

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HAAG

La théorie du spiral et ses applications à la chronométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 150-174

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__150_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__150_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA THÉORIE DU SPIRAL ET SES APPLICATIONS A LA CHRONOMÉTRIE

(suite);

PAR M. J. HAAG.

IV. — Application au spiral cylindrique.

34. *Spiral sans courbes.* — Les formules (54) donnent

$$(68) \quad \varphi_1 = \varphi'_1 = 1, \quad \varphi_1 = \varphi'_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Portant dans (55) et négligeant les termes du second ordre, il vient

$$(69) \quad \vec{V} = \frac{i}{\lambda} [f(A) \vec{OA} - f(B) \vec{OB}].$$

En se reportant à (56), on a ⁽¹⁾

$$\vec{w} = -\frac{\theta}{\lambda} (\vec{OA} - \vec{OB} e^{i\theta}) = -\frac{\theta}{\lambda} (\vec{OA} - \vec{OB}_1),$$

(¹) Cette formule peut être obtenue *directement* d'une manière extrêmement simple. La courbe Γ' du n° 6 est un cercle de rayon

$$(70) \quad R' = \frac{R}{1 + \frac{\theta}{\lambda}} = R \left(1 - \frac{\theta}{\lambda} \right),$$

au second ordre près. Si l'on prend Ox suivant OA , l'abscisse de son centre est $R - R' = R \frac{\theta}{\lambda}$. Les coordonnées des extrémités de Γ et de Γ' sont respectivement

$$x = R \cos \beta, \quad y = R \sin \beta$$

et

$$x' = R \frac{\theta}{\lambda} + R' \cos \beta, \quad y' = R' \sin \beta,$$

en posant $\lambda + \theta = \beta$.

Par soustraction, on obtient, pour u et v , les mêmes expressions qu'en projetant $\vec{w}$ sur Ox et Oy .

En projetant, de même, (71), on retrouve les *formules de Caspari* (cf. ANDRADE,

en appelant B_1 la position du point B quand le balancier a tourné de θ .

Finalement, nous avons, en portant dans (22),

$$(71) \quad \vec{F} = \frac{2EI}{LR^2} \frac{\theta}{\lambda} \overrightarrow{AB_1}.$$

On voit que la réaction d'encastrement est dirigée suivant la ligne piton-virole (¹).

Pour donner une idée de l'ordre de grandeur de cette réaction, prenons un *exemple concret*. L'unité de longueur étant le millimètre et l'unité de force le gramme, prenons

$$R = 4; \quad e(\text{épaisseur}) = 0,07; \quad h(\text{hauteur}) = 0,24;$$

$$\lambda = 20\pi; \quad E = 24 \cdot 10^6; \quad \theta = \pi.$$

On a

$$w = \frac{AB_1}{20},$$

dont le maximum est 0,4.

Puis,

$$F = \frac{Ee^3h}{6R^3\lambda} w,$$

dont le maximum est atteint lorsque le piton est opposé à la virole et vaut 0,033, soit 33^{mg}.

35. On a maintenant, en utilisant (57),

$$\vec{z} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\lambda} i \left[1 - \frac{i\theta}{2} - \left(1 + i\frac{\theta}{2} \right) e^{i(\lambda+\theta)} \right] = \frac{\overrightarrow{OA} e^{i\omega}}{\lambda} (2 \sin \omega + \theta \cos \omega),$$

en posant $\omega = \frac{\lambda + \theta}{2}$. Si l'on prend OA pour axe polaire, les coor-

Horlogerie et Chronométrie, p. 268. GROSSMANN, t. II, p. 234, donne aussi ces formules, à un facteur K près, dont il n'indique pas la valeur).

On a ensuite

$$u^2 + v^2 = \frac{2R^2}{\lambda^2} \theta^2 (1 - \cos \beta).$$

En portant dans (33), on a le couple complémentaire

$$N = \frac{2EI}{L\lambda^2} \theta [\theta \sin \beta + 2(1 - \cos \beta)],$$

formule également due à Caspari (cf. *loc. cit.*).

(¹) Cf. ANDRADE, *loc. cit.*

données polaires du point G sont (1)

$$(72) \quad \omega = \frac{\lambda + \theta}{2}, \quad \rho = \frac{R}{\lambda} (2 \sin \omega + \theta \cos \omega).$$

On voit qu'il se trouve sur la bissectrice de l'angle AOB₁, ce qui est du reste évident *a priori*, par raison de symétrie.

On peut aisément, au moyen des formules (72), construire les *différentes formes de la trajectoire du centre de gravité* (2).

Si l'amplitude de l'oscillation est de 300°, la plus grande distance du centre de gravité à l'axe du balancier est obtenue pour $\lambda = 100^\circ$ environ et $\theta = 300^\circ$. Elle vaut $5,6 \frac{R}{\lambda}$; soit 0^{mm},36 avec l'exemple précédent. On voit qu'elle est importante.

36. Les formules (63) se réduisent à

$$A = \frac{2R^2}{\lambda^2}, \quad C = -\frac{2R^2}{\lambda^2} \cos \lambda, \quad B = D = K = 0.$$

En portant dans (61), on a l'*erreur d'isochronisme*

$$(73) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{\lambda^2} [-1 + F(\theta_0) \cos \lambda].$$

La perturbation est indépendante de θ_0 , si $\cos \lambda = 0$. On retrouve la *méthode de Pierre Le Roy* (3).

Si le spiral possède au contraire *un nombre entier de spires*, l'*avance diurne* quand l'amplitude passe de la valeur θ_0 à la valeur θ_1 est, en secondes,

$$M = \frac{172800}{\lambda^2} [F(\theta_0) - F(\theta_1)].$$

(1) En passant en coordonnées cartésiennes, on retrouve les *formules de Caspari*, rectifiées par *Andrade* (*loc. cit.*, p. 268). Voir aussi *Grossmann* (*loc. cit.*, p. 227 et 233). Les formules de cet auteur sont équivalentes aux formules (72) ci-dessus, en négligeant $\frac{\alpha \rho_0}{L}$. Je signale seulement deux fautes d'impression. A la page 227, il faut changer le signe de $\cos \alpha$ dans x . A la page 233, il faut changer le signe de $\sin \alpha$ dans y .

(2) C'est en construisant de telles courbes que *Grossmann* a établi qualitativement sa règle du point d'attache (n° 37). Mais, d'après ce que nous avons vu au n° 20, ces trajectoires n'offrent plus maintenant qu'un simple intérêt de curiosité.

(3) Cf. *ANDRADE, loc. cit.*

Partons, par exemple, de $\theta_0 = 300^\circ$. *La plus grande variation* est obtenue pour $\theta_1 = 156^\circ$ environ. On a $F(\theta_0) = 1,68$ et $F(\theta_1) = -1,34$; d'où

$$F(\theta_0) - F(\theta_1) = 3,02.$$

Si le spiral a 10 spire, on a

$$M = \frac{1728}{4\pi^2} \cdot 3,02 = 132 \text{ secondes.}$$

Telle est la plus grande erreur d'isochronisme que peut présenter un tel spiral. Elle varie d'ailleurs en raison inverse du carré du nombre des spires.

