Δ.

En effet, soit M_0 un point intérieur à Δ, et soit

$$d(M_0) = l < r.$$

Soit Δ_l l'ensemble des points de Δ pour lesquels on a

$$d(M) \leqq l;$$

Δ_l est un domaine fermé complètement intérieur à Δ. Or, considérons l'une quelconque des transformations envisagées dans l'énoncé du lemme; elle transforme M_0 en un point M'_0 pour lequel on a

$$d(M'_0) \leqq d(M_0) = l;$$

les transformés de M_0 appartiennent donc tous à Δ_l; par conséquent, leurs points limites sont tous intérieurs à Δ.

C. Q. F. D.

Le théorème I *bis* va se déduire immédiatement du lemme 3. Reprenons en effet les notations de son énoncé; tant que le point x, y est intérieur à Δ, le point $f(x, y)$, $g(x, y)$ est aussi intérieur à Δ, d'après ce qui précède. Appliquons alors le théorème I au domaine Δ et à la transformation

$$f(x, y) \equiv x + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv y + \ldots;$$

on voit que l'on a, dans Δ,

$$f(x, y) \equiv x, \qquad g(x, y) \equiv y.$$

Or f et g sont holomorphes dans le domaine D tout entier; les identités précédentes ont donc lieu dans le domaine D tout entier. Le théorème I *bis* est ainsi établi.

5. Il nous faut encore établir un lemme avant de démontrer le théorème II.

Lemme 4. — *Soit une suite infinie de couples de fonctions* $f_n(x, y)$, $g_n(x, y)$, *holomorphes dans un domaine quelconque* D; *supposons que, pour chaque valeur de* n, *le domaine* D_n *engendré par* f_n *et* g_n *soit intérieur à* D, *et supposons en outre que l'on ait*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x, y) \equiv x,$$
$$\lim_{n \to \infty} g_n(x, y) \equiv y,$$

la convergence étant uniforme au voisinage de tout point intérieur à D. *Alors, étant donné un point* P *quelconque intérieur à* D, *le domaine* D_n *contient le point* P *à son intérieur pour toutes les valeurs de* n *à partir d'un certain rang.*

En effet, supposons d'abord que P ne soit pas un point de ramification pour le domaine D, et soit Σ une hypersphère de centre P intérieure à D. Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_n, g_n)}{D(x, y)}$$

converge uniformément vers *un* dans Σ et, par suite, ne s'y annule pas si n est assez grand. Le nombre des solutions du système d'équations

$$(7) \qquad f_n(x, y) = a, \qquad g_n(x, y) = b,$$

intérieures à Σ, est alors donné par l'intégrale triple de Kronecker étendue à la périphérie de Σ. Prenons pour a et b précisément les coordonnées du point P. Si n augmente indéfiniment, $f_n(x, y)$ et $g_n(x, y)$ convergent uniformément vers x et y; donc la valeur de l'intégrale de Kronecker tend vers le nombre des solutions du système

$$x = a, \qquad y = b,$$

intérieures à Σ, c'est-à-dire vers *un*. Par conséquent, si n est assez grand, le système (7) a une solution intérieure à Σ; le domaine D_n contient donc le point P à son intérieur. C. Q. F. D.

Si P est un point de ramification pour D, il suffit de transformer le voisinage de P en un voisinage univalent, et l'on retombe sur le raisonnement précédent. Le lemme est donc établi.

6. **Démonstration du théorème II.** — La première partie du théorème a déjà été établie (corollaire du lemme 1) Il reste à montrer que, si

$$|ab' - ba'| = 1,$$

la transformation (1) est une transformation biunivoque du domaine D en lui-même. Or, d'après le lemme 2, on peut supposer que la transformation a la forme

$$(5) \qquad f(x, y) \equiv xe^{i\alpha} + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv ye^{i\beta} + \ldots \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels}).$$

Désignons cette transformation par S. Pour montrer que S est une transformation *biunivoque* de D en lui-même, je ferai voir :

a. Que deux points distincts quelconques de D sont transformés par S en deux points distincts de D;

b. Que tout point de D est transformé d'un certain point de D par S.

La $n^{\text{ième}}$ itérée de S a évidemment la forme

$$(S^n) \qquad f_n(x, y) \equiv xe^{in\alpha} + \ldots, \qquad g_n(x, y) \equiv ye^{in\beta} + \ldots.$$

Deux cas sont donc à distinguer.

