BULLETIN DE LA S. M. F.

C. BIOCHE

Sur les hexagones de Pascal

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 90-99

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__90_0>

SUR LES HEXAGONES DE PASCAL;

Par M. Ch. Bioche.

1. Remarques préliminaires. — La configuration formée par les droites de Pascal qui correspondent aux 60 hexagones ayant pour sommets six points d'une conique a été étudiée par divers géomètres, dont certains particulièrement éminents. Mais il ne semble pas qu'aucun d'eux se soit demandé s'il y avait 60 droites de Pascal distinctes. Pourtant il est facile de constater que, si parmi les hexagones il y en a un qui est régulier, le nombre des droites de Pascal s'abaisse à 46.

Si un hexagone est régulier les 59 hexagones ayant les mêmes sommets que celui-ci se répartissent en *onze types*, les hexagones d'un même type étant égaux. Les onzes types sont donnés par le tableau des figures suivantes. Les hexagones des neuf premiers types se déduisent de l'un d'entre eux par des rotations de $\frac{\pi}{6}$ autour du centre de l'hexagone régulier; pour les hexagones des deux derniers types il faut, en outre des rotations, effectuer des retournements.

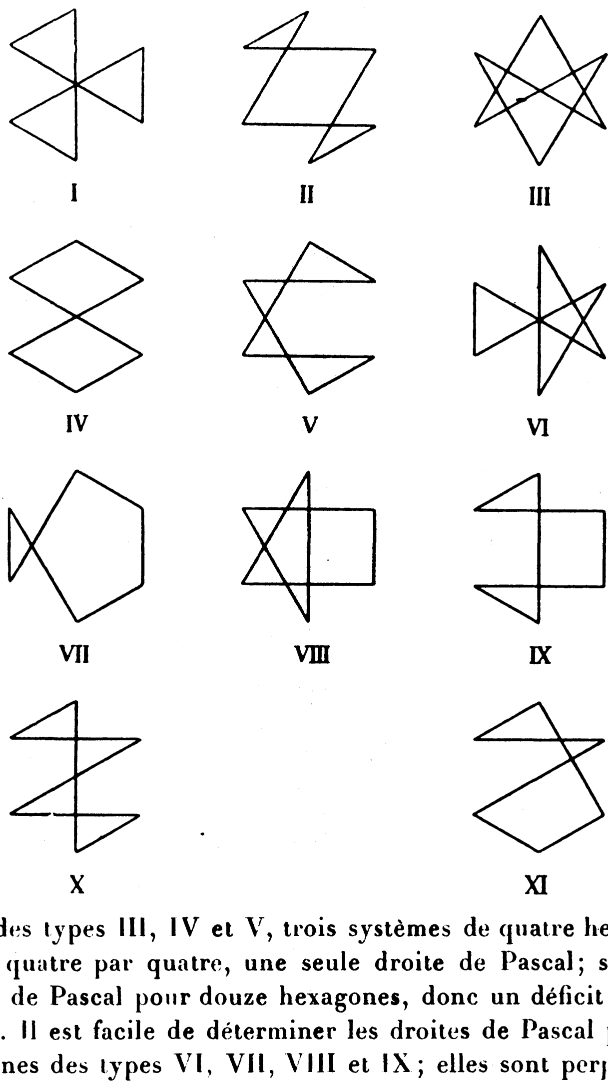
Il y a deux hexagones ayant trois axes de symétrie, type I.

Il y a neuf hexagones ayant deux axes de symétrie, ils appartiennent, par groupes de trois, aux types II, III, et IV. On voit facilement que les hexagones des types I et II ont, comme l'hexagone régulier, la droite de l'infini pour droite de Pascal. Cela fait une seule droite de Pascal pour six hexagones, donc un déficit de cinq droites.

