BULLETIN DE LA S. M. F.

P. MONTEL

Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 105-126
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__105_0>

SUR LES ZÉROS DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. PAUL MONTEL.

1. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une région contenant le segment $(-1, +1)$ de l'axe réel, réelle sur cet axe et nulle pour z égal à ± 1. La dérivée $f'(z)$ s'annule en un point intérieur au segment $(-1, +1)$. Nous allons voir que, pour des fonctions $f(z)$ satisfaisant à des conditions très générales, il existe un zéro de la dérivée dans un intervalle $(-\theta, +\theta)$, intérieur au premier, quelle que soit la fonction de la famille considérée. On pourra supposer les fonctions bornées dans le domaine et sans limite constante, ou plus généralement appartenant à une famille normale sans limite constante.

On pourra supposer aussi que $f(z)$ est un polynome de degré fixe m. On introduira ainsi une fonction $\theta(m)$ dont nous donnerons quelques propriétés et indiquerons quelques valeurs.

Si la fonction $f(z)$ s'annule en $p+1$ points fixes de l'axe réel, nous montrerons que les dérivées d'ordre inférieur ou égal à p ont chacune un zéro dans un intervalle fixe intérieur à celui qui contient toutes ces racines réelles et se trouve limité par les deux racines extrêmes. Lorsque les racines intermédiaires varient, le résultat demeure le même. Enfin, les dérivées d'ordre inférieur à p ont toujours au moins deux zéros réels dont la distance est supérieure à un nombre fixe.

Ces théorèmes sont applicables à des polynomes de degré borné m ou à des suites bornées de Fourier d'ordre m. Nous donnerons quelques valeurs numériques correspondantes.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* le 29 septembre 1930.

2. Soient (E) une ellipse fixe de foyers -1 et $+1$, $f(z)$ une fonction holomorphe et bornée dans cette ellipse. Nous suppose-

rons en outre que

$$f(-1) = f(1) = 0, \qquad f(0) = a_0,$$

a_0 étant un nombre fixe non nul. Enfin, comme dans toute la suite de ce travail, $f(z)$ est réelle lorsque z prend une valeur réelle x. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et de module inférieur à un dans une ellipse de foyers -1 et $+1$, réelle lorsque z est réel, nulle aux points -1 et $+1$, et prenant à l'origine une valeur fixe différente de zéro : il existe un nombre θ, positif et inférieur à l'unité, tel que la dérivée $f'(z)$ ait au moins un zéro dans l'intervalle $(-\theta, +\theta)$.

En effet, dans le cas contraire, quel que soit l'entier n, il existerait une fonction $f_n(z)$ de la famille considérée dont la dérivée ne s'annulerait pas dans l'intervalle $\left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$. Puisque les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans l'ellipse (E), on peut en extraire une suite partielle $f_{n_k}(z)$ convergeant uniformément vers une fonction limite $f_0(z)$ dans l'intérieur d'une ellipse (E') intérieure à (E). $f_0(z)$ est holomorphe dans (E'), réelle sur l'axe des x, nulle aux points -1 et $+1$, et elle prend à l'origine la valeur a_0 différente de zéro. Cette fonction n'est pas identiquement nulle et sa dérivée $f'_0(z)$ a certainement, à l'intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$, un zéro x_0 d'ordre impair $2q+1$, d'après le théorème de Rolle.

Lorsque k est assez grand, on sait que $f'_{n_k}(z)$ a exactement $2q+1$ zéros dans un cercle fixe (γ) aussi petit que l'on veut, de centre x_0. Comme $f'_{n_k}(z)$ est réelle sur l'axe des x, il y a dans le cercle fixe (γ) au plus $2q$ racines imaginaires conjuguées deux à deux, et une racine réelle au moins. Cette racine serait contenue dans l'intervalle

$$\left(-1+\frac{1}{n_k}, 1-\frac{1}{n_k}\right)$$

si k est assez grand, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, il n'existe pas de fonction $f_n(z)$ quel que soit n et l'existence du nombre θ est ainsi prouvée.

3. On voit que la démonstration repose sur les deux hypothèses suivantes relatives aux fonctions $f(z)$: 1° la famille de ces fonctions est une famille normale dans (E); 2° aucune fonction limite n'est une constante.

On pourra donc répéter le raisonnement précédent chaque fois que la famille des fonctions $f(z)$ possède ces deux propriétés. Par exemple, on pourra supposer que les fonctions $f(z)$ admettent deux valeurs exceptionnelles, ou que leur module d'univalence est borné [1] et que, en même temps, $f(z)$ ou $f'(z)$ ou une dérivée d'ordre fixe arbitraire prenne à l'origine des valeurs dont le module reste supérieur à un nombre positif fixe. Dans chacun des cas ainsi considérés, il existera un nombre θ.

On peut même supposer que la famille des fonctions $f(z)$, au lieu d'être normale, est telle que toute suite infinie est génératrice d'une suite partielle $f_n(z)$ telle que $\lambda_n f_n(z)$ converge uniformément vers une fonction non constante, λ_n désignant un facteur constant.

4. Supposons maintenant que $f(z)$, au lieu d'avoir des zéros fixes -1 et $+1$, admette deux zéros réels variables, intérieurs au sens large à l'intervalle $(-1, +1)$. Supposons en outre que la distance de ces deux zéros reste supérieure à un nombre positif δ. Je dis que, dans ces conditions, il existe encore un nombre θ, qui dépendra nécessairement de δ.