37. En négligeant le second ordre, la formule (66) se réduit à

$$(74) \quad \vec{Z} = \frac{i}{\lambda} \vec{OB} P(\theta_0),$$

en posant

$$(75) \quad P(x) = \frac{1}{2} J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}.$$

La table et le diagramme de cette fonction se trouvent à la fin du mémoire. On voit que P est négatif pour $170^\circ < \theta_0 < 325^\circ$. On en conclut que la direction du vecteur $\vec{Z}$ se déduit de celle de $\vec{OB}$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$. Donc, si l'on veut se conformer à la règle du n° 20, le point d'attache B doit être à gauche de la virole, quand le chronomètre est au pendu, en supposant que le sens de l'enroulement est le sens de droite à gauche. On retrouve la règle de Grossmann ⁽¹⁾.

Calculons la perturbation maximum sur un exemple concret. Soient D la densité du spiral et e son épaisseur. La marche diurne maximum est ⁽²⁾

$$M = \frac{1036,8 D \lambda R^3 P(\theta_0)}{E e^2}.$$

Reprenons le spiral du n° 34, avec $D = 8$ et $\theta_0 = 250^\circ$, ce qui

(1) *Loc. cit.*, p. 212. Cette règle n'a d'ailleurs pas grand intérêt pratique, car le spiral cylindrique a toujours des courbes terminales et il n'est guère employé que dans les chronomètres de marine, donc en position horizontale.

(2) L'unité de force est le gramme-poids et l'unité de longueur est le millimètre.

donne à $P(\theta_0)$ sa plus grande valeur absolue 0,22. On trouve $M=62$; soit une *variation maximum de 124 secondes pour deux positions diamétralement opposées*.

38. *Spiral avec courbes de Phillips*. — Les vecteurs $\overrightarrow{p_1 g_1}$ et $\overrightarrow{p'_1 g'_1}$ sont nuls, de sorte que $\rho_1 = \rho'_1 = 0$ et la formule générale (55) se réduit à

$$(76) \quad \vec{V} = \frac{R^2}{L} \left[f'_A(A') \rho_2 e^{-i\varphi_2} \overrightarrow{OA'} + f'_B(B') \rho_2 e^{i\varphi_2} \overrightarrow{OB'} \right].$$

En l'appliquant à (56), on a, en négligeant les termes du troisième ordre et se bornant au cas où les courbes terminales sont symétriques,

$$\vec{w} = \frac{\theta^2}{\lambda^2} \rho_2 \left[e^{-i\varphi_2} \overrightarrow{OA'} - e^{i\varphi_2} \overrightarrow{OB'_1} \right],$$

en appelant B'_1 la position de B' , quand le balancier a tourné de l'angle θ .

Si l'on amène A' en A'' par la rotation $-\varphi_2$ et B'_1 en B'' par la rotation φ_2 , on peut écrire

$$\vec{w} = \frac{\theta^2}{\lambda^2} \rho_2 \overrightarrow{B'' A''};$$

d'où la réaction d'encastrement

$$(77) \quad \vec{F} = \frac{2EI}{LR^2} \frac{\theta^2}{\lambda^2} \rho_2 \overrightarrow{B'' A''}.$$

Comme au n° 34, elle est dirigée suivant la ligne piton-virole, car $A''B''$ est parallèle à AB_1 . Mais, cette fois, elle est du second ordre en $\frac{\theta}{\lambda}$. Sa valeur maximum est atteinte lorsque les points A'' et B'' sont diamétralement opposés. Avec les données du n° 34 et la courbe III du n° 27, ce maximum est approximativement égal à $1^{\text{mg}},6$; il est environ 20 fois plus petit qu'avec le même spiral sans courbes terminales.

39. Employons maintenant la formule (57), en supposant toujours les courbes symétriques. On a, au troisième ordre près,

$$\vec{\zeta} = \frac{\theta}{2\lambda^2} \rho_2 \overrightarrow{OA'} \left[-(4i + \theta) e^{-i\varphi_2} + (4i - \theta) e^{i(\varphi_2 + \theta)} \right],$$

ou

$$\vec{\zeta} = -\frac{\theta}{\lambda^2} \rho_2 \overrightarrow{OA'} e^{i \frac{\lambda + \theta}{2}} (\theta \cos \omega + i \sin \omega),$$

$$\omega = \frac{\lambda + \theta}{2} + \varphi_2.$$

Si l'on prend un axe polaire parallèle à $\overrightarrow{p_2 g_2}$, les coordonnées polaires du point G sont

$$(78) \quad \omega = \frac{\lambda + \theta}{2} + \varphi_2, \quad r = -\frac{\rho_2 R}{\lambda^2} \theta (\theta \cos \omega + i \sin \omega).$$

Comme au n° 35, il se trouve constamment sur la bissectrice de l'angle AOB₁ et cela est toujours évident *a priori*, par raison de symétrie.

Les formules (78) permettent de construire aisément les *différentes formes de la trajectoire du centre de gravité*. En prenant toujours 10 spires et la courbe III, la plus grande valeur de r , pour $\theta = 300^\circ$, est atteinte si $\lambda = 150^\circ - 2\varphi_2 = -145^\circ$, à un nombre entier de circonférences près. Cette plus grande valeur est égale à 0,091 R; ce qui donne, pour un spiral de 4^{mm} de rayon, environ 3,6 centièmes de millimètre. Cet écart maximum est 10 fois plus petit qu'avec le spiral sans courbes terminales (n° 35).

40. Calculons maintenant la *perturbation d'isochronisme*.

Les formules (63) se réduisent à

$$A = C = D = 0, \quad B = \frac{3 R^6}{2 L^4} (\rho_2^2 + \rho_2'^2),$$

$$K = \frac{2 R^4}{L^2 \lambda^2} \rho_2 \rho_2' \cos(\lambda + \varphi_2 + \varphi_2').$$

En portant dans (61), on a la perturbation cherchée.

On ne peut choisir λ pour la rendre indépendante de θ_0 ; donc, la règle de Le Roy ne s'étend pas à un spiral muni de courbes de Phillips.

Si l'on suppose les deux courbes symétriques, on a

$$\rho_1 = \rho_2', \quad \varphi_1 = \varphi_2'.$$

et la formule devient

$$(79) \quad \frac{\Delta T}{T} = -\left(\frac{L'}{L}\right)^2 \frac{\rho_2^2}{\lambda^4} [3\theta_1^2 + 2H(\theta_1) \cos \beta] \quad (\beta = \lambda + 2\varphi_2).$$

Si l'on construit les courbes

$$S_{\beta}(\theta) = 3\theta^2 + 2H(\theta)\cos\beta,$$

on constate qu'entre 230° et 315° , la courbe qui se rapproche le plus d'une horizontale est celle qui correspond approximativement à $\beta = 72^\circ$ (voir le graphique à la fin du mémoire). Donc, *on aura le meilleur isochronisme en choisissant le point d'attache de telle manière que $\lambda = 72^\circ - 2\varphi_2$* , à un nombre entier de circonférences près, bien entendu.

Dans ce cas, l'oscillation de S, dans l'intervalle en question, est environ de 2 unités; tandis que si l'on prenait $\beta = 180^\circ$, elle serait de 175 unités, soit 88 fois plus grande.