Il y a trente hexagones ayant un seul axe de symétrie qui est perpendiculaire à deux côtés opposés de l'hexagone régulier. Ces hexagones appartiennent, par groupes de six, aux types V, VI, VII, VIII et IX.

Deux hexagones du type V, symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de l'hexagone régulier, ont leur axe de symétrie coïncidant avec celui d'un hexagone du type III et celui d'un hexagone du type IV. Ces quatre hexagones ont, en commun, cet axe de symétrie pour droite de Pascal. On a ainsi, avec les hexa-

Fig. 1.



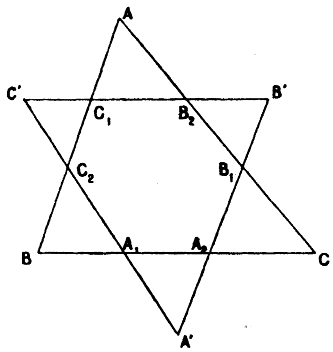
gones des types III, IV et V, trois systèmes de quatre hexagones ayant, quatre par quatre, une seule droite de Pascal; soit trois droites de Pascal pour douze hexagones, donc un déficit de neuf droites. Il est facile de déterminer les droites de Pascal pour les hexagones des types VI, VII, VIII et IX; elles sont perpendiculaires aux axes de symétrie de ces hexagone, à distance finie, et elles sont distinctes.

Il y a six hexagones ayant un centre de symétrie, type X, et enfin douze hexagones n'ayant ni centre, ni axe de symétrie. Ces hexagones ont des droites de Pascal distinctes. On obtient ainsi, en tout, 46 droites comme je le disais au début.

Je me suis proposé de chercher à quelles propriétés des hexagones inscrits dans une conique correspondait une diminution du nombre des droites de Pascal. Je vais donner les résultats que j'ai obtenus.

2. **Notations.** — Les côtés d'un hexagone de Pascal forment deux triangles homologiques dont l'axe d'homologie est la droite de Pascal. Soient ABC et A'B'C' ces deux triangles, je désignerai par A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, les sommets de l'hexagone que j'appellerai H pour abréger et que la figure ci-dessous représente dans le

Fig. 2.



cas où la droite de Pascal est à l'infini. Les sommets des hexagones déduits l'un de l'autre par une rotation de $\frac{\pi}{6}$ se déduisent, dans la rotation de ces hexagones, par permutation circulaire.

Si l'on prend ABC pour triangle de référence ses côtés seront données par les équations

$$(A_1 A_2) \qquad X = 0,$$
$$(B_1 B_2) \qquad Y = 0,$$
$$(C_1 C_2) \qquad Z = 0.$$

Et si l'on représente la droite de Pascal Δ par l'équation

$$(\Delta) \qquad X + Y + Z = 0,$$

les côtés du triangle A′B′C′ seront représentés par des équations telles que

$$
\begin{array}{ll}
(C_1B_2) & \alpha X + Y + Z = 0, \\
(A_1C_2) & X + \beta Y + Z = 0, \\
(B_1A_2) & X + Y + \gamma Z = 0.
\end{array}
$$

Le pôle d'homologie est alors déterminé par

$$(\alpha - 1)X = (\beta - 1)Y = (\gamma - 1)Z.$$

et l'équation de la conique K circonscrite à H est

$$(K) \quad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 + (1 + \beta\gamma)YZ + (1 + \gamma\alpha)ZX + (1 + \alpha\beta)XY = 0.$$

Les quinze droites qu'on obtient en joignant de toutes les façons possibles les sommets de l'hexagone H sont, outre les côtés de H dont les équations viennent d'être écrites, les neuf droites données par les équations

$$
\begin{array}{ll}
(B_1C_2) & X + \beta Y + \gamma Z = 0. \\
(C_1A_2) & \alpha X + Y + \gamma Z = 0, \\
(A_1B_2) & \alpha X + \beta Y + Z = 0, \\
(A_1B_1) & X + \beta\gamma Y + \gamma Z = 0, \\
(B_1C_1) & \alpha X + Y + \gamma\alpha Z = 0, \\
(C_1A_1) & \alpha\beta X + \beta Y + Z = 0, \\
(C_2A_2) & X + \beta Y + \beta\gamma Z = 0, \\
(A_2B_2) & \gamma\alpha X + Y + \gamma Z = 0, \\
(B_2C_2) & \alpha X + \alpha\beta Y + Z = 0.
\end{array}
$$