Il suffit, pour le voir, de reprendre la démonstration du paragraphe 2. On pourrait, dans le cas où θ n'existerait pas, trouver encore une suite $f_n(z)$ telle que $f'_n(z)$ n'aurait aucun zéro dans l'intervalle $\left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$. On en déduirait la suite convergente $f_{n_k}(z)$, et l'on pourra choisir les entiers n_k de façon que les racines de $f_{n_k}(z)$, a_{n_k} et b_{n_k}, contenues dans le segment $(-1, +1)$ aient respectivement pour limites des nombres a et b, nécessairement réels, intérieurs à l'intervalle $(-1, +1)$. La longueur de l'intervalle (a, b) est supérieure ou égale à δ. Les nombres a et b sont des zéros de $f_0(z)$; donc $f'_0(z)$ a un zéro x_0, d'ordre impair,

---

[1]. Paul MONTEL, *Sur les domaines formés par les points représentant les valeurs d'une fonction analytique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XLVI, 1929, p. 3).

intérieur à l'intervalle (a, b) et, par suite, intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$. Et la démonstration s'achève de la même manière qu'au paragraphe 2.

On peut remarquer que les démonstrations prouvent l'existence, dans les intervalles considérés, d'une racine de la dérivée d'ordre impair de multiplicité.

5. Nous allons voir que les résultats précédents sont applicables à la famille formée par les polynomes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à un nombre fixe m et s'annulant aux points -1 et $+1$.

Une telle famille n'est pas normale; mais, étant donnée une suite $P_n(z)$ de tels polynomes, on peut en extraire une suite partielle $P_{n_k}(z)$ telle que, en multipliant $P_{n_k}(z)$ par une constante convenable λ_{n_k}, la suite des polynomes $\lambda_{n_k} P_{n_k}(z)$ converge uniformément dans toute ellipse (E) vers un polynome non identiquement nul.

Soit, en effet,

$$P_n(z) = a_0^{(n)} z^m + a_1^{(n)} z^{m-1} + a_2^{(n)} z^{m-2} + \ldots + a_m^{(n)}.$$

De la suite $a_0^{(n)}$, on peut extraire une suite partielle $a_0^{(n')}$ ayant une limite finie ou infinie A_0 lorsque n' croît indéfiniment. De la suite $a_1^{(n')}$, on peut extraire une suite partielle $a_1^{(n'')}$ ayant une limite finie ou infinie A_1, etc., jusqu'à $a_m^{(n_m)}$ qui a pour limite A_m. Ainsi, pour la suite des polynomes $P_{n_m}(z)$, les coefficients ont pour limites $A_0, A_1, \ldots, A_m$.

Si tous ces nombres sont finis, la suite $P_{n_m}(z)$ converge uniformément vers le polynome

$$P_0(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m,$$

dans toute région finie du plan.

En raisonnant sur les polynomes $\frac{P_n(z)}{a_s^{(n)}}$, $a_s^{(n)}$ désignant le premier coefficient non nul de $P_n(z)$, on voit que le polynome limite n'est alors jamais identiquement nul.

Si les nombres A_i ne sont pas tous finis, soit A_k le premier qui soit infini; si $i < k$, le rapport $\frac{a_i^{(n_m)}}{a_k^{(n_m)}}$ a pour limite zéro. Formons les rapports

$$\frac{a_{k+1}^{(n_m)}}{a_k^{(n_m)}},\quad \frac{a_{k+2}^{(n_m)}}{a_k^{(n_m)}},\quad \ldots,\quad \frac{a_m^{(n_m)}}{a_k^{(n_m)}}.$$

On peut, en opérant comme nous venons de le faire pour les suites a_i'', extraire de la suite n_m, une suite partielle ν', telle que les rapports

$$\frac{a_{k+1}^{(\nu')}}{a_k^{(\nu')}},\quad \frac{a_{k+2}^{(\nu')}}{a_k^{(\nu')}},\quad \ldots,\quad \frac{a_m^{(\nu')}}{a_k^{(\nu')}}$$

aient, respectivement, une limite finie ou infinie. Si toutes ces limites sont finies, nous arrêtons l'opération. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit $k+h$ le rang du premier rapport qui augmente indéfiniment; nous formerons maintenant les rapports $\frac{a_i^{(\nu')}}{a_{k+h}^{(\nu')}}$; ils tendent vers zéro pour $i < k+h$ puisque le rapport $\frac{a_k^{(\nu')}}{a_{k+h}^{(\nu')}}$ a pour limite zéro; pour $i > k+h$, nous pourrons extraire de la suite ν' une suite partielle ν'' telle que les rapports

$$\frac{a_{k+h+1}^{(\nu'')}}{a_{k+h}^{(\nu'')}},\quad \frac{a_{k+h+2}^{(\nu'')}}{a_{k+h}^{(\nu'')}},\quad \ldots,\quad \frac{a_m^{(\nu'')}}{a_{k+h}^{(\nu'')}}$$

aient, respectivement, une limite finie ou infinie, lorsque ν'' augmente indéfiniment.

En continuant ainsi, nous obtiendrons une suite d'entiers $\nu^{(j)}$ et un entier l tels que les rapports

$$\frac{a_i^{(\nu^{(j)})}}{a_l^{(\nu^{(j)})}}$$

aient pour limite, lorsque i restant fixe, $\nu^{(j)}$ augmente indéfiniment : zéro, pour $i < l$; *un*, pour $i = l$; un nombre fini B_i pour $i > l$. Alors, les coefficients du polynome

$$\frac{P_{(\nu^{(j)})}(z)}{a_l^{(\nu^{(j)})}} = Q_j(z)$$

auront respectivement pour limites

$$0,\quad 0,\quad \ldots,\quad 0,\quad 1,\quad B_{l+1},\quad B_{l+2},\quad \ldots,\quad B_m,$$

et, par conséquent, la suite des polynomes $Q_j(z)$ convergera uniformément, dans toute région finie, vers le polynome

$$Q_0(z) = z^{m-l} + B_1 z^{m-l-1} + \ldots + B_m.$$

Ce polynome n'est jamais identiquement nul. D'ailleurs, la suite des polynomes $Q_j(z)$ a les mêmes zéros que la suite des polynomes $P_{\nu(j)}(z)$ et il en est de même pour leurs dérivées.