Calculons la *variation de marche diurne* sur un *exemple concret*. Supposons toujours 10 spires et la courbe III. On a

$$\rho_2^2 = 1,1; \quad l = 3,57R; \quad \frac{L'}{L} = \frac{62,8}{69,9} = 0,9.$$

D'où

$$M = \frac{86.400 \times 1,1 \times 0,81}{(20\pi)^4} \Delta S = 0,005 \Delta S.$$

Si l'amplitude passe de 350° à 255° , on a $\Delta S = -2$ pour $\beta = 72^\circ$ et $\Delta S = -175$ pour $\beta = 180^\circ$. *La marche diurne diminue de 0,01 dans le cas le plus favorable (1) et de 0,88 dans le cas le plus défavorable.*

On voit qu'en choisissant l'angle d'enroulement comme il a été expliqué plus haut, l'isochronisme du spiral est de l'ordre du centième de seconde, c'est-à-dire *pratiquement parfait*.

Si l'on compare ces résultats à ceux du n° 36, on se rend compte de l'énorme amélioration apportée par les courbes de Phillips à l'isochronisme.

41. Voyons maintenant l'influence du poids du spiral.

La formule (66) devient, en se bornant toujours au cas des courbes symétriques,

$$\vec{Z} = -\frac{R^2}{2L^2} \rho_2 \left[\overrightarrow{OA'} e^{-i\varphi_1} + Q(\theta_0) \overrightarrow{OB'} e^{i\varphi_1} \right],$$

(1) Cette valeur est d'ailleurs vraisemblablement illusoire, car elle est à la limite de l'approximation de notre théorie. Mais, ce qui importe, c'est précisément qu'elle est réduite à cet ordre de grandeur.

en posant

$$(80) \quad Q(x) = 4 J_0(x) + F(x) = 5 J_0(x) - x J_1(x).$$

La table et le diagramme de cette fonction sont reproduits à la fin de ce mémoire.

Faisons tourner A' de $-\varphi_2$ et B' de $+\varphi_2$ autour de O . Nous obtenons les points A'' et B'' . Portons $\overrightarrow{A''P} = Q(\theta_0)\overrightarrow{OB''}$. On a

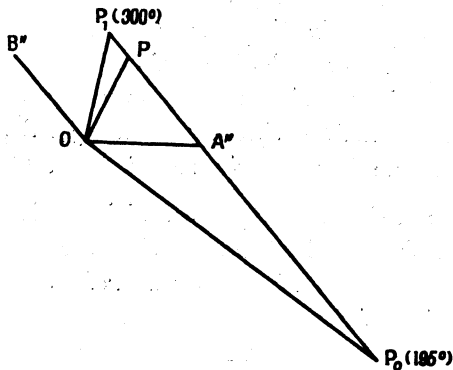
$$(81) \quad \vec{Z} = -\frac{R^2}{2L^2} \rho_2 \overrightarrow{OP}.$$

Or, si θ_0 varie de 90° à 300° , $Q(\theta_0)$ oscille entre $-2,5$ et $1,3$; donc, P se déplace sur le segment P_0P_1 . Il passe en A'' pour $\theta_0 = 113^\circ$ et 268° environ.

On voit que la direction du vecteur $\vec{Z}$ varie avec l'amplitude de l'oscillation. On ne peut donc fixer une règle du point d'attache convenant à toutes les amplitudes.

Observons cependant qu'en moyenne cette direction oscille autour de OA'' , surtout si l'amplitude reste voisine de 270° . Si l'on choisit λ de telle manière que $\lambda + 2\varphi_2 = k\pi$, $\vec{Z}$ conserve rigoureusement la direction commune à OA'' et OB'' . Cette direction est

Fig. 2.



d'ailleurs celle de $A'B'$. Quant au sens de $\vec{Z}$, il est opposé à celui de $\overrightarrow{OA''}$, si k est impair et pourvu que $Q(\theta_0)$ reste inférieur à un, c'est-à-dire que θ_0 reste inférieur à 290° . Dans ces conditions, on

aura l'avance maximum en orientant le spiral de telle manière que $\overrightarrow{OA''}$ soit dirigé suivant la verticale descendante. Cette orientation dépend évidemment de la forme des courbes terminales, à cause de l'angle φ_2 , qui varie avec cette forme.

42. Calculons numériquement cette avance maximum dans un cas concret. Supposons

$$\lambda + 2\varphi_2 = (2k + 1)\pi \quad \text{et} \quad \theta_0 = 195^\circ;$$

d'où

$$Q(\theta_0) = -2,5.$$

Prenons la courbe terminale III. On a

$$\vec{Z} = -\frac{R^2}{2L^2} \times 1,05 \times 3,5 \times \overrightarrow{OA''}.$$

L'avance cherchée est, d'après (42),

$$M = \frac{mR^3g}{2LEI} \times 3,7 \times 86\,400 = 1910 \times \frac{DR^3}{Ee^2}.$$

En reprenant l'exemple du n° 34, avec $D = 8$, on trouve $M = 8^3,3$; ce qui donne une *variation maximum de 16^s,6 pour deux positions diamétralement opposées*.

On voit que *l'amélioration apportée par les courbes terminales est beaucoup moins importante en ce qui concerne l'influence de la pesanteur qu'en ce qui concerne l'isochronisme*.

Observons aussi que *l'influence du poids du spiral peut nuire considérablement à l'isochronisme* ⁽¹⁾. Si, par exemple, nous supposons que θ_0 passe de 195° à 300° , $Q(\theta_0)$ augmente de $-2,5$ à $1,3$; et si le vecteur $\vec{Z}$ est dirigé suivant la verticale descendante, *le chronomètre retarde de 9 secondes, soit environ 10 fois la plus grande variation de marche susceptible d'être obtenue en position horizontale* (n° 40).

(1) On pourrait, il est vrai, éviter cette perturbation d'isochronisme apportée par la pesanteur, en plaçant le chronomètre de telle manière que le vecteur $\overrightarrow{OB''}$ fût horizontal. La composante verticale du vecteur $\vec{Z}$ ne dépendrait plus de θ_0 . Mais, une telle condition serait difficile à réaliser pratiquement, car elle dépendrait de la forme des courbes terminales.

La conclusion pratique est que *le spiral cylindrique ne doit jamais être utilisé en position verticale.*

43. *Influence d'un défaut des courbes terminales.* — Dans la pratique, il est impossible de réaliser exactement des courbes terminales satisfaisant aux conditions de Phillips. Cherchons quelle est l'influence de l'erreur ainsi commise.