3. Cas dans lesquels Δ est droite de Pascal pour plusieurs hexagones. — Je reprends les hexagones qui, lorsque l'hexagone H qui a ses côtés sur ABC et A′B′C′ est régulier, ont **Δ** pour droite de Pascal.

Il y a deux hexagones du type I, à savoir,

$$A_1A_2C_1C_2B_1B_2, \quad A_2B_1C_2A_1B_2C_1.$$

Les équations des côtés du premier de ces hexagones peuvent s'écrire, en mettant sur la même ligne les équations de deux côtés opposés, et je ferai de même pour les autres hexagones

$$
\begin{array}{rr}
X = 0, & X + \beta Y + \gamma Z = 0, \\
\alpha X + Y + \gamma Z = 0, & Y = 0, \\
Z = 0, & \alpha X + \beta Y + Z = 0.
\end{array}
$$

La droite de Pascal de cet hexagone est la droite Δ_1

$$(\Delta_1) \qquad \alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0.$$

Les côtés du second hexagone du type I sont donnés par les équations

$$\begin{array}{ll} X + Y + \gamma Z = 0, & \alpha X + \beta Y + Z = 0, \\ X + \beta Y + \gamma Z = 0, & \alpha X + Y + Z = 0, \\ X + \beta Y + Z = 0, & \alpha X + Y + \gamma Z = 0, \end{array}$$

sa droite de Pascal est Δ_2

$$(\Delta_2) \qquad (\alpha + 1)X + (\beta + 1)Y + (\gamma + 1)Z = 0.$$

Il résulte immédiatement des formes des équations des droites Δ_1 et Δ_2 que ces droites, qui se coupent sur Δ quels que soient α, β et γ, coïncident, toutes deux en même temps, avec Δ quand on a

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Dans ce cas le pôle d'homologie des triangles ABC et A'B'C' est donné par

$$X = Y = Z,$$

c'est le pôle de la droite Δ par rapport au triangle de référence.

Chacune des égalités entre α, β et γ, prise isolément, a une signification simple et importante. Par exemple, la relation

$$\alpha = \beta$$

exprime que la droite

$$(A_1B_2) \qquad \alpha X + \beta Y + Z = 0,$$

qui joint deux sommets opposés de l'hexagone H, passe par le point commun aux côtés B_1A_2 et C_1C_2 de cet hexagone, de sorte qu'on obtient le résultat suivant : *si chacune des droites qui joignent deux sommets opposés d'un hexagone de Pascal passe par le point commun au couple de côtés opposés déterminé par les autres sommets, la droite de Pascal de cet hexagone est aussi droite de Pascal pour les deux hexagones dont trois côtés passent par des sommets opposés du premier.*

4. Considérons maintenant des hexagones correspondant au

type II; l'un de ceux-ci est $A_1 A_2 C_2 B_2 C_1 B_1$, dont les côtés sont donnés par les équations

$$\begin{array}{ll} X = 0, & \alpha X + Y + Z = 0, \\ X + \beta Y + \beta\gamma Z = 0, & \alpha X + Y + \gamma\alpha Z = 0, \\ \alpha X + \alpha\beta Y + Z = 0, & X + \beta\gamma Y + \gamma Z = 0. \end{array}$$

Les côtés qui constituent le premier couple se coupent toujours sur Δ; en exprimant qu'il en est ainsi pour les autres couples on trouve la condition

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 2\alpha\beta\gamma - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta + 1 = 0.$$

On obtient la même condition pour les autres hexagones du même type II. Cette condition exprime ainsi que les triangles ABC et A′B′C′ sont inscrits dans une même conique, ou encore que les droites

$$B_1 C_2, \quad C_1 A_2, \quad A_1 B_2$$

qui dans l'hexagone H et dans les trois hexagones du type II joignent les sommets opposés sont concourantes au pôle d'homologie de ABC et A′B′C′.

