BULLETIN DE LA S. M. F.

B. DEMTCHENKO

Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide prés d'une paroi

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 215-223

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__215_0>

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DANS UN LIQUIDE PRÈS D'UNE PAROI ;

PAR M. BASILE DEMTCHENKO.

Considérons un corps solide J se mouvant avec la vitesse $\vec{U}$ dans un liquide parfait incompressible près d'une paroi fixe ou près d'un corps immobile. La paroi peut s'étendre à l'infini ou bien entourer complètement le liquide. Nous supposons que le mouvement du liquide est irrotationnel et étudions le problème général de l'influence des bords sur le mouvement du corps J. Ce problème présente un grand intérêt pratique pouvant servir de base théorique pour l'étude des forces agissant sur les ailes d'un avion à proximité du sol. Quelques cas particuliers de ce problème ont été traités déjà plusieurs fois. Hicks (1) est le premier qui a résolu le problème général du mouvement de deux cylindres circulaires infinis en supposant le mouvement acyclique. Dans le cas du mouvement cyclique, Hicks a étudié seulement quelques questions particulières (2). Le mouvement permanent autour d'un cylindre circulaire infini placé près d'une paroi plane a été traité par Riabouchinsky (3). Bonder (4) a étudié le mouvement permanent autour de deux cylindres circulaires et, moyennant une transformation conforme, autour de deux profils d'aviation spéciaux et égaux. Nous avons traité le problème du mouvement d'un cylindre infini de rotation dans un vase circulaire infini (5) ainsi que celui du mouvement de deux sphères (6). Nous avons étudié aussi ailleurs le

---

(1) HICKS, *On the motion of two cylinders in a fluid. The (Quarterly Journal of pure and applied mathematics.* vol. XVI, 1879, p. 113-140. 193-219).

(2) HICKS, *On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid, Ibid.*, vol. XVII, 1881, p. 194-202.

(3) D. RIABOUCHINSKY, *Sur les équations générales du mouvement de corps solides dans un liquide incompressible* (*Thèse*, Paris, 1922, p. 112-131).

(4) J. BONDER, *Mouvement de deux cylindres circulaires dans un liquide parfait* [*Société Polytechnique de Varsovie,* t. IV, n° 9, Varsovie, 1925 (en polonais)].

(5) *Thèse*, deuxième Partie. Paris, 1928.

Les problèmes aux limites relatifs à deux sphères (*Bulletin des Sciences mathématiques* t. 51, août 1927. Paris.

mouvement « plan » d'un corps solide près d'une paroi (1). Nous renvoyons le lecteur à l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (2) pour les indications bibliographiques plus complètes sur les travaux relatifs à ces problèmes.

Quand un corps se meut dans un liquide infini, il est assujetti dans le cas général à deux forces : force d'inertie de la masse additive (F_1) et force de Joukowski (F_0). La présence de la paroi non seulement influe sur la grandeur de ces deux forces, mais fait apparaître encore deux autres forces que nous appellerons : force de la variation de la masse additive (F_2) et force cyclique (F_3). Ces forces sont données par les équations de W. Thomson, généralisées par Riabouchinsky (3). Rappelons ces équations. Soient T l'énergie cinétique du mouvement acyclique et K celle du mouvement cyclique, χ le flux relatif du mouvement acyclique à travers la cloison σ qui rend l'espace occupé par le liquide simplement connexe, $\varkappa$ la circulation et ρ la densité du liquide. Considérons un système d'axes immobiles OXYZ et désignons par a, b, c les coordonnées d'un point O_1 invariablement lié avec le corps J. Les composantes X, Y, Z de la pression hydrodynamique sur le cylindre ont la forme :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{a}} + \frac{\partial R}{\partial a},\\ Y &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{b}} + \frac{\partial R}{\partial b},\\ Z &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{c}} + \frac{\partial R}{\partial c},\\ &\left(\dot{a} = \frac{da}{dt},\ \dot{b} = \frac{db}{dt},\ \dot{c} = \frac{dc}{dt}\right); \end{aligned}\right.$$

où

$$(2)\qquad R = T - K + \rho\varkappa\chi.$$

La force (F_1) d'inertie de la masse additive du corps J provient du premier terme de l'expression (2) et est proportionnelle à l'accélération. Du même terme provient la force de la variation de