Nous devons supposer, cette fois, que ρ_1 n'est pas rigoureusement nul, mais seulement très petit. Dans ces conditions, il faut *conserver tous les termes* des formules (63) et (66). Si l'on suppose, pour simplifier, que les deux courbes sont à peu près symétriques l'une de l'autre ⁽¹⁾, les coefficients A, B, C, D, k subissent les accroissements suivants :

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{R^4}{L^2} (\rho_1^2 + \rho_1'^2), & \Delta B &= 0, \\ \Delta C &= \frac{2R^4}{L^2} \rho_1 \rho_1' \cos(\lambda + \varphi_1 + \varphi_1'), \\ \Delta D &= \frac{2R^4}{L^2 \lambda} \rho_2 \beta, & \beta &= \rho_1 \cos(\lambda + \varphi_1 + \varphi_2) + \rho_1' \cos(\lambda + \varphi_1' + \varphi_2); \\ \Delta k &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit la *correction suivante* de la formule (79) :

$$(82) \quad \frac{\Delta T}{T} = - \frac{R^2}{L^2} \left[(\rho_1^2 + \rho_1'^2) + \frac{2\rho_2 \beta}{\lambda} G(0_1) + 2\rho_1 \rho_1' \cos(\lambda + \varphi_1 + \varphi_1') F(0_1) \right].$$

La valeur des angles φ_1 et φ_1' sont tout à fait quelconques, car elles proviennent d'erreurs accidentelles concernant la position du centre de gravité réel de chaque courbe terminale par rapport au centre de gravité théorique. Quant aux nombres ρ_1 et ρ_1' , ils peuvent très bien atteindre l'ordre de $\frac{1}{10}$ ⁽²⁾.

Les trois termes (82) sont du même ordre de grandeur et, comme leurs coefficients ont des valeurs accidentelles, il en est de même de la perturbation de marche. *On ne peut donc donner aucune règle générale permettant de prévoir dans quel sens agissent*

⁽¹⁾ Autrement dit, on suppose $\rho_2 = \rho_2'$ et $\varphi_2 = \varphi_2'$.

⁽²⁾ Sur un spiral plat ayant donné un excellent réglage, j'ai trouvé, par agrandissement photographique, un rapport ρ_1 égal à $\frac{1}{14}$.

les retouches faites aux courbes terminales. Ces retouches peuvent indifféremment provoquer une avance ou un retard.

On peut toutefois apprécier leur importance numérique. Supposons, par exemple, $\varphi_1 = \varphi_1' = \frac{1}{10}$ et calculons les limites entre lesquelles peuvent varier les marches M_1 , M_2 , M_3 correspondant aux trois termes de (82).

On a d'abord, en supposant toujours 10 spires et la courbe III (ce qui donne $\frac{R}{L} = \frac{1}{70}$),

$$M_1 \approx 0,35.$$

Prenons ensuite $\theta_0 = 245^\circ$; d'où $\theta_1 = 220^\circ$, $G(\theta_1) = 5,9$ et $F(\theta_1) = -0,4$. Suivant les valeurs de φ_1 et φ_1' , β peut varier entre $-2\varphi_1$ et $+2\varphi_1$, c'est-à-dire entre $-\frac{1}{5}$ et $+\frac{1}{5}$. Donc,

$$-0,70 < M_2 < 0,70.$$

De même,

$$-0,14 < M_3 < 0,14.$$

Si toutes les perturbations étaient de même sens, on voit que l'effet d'une telle retouche pourrait atteindre environ $1^s, 2$.

Quant à l'erreur d'isochronisme, elle provient de la variation des fonctions G et F. L'oscillation de G, obtenue entre $\theta_1 = 255^\circ$ et $\theta_1 = 100^\circ$, c'est-à-dire entre $\theta_0 = 285^\circ$ et $\theta_0 = 111^\circ$, est environ égale à 10. Cela pourrait donner une variation de M_2 égale à $1^s, 2$. L'oscillation de F, dans le même intervalle, est de 1,3. La variation correspondante de M_3 pourrait être de $0^s, 46$. On voit que le défaut d'isochronisme peut atteindre environ $1^s, 7$ (1).

44. Voyons maintenant l'effet de la pesanteur.

On a, par la formule (66) et en négligeant l'accroissement du premier terme, qui est du second ordre,

$$(83) \quad \Delta \vec{Z} = -\frac{R}{L} P(\theta_0) \varphi_1' e^{i\varphi_1'} \vec{OB}'.$$

La longueur de ce vecteur est environ φ_1' fois plus grande que celle du vecteur (74). La perturbation maximum correspondante

(1) Bien entendu, cette erreur s'ajoute algébriquement à celle qu'on aurait avec des courbes de Phillips parfaites et qui a été évaluée au n° 40.

se déduit donc de celle du n° 37 en multipliant par ρ'_1 ce qui donne 12 secondes de variation de marche entre deux positions diamétralement opposées, si l'on prend $\rho'_1 = \frac{1}{10}$.

Bien entendu, à cette perturbation s'ajoute celle du n° 42. Si elle était de même sens, on pourrait avoir une variation de marche totale de 29 secondes environ. Mais, ceci est un maximum, qui, pour une valeur donnée de ρ'_1 , ne peut être atteinte que tout à fait fortuitement. Quoi qu'il en soit, on voit que le réglage aux positions verticales doit être extrêmement difficile avec un spiral cylindrique.

Ajoutons que toute règle du point d'attache est pratiquement impossible. Au vecteur $\vec{Z}$ du n° 41, il faut, en effet, ajouter le vecteur (83); lequel atteint facilement l'ordre de grandeur du premier et peut modifier complètement sa direction. Comme l'angle φ_1 est totalement inconnu, il en est de même de l'orientation de $\vec{Z}$.

V. — Application au spiral plat.

45. *Spiral sans courbes terminales.* — La formule (55) se réduit, en négligeant le second ordre, à

$$(84) \quad \vec{V} = \frac{i}{L} [R f(A) \vec{OA} - R' f(B) \vec{OB}].$$

Sauf dans le cas où $f(A)$ est accidentellement beaucoup plus petit que $f(B)$, on voit que le premier terme du crochet l'emporte de beaucoup sur le second, car le rapport $\varepsilon = \frac{R'}{R}$ est généralement de l'ordre de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$.

La formule (56) devient, avec les mêmes notations qu'au n° 34,

$$\vec{w} = -\frac{\theta}{L} (R \vec{OA} - R' \vec{OB}_1)$$

ou, en négligeant le second terme,

$$\vec{w} = -\frac{\theta R}{L} \vec{OA}.$$

D'où

$$(85) \quad \vec{F} = -\frac{4EI}{L^2 R} \theta \cdot \vec{OA}.$$

On voit que *la réaction d'encastrement est dirigée sensiblement suivant le rayon qui aboutit au pignon.*

Prenons un *exemple concret*. Supposons les données suivantes :

$$R = 1; \quad R' = 1; \quad e = 0,08; \quad h = 0,22; \quad \lambda = 24^\circ \pi;$$

$$E = 21,10^6; \quad \theta = 1,5\pi;$$

d'où

$$L = 60\pi = 188,5.$$

On trouve

$$F = \frac{E e^3 h}{3 L^2} \theta = 0,120;$$

soit 120 milligrammes.

46. La formule (57) nous donne maintenant, en ne gardant que le terme principal,

$$(86) \quad \vec{\zeta} = \frac{R}{L} \left(i + \frac{\theta}{3} \right) O \vec{\Lambda}.$$

On voit que *le centre de gravité décrit sensiblement un segment de droite parallèle au rayon du pignon.*

Si l'on gardait le second terme de (57), on obtiendrait une trajectoire plus compliquée, mais toujours voisine du segment ci-dessus. La détermination de cette trajectoire serait facile, mais n'offre aucun intérêt pratique.

