BULLETIN DE LA S. M. F.

P. FATOU

Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 98-139
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__98_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME SOUMIS A DES FORCES A COURTE PÉRIODE;

PAR M. P. FATOU.

1. Considérons le système suivant d'équations différentielles que nous supposons du second ordre pour simplifier l'écriture

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f\left(x, y, \dfrac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = g\left(x, y, \dfrac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right), \end{cases}$$

et dont les seconds membres sont des fonctions périodiques, de période 2π, de $\frac{t}{\varepsilon}$, ε désignant un paramètre réel que nous ferons tendre vers zéro. Nous admettrons de plus que ces seconds membres sont développables en séries de Fourier

$$f(x, y, t) = A_0 + A_1 \cos\frac{t}{\varepsilon} + B_1 \sin\frac{t}{\varepsilon} + \ldots + A_p \cos\frac{pt}{\varepsilon} + B_p \sin p\frac{t}{\varepsilon} + \ldots,$$

$$g(x, y, t) = C_0 + C_1 \cos\frac{t}{\varepsilon} + D_1 \sin\frac{t}{\varepsilon} + \ldots + C_p \cos\frac{pt}{\varepsilon} + D_p \sin p\frac{t}{\varepsilon} + \ldots,$$

les A, B, C, D étant des fonctions de x, y, ε qui admettent des dérivées premières continues par rapport à x et y lorsque ces variables restent dans le domaine défini par les inégalités

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \\ y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b \\ \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1). \end{cases}$$

Nous supposerons enfin que pour ces valeurs de x, y, ε, les séries

$$|A_0| + |A_1| + |B_1| + \ldots + |A_p| + |B_p| + \ldots$$
$$|C_0| + |C_1| + |D_1| + \ldots + |C_p| + |D_p| + \ldots$$

sont uniformément convergentes et au plus égales au nombre fixe M;

que de même les séries

$$\left|\frac{\partial A_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial A_1}{\partial x}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial B_p}{\partial x}\right| + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left|\frac{\partial C_0}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial C_1}{\partial y}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial C_p}{\partial y}\right| + \ldots$$

sont uniformément convergentes et au plus égales à H. **Dans ces** conditions les équations (1), satisfaisant aux conditions de Lipschitz, admettent un système de solutions unique prenant les valeurs x_0, y_0 pour $t = t_0$, ces solutions étant définies tout au moins dans l'intervalle $\left(t_0 - \frac{c}{M}, t_0 + \frac{c}{M}\right)$, — c désignant le plus petit des deux nombres a et b —, et pouvant s'obtenir notamment par la méthode classique d'approximations successives, en prenant les constantes x_0 et y_0 comme valeurs de première approximation.

Je considère maintenant le système (3) d'équations différentielles

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_0(x, y, \varepsilon), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = C_0(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

qui s'obtient en réduisant les seconds membres de (1) à leurs valeurs moyennes par rapport à t dans l'intervalle d'une période $(t_0, t_0 + 2\pi\varepsilon)$, et soient x_1, y_1 les solutions de (3) prenant les valeurs x_0, y_0 pour $t = t_0$; elles sont définies tout au moins dans l'intervalle

$$\left(t_0 - \frac{c}{M_0}, t_0 + \frac{c}{M_0}\right)$$

qui contient l'intervalle

$$\left(t_0 - \frac{c}{M}, t_0 + \frac{c}{M}\right)$$

puisque $M_0 \leq M$.

Revenant au système (1) je suppose que, pour calculer les solutions (x, y) par la méthode d'approximations successives, je prenne pour valeurs de première approximation au lieu de (x_0, y_0) les solutions (x_1, y_1) du système (3). Il s'agit de montrer que ces approximations convergent toujours dans le même intervalle

$$\left(t_0 - \frac{c}{M}, t_0 + \frac{c}{M}\right)$$

et de trouver une limite supérieure de $|x_1 - x|$ et $|y_1 - y|$. On constate d'abord que x_1, y_1, substitués à x et y, vérifient bien les inégalités (2); il suffit de se reporter à la démonstration de M. Picard pour l'étude de l'algorithme considéré ici, et qui nous a fourni ces solutions (x_1, y_1); nous supposons bien entendu que t reste compris entre $t_0 - \frac{c}{M}$ et $t_0 + \frac{c}{M}$. En appliquant ensuite les relations

$$x_2 - x_0 = \int_{t_0}^{t} f\left(x_1, y_1, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_2 - y_0 = \int_{t_0}^{t} g\left(x_1, y_1, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n - x_0 = \int_{t_0}^{t} f\left(x_{n-1}, y_{n-1}, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_n - y_0 = \int_{t_0}^{t} g\left(x_{n-1}, y_{n-1}, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on voit de proche en proche que (x_2, y_2), (x_3, y_3), $\ldots$, (x_n, y_n) restent toujours à l'intérieur du domaine défini par (2), lorsque t varie entre les limites indiquées.

