BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LÉVY

Sur la croissance des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 58 (1930), p. 29-59
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1930__58__29_0>

SUR LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. PAUL LÉVY.

Introduction.

1. *Notations et remarques préliminaires.* — Mettant en évidence les modules et les arguments des coefficients, nous désignerons la fonction entière étudiée par

$$f(z) = \sum c_\nu e^{i\alpha_\nu} z^\nu = \sum e^{-g_\nu + i\alpha_\nu} z^\nu.$$

et nous supposerons essentiellement que, pour ν infini, on ait $\nu = o(g_\nu)$ [1], de manière que la série $f(z)$ représente bien une série entière.

Nous poserons d'autre part

$$z = re^{i\theta}, \qquad F(r) = \Sigma c_\nu r^\nu = m(r)\omega(r),$$

$$\text{(1)} \qquad M_2^2(r) = \sum c_\nu^2 r^{2\nu} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = m^2(r)\omega_2^2(r),$$

$m(r)$ désignant le plus grand terme de $F(r)$; son rang [ou celui d'un des termes égaux à $m(r)$] sera désigné par $n(r)$, ou simplement n; enfin $M(r)$ désignera le module maximum de $f(z)$ pour $|z| = r$. Des hypothèses concernant la régularité plus ou moins grande des modules c_ν joueront un grand rôle dans la suite de ce travail. Nous allons d'abord les indiquer, en supposant pour plus de commodité les logarithmes g_ν interpolés par une fonction continue $g(\xi)$.

1° *Condition de convexité ou condition* $\mathcal{C}$. — Cette condition indiquera que $g(\xi)$ est convexe, c'est-à-dire $g'(\xi)$ est une fonction

---

[1] Nous utilisons les notations de M. Landau, d'après lesquelles $v = o(u)$ indique que le rapport $\frac{v}{u}$ est infiniment petit, tandis que $v = O(u)$ indique que ce rapport est borné. Il s'agira toujours, soit de fonctions de z ou de son module r, soit de fonctions du rang ν du terme général ou d'une variable continue ξ que nous introduirons pour permettre l'interpolation des fonctions de ν, et nous étudierons l'allure de ces fonctions lorsque leur argument augmente indéfiniment.

non décroissante. Au point de vue des g_ν, cela indique que le polygone dont les sommets A_ν ont pour coordonnées ν, g_ν tourne sa concavité vers le haut; s'il en est ainsi, on peut toujours interpoler les g_ν par une fonction continue convexe $g(\xi)$.

Comme il est bien connu, cela revient à dire que tous les termes sont successivement égaux à $m(r)$. En posant $c_\nu = c_{\nu+1} r_\nu$, on a

$$r_0 \leqq r_1 \leqq \ldots \leqq r_\nu \leqq r_{\nu+1} \leqq \ldots$$

les r_ν croissent indéfiniment, et l'on a

$$m(r) = c_\nu r^\nu \qquad \text{pour} \qquad r_{\nu-1} \leqq r \leqq r_\nu,$$

c'est-à-dire que dans cet intervalle (qui peut se réduire à un point) on a $n = \nu$.

Pour une valeur déterminée de r, les termes successifs de $F(r)$ croissent d'abord avec ν jusqu'au terme maximum $m(r)$, puis décroissent. Si l'on introduit la variable continue ξ, le logarithme du terme général s'écrit

$$\xi \log r - g(\xi).$$

La courbe qui le représente est convexe vers le haut, et a un maximum dont l'abscisse x est définie par la formule

$$(2) \qquad \log r = g'(x).$$

Cette abscisse croît indéfiniment avec r, et est toujours comprise entre $n - 1$ et $n + 1$.

2° *Condition de régularité asymptotique ou condition* $\mathcal{R}$. — Nous désignons ainsi la condition

$$(\mathcal{R}) \qquad g'''(\xi) = g''(\xi)^{\frac{3}{2}} o(1),$$

les dérivées $g'(\xi)$ et $g''(\xi)$ étant supposées continues. Cette condition est plus restrictive que la précédente au point de vue asymptotique: elle s'écrit en effet

$$\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{g''(\xi)}} = o(1),$$

et implique que $g''(\xi)$ soit de signe constant, nécessairement positif, pour ξ assez grand. Dans ces conditions, par modification d'un nombre fini de coefficients, c'est-à-dire par l'addition d'un polynome à $f(z)$, on peut rendre $g''(\xi)$ constamment positif. Cette modification étant sans influence sur les ordres de grandeur des fonctions $m(r)$, $M_2(r)$ et $M(r)$ les propriétés asymptotiques de ces fonctions que l'on peut déduire de la condition $\mathcal{C}$ s'appliquent à toutes les fonctions vérifiant la condition $\mathcal{R}$.

Il importe de préciser que cette condition $\mathcal{R}$ est bien une condition de régularité; nous entendons par là une condition qui peut s'exprimer en disant que $g(\xi)$, ses dérivées (dans le cas présent jusqu'à l'ordre trois) ou certaines combinaisons simples de ces fonctions, ont des limites (finies ou infinies) pour ξ infini; en d'autres termes en excluant l'hypothèse que ces combinaisons aient pour ξ infini une limite supérieure et une limite inférieure d'indétermination distinctes l'une de l'autre. Pour ces fonctions régulières, la condition essentielle d'après laquelle $\frac{g(\xi)}{\xi}$ doit augmenter indéfiniment équivaut à la divergence de

$$\int g''(\xi)\,d\xi.$$

et entraîne la conséquence nécessaire

$$\frac{1}{\xi^2} = o[g''(\xi)] \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\sqrt{g''(\xi)}} = o(\xi).$$

qui elle-même équivaut à la condition $\mathcal{R}$.

Montrons maintenant comment interviendra cette condition. Elle peut s'écrire encore

$$\frac{dg''(\xi)}{g''(\xi)} = o\left[d\xi\sqrt{g''(\xi)}\right].$$

D'après cela, si l'on donne à ξ un accroissement tel que

$$g''(\xi)\,d\xi^2 = O(1),$$

on a

$$\frac{dg''(\xi)}{g''(\xi)} = o(1).$$

et la variation relative de $g''(\xi)$ peut être négligée. Donnons alors à ξ et $d\xi$ les valeurs x et h, x étant très grand, ce qui, d'après (2), revient à supposer r très grand. On a, par la formule de Taylor,

$$\log(e^{-g(x+h)}r^{x+h}) = \log m_1(r) - \frac{h^2}{2}g''(x) + \varepsilon,$$

en posant $m_1(r) = e^{-g(x)} r^x$, et par suite on a pour le terme de $F(r)$ de rang $\nu = x + h$ la représentation asymptotique

$$(3) \qquad m_1(r) e^{-\frac{h^2}{2} g''(x) - \varepsilon},$$

ε étant sûrement très petit si $\frac{h^2}{2} g''(x)$ n'est pas très grand; cette représentation asymptotique simple est donc valable tant qu'elle ne conduit pas à une valeur négligeable par rapport à $m_1(r)$: on voit que les termes successifs croissent, puis décroissent comme l'ordonnée de la courbe de Gauss.

3° *Condition de densité asymptotique ou condition* $\mathcal{D}$. — Elle s'exprime par

$$(\mathcal{D}) \qquad g''(\xi) = o(1),$$

c'est-à-dire que $g''(\xi)$ doit tendre vers zéro. Ce n'est pas, comme les précédentes, une condition de régularité: pour les fonctions régulières, telles que $g''(\xi)$ ait une limite nulle, positive, ou infinie, la condition $\mathcal{D}$ implique que $g(\xi)$, qui en tout cas doit croître plus rapidement que $a\xi$, quelque grand que soit a, croisse aussi moins rapidement que $\frac{\xi^2}{a}$; cela exclut donc des séries entières à convergence rapide, correspondant à des fonctions d'ordre zéro, croissant comme

$$e^{\frac{a}{4}\log^2 r},$$

ou même moins rapidement.

L'importance de cette condition est évidente. En nous bornant au cas simple où la formule (3) s'applique, on voit que les points correspondant aux valeurs entières de $\nu = x + h$ sont à la limite partout denses sur la courbe de Gauss représentant, d'après cette formule, la valeur principale des termes importants de la série $F(r)$. Les séries $F(r)$ et $M_2^2(r)$ sont alors repréntées asymptotiquement par des intégrales de Gauss. Nous préciserons au n° 3 les conséquences de cette remarque et traiterons aussi les cas où $g''(\xi)$ a une limite positive, finie ou infinie.

2. *Plan du présent travail.* — Nous nous proposons d'étudier les relations existant entre les différentes fonctions $m(r)$, $M_2(r)$,

$M(r)$ et $F(r)$. Nous rappellerons des résultats connus et en indiquerons de nouveaux. On sait que

$$m(r) < M_2(r) < M(r) \leqq F(r). \tag{4}$$

La fonction $M(r)$, qui caractérise le mieux la croissance de la fonction entière $f(z)$, est ainsi comprise entre les fonctions $M_2(r)$ qui ne dépendent que des modules des coefficients.