47. Les formules (63) se réduisent, en ne gardant que les termes principaux, à

$$A = \frac{R^3}{L^2}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{2 \varepsilon^2 R^3}{L^2} \cos \lambda, \quad D = K = 0.$$

En portant dans (61), il vient

$$(87) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{2 R^2}{L^2 (1 + \varepsilon^2)} \left[-1 + 2 \varepsilon^2 F(\theta_0) \cos \lambda \right] \lambda.$$

On voit que *la règle de Le Roy s'applique encore au spiral plat*. Toutefois, elle est *beaucoup moins nette* qu'avec le spiral cylindrique, car elle a pour but de supprimer un terme de l'ordre de $\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}$, qui n'est pas éloigné de l'ordre $\frac{1}{\lambda^2}$ de l'approximation de la formule.

Si l'on suppose, comme au n° 36, que θ_0 varie de 300° à 156° et

si l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{5}$ et $\lambda = 20\pi$ (soit 10 spires), on trouve une *variation de marche diurne* qui peut atteindre au maximum 28 secondes.

On voit que, pour un même nombre de spires, l'isochronisme est à peu près quatre fois meilleur avec le spiral plat qu'avec le spiral cylindrique. Cela tient à la présence du facteur ε^2 devant $F(\theta_0)$, dans la formule (87).

48. Appliquons maintenant la formule (66). Il vient en négligeant les termes de l'ordre de $\frac{R}{\lambda^2}$,

$$(88) \quad \vec{Z} = i \frac{R'}{L} (OB) U(\theta_0),$$

où l'on a posé

$$(89) \quad U(x) = \frac{2}{3} J_0(x) + \frac{J_1(x)}{x}.$$

La table et le diagramme de cette nouvelle fonction se trouvent à la fin du mémoire.

Pour $164^\circ < \theta_0 < 300^\circ$, elle est négative. On en tire la même conclusion qu'au n° 37, en ce qui concerne le point d'attache. Mais, comme au n° 47, cette conclusion est beaucoup moins nette, car le vecteur $\vec{Z}$ donné par la formule (88) a un ordre de grandeur qui n'est pas très éloigné de celui des termes négligés (1).

La perturbation maximum de la durée d'oscillation est, en secondes de marche diurne,

$$M = \frac{1036,8 D L R^2}{E e^2} U(\theta_0).$$

Reprenons le spiral du n° 45, avec $D = 8$ et $\theta_0 = 240^\circ$; d'où $U(\theta_0) = -0,28$. On trouve que la valeur absolue de M est 2,85; soit une *variation maximum de 5°,7 pour deux positions diamétralement opposées*. La perturbation est environ 22 fois plus petite qu'avec le spiral cylindrique du n° 37.

49. Spiral avec courbe extérieure et courbe intérieure de

(1) Il correspond d'ailleurs au terme négligé de la formule (86). Ce sont les sinuosités de la trajectoire du centre de gravité qui donnent lieu aux perturbations de marche.

Phillips. — On a approximativement, d'après (56),

$$\vec{w} = \frac{R^2}{L^2} \varphi_2 e^{-i\varphi_2, 0} \vec{A} + i \frac{R - R'}{L\lambda} 0 B_1 \vec{A}.$$

La réaction d'encastrement n'a plus une expression simple comme dans les cas précédents.

Reprenons encore le spiral du n° 45 et supposons que chaque courbe terminale soit une courbe III. On a alors $L = 206$. Si l'on suppose que $\varphi = 270^\circ$, les deux forces qui correspondent aux deux termes de $\vec{w}$ ont pour valeurs respectives $9^{\text{mg}}, 6$ et 2^{mg} . Elles font entre elles un angle de $122^\circ, 5$. *Leur résultante est donc égale à $8^{\text{mg}}, 7$ environ. Elle est 14 fois plus petite que sans courbes terminales.*

On peut aussi calculer facilement le vecteur $\vec{\zeta}$ et en déduire la *trajectoire du centre de gravité*. Mais, le résultat n'est pas simple, sauf si l'on néglige R' devant R ; auquel cas la trajectoire est un *arc de parabole*, car $\vec{\zeta}$ se réduit à un trinôme du second degré en φ .

50. Calculons la *perturbation d'isochronisme*.

Les formules (63) se réduisent à

$$\begin{aligned} A &= \frac{(R - R')^2 (R^2 + R'^2)}{L^2 \lambda^2}, & B &= \frac{3R^6 \varphi_2^2}{2L^3} \\ C &= - \frac{8RR'(R - R')^2}{L^2 \lambda^2} \cos \lambda, \\ D &= - \frac{(R^3 R' (R - R'))}{L^2 L' \lambda} \varphi_2 \cos(\lambda + \varphi_2), & K &= 0, \end{aligned}$$

en négligeant le cube de $\varepsilon = \frac{R'}{R}$ devant l'unité.

En portant dans (61), il vient

$$(90) \quad \frac{\Delta T}{T} = - \frac{8(R - R')^2}{L^2 \lambda^2} - \frac{2R^6}{(R^2 + R'^2)L^2 L'^2} V(0_1),$$

en posant

$$V(0_1) = 1, 5 \varphi_2^2 0_1^2 - 2 \varepsilon \cos \lambda F(0_1) - 2 \varepsilon \varphi_2 \cos(\lambda + \varphi_2) G(0_1).$$

Pour avoir une idée de la manière dont se comporte la fonction $V(\vartheta_1)$ suivant les différentes valeurs de λ , prenons un *exemple concret*.

Supposons d'abord que la courbe extérieure ⁽¹⁾ soit la courbe III; de sorte que $\rho_2 = 1,05$ et $\varphi_2 = 147^{\circ},5$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$ et

$$\lambda = 24\pi + \lambda' \quad (-\pi \leq \lambda' \leq \pi).$$

On a

$$V(\theta) = 1,66\theta^2 - 0,5 F(\theta) \cos \lambda' - 0,53 G(\theta) \cos(\lambda' + 147^{\circ},5).$$

Cherchons l'importance de la somme des deux derniers termes vis-à-vis du premier. Le maximum de cette somme, quand λ' varie, a pour carré

$$\Lambda^2 = (0,5F - 0,45G)^2 + 0,081 G^2.$$

Si θ varie de 110° à 300° , le rapport $\frac{\Lambda}{1,66\theta^2}$ ne dépasse pas 0,13.

On peut donc, sans erreur sensible, réduire $V(\theta)$ à son premier terme, ce qui donne la *formule approchée*

$$(91) \quad \frac{\Delta T}{T} \approx - \frac{8(R - R')^2}{L^2 \lambda^2} - \frac{3R^6}{(R^2 + R'^2)L^4} \varphi_2^2 \theta_0^2.$$

Cette formule nous apprend que *la montre retarde aux petites amplitudes*. Cet effet s'ajoute au retard bien connu dû à l'échappement.

Évaluons le retard entre 300° et 200° , pour le spiral du n° 49. Le coefficient de θ_0^2 dans (91) vaut $4,4 \cdot 10^{-7}$. On en déduit le retard diurne :

$$M = 0,864 \times 4,4 \times \frac{5\pi^2}{(18)^2} = 0,58.$$

L'isochronisme est donc de l'ordre de $\frac{1}{2}$ seconde par jour.