(1) *Comptes rendus*, t. 185, 1927, p. 1186-1189.
(2) Tome IV, vol. 5, fasc. 2, 1914. Paris, p. 125, 131-133.
(3) D. RIABOUCHINSKY, *Thèse*, Paris 1922. p. 102-103.

la masse additive (F_2) qui est proportionnelle au carré de la vitesse $\vec{U}$ du corps. La force cyclique (F_3) correspond au deuxième terme K et est proportionnelle au carré de la circulation. Le dernier terme $\rho\varkappa\chi$ fait apparaître une force qui est proportionnelle au produit de la vitesse $\vec{U}$ du corps et de la circulation $\varkappa$ et que nous appellerons force généralisée de Joukowski. Étudions chacune de ces forces séparément.

I. ***Masse additive.*** — Pour se rendre compte de l'influence de la paroi sur la grandeur de la masse additive du corps J, calculons la dérivée $\frac{\partial T}{\partial a}$ et mettons-la sous la forme suivante. Soient S la surface du corps J, Σ la surface de la paroi, v le volume occupé par le liquide, φ le potentiel des vitesses, $\vec{q}$ la vitesse d'une particule fluide et u, v, w ses composantes sur les axes OXYZ. On a

$$(3) \qquad \frac{\partial T}{\partial a} = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial a}\int\int\int_v q^2\,d\tau = -\frac{1}{2}\rho\int\int_S q^2 l\,dS - \rho\int\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS,$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale dirigée vers l'intérieur du liquide. Considérons un système d'axes de coordonnées $O_1X_1Y_1Z_1$ parallèles respectivement aux axes OXYZ et invariablement liés au corps J. Soit

$$\varphi(x, y, z;\, a, b, c) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1;\, a, b, c).$$

On a

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{da} = -u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial a} \qquad \left(u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right).$$

En substituant cette expression dans la formule (3) et en prenant en considération que

$$\rho\int\int_S \frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\frac{d\varphi}{dn}\,dS = -2\frac{\partial T}{\partial a},$$

on obtient

$$(5) \qquad \frac{\partial T}{\partial a} = \frac{1}{2}\rho\int\int_S q^2 l\,dS - \rho\int\int_S u\frac{d\varphi}{dn}\,dS.$$

Le premier terme de cette expression peut être transformé comme suit

$$(5') \qquad \frac{1}{2}\rho\int\!\!\int_S q^2 l\, dS = -\frac{1}{2}\rho\int\!\!\int_\Sigma q^2 l\, d\Sigma - \rho\int\!\!\int\!\!\int_v \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\rho\int\!\!\int_\Sigma q^2 l\, d\Sigma - \rho\int\!\!\int\!\!\int_v \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\rho\int\!\!\int_\Sigma q^2 l\, d\Sigma + \rho\int\!\!\int_S u\frac{d\varphi}{dn}\, dS.$$

En substituant cette formule dans l'expression (5) on obtient définitivement

$$(6) \qquad \frac{\partial T}{\partial a} = -\frac{1}{2}\rho\int\!\!\int_\Sigma q^2 l\, d\Sigma.$$

Cette formule nous permet de faire de nombreuses conclusions. Si la paroi Σ s'étend à l'infini et si l'on peut choisir le plan OYZ tel que le plan tangent à Σ ne lui soit jamais normal, alors l ne change pas de signe. Si l'on dirige l'axe OX de la paroi vers le corps J, on a dans ce cas $l > 0$ et par conséquent $\frac{\partial T}{\partial a} < 0$, c'est-à-dire que la masse additive augmente, quand la distance entre la surface S et la paroi Σ diminue. En particulier, si la paroi Σ est rectiligne et coïncide avec le plan OYZ, on a

$$\frac{\partial T}{\partial a} = -\frac{1}{2}\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} q^2\, dy\, dz.$$

Dans le cas d'un cylindre circulaire infini se mouvant près d'une paroi rectiligne, la valeur maximum de la masse additive est $\frac{1}{3}\pi^2 - 1$ fois plus grande que sa valeur non perturbée par la paroi.