Le Chapitre I a pour objet l'étude des fonctions qui ne dépendent que des modules, $m(r)$, $M_2(r)$ et $F(r)$. Nous rappellerons des résultats connus de MM. Wiman et Valiron, et obtiendrons des résultats nouveaux concernant la comparaison de $M_2^2(r)$ et de $m(r)\,F(r)$; on a évidemment

$$M_2^2(r) < m(r)\,F(r). \tag{5}$$

Nous montrerons que, si les conditions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{D}$ sont vérifiées, on a

$$M_2^2(r) \sim \frac{m(r)\,F(r)}{\sqrt{2}},$$

tandis que de la condition $\mathcal{C}$ on peut seulement déduire

$$M_2^2(r) > A\,m(r)\,F(r),$$

A étant, soit une constante absolue, soit une fonction de $\omega(r)$; dans ce dernier cas la valeur maxima que l'on puisse donner à cette fonction tend vers $\frac{1}{2}$ pour ω infini. Si au contraire on écarte toute condition de régularité, la croissance de $M_2(r)$, et même de $M(r)$, peuvent être à peine supérieures à celle de $m(r)$; en termes plus précis, l'ordre de grandeur de $\omega(r) = \frac{F(r)}{m(r)}$ étant connu, il est possible de déterminer la fonction $f(z)$ de manière que $\omega_2(r) = \frac{M_2(r)}{m(r)}$ et $\frac{M(r)}{m(r)}$ croissent aussi lentement que l'on veut et même que la première de ces fonctions soit bornée.

L'objet essentiel du Chapitre II est de mettre en évidence l'ordre de grandeur de $M(r)$. Nous plaçant au point de vue du calcul des probabilités, en supposant les modules c_ν donnés et les arguments α_ν choisis au hasard, nous montrerons qu'en général $M(r)$ est au plus et sans doute exactement de l'ordre de grandeur de

$M_2(r)\sqrt{\log \omega_2(r)}$: la probabilité que $M(r)$ soit d'un ordre de grandeur plus élevé est infiniment petite. Ce résultat est assez remarquable, si l'on songe qu'il avait été très difficile d'établir que $M(r)$ peut être d'un ordre de grandeur dépassant si peu celui de $M_2(r)$.

Nous montrerons d'autre part qu'il est possible que $M(r)$ soit d'un ordre de grandeur moins élevé encore; il est même possible que le rapport $\frac{M(r)}{M_2(r)}$ soit borné; mais cette circonstance est infiniment peu probable, si, les modules étant donnés, les arguments sont choisis au hasard.

Nous avons fait dans ce travail un grand usage de méthodes et de résultats dus à Littlewood, [3] [1] et à Hardy et Littlewood [2]. Quelques-uns des résultats de ce travail ont été annoncés dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences [4, *b* et *c*].

CHAPITRE I.

Fonctions dépendant des modules des coefficients.

3. *Conséquence de la condition* $\mathcal{R}$. — Nous pouvons, grâce à l'expression asymptotique (3) de $c_\nu r^\nu$, obtenir des résultats très précis. Nous verrons plus loin, comme conséquence de la formule (21), conséquence elle-même de la condition $\mathcal{C}$, que l'on est assuré d'obtenir la valeur principale de $F(r)$ en ne tenant compte que des termes non infiniment petits par rapport au plus grand terme. Le même résultat s'applique à $M_2^2(r)$. On peut donc négliger le facteur e^ε, bien que l'on ne puisse affirmer la petitesse de ε que pour les termes non très petits par rapport à $m(r)$; en négligeant ce facteur, on aura des expressions asymptotiques exactes pour $F(r)$ et $M_2^2(r)$.

Il y a alors plusieurs cas à distinguer

Premier cas : $g''(\xi)$ tend vers zéro. — C'est la condition $\mathcal{D}$.

---

[1] Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie située à la fin du présent travail.

Dans ce cas, comme nous l'avons déjà indiqué, les expressions asymptotiques de $F(r)$ et de $M_2^2(r)$ sont des intégrales; $m(r)$ et $m_1(r)$ étant équivalents, il vient

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
F(r) &\sim m(r)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2}{2}g''(x)}\,dh = m(r)\sqrt{\frac{2\pi}{g''(x)}},\\
M_2^2(r) &\sim m^2(r)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 g''(x)}\,dh = m^2(r)\sqrt{\frac{\pi}{g''(x)}},
\end{aligned}
\right.
$$

et par suite, comme nous l'avions annoncé,

$$
(7)\qquad M_2^2(r) \sim \frac{m(r)F(r)}{\sqrt{2}}.
$$

En mettant en évidence les rapports $\omega(r)$ et $\omega_2(r)$, ces formules s'écrivent

$$
(6')\qquad \omega(r) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g''(x)}}, \qquad \omega_2^2(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{g''(x)}},
$$

$$
(7')\qquad \omega_2^2(r) \sim \frac{\omega(r)}{\sqrt{2}}.
$$

Ces résultats sont faciles à vérifier dans le cas de la fonction exponentielle, où l'on a

$$
F(r) = e^r, \qquad m(r) \sim \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}},
$$

$$
M_2^2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2r\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{2ru}}{\sqrt{1-u^2}}\,du \sim \frac{e^{2r}}{2\sqrt{\pi r}}.
$$

$M_2^2(r)$ est dans ce cas une fonction de Bessel.

Deuxième cas : $g''(\xi)$ a une limite positive a. — On a dans ce cas

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
m(r) &\sim m_1(r)\, e^{-\frac{a}{2}(n-x)^2},\\
F(r) &\sim m_1(r)\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}(\nu-x)^2},\\
M_2^2(r) &\sim m_1^2(r)\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(\nu-x)^2},
\end{aligned}
\right.
$$

la sommation étant relative à l'indice ν.

Les multiplicateurs de $m_1(r)$ et $m_1^2(r)$ dans ces formules dépendent de la partie fractionnaire de x; ce sont des fonctions à oscillations périodiques si l'on prend x comme variable. Celles qui figurent dans les expressions de $F(r)$ et $M_2^2(r)$ ont pour valeurs moyennes les intégrales analogues à celles considérées dans le premier cas, c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Mais ces expressions ne sont pas les valeurs moyennes de $\omega(r)$ et $\omega_2^2(r)$, puisqu'il faut tenir compte du facteur $\frac{m_1(r)}{m(r)}$ qui oscille asymptotiquement entre 1 et $e^{\frac{a}{8}}$; il est bien évident en effet que, bien que $|n-x|$ puisse d'abord avoir des valeurs supérieurs à $\frac{1}{2}$, cette valeur ne peut être dépassée que d'une quantité tendant vers zéro quand r augmente indéfiniment. Au sujet des fonctions $\omega(r)$ et $\omega_2^2(r)$, observons seulement qu'elles oscillent asymptotiquement entre des valeurs toutes les deux supérieures à l'unité, ce qui distingue ce cas du suivant.

Dans le premier cas de cette discussion, on pourrait s'attendre, pour une raison analogue, à observer aussi des oscillations, dépendant de la partie fractionnaire de x; $\log\omega(r)$, considéré comme fonction de r, aurait alors des oscillations d'amplitudes décroissantes. Mais l'erreur commise par l'emploi de la formule asymptotique (3) étant du même ordre de grandeur, la conclusion n'est pas légitime. C'est ainsi que la fonction exponentielle est parfaitement régulière, et il est curieux d'observer que, si dans la série qui la représente on prend les termes de p en $p(p > 2)$, on obtient une fonction à oscillations régulières, mais dont la période n'est pas celle que la remarque précédente ferait prévoir.

Troisième cas : $g''(\xi)$ augmente indéfiniment. — Dans ce cas, il faut remplacer a par une fonction indéfiniment croissante de x, donc de r. On remarque qu'alors, sauf si x diffère très peu d'un nombre entier, $m(r)$ est d'un ordre inférieur à celui de $m_1(r)$. Il n'y a en général qu'un terme qui compte dans l'évaluation des séries $F(r)$ et $M_2^2(r)$; mais il y en a deux, lorsque $x - \frac{1}{2}$ est voisin d'un nombre entier. On vérifie alors aisément que $\omega(r)$ et $\omega_2^2(r)$ oscillent entre 1 et 2 (ou plus exactement entre des fonctions du type $1+\varepsilon'$ et $2+\varepsilon''$, ε' et ε'' tendant vers zéro par valeurs positives), tandis que le rapport

$$\frac{\omega_2^2(r)}{\omega(r)} = \frac{M_2^2(r)}{m(r)F(r)}$$

oscille entre 1 et $2(\sqrt{2}-1)$.

Quatrième cas : $g''(\xi)$ n'a pas de limite. — La condition $\mathcal{R}$ n'exclut pas cette hypothèse; la fonction $\frac{1}{\sqrt{g''(\xi)}}$ est en effet seulement assujettie à avoir une dérivée tendant vers zéro; il est possible qu'elle oscille entre deux limites positives distinctes, et même qu'elle admette à la fois des minima tendant vers zéro et des maxima indéfiniment croissants. Ces variations étant nécessairement lentes, on a donc dans ce cas différents intervalles assez étendus dont chacun se rattache à l'un des trois cas simples étudiés d'abord.