Évaluons maintenant la différence $x_2 - x_1$. On a

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 = \int_{t_0}^{t} \Big[& A_1(x_1, y_1, \varepsilon)\cos\frac{t}{\varepsilon} + B_1(x_1, y_1, \varepsilon)\sin\frac{t}{\varepsilon} + \ldots \\ & + A_p(x_1, y_1, \varepsilon)\cos p\frac{t}{\varepsilon} + \ldots \Big] dt. \end{aligned}$$

Intégrons par parties, en écrivant simplement A_p et B_p au lieu de $A_p(x_1, y_1, \varepsilon)$ et $B_p(x_1, y_1, \varepsilon)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 = {} & \varepsilon\left[A_1 \sin\frac{t}{\varepsilon} - B_1\cos\frac{t}{\varepsilon} + \ldots + \frac{A_p}{p}\sin\frac{pt}{\varepsilon} - \frac{B_p}{p}\cos\frac{pt}{\varepsilon} + \ldots\right]_{t_0}^{t} \\ & - \varepsilon\int_{t_0}^{t}\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial A_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}\right)\sin\frac{t}{\varepsilon} - + \ldots \right. \\ & \left. - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial B_p}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial B_p}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt}\right)\cos\frac{pt}{\varepsilon} + \ldots\right] dt. \end{aligned}$$

La partie tout intégrée est évidemment inférieure en valeur absolue à

$$\varepsilon[2\,|\,A_1\,| + 2\,|\,B_1\,| + \ldots + 2\,|\,A_p\,| + 2\,|\,B_p\,| + \ldots]$$

et par conséquent inférieure à $2\varepsilon M$.

Quant à l'intégrale qui multiplie ε au second membre, on voit de suite, en tenant compte de ce que

$$\left|\frac{dx_1}{dt}\right| < M, \qquad \left|\frac{dy_1}{dt}\right| < M,$$

qu'elle est inférieure en valeur absolue à

$$2\,|\,t - t_0\,|\,HM,$$

et comme $|\,t - t_0\,|$ est supposé inférieur à $\frac{c}{M}$, on a finalement

$$|\,x_2 - x_1\,| < 2\varepsilon(M + H).$$

On aura de même

$$|\,y_2 - y_1\,| < 2\varepsilon(M + H).$$

Nous avons ensuite

$$x_3 - x_2 = \int_{t_0}^{t}\left[f\left(x_2, y_2, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) - f\left(x_1, y_1, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right]dt$$

Comme les dérivées premières de f par rapport à x et y sont inférieures à H en valeur absolue, on peut maintenant appliquer la démonstration classique de M. Lindelöff (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. V, § 1). On obtient ainsi

$$|\,x_3 - x_2\,| < \int_{t_0}^{t} H[\,|\,x_2 - x_1\,| + |\,y_2 - \,|\,]\,dt < 4\varepsilon H(M + H)\,|\,t - t_0\,|,$$

et de proche en proche

$$|\,x_4 - x_3\,| < \int_{t_0}^{t} H[\,|\,x_3 - x_2\,| + |\,y_3 - y_2\,|\,]\,dt < 8\varepsilon H^2(M + H)\,\frac{(t - t_0)^2}{1.2},$$

. . . . ,

$$|\,x_{n+2} - x_{n+1}\,| < 2\varepsilon(M + H)\frac{[2H\,|\,t - t_0\,|\,]^n}{1.2\ldots n},$$

$$|\,y_{n+2} - y_{n+1}\,| < 2\varepsilon(M + H)\frac{[2H\,|\,t - t_0\,|\,]^n}{1.2\ldots n},$$