Premier cas. — α et β sont tous deux commensurables avec π. Alors il existe un entier p tel que l'on ait

$$(S^p) \qquad f_p(x,y) \equiv x + \ldots, \qquad g_p(x,y) \equiv y + \ldots,$$

et, par suite, d'après le théorème I,

$$f_p(x,y) \equiv x, \qquad g_p(x,y) \equiv y.$$

Autrement dit, S^p est la transformation identique. Cela posé :

a. Soient M et M′ deux points quelconques distincts de D; si leurs transformés par S étaient confondus en un même point de D, leurs transformés par $S^p \equiv S^{p-1}S$ (1) seraient aussi confondus, ce qui n'est pas, puisque S^p est la transformation identique.

b. Si un point P de D n'était transformé d'aucun point de D par S, il ne serait transformé d'aucun point de D par $S^p \equiv SS^{p-1}$, ce qui est absurde.

S est donc bien une transformation biunivoque de D en lui-même.

Deuxième cas. — L'un au moins des nombres α et β est incommensurable avec π.

Un raisonnement classique montre que l'on peut alors trouver une suite infinie d'entiers $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} e^{ip_n\alpha} = \lim_{n \to \infty} e^{ip_n\beta} = 1.$$

D'autre part, on peut extraire de la suite p_n une nouvelle suite infinie q_n telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} f_{q_n}(x,y) \equiv f(x,y) \equiv x + \ldots,$$
$$\lim_{n \to \infty} g_{q_n}(x,y) \equiv g(x,y) \equiv y + \ldots,$$

la convergence étant uniforme au voisinage de tout point intérieur à D. D'après le théorème I *bis*, on a

$$f(x,y) \equiv x, \qquad g(x,y) \equiv y.$$

(1) A et B désignant deux transformations, je désigne par AB le produit de ces deux transformations, la transformation B étant effectuée la première.

Cela posé :

a. Soient M et M′ deux points quelconques distincts de D ; si leurs transformés par S étaient confondus, leurs transformés par $S^{q_n} \equiv S^{q_n-1}S$ seraient aussi confondus. Or $S^{q_n}(M)$ tend vers M, et $S^{q_n}(M')$ tend vers M′. Il y a contradiction.

b. Si un point P de D n'était transformé d'aucun point de D par S, il ne serait transformé d'aucun point de D par $S^{q_n} \equiv SS^{q_n-1}$. Mais ceci est en contradiction avec le lemme 4.

S est donc bien une transformation biunivoque de D en lui-même, et le théorème II se trouve enfin complètement démontré.

Remarque. — Si D est un domaine *cerclé* borné, et si

$$|ab' - ba'| = 1,$$

alors *les fonctions* $f(x, y)$ *et* $g(x, y)$ *sont nécessairement linéaires;* on sait en effet que toutes les transformations d'un domaine cerclé borné en lui-même, qui laissent fixe le centre, sont linéaires [1].

7. Étude de quelques cas d'application du théorème II :

Théorème III. — *Soit* D *un domaine borné contenant l'origine, et non ramifié à l'origine. Supposons que les fonctions*

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv ax + by + \dots, \qquad g(x, y) \equiv a'x + b'y + \dots$$

transforment D *en un domaine intérieur à* D; *supposons de plus qu'un certain domaine* D_1, *contenant l'origine, intérieur à* D *et univalent par rapport à* D, *soit transformé en lui-même de manière biunivoque par la transformation* (1). *Alors cette dernière définit aussi une transformation biunivoque de* D *en lui-même.*

En effet, puisque le domaine D_1 est transformé en lui-même, on a

$$|ab' - ba'| \leqq 1;$$

(1) *Voir* [A] Chapitre II, n° 6, théorème VI. Voir aussi ma Note aux *Comptes rendus* déjà citée (t. 190, 1930, p. 718).

mais la transformation inverse montre que l'on a aussi

$$|ab' - ba'| \geqq 1,$$

et, par suite,

$$|ab' - ba'| = 1.$$

Le théorème II s'applique alors. C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Soient*

$$f(x, y) \equiv x_0 + ax + by + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv y_0 + a'x + b'y + \ldots$$

deux fonctions holomorphes dans l'hypersphère

$$|x|^2 + |y|^2 < 1,$$

et satisfaisant à l'inégalité

$$|f|^2 + |g|^2 < 1.$$

On a alors

$$|ab' - ba'| \leqq (1 - x_0\bar{x}_0 - y_0\bar{y}_0)^{\frac{3}{2}},$$

et, si l'égalité est atteinte, les fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ définissent une transformation biunivoque de l'hypersphère en elle-même, et, par suite, sont homographiques.