4. *Comparaison de $m(r)$ et $F(r)$.* — La discussion précédente nous montrant que c'est seulement si $g''(x)$ est très petit que le rapport $\omega(r)$ de ces fonctions peut être très grand, il est surtout intéressant de considérer le cas des petites valeurs de $g''(x)$; dans le cas contraire $m(r)$, $M_2(r)$ et $F(r)$ sont du même ordre de grandeur.

Supposons donc les conditions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{D}$ réalisées. De la formule (2) on déduit

$$\log m(r) \sim \log m_1(r) = x\log r - g(x) = xg'(x) - g(x),$$

de sorte que l'on a

$$(9) \qquad \log m(r) \sim \int xg''(x)dx, \qquad \omega(r) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{g''(x)}}.$$

Ces formules nous montrent que si, connaissant l'ordre de grandeur de $m(r)$, on cherche à limiter supérieurement celui de $\omega(r)$ et par suite celui de $F(r)$, il faut connaître une limite inférieure de $g''(x)$. Une limite toujours applicable sera alors sûrement approchée surtout lorsque $g(x)$ croît lentement, c'est-à-dire dans le cas des fonctions d'ordre infini.

Comme l'intégrale de $g''(x)$ doit nécessairement diverger, nous sommes sûrs de n'exclure que des fonctions irrégulières en supposant que

$$(10) \qquad \frac{1}{g''(x)} = o(x \log^{1+\alpha} x) \qquad (\alpha > 0).$$

Il vient alors, d'après les formules (9),

$$\omega(r) = o\left(\sqrt{r} \log^{\frac{1+\alpha}{2}} r\right) = o\left(\sqrt{\frac{r}{\log^{1+\alpha} r} \log^{1+\alpha} r}\right),$$

$$\frac{r}{\log^{1+\alpha} r} = o[\log m(r)],$$

et par suite, ε tendant vers zéro,

$$\log r \sim \log r - (1+\alpha)\log\log r = \log\log m(r) - \log\frac{1}{\varepsilon} < \log\log m(r)$$

et enfin

$$(11) \qquad \omega(r) = o\{\sqrt{\log m(r)}\,[\log\log m(r)]^{1+\alpha}\},$$

α étant positif mais aussi petit que l'on veut. On obtiendrait naturellement des formules un peu plus précises en partant d'une hypothèse telle que

$$(10') \qquad \frac{1}{g''(x)} = o(x \log x \log_2 x \ldots \log_{p-1} x \log_p^{1+\alpha} x).$$

Donc :

Théorème I. — *La formule* (11) *est vraie pour toutes les fonctions entières vérifiant les conditions* $\mathcal{R}$ *et* (10).

La condition $\mathcal{Q}$ peut en effet être supprimée, le résultat subsistant évidemment lorsque $g''(x)$ n'est pas très petit, et que par suite $\omega(r)$ n'est pas très grand. Nous verrons d'ailleurs plus loin que la condition $\mathcal{R}$ n'est pas non plus essentielle.

Pour les fonctions d'ordre fini ρ, on peut obtenir des limites plus précises. Ainsi, si $g''(x) \sim \frac{1}{\rho x}$, les formules (9) donnent

$$(12) \qquad \omega(r) \sim \rho\sqrt{2\pi \log m(r)},$$

et cette expression donne une limite supérieure de la croissance de $\omega(r)$ pour les fonctions régulières d'ordre inférieur à ρ. Compte tenu de ce que $g'(x) = \log r$, on peut aussi écrire, si $g''(x) \sim \dfrac{1}{\rho x}$,

$$\log m(r) \sim \frac{r^\rho}{\rho}, \qquad \omega(r) \sim \sqrt{2\pi\rho}\, r^{\frac{\rho}{2}}, \tag{13}$$

et même, l'expression asymptotique (9) ne donnant pour $\log m(r)$ qu'une erreur infiniment petite,

$$m(r) \sim e^{\frac{1}{\rho} r^\rho} \tag{13'}$$

5. *Extension aux fonctions entières quelconques. Les résultats de MM. Wiman et Valiron.* — On sait qu'une fonction entière ne vérifiant pas la condition $\mathcal{C}$ peut être majorée par une fonction vérifiant cette condition et ayant même $m(r)$ que la fonction donnée; mais il est impossible d'aller plus loin et de régulariser davantage les coefficients sans changer $m(r)$. Toutefois, au sujet de la condition $\mathcal{R}$, on peut dans le même ordre d'idées établir le théorème suivant :

Théorème II. — *Une fonction entière $f(z)$ peut toujours être majorée par une série $F_1(r)$, vérifiant les conditions $\mathcal{R}$ et (10), et ayant pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes même terme maximum que $F(r)$.*

Les fonctions $f(z)$ ou $F(z)$, et $F_1(r)$ n'interviendront dans le raisonnement que par l'intermédiaire des fonctions $g(\xi)$ et $g_1(\xi)$ liées aux coefficients. Nous désignerons par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_1$ les courbes représentatives de ces deux fonctions.

La fonction $g_1(\xi)$, continue ainsi que ses deux premières dérivées, et $g_1''(\xi)$ étant initialement positive, sera définie par l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{g_1''(\xi)}} = \theta(\xi) \frac{d}{d\xi} \sqrt{\xi \log^{1+\beta} \xi}, \tag{14}$$

β étant une constante comprise entre 0 et α (exclus), et $\theta(\xi)$ entre 1 et -1 (inclus); les conditions $\mathcal{R}$ et (10), que nous voulons réaliser, sont des conséquences évidentes de cette équation, quelles que soient les variations de $\theta(\xi)$ entre -1 et $+1$. Nous supposerons la courbe $\mathcal{L}_1$ composée alternativement d'arcs $\mathcal{L}'_i$ sur lesquels on aura $\theta = 1$, et d'arcs $\mathfrak{L}''_i$ sur lesquels θ sera négatif ou nul. Un arc $\mathfrak{L}'_i$ infiniment prolongé serait tel que

$$g''_1(\xi) \sim \frac{1}{\xi \log^{1+\beta} \xi},$$

donc $g_1(\xi) = O(\xi)$; cet arc serait à partir d'un certain moment au-dessous de la courbe $\mathfrak{L}$, pour laquelle $\frac{g(\xi)}{\xi}$ augmente indéfiniment. Au contraire, en prenant, sur un arc $\mathfrak{L}''_i$, θ égal à une constante négative, on obtient une courbe pour laquelle $g''_1(\xi)$ deviendrait infinie pour une valeur finie de ξ; en donnant alors à θ des valeurs négatives mais tendant vers zéro, on peut s'arranger pour obtenir un arc sur lequel ξ augmente indéfiniment mais qui soit à partir d'un certain moment au-dessus de $\mathfrak{L}$. On peut même observer que, si la courbe donnée $\mathfrak{L}$ est telle que $\frac{g(\xi)}{\xi^2}$ ne reste pas supérieur à un nombre positif fixe (condition qui n'exclut que des fonctions entières d'ordre zéro), il suffit de prendre $\theta = 0$ pour avoir des arcs $\mathfrak{L}''_i$ nécessairement situés à partir d'un certain moment au-dessus de $\mathfrak{L}$. Il est donc clair qu'en tout cas on peut constituer la courbe $\mathfrak{L}_1$ d'arcs successifs $\mathfrak{L}'_i$ et $\mathfrak{L}''_i$, de manière qu'elle recoupe une infinité de fois la courbe $\mathfrak{L}$.

Partons alors d'un point A'_0 situé sur un arc $\mathfrak{L}'_0$, au-dessous de $\mathfrak{L}$, et tel que cet arc prolongé reste au-dessous de $\mathfrak{L}$; décrivons à partir de ce point un arc $\mathfrak{L}''_0$ jusqu'à un point B_0 d'abscisse entière situé au-dessus de $\mathfrak{L}$. Un point A''_0 décrivant l'arc $A'_0 B_0$, tous les arcs $\mathfrak{L}'_1$ partant des différentes positions de ce point sont tous pour ξ assez grand au-dessous de $\mathfrak{L}$; mais le premier de ces arcs, correspondant à la position A'_0 du point mobile, est entièrement au-dessous de $\mathfrak{L}$, tandis que le dernier a au moins un point d'abscisse entière au-dessus de $\mathfrak{L}$. Par continuité, on voit que pour une position convenable de A''_0, l'arc $\mathfrak{L}'_1$ aura un ou plusieurs points d'abscisses entières situés sur la courbe $\mathfrak{L}$, tous ses autres points d'abscisses entières étant au-dessous de $\mathfrak{L}$. Choisissons sur cet arc un point A'_1 à partir duquel il reste constamment au-dessous de $\mathfrak{L}$, et opérons à partir de ce point comme nous l'avons fait en partant de A'_0. Recommençant ainsi indéfiniment, nous formons une ligne $\mathfrak{L}'$, composée alternativement d'arcs $\mathfrak{L}'_i$ et d'arcs $\mathfrak{L}''_i$, chaque arc $\mathfrak{L}'_i$ contenant un ou plusieurs points d'abscisses entières situés sur $\mathcal{L}$, tous les autres points de $\mathcal{L}_1$ d'abscisses entières étant au-dessous de $\mathcal{L}$.