. . . . , ce qui montre que les séries ayant pour termes généraux

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \quad \text{et} \quad |y_{n+2} - y_{n+1}|$$

sont uniformément convergentes quand t varie dans l'intervalle

$$\left(t_0 - \frac{c}{M}, t_0 + \frac{c}{M}\right)$$

et ε entre 0 et 1. On en déduit que x_n et y_n convergent respectivement vers les fonctions limites continues x et y qui sont les solutions du système (1) pour les conditions initiales (x_0, y_0). On obtient de plus une limite supérieure de $|x - x_1|$ et $|y - y_1|$, à savoir

$$|x - x_1| < 2\varepsilon(M + H)e^{2H|t-t_0|},$$

et cette expression étant le produit de ε par une fonction bornée, il s'ensuit que $|x - x_1|$ tend uniformément vers zéro avec ε; de même pour $|y - y_1|$, de sorte que x et y ont pour limites les solutions du système (3) qui correspondent aux valeurs initiales (x_0, y_0) et à la valeur $\varepsilon = 0$ du paramètre; du moins il en sera ainsi pourvu que les fonctions $A_0(x, y, \varepsilon)$ et $C_0(x, y, \varepsilon)$ admettent chacune une dérivée continue par rapport à ε; c'est ce qui résulte du lemme de Poincaré et de la démonstration qu'en donne M. Goursat dans son *Cours d'Analyse* (t. III, Chap. XXIII, § 459-461). En effet d'une part x_1 et y_1 ont pour limites les solutions ξ, η du système (3) qui correspondent à $\varepsilon = 0$, en vertu de ce lemme de Poincaré; et d'autre part les différences $x_1 - x$ et $y_1 - y$ tendent uniformément vers zéro avec ε d'après la démonstration faite plus haut. On peut remarquer d'ailleurs que si A_0 et C_0 sont des fonctions holomorphes de ε pour $\varepsilon = 0$, les différences $x_1 - \xi$ et $y_1 - \eta$ seront elles-mêmes holomorphes en ε et par suite de l'ordre de ε. Donc les différences $x - \xi$ et $y - \eta$ sont encore de l'ordre de ε.

Une autre remarque importante est la suivante. Supposons que les coefficients non constants des séries de Fourier qui représentent f et g, autrement dit A_1, B_1, C_1, D_1, ..., A_p, B_p, ... soient multipliés chacun par un même facteur constant μ. En se reportant au calcul de x_2 et y_2 fait plus haut, on constate aisément que $|x_2 - x_1|$ et $|y_2 - y_1|$ contiennent μ en facteur et que l'on peut écrire

$$|x_2 - x_1| < 2\varepsilon\mu(M + H),$$
$$|y_2 - y_1| < 2\varepsilon\mu(M + H).$$

Ce même facteur μ se retrouvera dans l'expression des limites supérieures des quantités $|x_{n+1} - x_n|$, $|y_{n+1} - y_n|$ pour $n = 2$, 3, ... et l'on aura par suite

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_1| \\ |y - y_1| \end{array}\right\} < 2\mu\varepsilon(M + H)e^{2H|t-t_0|}.$$

Si donc μ et ε sont chacun très petits les différences $x - x_1$, $y - y_1$ étant de l'ordre de $\mu\varepsilon$ seront souvent négligeables dans les applications.

Un cas encore plus particulier est celui où les quantités A_1, B_1, ..., A_p, ... contenant toujours le facteur μ, A_0 et C_0 sont respectivement de la forme $\alpha_0 + \mu\alpha(x, y, \varepsilon)$ et $\gamma_0 + \mu\gamma(x, y, \varepsilon)$, α_0 et γ_0 étant des constantes; les dérivées partielles de toutes les quantités A, B, C, D, y compris A_0 et C_0, contiennent alors μ en facteur et l'algorithme d'approximations successives montre de suite que $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $x_3 - x_2$, ..., $x_{n+1} - x_n$, sont respectivement divisibles par μ, μ, μ^2, ..., μ^n, ...; en vertu des identités

$$x_n - x = (x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \ldots,$$
$$y_n - y = (y_n - y_{n+1}) + (y_{n+1} - y_{n+2}) + \ldots,$$

les premiers membres sont divisibles par μ^n, puisque les séries convergentes des seconds membres ont tous leurs termes divisibles par μ^n; on en déduit que $x_n - x$ et $y_n - y$ sont de l'ordre de $\mu^n\varepsilon$. Cette remarque trouve son application en mécanique céleste, les équations différentielles que vérifient les éléments elliptiques d'une planète étant précisément de cette forme (Lagrange, Jacobi).