En particulier, si les polynomes $P_n(z)$ sont de degré inférieur ou égal à m, réels sur l'axe réel, nuls pour $z = \pm 1$, il en sera de même pour les polynomes $Q_j(z)$ et pour le polynome $Q_0(z)$. Et, comme le polynome $P_0(z)$ peut être choisi non identiquement nul, et que le polynome $Q_0(z)$ ne l'est en aucun cas, on voit qu'on pourra extraire de la suite $P_n(z)$ une suite partielle $P_{n_i}(z)$ telle que la suite $\lambda_i P_{n_i}(z)$, dans laquelle λ_i peut être égal à un, converge uniformément.

Il suffit alors de répéter les raisonnements des paragraphes précédents pour s'assurer que les résultats en demeurent valables pour les polynomes de degré borné. En particulier :

Si un polynome réel, de degré inférieur ou égal à m, s'annule pour $z = +1$ et pour $z = -1$, sa dérivée a toujours un zéro réel dans l'intervalle $[-\theta(m), +\theta(m)]$ intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$.

Le nombre $\theta(m)$, inférieur à l'unité, croît avec m. Nous allons en établir quelques propriétés.

6. Montrons d'abord que l'on a

$$\theta(2p-1) = \theta(2p),$$

p désignant un entier.

Soit en effet $P(x)$ un polynome de degré $2p$, écrivons

$$P(x) = Q(x) + R(x),$$

$Q(x)$ contenant les termes de degrés pairs; $R(x)$, les termes de degrés impairs : $R(x)$ est de degré $2p-1$ au plus. La dérivée $R'(x)$ a donc toujours des racines α et $-\alpha$ dans l'intervalle

$$[-\theta(2p-1), \quad \theta(2p-1)].$$

Or,

$$P'(x) = Q'(x) + R'(x)$$

donne

$$P'(\alpha)P'(-\alpha) \leq 0.$$

donc $P'(x)$ a une racine au moins dans l'intervalle précédent. Par conséquent,

$$\theta(2p) \leqq \theta(2p-1).$$

et, comme évidemment,

$$\theta(2p) \geqq \theta(2p-1),$$

on a, nécessairement,

$$\theta(2p) = \theta(2p-1).$$

Nous pouvons donc nous borner, par exemple, à l'étude des polynomes de degrés impairs. Soit maintenant θ' la valeur de la limite de l'intervalle lorsqu'on se borne à des polynomes dont tous les termes ont un degré impair; en reprenant le raisonnement précédent, on démontre de la même manière que θ' est égal à θ.

On peut donc se borner, pour le calcul de $\theta(m)$ à des polynomes dont tous les termes sont de degré impair.

7. Considérons en particulier le polynome

$$P(x) = (z^2-1)(z^{2p-1}+\varepsilon z).$$

On a

$$P'(x) = z^{2p-2}[(2p+1)z^2-(2p-1)]+\varepsilon(3z^2-1);$$

et, en posant $z^2=t$, les zéros de la dérivée vérifient l'équation

$$t^{p-1}[(2p+1)t-(2p-1)]+\varepsilon(3t-1)=0.$$

Pour $\varepsilon=0$, cette équation a $n-1$ racines nulles et la racine $\frac{2p-1}{2p+1}$. Lorsque ε est positif et voisin de zéro, elle a une racine simple voisine de $\frac{2p-1}{2p+1}$ et, suivant la parité de n, une ou aucune racine voisine de zéro. S'il y en a une, elle est négative. Par conséquent, l'équation précédente n'a, si ε est assez petit, aucune racine intérieure au sens étroit à l'intervalle $\left(0, \frac{2p-1}{2p+1}\right)$. On en déduit

$$\theta(2p+1) \geqq \sqrt{\frac{2p-1}{2p+1}}.$$

Donc, $\theta(m)$ a pour limite l'unité, lorsque m augmente indéfiniment et l'inégalité précédente qui peut s'écrire

$$\theta(2p+1) \geqq 1-\frac{1}{2p}+\ldots.$$

montre que

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\, m[1-\theta(m)] \leq 1;$$

ce qui limite inférieurement l'ordre de décroissance de $1-\theta$.

Il y aurait intérêt à déterminer la valeur asymptotique de $\theta(m)$ lorsque m est très grand.

8. Indiquons quelques valeurs particulières de $\theta(m)$.

Pour $m=3$, il suffit de considérer un polynome du troisième degré impair, c'est-à-dire

$$P(z) = z(z^2-1).$$

La dérivée

$$P'(z) = 3z^2-1,$$

a ses zéros fixes et égaux à $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; donc

$$\theta(3) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577.$$

Ce résultat a été obtenu antérieurement par M. Pompeiu ([1]) qui a rappelé l'attention sur les problèmes de cette nature. On sait d'ailleurs, d'après le théorème de Grace, que pour tout polynome du troisième degré s'annulant pour $z=\pm 1$, la dérivée à une racine de module inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

On a aussi, d'après la remarque du paragraphe 6,

$$\theta(4) = \theta(3) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pour $m=5$, il suffit de considérer le polynome

$$P(z) = (z^2-1)(z^3+az)$$

pour lequel

$$P'(z) = z^2(5z^2-3)+a(3z^2-1).$$

([1]) D. Pompeiu, *Sur le théorème des accroissements finis* (*Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, t. XV, fasc. 3, 4, p. 335). *Sur le théorème des accroissements finis* (*Bulletin de la Société des sciences de Cluj*, t. IV, p. 245).

Voir aussi E. Abason, *Sur le théorème des accroissements finis* (*Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest*, 1929, n° 1, p. 4).