La formule (6) pourrait nous faire penser que la masse additive diminue toujours, quand la distance entre le corps et la paroi augmente. L'exemple suivant nous montrera qu'il n'en est rien. Supposons que la surface Σ soit la surface d'un corps immobile et qu'elle subisse une déformation infiniment petite caractérisée par le déplacement normal δn vers l'intérieur du liquide.

D'après le théorème des forces vives, la variation infiniment petite correspondante de l'énergie cinétique est égale à

$$\delta T = \int\int_{\Sigma} (p - p_0)\,\delta n\, d\Sigma, \tag{7}$$

où p est la pression et p_0 sa valeur à l'infini. Cette formule a été indiquée par Riabouchinsky (¹). Si le volume τ engendré par la surface Σ est infiniment petit, on a

$$\delta T = (p - p_0)\tau.$$

En substituant l'équation de la pression, on obtient

$$T - T_0 = \frac{1}{2}\rho(U^2 - q'^2)\tau,$$

où $\vec{q}' = \vec{q} - \vec{U}$ est la vitesse relative d'une particule fluide et T_0 l'énergie cinétique non perturbée. Il suffit de placer la surface infiniment petite Σ dans la région où $U^2 < q'^2$, pour que sa présence diminue la masse additive du corps J.

II. *Force de la variation de la masse additive.* — Les composantes X_2, Y_2, Z_2 de cette force sont définies par la formule

$$X_2 = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} + \frac{\partial T}{\partial a} \tag{8}$$

et par deux autres formules analogues pour Y_2 et Z_2. Dans ces formules, il faut considérer la vitesse $\vec{U}$ du corps J comme uniforme.

Supposons que la paroi soit rectiligne et parallèle au plan OYZ ($l = 1$). L'énergie cinétique ne dépendant dans ce cas que de la coordonnée a, les équations (8) prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\dot{a} + \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \dot{b}}\dot{b} + \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \dot{c}}\dot{c}\right), \\ Y_2 &= -\dot{a}\frac{\partial^2 T}{\partial a\,\partial \dot{b}}, \qquad Z_2 = -\dot{a}\frac{\partial^2 T}{\partial a\,\partial \dot{c}}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

(¹) D. Riabouchinsky, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 185, séance du 18 juillet 1927.

Si la vitesse $\vec{U}$ du corps est normale à la paroi, on obtient

$$(9')\qquad X_2 = -\frac{\partial T}{\partial a} > 0$$

et le corps est repoussé par la paroi. Si la vitesse $\vec{U}$ est parallèle à la paroi, on a

$$(9'')\qquad X_2 = \frac{\partial T}{\partial a} < 0, \qquad Y_2 = 0, \qquad Z_2 = 0$$

et par conséquent, le corps J est attiré vers la paroi.

Remplaçons dans l'expression (9) les dérivées $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$ par les coordonnées x, y, z. L'équation $X_2 = 0$ définira un cône elliptique dont l'axe est parallèle à l'axe OX. Si la vitesse $\vec{U}$ est à l'intérieur de ce cône, X_2 est positif et le corps est repoussé par la paroi. Dans le cas contraire, si la vitesse $\vec{U}$ est à l'extérieur du cône, le corps est attiré par la paroi.