Il ne peut être amélioré que si la courbe extérieure satisfait à la condition $\varphi_2 = 0$. Si cette condition était remplie, la fonction V se réduirait à son second terme. La perturbation serait 18 fois plus petite que précédemment. Mais, en réalité, cette valeur serait vraisemblablement illusoire, parce qu'atteignant la limite de l'approximation. On en conclut néanmoins que la perturbation serait très probablement de l'ordre de quelques centièmes de

⁽¹⁾ La courbe intérieure n'a plus d'influence, car ρ_1' et φ_1' ont disparu avec les termes en R_1^3 . Mais, ceci suppose, bien entendu, qu'elle satisfait aux conditions de Phillips.

seconde tout au plus et l'*isochronisme* serait pratiquement parfait.

§1. Examinons maintenant la *perturbation due au poids du spiral*.

On a, par (66),

$$\begin{aligned} \vec{Z} = & -\frac{R^2 \varphi_2 e^{i\varphi_2}}{3L^2} (O\vec{A}) - \frac{2R'^2 \varphi_2' e^{i\varphi_2'}}{3L^2} [3J_0(\theta_0) + F(\theta_0)] (O\vec{B}) \\ & + \frac{R^2 - R'^2}{LL'} U(\theta_0) (O\vec{B}). \end{aligned}$$

Le crochet du second terme ne dépasse pas 2,1 en valeur absolue. En comparant ce terme au premier, on voit que leur rapport est au plus de l'ordre de $4\varepsilon^2$: soit $\frac{1}{16}$ si $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Dès lors, on peut écrire, avec une approximation suffisante,

$$(92) \quad \vec{Z} \approx \frac{R^2}{3L^2} [-\varphi_2 e^{i\varphi_2} (O\vec{A}) + 3U(\theta_0) (O\vec{B})].$$

Si θ_0 varie de $164''$ à $300''$, $3U(\theta_0)$ oscille entre 0 et $-0,84$; cette dernière valeur étant atteinte pour $\theta_0 = 240''$. Le second terme du crochet est donc toujours plus petit que le premier (sauf si φ_2 était très petit).

Si l'on veut rendre $\vec{Z}$ minimum, pour une valeur donnée de θ_0 comprise entre les limites précédentes, il faut prendre

$$(93) \quad \lambda = \varphi_2 = (2k + 1)\pi.$$

Dans ce cas, $\vec{Z}$ a la direction $O\vec{B}'$. Donc, OB' doit avoir la direction du pendant. Telle est la règle du point d'attache.

Si l'on a la relation (93), la perturbation maximum est

$$(94) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{mgR^2}{3EL} [\varphi_2 + 3\varepsilon U(\theta_0)].$$

Si l'on prend la courbe III, avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$, le crochet reste compris entre 1,05 et 0,84, si θ_0 varie entre $164''$ et $300''$. Avec le spiral du n° 48, la *marche diurne* est comprise entre 1^s,2 et 0^s,97.

Si, au lieu de (93), on avait

$$\lambda + \varphi_2 = 2k\pi,$$

le vecteur $\vec{Z}$ serait maximum; le crochet de (94) serait remplacé par $\rho_2 - 3\varepsilon U(\theta_0)$ et varierait entre 1,05 et 1,26; la marche diurne serait comprise entre 0^s,62 et 1^s,45.

Si λ est quelconque, la longueur de $\vec{Z}$ est comprise entre les valeurs extrêmes précédentes. De sorte que *l'écart maximum entre deux positions diamétralement opposées ne dépasse pas 2^s,9*.

52. *Spiral avec courbe extérieure et sans courbe intérieure.*

— La formule (56) nous donne, en ne gardant que les termes principaux,

$$(95) \quad \vec{w} = \frac{0}{L} \left[2\varepsilon \frac{R - R'}{\lambda} + 0 \frac{R^2}{L} \rho_2 e^{-i\varphi_2} \right] O\vec{A}_0 + 0 \frac{R'}{L} O\vec{B}_0.$$

Avec les données habituelles des spiraux plats, les deux termes du second membre sont approximativement du même ordre de grandeur. On ne peut donc obtenir aucune formule simple pour la réaction d'encastrement.

En prenant toujours le même spiral et $\theta = 270^\circ$, on trouve que les longueurs respectives des deux vecteurs de (95) sont 0,032 et 0,023. Il en résulte que la longueur de $\vec{w}$ est comprise entre 0,009 et 0,055, suivant la valeur de l'angle de l'enroulement. D'autre part, *la réaction d'encastrement vaut 260w*, en milligrammes. Elle est donc comprise entre 2 et 14^{mg}.

En faisant, à partir de la formule (57), un calcul analogue au précédent, on constate que *la trajectoire du centre de gravité* est une courbe compliquée, pouvant se déduire, par addition géométrique, d'un arc de parabole et d'un arc de spirale d'Archimède.

53. *Occupons-nous maintenant de l'erreur d'isochronisme.*

En appliquant les formules (63), réduisant le second membre de chacune d'elles à son terme principal et portant dans (61), on trouve

$$(96) \quad \frac{\Delta T}{T} = - \frac{2R^2}{L^2} \left\{ \varepsilon^2 + 1,5 \frac{R^2}{L^2} \rho_2^2 \theta_1^2 \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \frac{R}{L} [F(\theta_1) \sin \lambda + 2\rho_2 G(\theta_1) \sin(\lambda + \varphi_2)] \right\}.$$

En reprenant toujours le même spiral, on trouve que la *marche diurne* a pour valeur

$$(97) \quad M = 0,26 + 0,0507 + 0,089 [F(\theta_1) \sin \lambda + 2,1 G(\theta_1) \sin(\lambda + 147^{\circ},5)].$$

Supposons, par exemple, que θ_0 passe de 270° à 180° ; donc, θ_1 passe de 245° à 163° . On a

$$\Delta M = -0,51 - 0,153 \sin \lambda - 1,32 \sin(\lambda + 147^{\circ},5).$$

Suivant la valeur de λ , ΔM oscille entre $+0^s,68$ et $-1^s,79$. On voit se manifester une *influence très nette de l'angle d'enroulement sur l'isochronisme*.

Le terme dont la variation domine, dans la formule (97), est le terme en $G(\theta_1)$. Il y a donc intérêt à annuler son coefficient, en prenant $\lambda = -147^{\circ},5$ ou $32^{\circ},5$ à $2k\pi$ près. La première solution est d'ailleurs préférable à la seconde, car elle fait varier le terme en $F(\theta_1)$ en sens inverse du terme en $G(\theta_1)$.

Si l'on prend $\lambda = 360^{\circ} \times k - 147^{\circ},5$, on a

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2R^2}{L^2} \left[\varepsilon^2 + 1,5 \frac{R^2}{L^2} \varepsilon^2 \theta_1^2 - 0,538 \varepsilon^2 \frac{R}{L} F(\theta_1) \right].$$

Avec l'exemple précédent, la variation de marche est $-0^s,43$. En comparant avec le n° 50, on voit que *l'isochronisme est aussi bon qu'avec une courbe intérieure, si l'on choisit convenablement la valeur de l'angle d'enroulement*.