Posons encore $z^2 = t$ et considérons l'équation

$$\varphi(t) = t(5t-3) + a(3t-1) = 0,$$

on a

$$\varphi(0)\,\varphi\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}a^2 \leqq 0.$$

Cette équation a toujours une racine dans l'intervalle $\left(0, \frac{3}{5}\right)$; donc

$$\theta(5) = \theta(6) \leqq \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.774;$$

or, d'après la remarque du paragraphe précédent, on a

$$\theta(5) \geqq \sqrt{\frac{3}{5}};$$

donc

$$\theta(5) = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (^1).$$

9. Lorsque m dépasse 6, la détermination de $\theta(m)$ est un peu moins simple. Prenons $m = 7$; nous devons étudier le polynome

$$P(z) = z^5(z^2-1) + az^3(z^2-1) + bz(z^2-1),$$

dont la dérivée est

$$P'(z) = z^4(7z^2-5) + az^2(5z^2-3) + b(3z^2-1).$$

En posant $z^2 = t$, on est conduit à la recherche des racines positives de l'équation

$$(1) \qquad \varphi(t) = t^2(7t-5) + at(5t-3) + b(3t-1) = 0.$$

D'après ce que nous avons dit, au paragraphe 5, sur la famille des polynomes $P(x)$, il existe nécessairement un polynome particulier $P(x)$ pour lequel la dérivée admet les racines $\pm\theta$, et par conséquent, $\varphi(t)$ admet la racine θ^2.

Considérons un polynome $P(x)$ et soit α la racine positive simple de $\varphi(t) = 0$ la plus voisine de zéro. On pourra toujours donner à α une valeur plus grande correspondant à un polynome

---

(1) Ce résultat a été récemment obtenu par M. E. Abason, *Sur le théorème des accroissements finis* (*Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest*, n° 3, 1930, p. 143).

voisin, à moins que, pour la première valeur α, $\varphi(t)$ admette ou la racine zéro, ou une racine double inférieure à α. Car, dans chacun de ces cas, pour un polynome voisin correspondant à une valeur plus grande de α, $\varphi(t)$ pourra avoir un zéro intérieur à l'intervalle $(0, \alpha)$. Par conséquent, l'équation limite correspondra certainement soit au cas où $\varphi(t)$ s'annule pour t nul, soit au cas où $\varphi(t)$ a un zéro double.

Dans le premier cas, on a $b = 0$ et

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \varphi_1(t) = t(7t - 5) + a(5t - 3).$$

Or

$$\varphi_1(0)\,\varphi_1\left(\frac{5}{7}\right) = -\frac{12}{7}a^2 \leqq 0.$$

L'équation a toujours une racine inférieure ou égale à $\frac{5}{7}$, ce qui conduirait à la limite $\frac{5}{7}$.

Dans le second cas, soient α la racine simple et β la racine double. Les racines de l'équation (1) vérifient toujours la relation

$$\text{(2)} \qquad S_3 - \frac{1}{3}S_2 + \frac{1}{5}S_1 - \frac{1}{7} = 0,$$

en désignant par S_1, S_2, S_3 les fonctions symétriques élémentaires des racines. Cette relation donne ici

$$\alpha = \frac{\frac{\beta^2}{3} - \frac{2\beta}{5} + \frac{1}{7}}{\frac{\beta^2}{1} - \frac{2\beta}{3} + \frac{1}{5}}.$$

α est toujours positif et atteint son maximum lorsque

$$\alpha = \frac{\frac{\beta}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{\beta}{1} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{\beta}{5} - \frac{1}{7}}{\frac{\beta}{3} - \frac{1}{5}}.$$

α et β vérifient alors la même équation

$$35\alpha^2 - 30\alpha + 3 = 0.$$

α est la plus grande racine de cette équation et β la plus petite.

L'équation correspondante est

$$7(t-\alpha)(t-\beta)^2 = \left(7t^2 - 6t + \frac{3}{5}\right)\left(t - \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}\right) = 0$$

avec

$$\alpha = \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}, \qquad \beta = \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}.$$

Montrons que cette valeur de α, supérieure à $\frac{5}{7}$, est bien la valeur de θ^2. Il suffit de montrer qu'il existe un polynome $\varphi(t)$ admettant une racine réelle unique γ voisine de α. Déterminons pour cela le nombre ε de façon que l'équation (1) admette les racines $\beta \pm i\varepsilon$ et γ. Il suffit que ces nombres vérifient la relation (2) pour qu'on puisse déterminer a et b. On obtient ainsi la condition

$$\left(\gamma - \frac{1}{3}\right)\varepsilon^2 + \gamma\left(\frac{\beta^2}{1} - \frac{2\beta}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{\beta^2}{3} - \frac{2\beta}{5} + \frac{1}{7}\right) = 0.$$

Or, pour $\gamma = \alpha$, le terme indépendant de ε^2 est nul, il est négatif pour γ voisin de α et inférieur à lui. On obtient alors pour ε^2 une valeur positive et l'on en déduit le polynome $P(z)$ correspondant.

On a donc

$$\theta(7) = \theta(8) = \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}} = 0,860.$$

Soit encore $m = 9$, et le polynome

$$P(z) = z^7(z^2 - 1) + az^5(z^2 - 1) + bz^3(z^2 - 1) + cz(z^2 - 1).$$

On a

$$P'(z) = z^6(9z^2 - 7) + az^4(7z^2 - 5) + bz^2(5z^2 - 3) + c(3z^2 - 1),$$

d'où l'on déduit, en posant encore $z^2 = t$, l'équation

$$(3) \qquad \varphi(t) = t^3(9t - 7) + at^2(7t - 5) + bt(5t - 3) + c(3t - 1) = 0,$$

dont les racines vérifient la condition

$$(4) \qquad S_4 - \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{5}S_2 - \frac{1}{7}S_1 + \frac{1}{9} = 0,$$

S_1, S_2, S_3, S_4 étant les fonctions symétriques élémentaires des quatre racines. Réciproquement, si l'on choisit quatre nombres vérifiant cette condition, il existe un polynome $P(z)$ dont la dérivée a pour zéros les racines carrées des nombres choisis.