A cette ligne correspond alors une série

$$F_1(r) = \Sigma\, e^{-g_1(\nu)} r^\nu,$$

ayant une infinité de termes égaux aux termes correspondants de $F(r)$, et les autres supérieurs à ceux de $F(r)$; la fonction $g_1''(\xi)$ étant positive, chaque terme égal au terme correspondant de $F(r)$ sera au moins dans un petit intervalle le terme maximum de $F_1(r)$, et *a fortiori* de $F(r)$. La fonction $F_1(r)$ ainsi formée vérifie donc les conditions requises.

On voit d'ailleurs aisément qu'en ne prolongeant pas les arcs $\mathcal{L}'_i$ plus qu'il n'est nécessaire on obtient une fonction $F_1(r)$ de même ordre que p. L'application à $F_1(r)$ des résultats obtenus au n° 4 donne alors pour $f(z)$ les résultats suivants :

Théorème III. — *Pour n'importe quelle fonction entière, l'inégalité*

$$F(r) < k m(r) \sqrt{\log m(r)}\, [\log \log m(r)]^{1+\alpha}, \tag{15}$$

k et α étant des constantes positives arbitrairement petites, est vérifiée pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes.

Théorème IV. — *Pour les fonctions entières d'ordres inférieurs à ρ, l'inégalité*

$$F(r) < \rho\, m(r) \sqrt{2\pi \log m(r)} \tag{16}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes.

Le théorème III a été obtenu pour la première fois par M. Wiman [7]; les théorèmes III et IV ont été obtenus et précisés par M. Valiron, qui a montré notamment [6, th. IX et XII], du moins pour l'inégalité un peu moins précise,

$$F(r) < k m(r) [\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\alpha},$$

que dans l'ensemble des intervalles où elle est en défaut la variation totale de $\log r$ est finie; cela permet de dire que cette inégalité est presque toujours vraie; mentionnons d'ailleurs que M. Valiron s'est inspiré d'idées de M. Borel, dont les travaux sont, comme on le sait, à l'origine de toutes ces recherches sur les fonctions $m(r)$ et $M(r)$.

Le théorème IV est aussi à rapprocher d'un résultat de M. Brinkmeier [1]; il entraîne en effet cette conséquence que l'inégalité

$$F(r) < M(r)\, r^{\frac{\rho}{2}+\alpha}.$$

est vérifiée, quelque petit que soit l'exposant positif α, pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes. L'auteur cité a montré qu'elle est vérifiée pour tout r assez grand; on peut d'ailleurs affirmer la même chose pour l'inégalité analogue formée avec $M_2(r)$, mais non pour celle relative à $m(r)$.

Rapprochons enfin ces résultats d'un théorème que j'ai obtenu antérieurement et qui a été précisé par M. Valiron [4, a, et 5]. D'après la formule (6′), l'intégrale

$$\int \frac{dn(r)}{\omega^2(r)} \sim \int \frac{dx}{\omega^2(r)}$$

est nécessairement divergente pour r infini; mais c'est là une conséquence de la régularité des fonctions considérées à cet endroit. Pour une fonction entière quelconque, on peut seulement affirmer la divergence de

$$(17) \qquad \int \frac{dn(r)}{\omega(r)}.$$

6. *Conséquences de la condition $\mathcal{C}$. Formules préliminaires.* — Ces conséquences résultent du théorème suivant :

Théorème V. — *Si la condition $\mathcal{C}$ est vérifiée, la somme* $S(r)$ *des termes supérieurs ou égaux à $km(r)$, k étant une constante comprise entre* 0 *et* 1, *indique l'ordre de grandeur de* $F(r)$.

Ce théorème sera démontré et précisé par la formule (21) ci-après.

Pour profiter des simplifications que donne la continuité, considérons d'abord, au lieu de $F(r)$, l'intégrale

$$(18) \qquad \mathcal{F}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-g(\xi)}\, r^{\xi}\, d\xi.$$

la fonction $g(\xi)$ étant convexe, et l'intégrale étant supposée convergente; d'ailleurs la fonction $g(\xi)$ peut être infinie pour $\xi < \xi_0$; il n'y a alors à intégrer que de ξ_0 à $+\infty$, et la condition de convergence est la même que pour $F(r)$. Donnons à r une valeur particulière; sur la courbe $\mathcal{C}$ qui représente la variation de $g(\xi)$, considérons le point A d'abscisse x, qui correspond au maximum de la fonction intégrée, et les points B et B' d'abscisses $x - p_1$ et $x + p'_1$, pour lesquels la fonction intégrée a la valeur $km_1(r)$. Remplaçons la courbe $\mathcal{C}$ par la ligne brisée BAB', les cordes AB et AB' étant prolongées au delà de B et B'; cette ligne $\overline{\mathcal{C}}$ correspond à une intégrale $\overline{\mathcal{F}}(r)$ analogue à $\mathcal{F}(r)$, et convergente pour la valeur considérée de r (mais non pour r quelconque). Le calcul de cette intégrale, qui est immédiat puisque la fonction intégrée est constituée par deux arcs d'exponentielles, nous donne une borne inférieure pour l'intégrale

$$\mathcal{S}(r) = \int_{x-p_1}^{x+p'_1} e^{g(\xi)} r^\xi \, d\xi, \tag{19}$$

et une borne supérieure pour $\overline{\mathcal{F}}(r) - \mathcal{S}(r)$. On trouve ainsi

$$\mathcal{S}(r) > (1-k)\,\mathcal{F}(r). \tag{20}$$

Dans le cas de la série $F(r)$, $S(r)$ désignant la somme des termes supérieurs ou égaux à $km(r)$, nous aurons une formule analogue, mais un peu moins simple. Au lieu de la courbe $\mathcal{C}$, il faut considérer le polygone $\mathfrak{P}$ ayant pour sommets les points A_ν de coordonnées ν et g_ν, c'est-à-dire les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses entières; A_n correspond alors au terme maximum $m(r)$ de $F(r)$. Désignons respectivement par $p - 1$ et $p' - 1$ les nombres de termes de $S(r)$ précédant et suivant le terme de degré n, de sorte que les termes de $F(r)$ encadrant $S(r)$ sont

$$c_{n-p}\, r^{n-p} = k_1\, m(r), \qquad c_{n+p'}\, r^{n+p'} = k'_1\, m(r),$$

k_1 et k'_1 étant inférieurs à k. Le polygone $\mathfrak{P}$ tournant sa concavité vers le haut, si nous le remplaçons par la ligne brisée $\overline{\mathfrak{P}}$ composée des diagonales $A_n A_{n-p}$ et $A_n A_{n+p'}$ et de leurs prolongements au delà de A_{n-p} et $A_{n+p'}$, nous ne pouvons qu'augmenter les ordonnées entre A_{n-p} et $A_{n+p'}$ et les diminuer en dehors de cet intervalle.

Cette ligne $\overline{\mathfrak{L}}$ correspond donc à une série

$$\overline{F}(r) = \Sigma \overline{c_\nu} r^\nu.$$

dont les termes limitent inférieurement ceux de $F(z)$ pour les valeurs de ν comprises entre $n-p$ et $n+p'$, et supérieurement en dehors de ces limites. Nous obtenons ainsi une limite inférieure $\overline{S}(r)$ de $S(r)$ et une limite supérieure $\overline{F}(r) - \overline{S}(r)$ de $F(r) - S(r)$.

Ces limites sont faciles à calculer. On a en effet

$$\overline{F}(r) = m(r)(q^n + q^{n-1} + \ldots + q + 1 + q' + q'^2 + \ldots),$$

les raisons q et q' des deux progressions géométriques dont la somme constitue ainsi $\overline{F}(r)$ étant définies par les conditions

$$q^p = k_1, \qquad q'^{p'} = k'_1.$$

Les termes qui appartiennent à $\overline{S}(r)$ sont ceux compris entre q^p et $q'^{p'}$, de sorte que

$$\overline{S}(r) = m(r)\left(\frac{1-k_1}{1-q} + \frac{1-k'_1}{1-q'} - 1\right) > m(r)\left(\frac{1-k}{1-q} + \frac{1-k}{1-q'} - 1\right),$$

$$\overline{F}(r) = m(r)\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{1}{1-q'} - 1\right) < m(r)\left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-q'} - 1\right),$$

et par suite

$$\overline{S}(r) > (1-k)\,F(r) - km(r).$$

Cette inégalité pouvant s'écrire

$$k\overline{S}(r) > (1-k)[\overline{F}(r) - \overline{S}(r)] - km(r),$$

on obtient une inégalité vraie *a fortiori* si l'on remplace $\overline{S}(r)$ et $\overline{F}(r)$ par $S(r)$ et $F(r)$, de sorte que l'on a

$$S(r) > (1-k)\,F(r) - km(r), \tag{21}$$

ce qui démontre le théorème V, et en même temps le résultat sur lequel nous nous sommes appuyés au début du n° 3.