2. On peut faire à la démonstration précédente l'objection qu'elle ne s'applique que pour les valeurs de t comprises dans l'intervalle $\left(t_0 - \frac{c}{M}, t_0 + \frac{c}{M}\right)$ où les approximations successives convergent, intervalle moindre en général que celui d'existence, de continuité et d'unicité des solutions. Il est facile toutefois d'étendre la démonstration de proche en proche. Remarquons que les valeurs des fonctions x, y, x_1, y_1 pour $t \neq t_0$ dépendent en général de ε et diffèrent par des quantités du premier ordre en ε des valeurs correspondant à $\varepsilon = 0$; cela résulte pour x_1, y_1, du lemme de Poincaré (*voir* la démonstration citée de M. Goursat), en admettant la continuité des dérivées de A_0 et C_0 par rapport à ε. Nous devons donc, pour étendre le résultat du paragraphe 1, considérer pour les systèmes (1) et (3) des conditions initiales de la forme

$$\begin{cases} u_0 = x_0 + \alpha\varepsilon \\ v_0 = y_0 + \beta\varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'_0 = x_0 + \alpha'\varepsilon, \\ v'_0 = y_0 + \beta'\varepsilon, \end{cases}$$

α, β, α', β' étant des quantités bornées ($< l$ en valeur absolue). Pour que la méthode d'approximations s'applique aux systèmes (1) et (3) avec ces valeurs initiales, il faut supposer

$$|t - t_0| < \frac{c - l\varepsilon}{M}, \qquad \varepsilon < \frac{c}{l},$$

c et M gardant leurs significations. Adoptons les constantes initiales (u_0, v_0) pour (1), et (u'_0, v'_0) pour (3), et soient (x, y), (x_1, y_1) les intégrales correspondantes. Bien que les différences $x_1 - x$, $y_1 - y$ ne soient pas nulles initialement, mais égales à des quantités de l'ordre de ε, on constate que la démonstration du paragraphe 1 s'applique avec des changements insignifiants, et que par suite $x - x_1$, $y - y_1$ sont encore de l'ordre de ε.

3. On peut arriver au même résultat par une méthode qui a l'avantage d'être indépendante de tout procédé de calcul employé pour obtenir des solutions x, y, x_1, y_1. Admettons que lorsque t varie dans l'intervalle borné I, x, y, x_1, y_1 restent toujours compris dans les intervalles $(x_0 - a, x_0 + a)$ et $(y_0 - b, y_0 + b)$ où sont vérifiées les conditions de continuité de certaines fonctions ou de convergence de certaines séries exprimées au début du paragraphe 1. On a alors

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} f\left(x, y, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt, \qquad y - y_0 = \int_{t_0}^{t} g\left(x, y, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt,$$

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t} A_0(x_1, y_1, \varepsilon)\, dt, \qquad y_1 - y_0 = \int_{t_0}^{t} C_0(x_1, y_1, \varepsilon)\, dt,$$

d'où par soustraction

$$
\begin{aligned}
x - x_1 = & \int_{t_0}^{t} [A_0(x, y, \varepsilon) - A_0(x_1, y_1, \varepsilon)]\, dt \\
& + \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos\frac{pt}{\varepsilon} + B_p \sin\frac{pt}{\varepsilon} \right] dt, \\
y - y_1 = & \int_{t_0}^{t} [C_0(x, y, \varepsilon) - C_0(x_1, y_1, \varepsilon)]\, dt \\
& + \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{p=1}^{\infty} C_p \cos\frac{pt}{\varepsilon} + D_p \sin\frac{pt}{\varepsilon} \right] dt.
\end{aligned}
$$

Nous pouvons intégrer terme à terme les séries uniformément convergentes des seconds membres et effectuer d'autre part les intégrations par parties déjà utilisées. La partie tout intégrée de $x - x_1$, à savoir

$$
\varepsilon \left[\sum \frac{1}{p} \left(A_p \sin p\frac{t}{\varepsilon} - B_p \cos\frac{pt}{\varepsilon} \right) \right]_{t_0}^{t}
$$

est inférieure en valeur absolue à $2\varepsilon M$. D'autre part l'intégrale

$$
\begin{aligned}
-\frac{\varepsilon}{p} \int_{t_0}^{t} \Bigg[& \left(\frac{\partial A_p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_p}{\partial x} \frac{dy}{dt} \right) \sin\frac{pt}{\varepsilon} \\
& - \left(\frac{\partial B_p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial B_p}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \cos\frac{pt}{\varepsilon} \Bigg] dt
\end{aligned}
$$

est inférieure en valeur absolue à

$$
\varepsilon M \int_{t_0}^{t} \frac{1}{p} \left[\left| \frac{\partial A_p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial B_p}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial A_p}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial B_p}{\partial y} \right| \right] dt.
$$