Cherchons à déterminer le polynome $\varphi(t)$ fournissant la limite θ^2 de l'intervalle : on verrait comme précédemment que, ou bien $\varphi(t)$ a une racine double, ou bien $\varphi(t)$ admet la racine zéro.

Dans le premier cas, soient β la racine double, α et γ les autres racines, nécessairement simples puisque l'une des racines est toujours d'ordre de multiplicité impair. La plus petite racine α ne peut fournir la limite que si l'autre racine est nulle, sinon, on pourrait prendre pour α une valeur plus grande, la relation (4) étant toujours vérifiée. Le maximum n'est donc fourni que par un polynome $\varphi(t)$ ayant une racine double et une autre égale à zéro.

Dans le second cas, soient α, β, γ les autres racines, α étant la plus petite racine positive. α ne peut donner le maximum que si l'une des autres racines est nulle et nous sommes ramenés au cas précédent, ou s'il apparaît une racine double entre o et α et nous sommes encore ramenés au cas précédent.

Dans tous les cas, on voit que l'équation (3) doit toujours avoir une racine double β et la racine zéro. La condition (4) donne alors

$$\alpha = \frac{\frac{\beta^2}{5} - \frac{2\beta}{7} + \frac{1}{9}}{\frac{\beta^2}{3} - \frac{2\beta}{5} + \frac{1}{7}},$$

et il faut chercher le maximum de α. On voit, comme dans le cas précédent, que α et β vérifient la même équation

$$63\alpha^2 - 70\alpha + 15 = 0,$$

α est la plus grande racine, β la plus petite. Donc

$$\alpha = \frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}, \qquad \beta = \frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}.$$

L'équation (3) devient alors

$$9t(t-\alpha)(t-\beta)^2 = t\left(9t^2 - 10t + \frac{15}{7}\right)\left(t - \frac{35 - 2\sqrt{70}}{63}\right).$$

On démontrerait comme précédemment qu'on peut déterminer deux nombres ε et ε', le dernier positif, de façon que l'équation (3) admette les racines $\beta \pm i\varepsilon$, $-\varepsilon'$, γ; γ étant aussi voisin de α qu'on le veut. Le polynome correspondant donne un polynome $\varphi(t)$ n'ayant qu'une racine dans l'intervalle $(0, \alpha)$, aussi voisine que l'on veut de α.

Par conséquent,

$$\theta(9) = \theta(10) = \sqrt{\frac{35 + 2\sqrt{70}}{63}} = 0{,}905.$$

Pour des valeurs plus grandes de m, le nombre θ^2 serait déterminé par des équations de degrés trois, quatre, etc.

10. Pour chaque famille particulière de polynomes de degré inférieur ou égal à m, il existe une limite $\theta_1(m)$, inférieure ou égale à $\theta(m)$, qui, dans certains cas, peut être aisément obtenue [1].

Nous allons étudier un de ces cas. Auparavant, nous établirons le lemme suivant :

Soit a un zéro du polynome $P(z)$ de degré m : la dérivée $P'(z)$ ne peut s'annuler à l'intérieur d'un cercle de centre a et de rayon $\frac{d}{m}$, d désignant la distance de a à l'un des zéros le plus voisins.

Soient b, c, ..., l les autres zéros de $P(z)$ et b l'un des zéros le plus voisins de a. Nous aurons

$$|b-a| = d, \qquad |c-a| \geqq d, \qquad \ldots, \qquad |l-a| \geqq d.$$

Soit ξ un zéro de $P'(z)$ situé à une distance de a inférieure à d : il suffit évidemment de démontrer la proposition pour de tels zéros. On peut écrire

$$\begin{aligned}
|b-c| &> |b-a| - |\xi-a| = d - |\xi-a|,\\
|c-c| &> |c-a| - |\xi-a| \geqq d - |\xi-a|,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
|l-c| &> |l-a| - |\xi-a| \geqq d - |\xi-a|.
\end{aligned}$$

Or, ξ vérifie l'équation

$$\frac{1}{\xi-a} + \frac{1}{\xi-b} + \ldots + \frac{1}{\xi-l} = 0.$$

---

(1) *Voir* E. Abason. *Sur le théorème des accroissements finis* (*Bulletin de l'École Polytechnique de Bucarest*, n° 2, 1929, p. 81).

Donc,

$$\frac{1}{|\xi - a|} \leqq \frac{1}{|b-\xi|} + \frac{1}{|c-\xi|} + \ldots + \frac{1}{|\xi - l|} \leqq \frac{m-1}{d-|\xi-a|};$$

d'où l'on déduit

$$|\xi - a| \geqq \frac{d}{m}.$$

La limite est atteinte pour le polynome

$$P(z) = (z-a)(z-b)^{m-1}.$$

Nous avons dû supposer que d désigne la distance du zéro a à l'un des zéros le plus voisins de a. Dans certains cas, cette restriction peut être levée.

Supposons, par exemple, que $P(z)$ ait toutes ses racines réelles et que a et b désignent deux racines consécutives : soit x une racine réelle de $P'(z)$ située dans l'intervalle (a, b), au sens étroit. Nous pourrons encore écrire

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-c} + \ldots + \frac{1}{x-h} = \frac{1}{b-x} + \frac{1}{k-x} + \ldots \frac{1}{l-x},$$

en mettant dans le premier membre les racines $c, d, \ldots, h$ situées à gauche de a, et dans le second membre, les racines $k, \ldots, l$ situées à droite de b. Comme tous les nombres $x-c$, $x-d$, $\ldots$, $x-h$ sont positifs et les nombres $k-x$, $\ldots$, $l-x$ inférieurs ou égaux à $b-x$, on a

$$\frac{1}{x-a} \leqq \frac{m-1}{b-x},$$

d'où

$$x - a > \frac{b-a}{m}.$$

Le résultat est encore le même si $P(z)$ a ses coefficients réels et si aucune racine n'a sa partie réelle comprise entre a et b. En effet, récrivons la même équation en plaçant dans le premier membre les racines dont la partie réelle est inférieure ou égale à a, et dans le second membre les racines dont la partie réelle est supérieure ou égale à b. Si c n'est pas réel et égal à $\alpha + i\beta$, on aura dans le premier membre la somme

$$\frac{1}{x-\alpha-i\beta}+\frac{1}{x-\alpha+i\beta}=\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

qui est positive ou nulle.