Si la surface S est un cylindre circulaire infini dont l'axe est parallèle à la paroi, la masse additive est la même pour toutes les directions de la vitesse $\vec{U}$ et la force F_2 a une interprétation géométrique simple. Le mouvement étant plan, introduisons les quantités complexes $X_2 + iY_2$ et $\dot{a} + i\dot{b}$. Les équations (9) prennent la forme

$$(10)\qquad X_2 + iY_2 = -\frac{dm}{da}(\dot{a} + i\dot{b})^2,$$

où m est la masse additive du cylindre. Mais

$$X_2 + iY_2 = F_2 e^{i\Theta}, \qquad \dot{a} + i\dot{b} = U e^{i\theta},$$

où Θ et θ sont les angles que forment respectivement la force F_2 et la vitesse $\vec{U}$ avec l'axe OX. La formule (10) donne

$$(10')\qquad F_2 = -\frac{dm}{da}U^2, \qquad \Theta = 2\theta.$$

III. *Force cyclique.* — Désignons par $\vec{\omega}$ la vitesse cyclique d'une particule fluide et par X_3, Y_3, Z_3 les composantes de la force cyclique. D'après les formules (1), (3) et (5') on obtient

$$(11)\qquad X_3 = -\frac{\partial K}{\partial a} = -\frac{1}{2}\rho\int\int_{\Sigma}\omega^2 l\,d\Sigma$$

et deux formules analogues pour Y_3 et Z_3. Si $l > 0$, $X_3 < 0$ et la force cyclique attirent le corps J vers la paroi. Dans le cas d'une paroi plane parallèle à $OYZ(l = 1)$ on a

$$(11')\qquad X_3 = -\frac{1}{2}\rho\int\int_{\Sigma}\omega^2\,d\Sigma,\qquad Y_3 = 0,\qquad Z_3 = 0.$$

Si, en outre, la surface S est un cylindre circulaire infini de rayon r, la formule (11') prend la forme

$$(11'')\qquad X_3 = -\frac{\rho\varkappa^2}{4\pi\sqrt{a^2 - r^2}},$$

où a est la distance de l'axe du cylindre à la paroi.

IV. Force généralisée de Joukowski. Soit $\chi = \dot{a}\chi_1 + \dot{b}\chi_2 + \dot{c}\chi_3$ le flux relatif du mouvement acyclique à travers la cloison σ qui rend l'espace occupé par le liquide simplement connexe. Cette cloison peut fermer l'ouverture pratiquée dans le corps J ou être placée entre le corps et la paroi. Considérons les quantités χ_1, χ_2 et χ_3 comme composantes d'un vecteur, fonction du point a, b, c, que nous désignons par $\vec{\chi}$. D'après les formules (1) on obtient pour la force (F_0) généralisée de Joukowski l'expression suivante [1] :

$$(12)\qquad \vec{F}_0 = \rho\varkappa\left[\vec{U},\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}\right].$$

Nous voyons que la force F_0 est normale aux vecteurs $\vec{U}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}$. Si la paroi est plane, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}$ est parallèle à cette paroi.

---

(1) Nous désignons par les crochets [ ] le produit vectoriel de deux vecteurs. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\chi}$ a pour composantes les quantités

$$\frac{\partial\chi_3}{\partial b} - \frac{\partial\chi_2}{\partial c},\qquad \frac{\partial\chi_1}{\partial c} - \frac{\partial\chi_3}{\partial a},\qquad \frac{\partial\chi_2}{\partial a} - \frac{\partial\chi_1}{\partial b}.$$

Soient

$$\sigma_1 = \int\int_\sigma l\, d\sigma, \qquad \sigma_2 = \int\int_\sigma m\, d\sigma, \qquad \sigma_3 = \int\int_\sigma n\, d\sigma.$$

Considérons σ_1, σ_2, σ_3 comme composantes d'un vecteur $\vec{\sigma}$. Le flux d'entraînement χ_e à travers la cloison σ est égal à

$$(13) \qquad \chi_e = \vec{U}\vec{\sigma} = a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3.$$