Soit en effet

$$X = F(x, y), \qquad Y = G(x, y)$$

une transformation biunivoque de l'hypersphère en elle-même, qui amène le point

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

au centre

$$X = 0, \qquad Y = 0.$$

On peut prendre par exemple

$$\sqrt{x_0\bar{x}_0 + y_0\bar{y}_0}\, F(x, y) \equiv \frac{x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0 - (x_0\bar{x}_0 + y_0\bar{y}_0)}{1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0},$$

$$\sqrt{x_0\bar{x}_0 + y_0\bar{y}_0}\, G(x, y) \equiv \frac{(x_0 y - y_0 x)\sqrt{1 - x_0\bar{x}_0 - y_0\bar{y}_0}}{1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0}.$$

Je considère les fonctions

$$f_1(x, y) \equiv F[f(x, y), g(x, y)] \equiv A x + B y + \ldots,$$
$$g_1(x, y) \equiv G[f(x, y), g(x, y)] \equiv A'x + B'y + \ldots$$

qui s'annulent pour $x = y = 0$. On a

$$\left[\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}\right]_{x=y=0} = \left[\frac{D(F, G)}{D(x, y)}\right]_{x=x_0,\, y=y_0} \times \left[\frac{D(f, g)}{D(x, y)}\right]_{x=y=0}$$

Donc

$$|AB' - BA'| = \frac{1}{(1 - x_0\bar{x}_0 - y_0\bar{y}_0)^{\frac{3}{2}}} \times |ab' - ba'|.$$

Il suffit d'appliquer le théorème II aux fonctions $f_1(x, y)$ et $g_1(x, y)$, pour obtenir le théorème IV.

On établirait de même le théorème suivant :

Théorème V. — *Soient*

$$f(x, y) \equiv x_0 + ax + by + \dots, \qquad g(x, y) \equiv y_0 + a'x + b'y + \dots$$

deux fonctions holomorphes, de module plus petit que un pour

(8) $$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

On a

$$|ab' - ba'| \leqq (1 - x_0\bar{x}_0)(1 - y_0\bar{y}_0),$$

et, si l'égalité est atteinte, les fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ définissent une transformation biunivoque du domaine (8) *en lui-même; on a donc, dans ce cas,*

$$f(x, y) \equiv \varphi(x), \qquad g(x, y) \equiv \psi(y),$$

ou

$$f(x, y) \equiv \varphi(y), \qquad g(x, y) \equiv \psi(x),$$

les fonctions φ et ψ étant des fonctions homographiques d'une seule variable complexe.

8. Extension de la théorie précédente. — Nous allons d'abord préciser le lemme 4 de la façon suivante :

Lemme 5. — *Soit une suite infinie de couples de fonctions $f_n(x, y)$, $g_n(x, y)$, holomorphes dans un domaine quelconque* D. *Supposons que, pour chaque valeur de n, le domaine D_n engendré par f et g soit intérieur à* D, *et supposons en outre que l'on ait*

$$\lim f_n(x, y) \equiv x, \qquad \lim g_n(x, y) \equiv y,$$

la convergence étant uniforme au voisinage de tout point intérieur à D.

Donnons-nous arbitrairement deux domaines fermés Δ *et* Δ', *tous deux complètement intérieurs à* D *et univalents par rapport à* D. *Il existe alors un entier* N *tel que, pour toute valeur de n supérieure à* N :

1° *le domaine* Δ_n-*transformé de* Δ *par*

$$(S_n) \qquad X = f_n(x, y), \qquad Y = g_n(x, y)$$

soit univalent par rapport à D;

2° *le domaine* D_n *contienne* Δ' *à son intérieur.*

De même que pour la démonstration du lemme 4, nous ferons usage de l'intégrale de Kronecker.