On obtient donc

$$
x - x_1 = \int_{t_0}^{t} [A_0(x, y, \varepsilon) - A_0(x_1, y_1, \varepsilon)]\, dt + \varepsilon P
$$

avec

$$
P < 2M + 2MH(t - t_0);
$$

P est ainsi une fonction continue de t, qui ne possède pas l'*égale continuité* quand ε tend vers zéro, mais qui reste bornée quand ε et t varient dans les limites indiquées. On obtient un résultat analogue pour $y - y_1$, de sorte qu'on peut écrire

$$
y - y_1 = \int_{t_0}^{t} [C_0(x, y, \varepsilon) - C_0(x_1, y_1, \varepsilon)]\, dt + \varepsilon Q,
$$

Q ayant une signification analogue à P. En remarquant maintenant que A_0 et C_0 ont des dérivées partielles du premier ordre bornées par rapport à x et y, on déduit de là

$$x - x_1 = \int_{t_0}^{t} [E(x - x_1) + F(y - y_1)]\,dt + \varepsilon P,$$

$$y - y_1 = \int_{t_0}^{t} [E'(x - x_1) + F'(y - y_1)]\,dt + \varepsilon Q,$$

ou en posant $x - x_1 = u$, $y - y_1 = v$

$$u = \int_{t_0}^{t} (E u + F v)\,dt + \varepsilon P,$$

$$v = \int_{t_0}^{t} (E' u + F' v)\,dt + \varepsilon Q,$$

E, F, E', F' désignent comme P et Q des fonctions continues de t, d'ailleurs inconnues, mais bornées pour les valeurs de t et de ε considérées. Si l'on regarde ces six fonctions comme données, les équations précédentes, qui sont des équations différentielles linéaires, peuvent aussi être regardées comme des équations intégrales linéaires du type de Volterra à deux fonctions inconnues u et v. Posons

$$u = \varepsilon U, \quad v = \varepsilon V;$$

le facteur ε disparaît et il vient

$$U = \int_{t_0}^{t} (E U + F V)\,dt + P,$$

$$V = \int_{t_0}^{t} (E' U + F' V)\,dt + Q.$$

On sait que ce système admet une solution unique qui s'obtient par un algorithme d'approximations successives (Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, Chap. XXX, § 548). Comme E, F, ..., Q sont des fonctions bornées, l'algorithme de Volterra conduit à des solutions bornées pour les valeurs considérées de t et de ε. Il s'ensuit que $u = x - x_1 = \varepsilon U$ et $v = y - y_1 = \varepsilon V$ sont bien de l'ordre de ε. Enfin on vérifiera aisément que si $\frac{\partial A_0}{\partial x}$, $\frac{\partial A_0}{\partial y}$, $\frac{\partial C_0}{\partial x}$, $\frac{\partial C_0}{\partial y}$, A_1, B_1, ... sont tous multipliés par un facteur μ, ce facteur se retrouvera dans E, F, P, E', F', Q et par suite dans U et V; mais ce résultat est moins précis que celui du paragraphe 1.

Observons encore que les démonstrations qui précèdent restent valables, si les fonctions A_0 et C_0 dépendent explicitement de t et sont, par exemple, des fonctions périodiques de t de période indépendante de ε, ou plus généralement des fonctions de x, y, t, ε, continues ainsi que leurs dérivées premières pour $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ [1]. Enfin il est clair que les résultats s'appliquent à tout système analogue de n équations différentielles du premier ordre à n inconnues.

4. Il peut être commode d'utiliser dans les questions de ce genre le principe d'Arzela concernant les suites de fonctions *également continues* d'une variable réelle, et qui sert de fondement à de nombreuses recherches modernes concernant le calcul des variations. Bien que son emploi ne soit pas indispensable ici, indiquons néanmoins comment il conduit à trouver les fonctions limites des solutions du système (1) quand on fait tendre ε vers zéro. Considérons un système de solutions de (1), bien déterminé lorsqu'on se donne ε, et variant avec cette quantité; supposons de plus que, t variant dans un certain intervalle I, le point (x, y) reste toujours à l'intérieur d'un domaine tel que les seconds membres des équations (1) restent inférieurs en valeur absolue à un nombre fixe M, indépendant de ε. Dans ces conditions les solutions considérées $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ possèdent l'égale continuité au sens d'Arzela, puisque leurs dérivées premières sont inférieures à M en valeur absolue; si l'on donne à ε une suite quelconque de valeurs, en infinité dénombrable, et tendant vers zéro, de cette suite de valeurs on peut en extraire une autre telle que les fonctions correspondantes $x(t)$, $y(t)$ tendent uniformément vers les fonctions limites $\xi(t)$, $\eta(t)$; l'une de ces fonctions peut être la constante infinie, circonstance qui ne se présentera évidemment pas si les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont bornées dans leur ensemble pour $t = t_0$. En nous plaçant dans le premier cas, nous aurons