Si k n'est pas réel et égal à $\gamma+i\delta$, on aura dans le second membre la somme

$$\frac{1}{\gamma-x+i\delta}+\frac{1}{\gamma-x-i\delta}=\frac{2(\gamma-x)}{(\gamma-x)^2+\delta^2}<\frac{2}{\gamma-x}.$$

On pourra donc répéter le raisonnement et aboutir à la même conclusion. Ainsi :

Lorsque le polynome $P(z)$, *de degré inférieur ou égal à* m, *a ses coefficients réels, si* a *et* b *désignent deux racines réelles consécutives de ce polynome, telles qu'aucune autre racine n'ait sa partie réelle comprise entre* a *et* b, *la dérivée* $P'(z)$ *n'a aucune racine réelle dans les intervalles* $\left(a, a+\frac{b-a}{m}\right)$ *et* $\left(b-\frac{b-a}{m}, b\right)$.

Il en est en particulier ainsi lorsque $P(z)$ a toutes ses racines réelles comme l'a montré Laguerre.

Considérons alors les polynomes $P(z)$, du type précédent, admettant -1 et $+1$ comme racines réelles consécutives. On a ici

$$\theta_1(m)=1-\frac{1}{m},$$

car la limite est atteinte pour le polynome $(z+1)(z-1)^{m-1}$.

On en déduit

$$\theta(m)\geqq\theta_1(m)=1-\frac{1}{m},$$

limite inférieure meilleure que celle du paragraphe 7.

11. Supposons que la fonction $f(z)$, du type toujours considéré dans ce travail, s'annule pour une valeur a de l'intervalle $(-1, +1)$. La dérivée $f'(z)$ aura une racine ξ_1 dans l'intervalle $(-1, a)$ et une racine ξ_2 dans l'intervalle $(a, +1)$. La racine ξ_1, placée à gauche de a, peut être supposée, comme nous le savons, à une distance de a supérieure ou égale à $(1-\theta)\frac{(1+a)}{2}$; la racine ξ_2 pourra être prise à une distance de a supérieure ou égale à $(1-\theta)\frac{(1-a)}{2}$, la distance $\xi_2-\xi_1$ est donc supérieure ou égale à $1-\theta$. Ainsi : *il y a toujours deux racines de la dérivée dont la distance est supérieure à un nombre fixe* δ, *indépendant de* a. Nous verrons que ce nombre δ n'est pas nécessairement $1-\theta$. Les mêmes résultats s'appliquent aux polynomes $P(z)$ de degrés inférieurs ou égaux à un nombre fixe.

Considérons, par exemple, un polynome du troisième degré

$$P(z) = z^3 - az^2 - az - 1,$$

s'annulant pour z égal à -1, a, $+1$,

$$P'(z) = 3z^2 - 2az - 1;$$

donc,

$$\xi_1\xi_2 = -\frac{1}{3}.$$

Par conséquent, le minimum de la distance de ξ_2 et ξ_1 aura lieu lorsque

$$\xi_2 = -\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Alors

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

et $a = 0$. Cette valeur $\delta(3)$ est supérieure à

$$1 - 0(3) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Soit encore un polynome du quatrième degré

$$P(z) = (z^2-1)(z-a)(z-b),$$

s'annulant pour -1, a, $+1$ et b. L'équation

$$P'(z) = 4z^3 - 3(a+b)z^2 + 2(ab-1)z + a + b = 0$$

a des racines ξ_1, ξ_2, ξ_3 vérifiant la relation

$$3\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0.$$

Réciproquement, étant donnés trois nombres réels vérifiant cette relation, on peut calculer $a+b$ et ab de façon que ces trois nombres soient les racines de $P'(z)$; mais il sera nécessaire que les nombres a et b soient réels pour que $P(z)$ appartienne au type considéré.

La dernière relation peut s'écrire, si $\xi_3 \neq 0$,

$$(3\xi_3\xi_1+1)(3\xi_3\xi_2+1) = 1-3\xi_3^2$$

ou

$$\left(\xi_1+\frac{1}{3\xi_3}\right)\left(\xi_2+\frac{1}{3\xi_3}\right) = \frac{1-3\xi_3^2}{9\xi_3^2}. \tag{5}$$

Si $|\xi_3| > 1$, le minimum de la distance $|\xi_2-\xi_1|$ a lieu lorsque le milieu du segment (ξ_1, ξ_2) coïncide avec le point $-\frac{1}{3\xi_3}$; on a alors

$$|\xi_2-\xi_1| = 2\frac{\sqrt{3\xi_3^2-1}}{3|\xi_3|} \geqq \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

La valeur $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ est d'ailleurs atteinte pour $\xi_3=1$, $a=1$, $b=-\frac{5}{9}$. Le polynome est alors

$$P(z) = (z+1)(z-1)^2\left(z+\frac{5}{9}\right)$$

et

$$P'(z) = (z-1)\left(z+\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)\left(z+\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right).$$

Si l'on donne à ξ_3 une valeur voisine de 1 et supérieure à 1, on obtiendra un polynome $P(z)$ pour lequel les deux zéros ξ_1 et ξ_2, intérieurs à l'intervalle $(-1, +1)$, ont une distance voisine de $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Supposons maintenant $|\xi_3| \leqq 1$; avec cette hypothèse, les nombres ξ_1 et ξ_2 vérifiant la relation (5) peuvent être égaux, mais il est facile de voir que, dans ce cas, a et b ne seraient pas réels. Donc, le minimum de leur distance aura lieu lorsque a et b sont égaux; alors, l'un des nombres ξ est égal à a et l'on a

$$\frac{1}{2}P'(z) = (z-a)(2z^2-az-1).$$

Les racines du trinome ont une différence égale à

$$\frac{\sqrt{a^2+8}}{2} \geqq \frac{3}{2} > \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Donc, la valeur de $\delta(4)$ est $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. On a encore

$$\delta(4) > 1 - \theta(4) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

12. Pour nous permettre l'extension du résultat précédent au cas où $f(z)$ admet plusieurs racines dans l'intervalle $(-1, +1)$, nous en donnerons une démonstration différente qui pourra aisément être généralisée.