54. Voyons maintenant l'influence de la pesanteur.

La formule (66) devient, en la réduisant à ses termes principaux,

$$(98) \quad \vec{Z} = -\frac{R^2}{3L^2} \varepsilon^2 e^{-i\varphi_0} \vec{A} + \frac{iR'}{L} U(\theta_0) \vec{OB}.$$

Le rapport entre le premier terme et le second est de l'ordre de grandeur de $\frac{R^3}{3LR^2 U(\theta_0)} = \frac{R}{3L\varepsilon^2 U(\theta_0)}$. Avec l'exemple du n° 50, ce rapport est approximativement égal à $\frac{1}{10 U(\theta_0)}$. Entre $\theta_0 = 130^{\circ}$ et $\theta_0 = 300^{\circ}$, la fonction U ne dépasse pas 0,3 en valeur absolue. Donc, le rapport ci-dessus est au moins égal à $\frac{1}{3}$ et les deux termes de (98) ont des grandeurs comparables. On en conclut, comme au n° 41, que la direction du vecteur $\vec{Z}$ dépend de l'amplitude θ_0 .

Si l'on veut une règle du point d'attache, il faut s'arranger pour que les deux vecteurs $\vec{OA''}$ (n° 41) et $i\vec{OB}$ aient la même direction. On leur donnera des sens opposés ⁽¹⁾, si l'on veut en outre que Z ait une longueur minimum. Ces deux conditions sont réalisées en prenant

$$(99) \quad \lambda + \varphi_2 + k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas, $\vec{Z}$ a la direction et le sens de $-i\vec{OB}$, pour

$$180^\circ < \theta_0 < 300^\circ.$$

On aboutit au même résultat qu'au n° 37. On en conclut que *la règle de Grossmann est applicable, moyennant les restrictions précédentes.*

Si la condition (99) n'est pas remplie, mais que θ_0 reste compris entre 200° et 280° , $U(\theta_0)$ reste inférieur à $-0,2$; le premier terme de (98) est inférieur à la moitié du second et *la règle de Grossmann est encore à peu près exacte.*

33. Calculons la perturbation maximum de marche diurne, en supposant (99) et les données du n° 48. On a

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{mgR^2}{EI} \left[U(\theta_0) + \frac{R\varphi_2}{3Lz^2} \right];$$

d'où

$$M = 11 [U(\theta_0) + 0,11].$$

Pour $\theta_0 = 270^\circ$, $U(\theta_0) = -0,23$; $M = -1,3$; soit une *variation maximum de 2,6 environ entre deux positions diamétralement opposées.*

Si le second membre de (99) est diminué de π , $\vec{Z}$ a la longueur maximum et M devient égal à 3,7; ce qui donne une *variation maximum de 7,4 entre deux positions opposées.*

Si, en se replaçant dans la première hypothèse, θ_0 passe de 300° à 240° , U passe de $-0,13$ à $-0,28$; donc, M *subit une variation égale à 1,65.* On voit que *le poids du spiral peut influencer assez fortement sur l'isochronisme, lequel est donc meilleur au plat qu'au pendu.*

⁽¹⁾ En supposant toutefois $\theta_0 > 165^\circ$, pour que $U(\theta_0)$ soit négatif.

56. *Influence d'un défaut des courbes terminales.* — Faisons les mêmes hypothèses qu'au n° 43, en prenant comme comparaison un spiral avec courbes parfaitement théoriques au piton et à la virole. On a, en se reportant aux formules (63),

$$\Delta A = \frac{R^2}{L^2} \varphi_1^2, \quad \Delta B = 0, \\ \Delta C = \frac{2R^2 R'^2}{L^2} \varphi_1 \varphi'_1 \cos(\lambda + \varphi_1 + \varphi'_1), \quad \Delta D = 0, \quad \Delta E = 0,$$

en négligeant tous les termes d'ordre nettement supérieur à ΔA . D'où

$$\frac{\Delta T}{T} \approx - \frac{2R^2}{L^2} \varphi_1^2 - \frac{4R'^2}{L^2} \varphi_1 \varphi'_1 \cos(\lambda + \varphi_1 + \varphi'_1) F(\theta_1).$$

Si φ_1 et φ'_1 sont du même ordre de grandeur, le second terme est assez petit vis-à-vis du premier, surtout si θ_1 est voisin de 233° ; c'est-à-dire θ_0 voisin de 260° . On en conclut qu'une retouche faite sur la courbe extérieure provoque un retard de la montre, quand le centre de gravité de ladite courbe se rapproche du centre de gravité théorique ⁽¹⁾.

Appliquons la formule ci-dessus au spiral du n° 43, en supposant $\varphi_1 = \frac{1}{10}$ et négligeant le second terme. On trouve que l'avance est de 0,65.

L'effet sur l'isochronisme est pratiquement nul. Enfin, une retouche sur la courbe intérieure n'a pas d'influence appréciable.

57. Voyons maintenant la répercussion sur l'action de la pesanteur. On a, d'après (66),

$$(100) \quad \Delta \vec{Z} = \frac{R \varphi_1 e^{i\varphi_1}}{3L^2} O\vec{A}' - \frac{R' \varphi'_1 e^{i\varphi'_1}}{L} O\vec{B}'.$$

Il est facile de vérifier que les deux termes du second membre sont à peu près du même ordre de grandeur, pour les valeurs

⁽¹⁾ Si la courbe intérieure n'existe pas ou bien s'éloigne beaucoup d'une courbe de Phillips et si θ_1 n'est pas voisin de 233° , cette conclusion peut être en défaut et rien ne permet de prévoir le sens de la perturbation.

usuelles de θ_0 . Donc, des retouches semblables faites sur la courbe extérieure ou sur la courbe intérieure ont sensiblement la même importance dans le réglage aux positions verticales. Toutefois, comme les retouches faites sur la courbe intérieure n'ont pas de répercussion appréciable sur l'isochronisme, il vaut mieux faire le réglage aux positions verticales en agissant sur cette courbe.

Ce réglage ne peut d'ailleurs être opéré que par tâtonnements, parce qu'on n'a aucun moyen pratique de connaître l'angle φ'_1 . Supposons, par exemple, qu'une retouche remplace le centre de gravité de la courbe intérieure par le point symétrique par rapport au centre de gravité théorique. Cela revient à dire que ρ_1 ne change pas et que φ'_1 est augmenté de π . Si ρ'_1 est de l'ordre de $\frac{1}{10}$ au moins, l'accroissement géométrique subi par le vecteur $\vec{Z}$ est de l'ordre de grandeur de ce vecteur lui-même, comme on s'en rend compte en comparant (100) à (92). Dès lors, la direction de $\vec{Z}$ peut être complètement modifiée et le réglage aux positions verticales est totalement à reprendre.

§8. Cherchons à nous rendre compte de l'importance numérique d'une retouche faite à l'une ou l'autre des deux courbes, en prenant toujours l'exemple du n° 48.

Si $\rho_1 = \frac{1}{10}$, la marche maximum provenant de ce défaut de la courbe extérieure est

$$M = \frac{2,38 \times 12 DLR^2}{Ee^2} = 0,41$$

soit 0,8 entre deux positions diamétralement opposées.