On remarque que, pour $r = r_\nu$, deux termes de $F(r)$ étant égaux à $m(r)$, on peut modifier la définition de $\overline{F}(r)$ en écrivant aussi deux fois le terme maximum, et l'on obtient la formule un peu plus précise

$$\text{(21')} \qquad S(r) > (1-k)F(r),$$

identique à la formule (20).

Nous aurons besoin d'autre part d'une limite inférieure de la moyenne $\mu(r)$ des termes de $S(r)$; la valeur évidente $km(r)$ peut suffire. Mais il est facile d'obtenir plus de précision en raisonnant sur la somme $S_0(r)$ obtenue en supprimant le plus petit terme de $S(r)$. D'ailleurs, en introduisant cette somme, la formule (21) prend la forme

$$\text{(21'')} \qquad S_0(r) > (1-k)F(r) - (1+k)m(r).$$

Cette somme est au moins égale à la somme auxiliaire

$$\overline{S}_0(r) = m(r)\Big[\Big(\frac{1}{2}q_1^{p-1} + q_1^{p-2} + \ldots + q_1 + \frac{1}{2}\Big) \\ \Big(\frac{1}{2} + q'_1 + q'^2_1 + \ldots + q'^{p'-2}_1 + \frac{1}{2}q'^{p'-1}\Big)\Big],$$

analogue à $\overline{S}(r)$, mais où les termes extrêmes figurent avec le coefficient $\frac{1}{2}$ et où q_1 et q'_1 sont définis par

$$q_1^{p-1} = q'^{p'-1}_1 = k.$$

C'est une somme de trapèzes, supérieure, à cause de la convexité de la fonction exponentielle, à l'intégrale

$$m(r)\left[\int_0^{p-1} q_1^h\, dh + \int_0^{p'-1} q'^h_1\, dh\right] = (p+p'-2)\frac{1-k}{\log\frac{1}{k}}m(r).$$

On en déduit pour la moyenne $\mu_0(r)$ des termes de $S_0(r)$

$$\text{(22)} \qquad \mu_0(r) = \frac{S_0(r)}{p+p'-2} > \frac{1-k}{\log\frac{1}{k}}m(r).$$

Enfin, il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer comment le nombre de termes supérieurs à $km(r)$, qui donne évidemment l'ordre de grandeur de $\omega(r)$ et de $\omega_2^2(r)$ (pourvu que k ne soit très voisin de o ni de 1), est lié à celui de $g''(x)$. La formule asymptotique (3), valable seulement lorsque la condition $\mathcal{R}$ est vérifiée, peut dans tous les cas être remplacée par la formule

$$c_{x+h}\, r^{x+h} = e^{g(x)+hg'(x)-g(x+h)} = m_1(r)\, e^{-\frac{h^2}{2} g''(x+\theta h)},$$

θ étant compris entre o et 1. En donnant à h les valeurs $-p_1$ et p'_1, il vient

$$\frac{p_1^2}{2} g''(x - \theta_1 p_1) = \frac{p_1'^2}{2} g''(x + \theta'_1 p'_1) = \log \frac{1}{k}.$$

Le plus grand des nombres p_1 et p'_1 suffisant, d'après les remarques qui précèdent, pour indiquer l'ordre de grandeur de $\omega(r)$, on voit que : *l'ordre de grandeur de* $\omega(r)$ *est défini par la plus grande des variations (l'une positive, l'autre négative), qu'il faut donner à* ξ *à partir de* x *pour que, dans la formule de Taylor relative à la fonction* $g(\xi)$ *et au point* x, *l'erreur commise en se bornant aux termes du premier degré atteigne une valeur donnée* $\log \frac{1}{k}$.

Si la formule (10) est vérifiée, le raisonnement qui nous a conduit à la formule (11) subsiste alors sans modification essentielle, et l'on voit que :

Théorème VI. — *La formule* (11) *s'applique à toutes les fonctions entières vérifiant la condition* (10).

La condition ($\mathcal{R}$), comme nous l'avions annoncé, n'était donc pas essentielle dans l'énoncé du théorème I. La condition (10) est au contraire essentielle. Si en effet $g''(x)$ est nul une infinité de fois sur des intervalles assez étendus, c'est-à-dire si la ligne $\mathcal{L}$ comprend une infinité de segments de droite de grande longueur, à chacun de ces segments correspond une valeur de r pour laquelle il y a un très grand nombre de termes égaux à $m(r)$ et la formule (11) est en défaut pour ces valeurs de r. Mais on voit aisément qu'elle n'est en défaut que dans d'assez petits intervalles entourant ces valeurs, conformément au théorème de M. Valiron déjà cité au n° 5.

7. *Formules relatives à la comparaison de* $M_2^2(r)$ *et de* $m(r)$ $F(r)$, *lorsque la condition* $\mathcal{C}$ *est vérifiée.* — **Cette comparaison repose sur la formule de Cauchy-Schwarz. En désignant par Σ' une sommation étendue à N valeurs de l'entier ν, on a par**

cette formule

$$(\Sigma' c_\nu r^\nu)^2 \leqq \Sigma' 1 \, \Sigma' c_\nu^2 r^{2\nu} = N \Sigma' c_\nu^2 r^{2\nu}.$$

Appliquée aux termes constituant la somme $S_0(r)$ considérée au n° 6, $\mu_0(r)$ désignant la moyenne de ces termes et $T_0^2(r)$ la somme de leurs carrés, la formule précédente donne

$$M_2^2(r) > T_0^2(r) \geqq \mu_0(r) S_0(r),$$

d'où, compte tenu des formules $(21'')$ et (22),

$$(23) \qquad M_2^2(r) > A m(r)[F(r) - B m(r)] = A m^2(r)[\omega(r) - B],$$

A et B ayant les valeurs

$$(24) \qquad A = \frac{(1-k)^2}{\log \frac{1}{k}}, \qquad B = \frac{1+k}{1-k}.$$

On peut évidemment se proposer, pour chaque valeur de $\omega(r)$, de déterminer k de manière à rendre $A(\omega - B)$ aussi grand que possible ; on obtient ainsi une formule de la forme

$$M_2^2(r) > m^2(r) \varphi[\omega(r)],$$

la courbe représentative de $\varphi(\omega)$ ayant une asymptote de coefficient angulaire un peu supérieur à 0,4, et étant située au-dessus de cette asymptote. Plus simplement, indiquons qu'en prenant $k = \frac{1}{3}$, il vient

$$(23') \qquad M_2^2(r) > 0{,}4 \, m^2(r)[\omega(r) - 2],$$

et qu'on a toujours la formule simple

$$(23'') \qquad M_2^2(r) > \frac{1}{4} m(r) F(r) = \frac{1}{4} m^2(r) \omega(r).$$

Donc :

Théorème VII. — *La formule* (23), *et les formules* (23') *et* (23'') *qui en sont des conséquences, s'appliquent à toutes les fonctions entières vérifiant la condition* $\mathcal{C}$.

Naturellement, toutes ces formules s'appliquent *a fortiori* si l'on remplace $\omega(r)$ par la valeur plus petite $\omega_2^2(r)$. Mais nous allons voir qu'on peut obtenir des formules plus précises.

8. *Démonstration d'une formule plus précise.* — Nous allons d'abord raisonner sur l'intégrale (18). Considérant spécialement les valeurs de ξ supérieures à x, nous poserons

$$\mathcal{F}_1(r) = \int_x^\infty e^{-g(\xi)} r^\xi \, d\xi,$$

$$\mathcal{S}_1(r) = \int_x^{x+p'_1} e^{-g(\xi)} r^\xi \, d\xi,$$

$$\mathcal{C}_1^2(r) = \int_x^{x+p'_1} e^{-2g(\xi)} r^{2\xi} \, d\xi,$$

et nous allons montrer que

$$(21) \qquad \mathfrak{M}^2_{2,1}(r) = \int_x^\infty e^{-2g(\xi)} r^{2\xi} \, d\xi \geq \frac{1}{2} m_1(r) \mathcal{F}_1(r).$$

Introduisons une fonction auxiliaire, analogue à celles considérées au n° 6. A cet effet définissons une courbe $\mathcal{L}_a$, dépendant d'un paramètre a compris entre o et p'_1, obtenue en remplaçant la courbe $\mathcal{L}$, représentative de $g(\xi)$, par sa corde, entre les points d'abscisses x et $x+a$. Désignant par $g(\xi, a)$ la fonction de ξ que cette courbe représente, posons

$$\mathcal{S}_1(r, a) = \int_x^{x+p'_1} e^{-g(\xi, a)} r^\xi \, d\xi.$$

Cette intégrale est somme des deux intégrales

$$I_1 = \int_x^{x+a} e^{-g(\xi, a)} r^\xi \, d\xi = m_1(r) \int_x^{x+a} q^{\xi - x} \, d\xi = m_1(r) \frac{1 - q^a}{\log \frac{1}{q}},$$

$$I_2 = \int_{x+a}^{x+p'_1} e^{-g(\xi, a)} r^\xi \, d\xi.$$

q étant défini par la formule

$$r^{x+a} e^{-g(x+a)} = \lambda m_1(r) = q^a m_1(r).$$

De même, en remplaçant la fonction intégrée par son carré, on est conduit à considérer l'intégrale

$$\mathcal{C}_1^2(r, a) = J_1 + J_2 = m_1^2(r) \frac{1 - q^{2a}}{2 \log \frac{1}{q}} \quad \int_{x+a}^{x+p'_1} e^{-2g(\xi, a)} r^{2\xi} \, d\xi.$$

Il est bien clair d'ailleurs que, la fonction $g(\xi)$ étant convexe, q et $\lambda = q^a$ ne peuvent que croître quand a décroît de p'_1 à zéro, et que les fonctions $\mathfrak{S}_1(r, a)$ et $\mathfrak{T}_1^2(r, a)$ croissent avec q. Notre raisonnement va reposer sur ce que le rapport

$$(26) \qquad \frac{\mathfrak{T}_1^2(r, a)}{\mathfrak{S}_1(r, a)} = \frac{J_1 + J_2}{I_1 + I_2}$$

est aussi une fonction croissante de q.