Démontrons d'abord la première partie de l'énoncé. Si elle n'était pas exacte, on pourrait trouver une suite d'indices $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, et, pour chaque valeur de l'indice, deux points distincts M_{p_n} et M'_{p_n} de Δ, tels que les transformés de ces points par S_{p_n} soient confondus en un même point de D. On peut en outre supposer que les points M_{p_n} et M'_{p_n} tendent respectivement vers deux points M et M' de Δ, lorsque n augmente indéfiniment; sinon, il suffirait d'extraire de la suite des indices p_n une nouvelle suite.

A cause de la convergence uniforme, les points M et M' ont même transformé par la transformation limite de S_{p_n}, qui est la transformation identique; donc M et M' sont confondus.

Supposons d'abord que M ne soit pas un point de ramification pour D, et soit Σ une hypersphère, intérieure à D, de centre M. Comme on l'a vu lors de la démonstration du lemme 4, le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_{p_n}, g_{p_n})}{D(x, y)}$$

ne s'annule pas dans Σ si n est assez grand, et le nombre des solutions, intérieures à Σ, du système d'équations

$$(9) \qquad f_{p_n}(x, y) = a_{p_n}, \qquad g_{p_n}(x, y) = b_{p_n},$$

est donné par l'intégrale de Kronecker étendue à la périphérie de Σ. Prenons pour a_{p_n} et b_{p_n} les coordonnées du point transformé de

M_{p_n} par S_{p_n}. Quand n augmente indéfiniment, a_{p_n} et b_{p_n} tendent respectivement vers a et b, coordonnées du point M. Donc la valeur de l'intégrale de Kronecker tend vers le nombre des solutions, intérieures à Σ, du système d'équations

$$x = a, \qquad y = b,$$

c'est-à-dire vers *un*. Or, d'après les hypothèses faites, cette intégrale est au moins égale à *deux*. Nous arrivons donc à une contradiction.

Si M était un point de ramification pour le domaine D, on transformerait le voisinage de M en un voisinage univalent, et le raisonnement précédent serait encore valable.

La première partie du lemme est donc démontrée. La seconde s'établit par un procédé semblable; nous laissons au lecteur le soin de s'en assurer.

Théorème IV. — *Soit* D *un domaine borné contenant l'origine* O, *et non ramifié à l'origine. Donnons-nous arbitrairement deux domaines fermés* Δ *et* Δ', *contenant* O *à leur intérieur, tous deux complètement intérieurs à* D *et univalents par rapport à* D. *Il leur correspond deux nombres réels k et k' plus petits que un, qui jouissent des propriétés suivantes : soient*

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv ax + by + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv a'x + b'y + \ldots$$

deux fonctions analytiques arbitraires qui transforment D *en un domaine intérieur à* D. *Alors :*

1° *si* $|ab' - ba'| > k$, *le transformé de* Δ *par* (1) *est univalent par rapport à* D;

2° *si* $|ab' - ba'| > k'$, *le transformé de* D *par* (1) *contient* Δ' *à son intérieur.*

Démontrons par exemple la première partie de l'énoncé; la seconde se démontrerait d'une façon toute semblable. Si le nombre k n'existait pas, on pourrait trouver une suite infinie de transformations

$$(S_n) \qquad \begin{cases} X = f_n(x, y) \equiv a_n x + b_n y + \ldots, \\ Y = g_n(x, y) \equiv a'_n x + b'_n y + \ldots, \end{cases}$$

telles que le transformé de Δ par S_n ne soit pas univalent par rapport à D, et telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} | a_n b'_n - b_n a'_n | = 1.$$

h désignant un entier positif quelconque, soit $(S_n)^h$ la $h^{\text{ième}}$ itérée de la transformation S_n; *le transformé de* Δ *par* $(S_n)^h$ *n'est pas univalent par rapport à* D. En effet, il existe deux points de Δ qui ont même transformé par S_n; ils ont aussi même transformé par $(S_n)^h \equiv (S_n)^{h-1} \times S_n$.