Cette condition étant aussi vérifiée lorsque ces hexagones sont circonscriptibles à des coniques on obtient le résultat suivant : *si un hexagone de Pascal est circonscriptible à une conique, sa droite de Pascal est aussi droite de Pascal pour les trois hexagones admettant les mêmes couples de sommets opposés.*

5. Les conditions trouvées dans les deux paragraphes précédents peuvent être réalisées en même temps; si l'on fait

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

on obtient, pour déterminer la valeur commune à ces paramètres, l'équation

$$2\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0.$$

Cette équation admet 1 comme racine double; il est clair que ce cas doit être écarté, car dans ce cas la conique K se réduirait à une droite double.

L'autre racine est $-\frac{1}{2}$. L'équation de la conique K circonscrite aux hexagones considérés peut s'écrire

$$2(X+Y+Z)^2-9(YZ+ZX+XY)=0,$$

ce qui montre que K est bitangente à la conique d'équation

$$YZ+ZX+XY=0,$$

qui est circonscrite aux triangles ABC et A′B′C′, les tangentes aux sommets de ces triangles coupant les côtés opposés sur Δ. D'ailleurs dans ce cas l'hexagone H peut se projeter, en perspective, suivant un hexagone régulier, ce qui permet de voir facilement toutes les propriétés de l'hexagone et des figures qui s'en déduisent.

6. Cas dans lesquels des droites de Pascal se confondent en dehors de Δ. — J'ai fait remarquer que, lorsque H est régulier il y a trois groupes de quatre hexagones ayant en commun un axe de symétrie qui est leur droite de Pascal. Je vais considérer les hexagones qui correspondent à ceux-ci dans le cas général.

Parmi ces hexagones il y en a qui ont pour côtés des côtés du triangle de référence et pour lesquels il est, par suite, facile de former l'équation de la droite de Pascal. Pour celui qui correspond au type IV quand l'axe de symétrie est CC′, les côtés opposés sont donnés par les équations

$$\begin{aligned} X&=0, & Y&=0,\\ \alpha X+Y+\gamma Z&=0, & X+\beta Y+\gamma Z&=0,\\ \alpha X+Y+Z&=0, & X+\beta Y+Z&=0, \end{aligned}$$

on voit immédiatement que la droite de Pascal a pour équation

$$(\alpha-1)X-(\beta-1)Y=0.$$

Pour celui des hexagones du type V qui appartient au groupe considéré et qui a deux côtés opposés appartenant au triangle de référence, les couples de côtés sont donnés par

$$\begin{aligned} X&=0, & Y&=0,\\ X+\beta Y+\beta\gamma Z&=0, & \alpha X+Y+\gamma\alpha Z&=0,\\ \alpha X+\alpha\beta Y+Z&=0, & \alpha\beta X+\beta Y+Z&=0. \end{aligned}$$

La droite de Pascal est donnée par

$$\alpha(\beta-1)X-\beta(\alpha-1)Y=0.$$

Elle se confond avec la droite de Pascal de l'hexagone précédent si

$$(\alpha\beta - 1)(\alpha - \beta) = 0.$$

Dans le cas où l'on aurait

$$\alpha\beta = 1,$$

les points C_1 et C_2 seraient confondus; si donc on ne considère que le cas où les six sommets des hexagones sont distincts, on voit qu'on doit avoir

$$\alpha = \beta.$$

Alors les équations des côtés du second hexagone correspondant au type V deviennent