Admettons provisoirement cette propriété. Il vient

$$\frac{\mathfrak{T}_1^2(r)}{\mathfrak{S}_1(r)} = \frac{\mathfrak{T}_1^2(r, o)}{\mathfrak{S}_1(r, o)} \geqq \frac{\mathfrak{T}_1^2(r, p'_1)}{\mathfrak{S}_1(r, p'_1)} = \frac{1+k}{2} m_1(r),$$

et, compte tenu de la formule (20), que l'on peut appliquer aux fonctions $\mathfrak{S}_1(r)$ et $\mathfrak{F}_1(r)$,

$$\mathfrak{M}_{2,1}^2(r) > \mathfrak{T}_1^2(r) \geqq \frac{1-k^2}{2} m_1(r) \mathfrak{F}_1(r).$$

La constante k pouvant être arbitrairement petite, la formule (25) en résulte, et, une formule analogue s'appliquant aux intégrales prises de $-\infty$ à x, on a par addition de ces formules

$$(27) \qquad \mathfrak{M}_2^2(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2g(\xi)} r^{2\xi} \, d\xi \geqq \frac{1}{2} m_1(r) \mathfrak{F}(r).$$

Il reste à montrer que le rapport (26) croît avec q. Remarquons que

$$d\mathfrak{S}_1(r, a) = \frac{\partial I_1}{\partial q} dq, \qquad d\mathfrak{T}_1^2(r, a) = \frac{\partial J_1}{\partial q} dq,$$

la variation de la fonction intégrée intervenant seule dans ce calcul. C'est seulement si l'on voulait calculer séparément dI_1 et dI_2, dJ_1 et dJ_2, qu'il faudrait tenir compte de la variation de la limite d'intégration $x + a$. Or

$$(28) \qquad \frac{J_1}{I_1} = \frac{1 + q^a}{2} m_1(r)$$

croît avec q (a restant fixe). On a donc

$$\frac{d\mathfrak{T}_1^2(r, a)}{d\mathfrak{S}_1(r, a)} = \frac{\dfrac{\partial J_1}{\partial q}}{\dfrac{\partial I_1}{\partial q}} > \frac{J_1}{I_1}.$$

D'autre part il est évident que

$$\frac{J_1}{I_1} \geqq q^a m_1(r) \geqq \frac{J_2}{I_2}.$$

On en déduit

$$\frac{J_1}{I_1} \geqq \frac{J_1 + J_2}{I_1 + I_2} = \frac{\mathfrak{C}_1^2(r, a)}{\mathcal{S}_1(r, a)},$$

et enfin

$$\frac{d\mathfrak{C}_1^2(r, a)}{d\mathcal{S}_1(r, a)} > \frac{\mathfrak{C}_1^2(r, a)}{\mathcal{S}_1(r, a)}.$$

Quand q varie, la variation relative du numérateur l'emportant sur celle du dénominateur, le rapport (26) croît avec q, ce qui termine la démonstration des formules (25) et (27).

Ces formules ne supposent que la convexité de $g(\xi)$; la continuité de $g'(\xi)$ n'est nullement nécessaire. Pour l'extension de ces résultats au cas des séries entières, on n'a qu'à lier à la série étudiée $F(r)$ une intégrale $\mathcal{F}(r)$ pour laquelle on ait $g(\nu) = g_\nu$, l'interpolation étant linéaire entre deux valeurs consécutives de ν, et les limites d'intégration étant o et $+\infty$. Dans chacune des intégrales $\mathcal{F}(r)$ et $\mathfrak{M}_2^2(r)$, et dans chacun des intervalles $(\nu, \nu+1)$, la fonction intégrée $\varphi(\xi)$ étant une exponentielle, donc convexe, on a

$$\frac{\varphi(\nu)+\varphi(\nu+1)}{2} > \int_\nu^{\nu+1} \varphi(\xi)\,d\xi \geqq \frac{\varphi(\nu)+\varphi(\nu+1)}{2} - \frac{1}{2}|\varphi(\nu)-\varphi(\nu+1)|,$$

et l'addition des formules relatives aux différentes valeurs de ν donne

$$F(r) > \mathcal{F}(r) > F(r) - m(r),$$

$$M_2^2(r) > \mathfrak{M}_2^2(r) > M_2^2(r) - m^2(r),$$

et par suite, compte tenu de la formule (27) et de ce qu'ici $m(r) = m_1(r)$,

$$(29) \qquad M_2^2(r) > \frac{1}{2} m(r)[F(r) - m(r)] = \frac{1}{2} m^2(r)[\omega(r) - 1],$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(29') \qquad \omega_2^2(r) > \frac{1}{2}[\omega(r) - 1],$$

formule d'où l'on déduit encore

$$(29'') \qquad \frac{M_2^2(r)}{m(r)F(r)} = \frac{\omega_2^2(r)}{\omega(r)} > \frac{1}{3}.$$

Ces formules, plus précises que celle du n° 7 et la formule (5), donnent ainsi deux limites entre lesquelles est compris $M_2^2(r)$; l'une est sensiblement la moitié de l'autre. Il est d'ailleurs facile de montrer par un exemple que ces limites ne sauraient être précisées davantage $\Big($sauf en ce qui concerne le second terme des formules (29) et (29′) qui peut être remplacé par une constante plus petite que l'unité, mais non nulle; sans doute $\frac{1}{4}\Big)$.

Considérons à cet effet une suite d'entiers indéfiniment croissants

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p, \ldots,$$

et une suite de nombres positifs indéfiniment croissants

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots.$$

et définissons une fonction $F(r)$ par les conditions

$$r_\nu = \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = \rho_p \qquad \text{pour } \nu_p \leqq \nu < \nu_{p+1},$$

c_0 étant d'ailleurs choisi arbitrairement. La série $F(r)$ comprend alors des groupes de termes qui sont des progressions géométriques. On sait d'ailleurs que, la suite des ρ_p étant donnée, on peut choisir les ν_p assez rapidement croissants pour que un ou au plus deux groupes de termes (celui de rang p si $r = \rho_p$, ceux de rangs p et $p+1$ si r est compris entre ρ_p et ρ_{p+1}) représentent asymptotiquement la série avec une erreur relative négligeable. Dans ces conditions on constate aisément que, pour les valeurs ρ_p de r, le rapport $\frac{M_2^2(r)}{m(r)\,F(r)}$ tend vers l'unité, tandis que pour les valeurs $\sqrt{\rho_p\rho_{p+1}}$ il tend vers $\frac{1}{2}$ si $\frac{\rho_{p+1}}{\rho_p}$ tend vers l'unité.

Les résultats obtenus s'expriment par le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Pour toutes les fonctions entières vérifiant la condition $\mathcal{C}$, on a*

$$m(r)\,F(r) > M_2^2(r) > \frac{1}{2}\,m(r)\,F(r)\left(1 - \frac{1}{\omega(r)}\right),$$

et il est impossible d'appliquer la même inégalité à $a\,M_2^2(r)$, a étant une constante autre que l'unité. (L'une ou l'autre partie de la formule serait fausse, suivant le signe de $a - 1$.)

On peut dire encore que le rapport

$$\frac{M_2^2(r)}{m(r)\,F(r)} = \frac{\omega_2^2(r)}{\omega(r)} \tag{30}$$

est à la limite compris entre $\frac{1}{2}$ et 1; « à la limite » signifie ici pour ω (ou ω_2) infini, et il est impossible d'obtenir des limites plus précises.