Si $\rho'_1 = \frac{1}{10}$, on a de même

$$M' = \frac{8,64 \times 12 DLR'^2}{Ee^2} U(\theta_0) = 1,12 U(\theta_0).$$

Si $\theta_0 = 270^\circ$, $M' = -0,26$, soit environ $\frac{1}{2}$ seconde entre deux positions opposées.

En comparant avec le n° 44, on voit qu'en ce qui concerne le réglage aux positions verticales, l'effet d'une retouche est

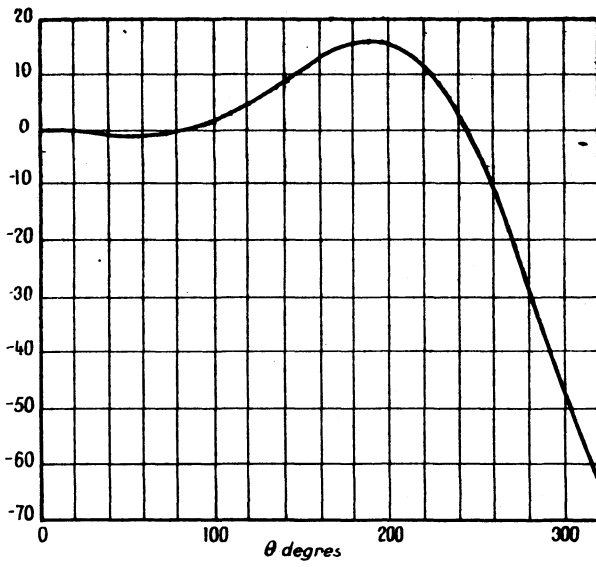
beaucoup moins sensible avec le spiral plat qu'avec le spiral cylindrique.

La conclusion pratique est que ce réglage est plus facile et qu'indépendamment de son encombrement, *le spiral plat doit être préféré au spiral cylindrique dans tout appareil horaire pouvant être utilisé dans diverses positions verticales.*

Tableau des fonctions F, G, H, P, Q, U.

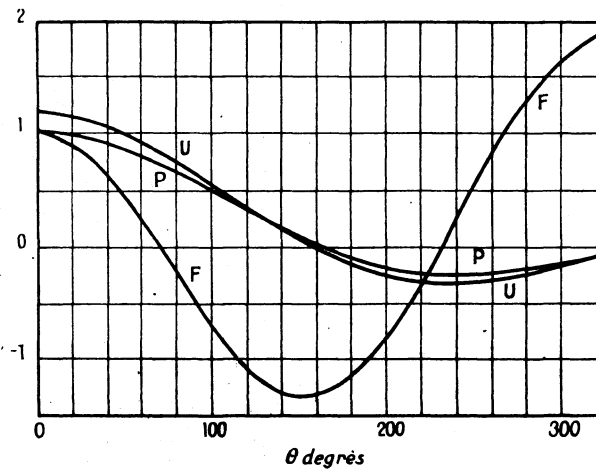
θ (degrés).	F(θ).	G(θ).	H(θ).	P(θ).	Q(θ).	U(θ).
0...	1	0	0	1	5	1,167
10...	0,97	-0,05	0	1	4,96	1,158
20...	0,91	-0,18	-0,2	0,98	4,81	1,135
30...	0,80	-0,40	-0,4	0,95	4,53	1,102
40...	0,65	-0,68	-0,5	0,91	4,17	1,054
50...	0,47	-0,97	-0,6	0,86	3,71	1
60...	0,27	-1,30	-0,7	0,81	3,25	0,932
70...	0,05	-1,60	-0,5	0,74	2,68	0,850
80...	-0,19	-1,86	0	0,67	2,05	0,750
90...	-0,42	-2,07	0,7	0,60	1,40	0,678
100...	-0,65	-2,15	1,8	0,52	0,80	0,580
110...	-0,85	-2,10	3,2	0,44	0,20	0,480
120...	-1,02	-1,92	4,8	0,36	-0,33	0,385
130...	-1,16	-1,58	6,7	0,28	-0,90	0,287
140...	-1,26	-1,12	8,8	0,20	-1,33	0,197
150...	-1,33	-0,50	11	0,12	-1,73	0,105
160...	-1,33	0,27	12,9	0,06	-2	0,030
170...	-1,28	1,15	14,5	-0,01	-2,23	-0,044
180...	-1,18	2,13	15,7	-0,06	-2,40	-0,112
190...	-1,05	3,16	16	-0,11	-2,50	-0,169
200...	-0,87	4,13	15,8	-0,15	-2,40	-0,213
210...	-0,67	5,03	14,8	-0,18	-2,25	-0,250
220...	-0,44	5,90	12	-0,20	-2	-0,267
230...	-0,14	6,68	7,9	-0,21	-1,69	-0,280
240...	0,23	7,34	2,8	-0,22	-1,28	-0,282
250...	0,56	7,76	-3,5	-0,22	-0,84	-0,278
260...	0,86	7,75	-11,1	-0,21	-0,40	-0,262
270...	1,12	7,35	-19,4	-0,19	0,07	-0,235
280...	1,34	6,65	-28,1	-0,17	0,53	-0,204
290...	1,53	5,68	-36,8	-0,15	0,94	-0,170
300...	1,68	4,45	-45,8	-0,12	1,30	-0,130
310...	1,81	2,48	-54	-0,08	1,60	-0,080
320...	1,91	1,36	-61,7	-0,04	1,85	-0,027

Fig. 3.



Courbe H.

Fig. 4.



Courbes F, P, U.

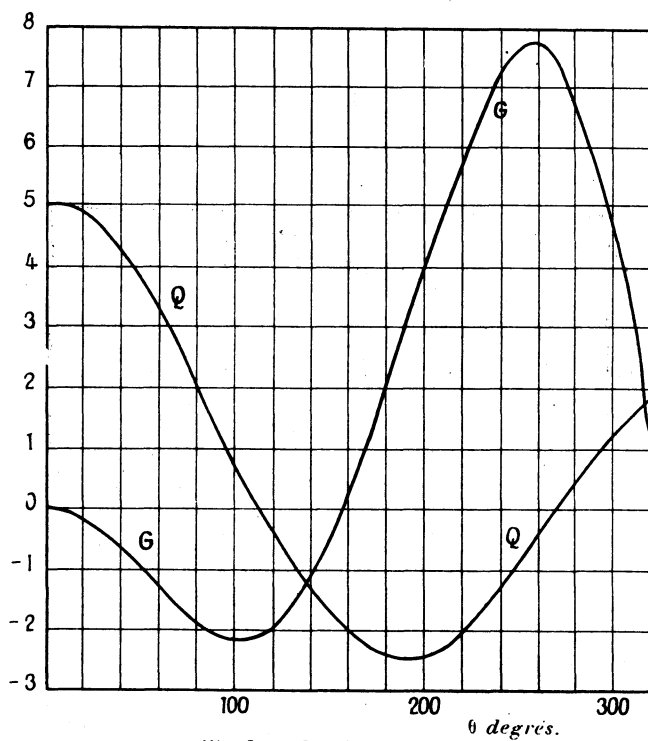


Fig. 5. — Courbes G et Q.