Calculons le flux absolu χ_a du mouvement acyclique ainsi que ses dérivées par rapport à a, b, c. D'après une formule connue de l'hydrodynamique, l'énergie cinétique totale $\mathfrak{T}$ du mouvement du liquide est égale à

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathfrak{T} = T + K = \frac{1}{2}\rho\int\int\int_v W^2\, d\tau \\ \quad = -\frac{1}{2}\rho\int\int_S \varphi \frac{d\varphi}{dn}\, dS - \frac{1}{2}\varkappa\rho\chi_a + K, \end{cases}$$

où $\vec{W} = \vec{q} + \vec{\omega}$ est la vitesse totale d'une particule fluide et φ est le potentiel général des vitesses. En prenant en considération la formule (4), on obtient

$$(15) \qquad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial K}{\partial a} = -\frac{1}{2}\rho\int\int_S W^2 l\, dS \\ \qquad + \rho\int\int_S u \frac{d\varphi}{dn}\, dS - \rho\int\int_S \frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\frac{d\varphi}{dn}\, dS. \end{cases}$$

Mais d'après (14) on a

$$-\rho\int\int_S \frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\frac{d\varphi}{dn}\, dS = \varkappa\rho\frac{\partial\chi_a}{\partial a} + 2\frac{\partial T}{\partial a}.$$

En substituant cette expression dans la formule (15) on trouve facilement

$$(16) \qquad \varkappa\rho\frac{\partial\chi_a}{\partial a} = \frac{\partial K}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{1}{2}\rho\int\int_S W^2 l\, dS - \rho\int\int_S u\frac{d\varphi}{dn}\, dS.$$

L'intégrale $\int\int_S W^2 l\, dS$ peut être transformée comme celle de la formule (5'). On obtient ainsi

$$\varkappa\rho\frac{\partial\chi_a}{\partial a} = \frac{\partial K}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial a} - \frac{1}{2}\rho\int\int_\Sigma W^2 l\, d\Sigma.$$

ou, en substituant les formules (6) et (11),

(17) $$\varkappa\rho\,\frac{\partial\chi_a}{\partial a} = -\rho\int\!\!\int_{\Sigma}\dot{\vec{q}}\,\vec{\omega}\,l\,d\Sigma.$$

Le flux relatif du mouvement acyclique étant égal à $\chi = \chi_a - \chi_e$, on obtient finalement

(18) $$\varkappa\rho\,\frac{d\chi}{da} = -\rho\left(\varkappa\vec{U}\,\frac{d\vec{\sigma}}{da}\quad\int\!\!\int_{\Sigma}\dot{\vec{q}}\,\vec{\omega}\,l\,d\Sigma\right).$$

Supposons que la paroi Σ soit plane et parallèle au plan OYZ ($l = 1$), et que la surface S soit cylindrique infinie avec des génératrices parallèles à la paroi. Le mouvement étant plan, l'équation (12) prend la forme

(19) $$X_0 = \varkappa\rho\dot{b}\,\frac{\partial\chi_2}{\partial a}, \qquad Y_0 = -\varkappa\rho\dot{a}\,\frac{\partial\chi_2}{\partial a};$$

ou, d'après la formule (18),

(20) $$\varkappa\rho\,\frac{\partial\chi_2}{\partial a} = -\rho\varkappa - \rho\int_{\Sigma}\dot{\vec{q}}\,\vec{\omega}\,d\Sigma.$$

Le premier terme de cette expression correspond à la force de Joukowski. Le produit $\vec{q}\vec{\omega}$ ayant le même signe que $\varkappa$, nous voyons que la présence de la paroi augmente la valeur absolue de la force de Joukowski. Dans le cas du cylindre circulaire, la force F_0 s'obtient de la force initiale en la multipliant par le coefficient $\frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ où a est la distance entre l'axe du cylindre et la paroi et r est le rayon du cylindre.