9. *Cas des fonctions irrégulières.* — Des conditions de régularité moins restrictives que celles étudiées jusqu'ici permettent évidemment des conclusions analogues aux précédentes, mais moins précises. Ainsi, si l'on multiplie tous les coefficients d'une série $F(r)$ par des facteurs compris entre deux limites positives a et b, chacune des fonctions $m(r)$, $M_2(r)$, $F(r)$ se trouve multipliée par un facteur compris entre ces limites. De même, dans une série vérifiant la condition $\mathcal{C}$ et pour laquelle $\omega(r)$ augmente indéfiniment, si l'on prend les termes de p en p, on ne change pas la valeur principale de $m(r)$, tandis que celles de $M_2^2(r)$ et $F(r)$ deviennent p fois plus petites. Il est facile d'obtenir différentes généralisations de ces remarques simples; l'objet du présent numéro étant de montrer que dans le cas des fonctions irrégulières les résultats précédents concernant la limite inférieure du rapport (30) sont en défaut, et qu'il est en particulier possible que $\omega_2(r)$ soit borné tandis que $\omega(r)$ augmente indéfiniment, nous insisterons sur ces remarques dans la mesure où cela est utile pour l'objet indiqué.

1° *Multiplication des coefficients de* $F(r)$ *par des facteurs lentement variables.* — Nous supposerons, pour plus de netteté, que $F(r)$ vérifie les conditions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Donc $g''(\xi)$ tend vers zéro; $\omega(r)$ et $\omega_2(r)$, d'après les formules (6′), augmentent indéfiniment; $F(r)$ est représenté asymptotiquement par un groupe de $A\omega(r)$ termes entourant le terme maximum, avec une erreur relative aussi petite que l'on veut si A est assez grand, et la variation relative de $g''(\xi)$, donc aussi celle de $\omega(r)$, entre le premier et le dernier terme d'un tel groupe, tend vers zéro pour r infini.

Si alors nous multiplions les coefficients successifs par des facteurs $\lambda_\nu = \lambda(\nu)$ lentement variables, dont la variation relative soit négligeable en même temps que celle de $g''(\nu)$ $\left[\text{il suffit pour cela que } \frac{d\log\lambda(\xi)}{d\log g''(\xi)} \text{ soit borné}\right]$, on peut, pour chaque valeur de r, remplacer tous les multiplicateurs $\lambda(\nu)$ par celui qui correspond au terme maximum; on a ainsi sans erreur la valeur principale de la série considérée. On peut donc dire que la série se trouve *multipliée par* $\lambda[n(r)]$; cette expression, quoique impropre, ne risque pas d'induire en erreur si l'on ne s'occupe que du terme maximum, ou des valeurs principales des sommes analogues à $F(r)$ et $M_2^2(r)$ relatives à la série obtenue.

2° *Formation d'une nouvelle série par le choix de termes de* $F(r)$ *d'espacements lentement variables.* — Désignons par

$$\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_p, \ldots \tag{31}$$

les rangs des termes choisis pour former la nouvelle série $F_1(r)$, et par r_p une suite de valeurs de r telles que $n(r_p) = \nu_p$; on peut par exemple supposer que ν_p et r_p soient liés par la relation (2), où r et ξ seraient remplacés par r_p et ν_p. Il y a plusieurs cas à distinguer suivant l'ordre relatif de l'espacement $\nu_{p+1} - \nu_p$ de deux termes consécutifs choisis dans $F(r)$, et de $\omega(r_p)$; ces cas sont analogues à ceux étudiés au n° 3; nous supposerons de toute façon que ces espacements varient lentement, la variation de $\log(\nu_{p+1} - \nu_p)$ étant au plus de l'ordre de celle de $\log\omega(r_p)$, donc négligeable tant que la variation de r_p n'est pas très grande par rapport à $\omega(r_p)$.

Premier cas : $\nu_{p+1} - \nu_p$ *est très petit par rapport à* $\omega(r_p)$. — Les termes choisis sont alors partout denses sur l'intégrale de Gauss qui représente asymptotiquement $F(r)$; la représentation asymptotique par une intégrale convient à $F_1(r)$, et l'on a

$$m_1(r) \sim m(r), \qquad \frac{F(r)}{F_1(r)} \sim \frac{M_2^2(r)}{M_{2,1}^2(r)} \sim \nu_{p+1} - \nu_p,$$

$m_1(r)$ et $M_{2,1}(r)$ désignant les déterminations de $m(r)$ et $M_2(r)$ relatives à la série $F_1(r)$, et $\nu_{p+1} - \nu_p$ désignant pour chaque r

l'espacement des deux termes de $F_1(r)$ qui comprennent le terme maximum de $F(r)$.

Deuxième cas : $\nu_{p+1} - \nu_p$ est de l'ordre de grandeur de $\omega(r_p)$. — Nous entendons par là que le rapport de ces deux grandeurs reste compris entre deux nombres positifs fixes. Dans ce cas on observe les oscillations déjà indiquées à propos du second cas du n° 3; le rapport $\frac{m_1(r)}{m(r)}$ oscille entre l'unité et un nombre positif inférieur à l'unité, tandis que les rapports $\frac{F(r)}{F_1(r)}$ et $\frac{M_2^2(r)}{M_{2,1}^2(r)}$ ne sont plus équivalents à $\nu_{p+1} - \nu_p$; ils sont seulement de l'ordre de grandeur de cette différence.

Troisième cas : $\nu_{p+1} - \nu_p$ est, au moins pour certaines valeurs de p, très grand par rapport à $\omega(r_p)$. — Dans ce cas les oscillations n'ont plus une amplitude relative bornée. Les valeurs principales $F_1(r)$ et de $M_{2.1}^2(r)$ sont toujours déterminées par un ou deux termes au plus de $F_1(r)$, et seul le plus grand de ces termes peut être (pour les valeurs de r voisines de r_p) de l'ordre de grandeur de $m(r)$.

3° *Formations de séries irrégulières.* — Le procédé employé va consister à partir de la série régulière $F(r)$, et former une nouvelle série $\overline{F}(r)$ en multipliant certains termes de $F(r)$ par des multiplicateurs lentement variables, sans changer les autres. Nous ferons successivement trois choix de termes se rattachant aux trois cas ci-dessus.

Premier cas. — En désignant par $\lambda(\omega)$ une fonction à croissance régulière et lente, telle que $\frac{d \log \lambda(\omega)}{d \log \omega}$ tende vers zéro, mais indéfiniment croissante, nous considérerons une suite de termes de rangs ν_p tels que

$$\nu_{p+1} - \nu_p \sim \frac{\omega(r_p)}{\sqrt{\lambda[\omega(r_p)]}},$$

et nous multiplierons chacun des termes ainsi choisis par $\frac{\omega_2(r_p)}{\lambda[\omega(r_p)]}$. Dans ces conditions, les termes ainsi modifiés détermineront constamment l'ordre de grandeur de $\overline{m}(r)$, mais seront, à cause de leur espacement, sans influence sur les valeurs principales de $\overline{M}_2^2(r)$

et de $\overline{F}(r)$; on a donc

$$\overline{m}(r) \sim m(r)\frac{\omega_2(r)}{\lambda[\omega(r)]} \sim \frac{M_2(r)}{\lambda[\omega(r)]},$$

$$\overline{M}_2^2(r) \sim M_2^2(r), \qquad \overline{F}(r) \sim F(r), \qquad \overline{\omega}^2(r) \sim \lambda[\omega(r)].$$

Ces formules montrent que :

Théorème IX. — *Étant donnée une fonction* F(r) *vérifiant les conditions* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$, *il est possible, en modifiant certains coefficients, sans changer les valeurs principales de* F(r) *et* $\overline{M}_2(r)$, *d'obtenir pour* $\overline{\omega}_2(r)$ *une croissance arbitrairement lente.*

Second cas. — Nous prendrons

$$\nu_{p+1} - \nu_p \sim \omega(r_p)$$

et des multiplicateurs égaux à $\omega_2(r_p)$. Alors $\overline{m}(r)$ est de l'ordre de grandeur de $M_2(r)$, $\overline{M}_2(r)$ est du même ordre de grandeur, tandis que $\overline{F}(r) \sim F(r)$. Donc :

Théorème X. — *Étant donnée une fonction* F(r) *vérifiant les conditions* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$, *il est possible en modifiant certains coefficients, sans changer la valeur principale de* F(r) *ni l'ordre de grandeur de* $M_2(r)$, *d'obtenir une nouvelle série pour laquelle* $\omega_2(r)$ *soit borné* [*naturellement* $\overline{\omega}(r)$ *crott indéfiniment*].

Troisième cas. — $\lambda(\omega)$ ayant la même signification que dans le premier cas, nous prendrons

$$\nu_{p+1} - \nu_p = \omega(r_p)\,\lambda[\omega(r_p)]$$

et des multiplicateurs égaux à $\omega_2(r_p)\,\lambda[\omega(r_p)]$. Dans ce cas, pour les valeurs r_p de r, le terme maximum de $\overline{F}(r)$ a pour valeur principale $M_2(r)\,\lambda\omega(r)$; il est négligeable dans la somme $\overline{F}(r)$, qui reste équivalente à F(r), mais son carré est au contraire prépondérant dans le calcul de $\overline{M}_2^2(r)$. Donc :

Théorème XI. — *Étant donnée une fonction* F(r) *vérifiant les conditions* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$, *il est possible de modifier certains coefficients, sans changer la valeur principale de* F(r) *et en modi-*

fiant d'aussi peu qu'on veut l'ordre de ***grandeur*** *de* $\mathbf{M}_2(r)$, *de manière que les valeurs de* $\overline{\omega}_2(r)$ *relatives à la série modifiée et à une suite de valeurs de* r *indéfiniment croissantes tendent vers l'unité;* au contraire $\omega(r)$ augmente indéfiniment.