Si le nombre δ, positif, n'existait pas, on pourrait, quel que soit l'entier n, trouver une fonction $f_n(z)$ admettant, entre -1 et $+1$, le zéro a_n et telle que tous les zéros de $f'_n(z)$ intérieurs à cet intervalle soient contenus dans un intervalle de longueur $\frac{1}{n}$. De la suite $f_n(z)$, extrayons une suite partielle $f_{n_k}(z)$, convergeant uniformément vers une fonction limite $f_0(z)$ non identiquement nulle et telle que a_{n_k} ait une limite a_0. La fonction $f_0(z)$ est nulle aux points $(-1, a_0, +1)$. Si a_0 coïncide avec une extrémité, $+1$ par exemple, $+1$ est un zéro double de $f_0(z)$, puisque $f'_0(+1)$ est égal à zéro, car $f'_{n_k}(z)$ a un zéro compris entre a_{n_k} et $+1$.

Or, $f'_0(z)$ a une racine ξ_1, d'ordre impair, dans l'intervalle $(-1, a_0)$, et une racine ξ_2 d'ordre impair dans l'intervalle $(a_0, +1)$. Si $a_0 = +1$, ξ_2 est aussi égal à $+1$. Soit δ_0 la distance non nulle $\xi_2 - \xi_1$. Lorsque k est assez grand, $f'_{n_k}(z)$ a une racine réelle voisine de ξ_1 et une racine réelle voisine de ξ_2; la distance de ces racines est voisine de δ_0 : elle ne peut donc être inférieure à $\frac{1}{n_k}$, si k est assez grand. Cette contradiction démontre le théorème.

13. Supposons maintenant que $f(z)$ admette deux racines a et b dans l'intervalle $(-1, +1)$. Alors $f'(z)$ admet au moins trois racines dans cet intervalle et $f''(z)$ admet au moins deux racines. Un raisonnement tout à fait semblable à celui que nous venons de faire permet de montrer que :

1° $f(z)$ admet au moins deux racines réelles contenues dans l'intervalle $(-1, +1)$ dont la distance reste supérieure à un nombre positif fixe quelles que soient la fonction $f(x)$ et la position des zéros a et b;

2° $f''(z)$ admet au moins deux zéros réels contenus dans l'intervalle $(-1, +1)$ dont la distance reste, dans les mêmes conditions, supérieure à un nombre positif fixe.

Les mêmes résultats sont applicables à des polynomes de degré borné par m. Prenons, par exemple, $m = 4$. Le polynome

$$P(z) = (z^2 - 1)(z - a)(z - b)$$

a pour dérivées

$$P'(z) = 4z^3 - 3(a + b)z^2 + 2(ab - 1)z + a + b,$$
$$\frac{1}{2}P''(z) = 6z^2 - 3(a + b)z + ab - 1.$$

Nous avons vu, au paragraphe 11, que $P'(z)$ a toujours deux racines dont la distance est supérieure ou égale à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ qui sont intérieures au segment $(-1, +1)$ et que cette limite est atteinte.

Soient ζ_1 et ζ_2 les deux zéros de $P''(z)$; on a la relation immédiate

$$\left(\zeta_1 - \frac{a}{3}\right)\left(\zeta_2 - \frac{a}{3}\right) = -\frac{a^2 + 3}{18}.$$

La distance de ζ_1 et ζ_2 est donc supérieure à

$$2\sqrt{\frac{a^2 + 3}{18}} \geqq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Cette limite est atteinte pour le polynome $z^2(z^2 - 1)$.

14. Des raisonnements tout à fait analogues aux précédents permettraient d'établir le théorème général suivant :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe du type considéré ou un polynome de degré borné, admettant $p - 1$ racines réelles contenues dans l'intervalle $(-1, +1)$ ainsi que les racines -1 et $+1$:

Les dérivées $f'(z), f''(z), \ldots, f^{(p-1)}(z)$ admettent respectivement deux racines réelles au moins dans l'intervalle $(-1, +1)$, dont la distance reste supérieure à un nombre positif fixe, quelles que soient la fonction et la position des $p - 1$ racines intérieures au segment $(-1, +1)$.

15. Reprenons le cas correspondant à $p = 3$. La fonction $f(z)$ a deux zéros a et b situés dans l'intervalle $(-1, +1)$. Soient ξ_1 et

ξ_2 les deux zéros de $f'(z)$ situés dans cet intervalle et dont la distance reste supérieure à δ; ces nombres varient entre -1 et $+1$, donc, d'après un résultat établi au paragraphe 4, la fonction $f''(z)$ a un zéro réel ζ situé dans un intervalle $(-\vartheta, +\vartheta)$ intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$. De même, $f''(z)$ a deux zéros ζ_1 et ζ_2, situés dans l'intervalle $(-1, +1)$ dont la distance reste supérieure à δ'; donc, pour la même raison, $f'''(z)$ a un zéro situé dans un intervalle intérieur à $(-1, +1)$.