$$\begin{array}{ll} X + \alpha\gamma Y + \gamma Z = 0, & \alpha\gamma X + Y + \gamma Z = 0, \\ \alpha X + Y + \alpha\gamma Z = 0, & X + \alpha Y + \alpha\gamma Z = 0, \\ \alpha X + Y + Z = 0, & X + \alpha Y + Z = 0, \end{array}$$

et pour l'hexagone du type III

$$\begin{array}{ll} X + \alpha\gamma Y + \gamma Z = 0, & \alpha\gamma X + Y + \gamma Z = 0, \\ X + \alpha Y + \gamma Z = 0, & \alpha X + Y + \gamma Z = 0, \\ \alpha X + \alpha^2 Y + Z = 0, & \alpha^2 X + \alpha Y + Z = 0. \end{array}$$

La droite de Pascal de ceux-ci est encore

$$X - Y = 0.$$

Dans le cas où $\alpha = \beta$ les quatre hexagones qui ont pour droite de Pascal commune CC' ont les droites joignant les couples de sommets opposés concourantes; on retrouve ainsi un cas de même nature que celui dont il est question dans le paragraphe **4**.

Enfin les conditions

$$\alpha = \beta = \gamma,$$
$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

peuvent être vérifiées en même temps. Il est inutile de revenir ici sur ce cas, traité au paragraphe 5.

7. Conclusions. — On peut résumer ce qui précède de la façon suivante :

Premier cas. — Si α, β, γ étant différents on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

la droite Δ est droite de Pascal pour *quatre hexagones*. Il en est de même si l'on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$
$$\alpha = \beta \neq \gamma.$$

mais c'est alors CC′ qui est droite de Pascal de *quatre hexagones*; et l'on trouverait des résultats du même genre en permutant les lettres.

Les quatre hexagones ayant même droite de Pascal ont mêmes couples de sommets opposés, et les droites qui joignent ces sommets sont concourantes.

Dans l'une ou l'autre des hypothèses énoncées il n'y a qu'un groupe d'hexagones ayant une droite de Pascal en commun. Donc pour les 60 hexagones il y a 57 droites de Pascal.

Deuxième cas. — Si l'on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

et deux des paramètres α, β, γ égaux, par exemple

$$\alpha = \beta \neq \gamma,$$

γ est donné en fonction de α par

$$\gamma = \frac{\alpha + 1}{2\alpha},$$

Δ est droite de Pascal pour *quatre hexagones*, et CC′ pour quatre autres. Les hexagones d'un même groupe ont mêmes couples de sommets opposés situés sur des droites concourantes.

On a dans ce cas 54 droites de Pascal distinctes.

Toisième cas. — Si l'on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0.$$
$$\alpha = \beta = \gamma.$$

chacune des droites AA′, BB′ et CC′ est droite de Pascal pour *quatre hexagones*, ayant mêmes couples de sommets opposés, ceux-ci étant situés sur des droites concourantes; et Δ est droite de Pascal pour *trois hexagones tels que les droites joignent deux sommets opposés passent par le point de concours des côtés déterminés par les sommets restants*. On a alors 49 droites de Pascal distinctes.

Quatrième cas. — Si l'on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$
$$\alpha = \beta = \gamma,$$

la valeur commune de α, β et γ est alors $-\frac{1}{2}$ et Δ est droite de Pascal commune à *six hexagones*, comme on l'a vu au paragraphe 5. En même temps AA′, BB′ et CC′ sont, chacune, droite de Pascal pour *quatre hexagones*. Il n'y a alors que 46 droites de Pascal distinctes pour les 60 hexagones ayant les mêmes sommets.

Ce qui précède montre qu'il peut y avoir des études intéressantes dans des domaines élémentaires — ce n'est d'ailleurs pas le seul cas que je connaisse — et le sujet que j'ai traité me semble pouvoir fournir encore quelque chose.