C. Q. F. D.

Cela posé, soient λ'_n et λ''_n les racines de l'équation

$$\lambda^2 - (a_n + b'_n)\lambda + a_n b'_n - b_n a'_n = 0.$$

On peut supposer que λ'_n et λ''_n tendent respectivement vers des limites λ' et λ'' quand n augmente indéfiniment (sinon, on extrairait une nouvelle suite de la suite des S_n). On a évidemment $|\lambda'| = |\lambda''| = 1$. On peut donc trouver une suite infinie d'entiers q_p tels que l'on ait

$$\lim \lambda'^{q_p} = \lim \lambda''^{q_p} = 1.$$

Donnons-nous alors une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$, tendant vers zéro. A chaque entier p on peut faire correspondre un entier n_p tel que l'on ait

$$|(\lambda'_{n_p})^{q_p} - \lambda'^{q_p}| < \varepsilon_p,$$
$$|(\lambda''_{n_p})^{q_p} - \lambda''^{q_p}| < \varepsilon_p.$$

On aura

$$\lim_{p \to \infty} (\lambda'_{n_p})^{q_p} = \lim_{p \to \infty} (\lambda''_{n_p})^{q_p} = 1.$$

Appelons

$$F_p(x, y) \equiv A_p x + B_p y + \ldots, \qquad G_p(x, y) \equiv A'_p x + B'_p y + \ldots$$

les itérées d'ordre q_p des fonctions f_{n_p} et g_{n_p}. D'après ce qui précède, les racines de l'équation

$$\lambda^2 - (A_p + B'_p)\lambda + A_p B'_p - B_p A'_p = 0$$

qui sont égales à (λ'_{n_p}) et $(\lambda''_{n_p})^{q_p}$, tendent vers *un* quand p augmente indéfiniment.

La famille des fonctions F_p et G_p est normale dans D, puisque D est borné, et que le point de coordonnées F_p et G_p est intérieur à D. Je puis donc extraire de la suite F_p, G_p une nouvelle suite (pour simplifier, je l'appellerai encore F_p, G_p) telle que l'on ait

$$\lim F_p(x, y) \equiv F(x, y) \equiv A x + B y + \ldots,$$
$$\lim G_p(x, y) \equiv G(x, y) \equiv A'x + B'y + \ldots,$$

la convergence étant uniforme au voisinage de tout point intérieur à D. Les racines de l'équation

$$\lambda^2 - (A + B')\lambda + AB' - BA' = 0$$

sont égales à *un*. Je peux donc supposer que j'ai effectué préalablement sur D, ainsi que sur les fonctions F_p et G_p, une transformation linéaire telle que l'on ait

$$F(x, y) \equiv x + \ldots, \qquad G(x, y) = y + \ldots.$$

Mais alors, d'après le théorème I *bis*, on a

$$F(x, y) \equiv x, \qquad G(x, y) \equiv y.$$

Appliquons maintenant le lemme 5 aux fonctions F_p et G_p, qui convergent respectivement vers x et y. On voit que le transformé de Δ par F_p et G_p est univalent par rapport à D. Or ceci est en contradiction avec ce qui a été établi au début : « le transformé de Δ par $(S_n)^h$ n'est pas univalent par rapport à D ».

Le théorème VI est donc établi.

9. Appliquons par exemple les résultats précédents à l'hypersphère. On trouve sans peine la proposition suivante :

Théorème VII. — *Soient*

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv ax + by + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv a'x + b'y + \ldots$$

deux fonctions holomorphes pour

$$(10) \qquad |x|^2 + |y^2| < 1;$$

supposons en outre que l'on ait

$$|f|^2 + |g|^2 < 1,$$

et posons

$$|ab' - ba'| = u \qquad (u \leqq 1).$$

Il existe deux nombres positifs $r(u)$ *et* $\rho(u)$, *qui dépendent* *seulement de u et non des fonctions envisagées, et qui jouissent des propriétés suivantes :*

1° *le domaine transformé de l'hypersphère*

$$|x|^2+|y|^2<[r(u)]^2$$

par la transformation (1) *est univalent;*

2° *le domaine transformé de l'hypersphère* (10) *contient l'hypersphère*

$$|x|^2+|y|^2<[\rho(u)]^2$$

à son intérieur.

Les fonctions $r(u)$ *et* $\rho(u)$, *nulles pour* $u=0$, *croissent avec* u, *et* (c'est là le fait important) *tendent vers un lorsque u tend vers un.*

Il serait intéressant de déterminer effectivement ces fonctions.