Dans le cas des polynomes de degré borné, ces limites sont des nombres algébriques. Prenons, par exemple, des polynomes $P(z)$ du quatrième degré. Nous avons vu, au paragraphe 13, qu'une des racines ζ est comprise dans l'intervalle

$$\left(\frac{a}{3}-\sqrt{\frac{a^2+3}{18}}, \quad \frac{a}{3}+\sqrt{\frac{a^2+3}{18}}\right).$$

On a donc

$$|\zeta| \leqq \frac{|a|}{3}+\sqrt{\frac{a^2+3}{18}} \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

Cette limite est atteinte pour le polynome

$$P(z) = (z+1)(z-1)^2\left(z-\frac{1}{3}\right).$$

On a donc

$$\vartheta(4) = \frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

Pour la dérivée troisième, on a

$$\frac{1}{6}P'''(z) = 4z-(a+b),$$

donc, $|z| \leqq \frac{1}{2}$, limite atteinte pour le polynome

$$P(z) = (z+1)(z-1)^3.$$

On voit qu'il est possible de démontrer le théorème général suivant :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe du type considéré ou un polynome de degré fixe, admettant $p-1$ racines réelles contenues dans l'intervalle $(-1, +1)$ ainsi que les racines $(-1, +1)$:

Les dérivées $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots, f^{(p)}(z)$ admettent respectivement une racine réelle au moins située dans un inter-

valle intérieur à $(-1, +1)$ *indépendant de la fonction et de la position de ses racines.*

16. Plus généralement, supposons que $f(z)$ admette, dans l'intervalle $(-1, +1)$, $p-1$ racines réelles dont $q-1$ sont fixes et $p-q$ variables, ainsi que les racines -1 et $+1$. La première partie des conclusions précédentes sera alors modifiée de la manière suivante, si $p > q$:

Les dérivées $f'(z), f''(z), f'''(z), \ldots, f^{(p-q)}(z)$ *admettent respectivement* $q+1$ *racines réelles au moins dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *dont les distances mutuelles restent supérieures à un nombre positif fixe.*

Pour indiquer la marche de la démonstration, considérons, par exemple, le cas où $q=2$; il y a une racine fixe a dans l'intervalle $(-1, +1)$. Démontrons que $f'(z)$, par exemple, a au moins trois racines comprises entre -1 et $+1$ limitant des segments dont la longueur reste supérieure à un nombre positif fixe.

Dans le cas contraire, il existerait une fonction $f_n(z)$, du type considéré, telle que tout groupe de trois zéros de $f'(z)$ situés dans l'intervalle $(-1, +1)$ limiterait un segment au moins de longueur inférieure à $\frac{1}{n}$, n désignant un entier arbitraire. On peut extraire de la suite $f_n(z)$ une suite $f_{n_k}(z)$ convergeant vers $f_0(z)$ telle que les $p-2$ racines $b, c, \ldots, l$ aient des positions limites $b_0, c_0, \ldots, l_0$. Comme p est supérieur à 2, il y a au moins une racine $b_0, c_0, \ldots, l_0$ à l'intérieur de $(-1, +1)$ au sens étroit, ou bien -1 ou $+1$ est un zéro multiple de $f_0(z)$. Dans les deux cas, $f'_0(z)$ a un groupe au moins de trois racines situées au sens large dans l'intervalle $(-1, +1)$. Soit δ le plus petit des segments qu'elles déterminent. Lorsque k est assez grand, $f'_{n_k}(z)$ possède un groupe de trois zéros voisins des zéros précédents : cela est évident, si les racines de $f_0(z)$ sont intérieures au sens étroit à l'intervalle $(-1, +1)$, car elles sont d'ordre impair; et, si une de ces racines coïncide avec -1, ou $+1$, $f_{n_k}(z)$ a une racine voisine de cette extrémité, donc aussi $f'_{n_k}(z)$. Dans tous les cas, chacun des segments déterminés par les trois racines considérées a une longueur voisine de δ ou d'un nombre supérieur à δ, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur les fonctions $f_n(z)$. La proposition est donc établie.

17. Les résultats que nous avons obtenus s'appliquent à toute fonction $F(z')$, prenant, pour $z'=a$ et $z'=b$, des valeurs fixes $F(a)$ et $F(b)$, et possédant les propriétés indiquées au début dans un domaine contenant les points a et b. Il suffit de remplacer $F(z')$ par

$$F(z')-F(a)-(z'-a)\frac{F(b)-F(a)}{b-a},$$

et z' par

$$\frac{b-a}{2}z+\frac{b+a}{2},$$

pour être ramené à une fonction $f(z)$ du type considéré dans ce travail. Les zéros réels de la dérivée $f'(z)$ correspondent aux points où la tangente à la courbe représentative de $F(z')$, lorsque z' est réel, est parallèle à la corde limitée aux points d'abscisses a et b. Les intervalles (a, b) sont réduits dans les rapports θ trouvés précédemment et remplacés par des intervalles concentriques. Ces nombres θ ne dépendent pas de l'angle des axes de coordonnées : ce fait s'explique aisément par des considérations géométriques simples.

18. Les résultats obtenus pour les polynomes peuvent être étendus à des combinaisons linéaires de fonctions analytiques, holomorphes dans un même domaine contenant un segment de l'axe réel, et réelles lorsque la variable est réelle. Le cas des polynomes correspond à la suite

$$1,\quad z,\quad z^2,\quad \ldots,\quad z^m,\quad \ldots.$$

Prenons par exemple des suites finies de Fourier d'ordre m au plus et nulles pour $x=\pm\frac{\pi}{2}$ On démontre aisément, en suivant la méthode du paragraphe 6, que le nombre $\theta(m)$ correspondant à une telle suite demeure le même lorsqu'on se borne à des suites de sinus.

Les premières valeurs de ce nombre sont :

$$\theta(2)=\frac{1}{2},\qquad \theta(3)=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{6}.$$