Naturellement $\overline{\omega}_2(r)$ ne peut tendre vers l'unité pour r croissant indéfiniment d'une manière quelconque. En effet il arrive une infinité de fois que $\overline{\mathrm{F}}(r)$ ait deux termes égaux à $\overline{m}(r)$, donc que $\overline{\omega}_2(r) > \sqrt{2}$.

10. *Premiers résultats simples concernant* $\mathrm{M}(r)$. — Introduisant maintenant les arguments des coefficients, considérons une fonction $f(z)$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, et telle de plus que l'on ait

$$\mathrm{M}(r) = o[\mathrm{F}(r)]. \tag{32}$$

Si nous reprenons alors les raisonnements du numéro précédent, en nous plaçant pour fixer les idées dans le second cas, où la somme de tous les termes choisis est du même ordre que le plus grand d'entre eux, et aussi que $m(r)$, nous pouvons prendre des multiplicateurs tels que cette somme devienne supérieure à $2\mathrm{M}(r)$, mais infiniment petite par rapport à $\mathrm{F}(r)$. On voit ainsi que :

Théorème XII. — *Étant donnée une fonction $f(z)$ vérifiant les conditions $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, et* (32), *il est possible de modifier certains coefficients, sans changer la valeur principale de* $\mathrm{F}(r)$, *de manière que les fonctions* $\overline{m}(r)$ *et* $\overline{\mathrm{M}}(r)$ *relatives à la série modifiée soient du même ordre de grandeur* $\left(\text{c'est-à-dire que } \frac{\mathrm{M}(r)}{m(r)} \text{ soit borné}\right)$ *mais infiniment petites par rapport à* $\mathrm{F}(r)$.

De même le troisième cas nous conduit au :

Théorème XIII. — *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème XII, il est possible d'obtenir ce résultat que* $\overline{\mathrm{M}}(r)$ *soit infiniment petit par rapport à* $\overline{\mathrm{F}}(r)$, *mais que pour une infinité de valeurs* r *indéfiniment croissantes le rapport* $\frac{\mathrm{M}(r)}{m(r)}$ *tende vers l'unité.*

Quelques précautions sont par contre nécessaires si l'on veut que $\overline{M}(r)$ soit pour tout r du même ordre de grandeur que $M(r)$. On sait que $\log M(r)$ est nécessairement une fonction convexe de $\log r$. L'équation

$$\frac{d \log M(r)}{d \log r} = \nu$$

a donc pour tout entier ν suffisamment grand une racine et une seule ρ_ν; ρ_ν croît avec ν. Nous supposerons que

$$(33) \qquad \rho_{\nu+1} = O(\rho_\nu).$$

Il est à remarquer qu'à première vue cette hypothèse risque d'être en contradiction avec l'hypothèse (32). Des arguments ayant pour effet d'abaisser l'ordre de grandeur $M(r)$ pourraient en effet introduire en même temps une irrégularité incompatible avec la condition (33). Nous montrerons plus loin (n° 20) par un exemple que les hypothèses (32) et (33) sont bien compatibles.

Cherchons alors à former une fonction entière $f_1(z)$ telle que $m_1(r)$, module du terme maximum de la série qui la représente, soit pour tout r du même ordre de grandeur que $M(r)$. En prenant $\log r$ comme abscisse, $\log m_1(r)$ est représenté par une ligne brisée, convexe, dont les côtés ont leurs coefficients angulaires entiers. Nous pouvons définir les modules des termes de $f_1(z)$ en prenant pour cette ligne brisée celle constituée par toutes les tangentes de coefficients angulaires entiers à la courbe qui représente $\log M(r)$ en fonction de $\log r$. Les points de contact successifs ayant pour abscisses ρ_ν, il est bien évident que pour r compris entre ρ_ν et $\rho_{\nu+1}$, on a

$$1 < \log \frac{M(r)}{m_1(r)} < \log \frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu},$$

de sorte que, d'après (33), $m_1(r)$ est bien pour tout r du même ordre de grandeur que $M(r)$.

Dans la série $F_1(r)$ ainsi formée, prenons des termes d'un espacement tel que leur somme soit équivalente à $m_1(r)\sqrt{\lambda(r)}$, $\lambda(r)$ désignant toujours une fonction de croissance régulière arbitrairement lente: multiplions chacun des termes ainsi obtenus par des facteurs équivalents à $\frac{1}{\lambda(r)}$ (r étant lié au rang du terme considéré comme au n° 9), et ajoutons la série ainsi formée, sans l'introduction d'aucun coefficient imaginaire, à $f(z)$. Pour la nouvelle série $\overline{f}(z)$ ainsi obtenue, la somme des termes ajoutés étant négligeable à côté de $M(r)$; on a

$$\overline{M}(r) \sim M(r), \qquad \overline{F}(r) \sim F(r), \qquad m(r) \sim \frac{m_1(r)}{\lambda(r)}.$$

Comme $M(r)$ et $m_1(r)$ sont du même ordre de grandeur, on voit que :

Théorème XIV. — *Étant donnée une fonction vérifiant les conditions* $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, (32) *et* (33), *il est possible, en modifiant certains coefficients, sans changer les valeurs principales de* $F(r)$ *et* $M(r)$, *d'obtenir une série pour laquelle* $\frac{\overline{M}(r)}{\overline{m}(r)}$ *ait une croissance arbitrairement lente.*

Ainsi, bien que la fonction $F(r)$ soit supérieure à $M_2(r)$, il est possible de lui étendre les résultats obtenus au n° 9 au sujet de $M_2(r)$.

11. *Introduction d'une condition de régularité concernant* $M(r)$. — Nous allons maintenant montrer, pour terminer ce premier chapitre, qu'une condition de régularité concernant $M(r)$ peut, au point de vue de la comparaison de $m(r)$ et $M(r)$, donner des résultats comparables à ceux du n° 4. Nous supposerons que

$$ae^{\varphi(r)} \leqq M(r) \leqq be^{\varphi(r)}, \tag{34}$$

a et b étant deux constantes, et $\varphi(r)$ une fonction telle que

$$\varphi''(r) = o[\varphi'^2(r)]. \tag{35}$$

C'est bien une condition de régularité, car pour les fonctions régulières, telles que $\frac{\varphi''(r)}{\varphi'^2(r)}$ ait une limite, écrire que cette limite est nulle revient à dire que $\frac{\varphi(r)}{\log r}$ augmente indéfiniment avec r, condition sans laquelle l'inégalité (34) ne pourrait pas être vérifiée.

La formule de Taylor, pour $\rho = \frac{1}{\varphi'(r)}$, donne alors

$$\varphi(r+\rho) = \varphi(r) + 1 + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$. On en déduit, si $|z| = r$,

$$|f'(z)| < \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} |f(r+\rho e^{i\theta})|\, d\theta < \frac{M(r+\rho)}{\rho} < \frac{eb}{\rho}\, e^{\varphi(r)+\varepsilon},$$

et par suite, si r est assez grand,

$$|f'(z)| < \frac{k}{\rho} M(r),$$

k étant un nombre supérieur à $\frac{b}{a}$ d'aussi peu qu'on le veut. Si alors θ_0 est l'argument d'un point du cercle $|z| = r$ pour lequel $|f(z)|$ atteigne la valeur $M(r)$, dans le voisinage de ce point, on a

$$|f(z)| > M(r)\left(1 - \frac{kr}{\rho}|\theta - \theta_0|\right),$$

et par suite

$$M_2^2(r) > \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0 - \frac{\rho}{kr}}^{\theta_0 + \frac{\rho}{kr}} |f^2(re^{i\theta})|\, d\theta > \frac{\rho M^2(r)}{3\pi kr},$$

c'est-à-dire

$$M^2(r) < 3\pi kr\varphi'(r) M_2^2(r). \tag{36}$$

Si en particulier $r\varphi'(r) \leqq p\varphi(r)$, ce qui caractérise des fonctions d'ordre au plus égal p, il vient

$$M^2(r) < 3\pi kp M_2^2(r) \log\frac{M(r)}{a}. \tag{36'}$$

Ce résultat s'applique en particulier à $F(r)$; on voit ainsi que, moyennant des conditions de régularité imposées à $F(r)$, on a

$$F^2(r) < 3\pi kr\varphi'(r) M_2^2(r), \tag{37}$$

et si $r\varphi'(r) \leqq p\varphi(r)$,

$$F^2(r) < 3\pi kp M_2^2(r) \log\frac{F(r)}{a}. \tag{37'}$$

Dans ces formules, on peut évidemment remplacer $M_2(r)$ par $M(r)$. Les résultats ainsi obtenus sont à rapprocher des résultats déjà cités de M. Brinkmeier. Ils sont moins complets, puisqu'ils supposent une condition de régularité; mais ils présentent par contre l'avantage de s'étendre (quoique sous une forme moins précise) au cas de fonctions de genre infini.

(*à suivre*).