$$\xi(t) - \xi(t_0) = \lim \int_{t_0}^{t} f\left(x, y, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt,$$

$$\eta(t) - \eta(t_0) = \lim \int_{t_0}^{t} g\left(x, y, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dt.$$

[1] On peut supposer plus généralement que les A_p, B_p, C_p, D_p sont des fonctions

Si l'on suppose que, dans le domaine de variation considéré pour le point (x, y), les séries

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\left[\left|\frac{\partial A_p}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial B_p}{\partial x}\right|\right], \quad \ldots, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}\left[\left|\frac{\partial C_p}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial D_p}{\partial y}\right|\right]$$

soient uniformément convergentes et moindres qu'un nombre fixe H, l'intégration par parties déjà utilisée au paragraphe 1 montre que les fonctions limites $\xi(t)$, $\eta(t)$ vérifient les équations différentielles

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A_0(\xi, \eta, o), \\ \frac{d\eta}{dt} &= C_0(\xi, \eta, o), \end{aligned} \right.$$

qui sont par conséquent les limites, pour ε tendant vers zéro, des solutions du système (3) qui correspondent aux valeurs initiales

$$\xi_0 = \xi(t_0), \qquad \eta_0 = \eta(t_0).$$

Ce mode de raisonnement diffère peu de celui du paragraphe 3, mais nous n'avons pas supposé ici que les qualités $x(t_0)$, $y(t_0)$ soient indépendantes de ε.

Supposons en particulier que les équations (1) admettent des solutions périodiques de période $2\pi\varepsilon$, et telles que les valeurs correspondantes de x et de y satisfassent constamment aux conditions de continuité ou de convergence que nous connaissons. Les fonctions limites des fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont nécessairement des constantes, car la condition

$$x(t + 2\lambda\pi\varepsilon) - x(t) = o,$$

où λ est un entier arbitraire, a pour conséquence en passant à la limite

$$\xi(t + t') - \xi(t) = o,$$

où t' est arbitraire, puisqu'on peut choisir λ de manière que

$$|t' - 2\lambda\pi\varepsilon| \leqq \pi\varepsilon.$$

---

de x, y, t, ε, continues par rapport à ces variables, même pour $\varepsilon = o$. Aux hypothèses déjà énoncées on devra ajouter celle de la convergence uniforme des séries $\sum \frac{1}{p}\left|\frac{dA_p}{dt}\right|, \ldots, \sum \frac{1}{p}\left|\frac{dD_p}{dt}\right|$; les modifications à introduire dans les demonstrations sont insignifiantes.

Il suit de là que $\xi(t)$ est une constante, de même que $\eta(t)$. D'ailleurs ξ et η vérifient les équations (4). Par conséquent les trajectoires fermées, correspondant aux solutions de période $2\pi\varepsilon$ du système (1), si elles ne s'éloignent pas à l'infini, tendent vers des points fixes (a, b) dont les coordonnées vérifient les équations

$$A_0(a, b, 0) = 0,$$
$$C_0(a, b, 0) = 0,$$

et sont par conséquent des solutions constantes du système (4). Nous dirons, par une analogie mécanique évidente, que (a, b) est une position d'équilibre pour les équations (4). Ces positions d'équilibre sont généralement isolées; elles peuvent aussi former des lignes, ou, dans le cas où l'on aurait affaire à un système différentiel d'ordre quelconque, des variétés à plusieurs dimensions.

Donnons-nous inversement une position d'équilibre pour les équations (4) et recherchons si ce point ne serait pas limite de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques du système (1), avec une période évanouissante $2\pi\varepsilon$. Si dans les équations (1) on fait le changement de variable

$$\frac{t}{\varepsilon} = u,$$

ces équations deviennent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \varepsilon f(x, y, u, \varepsilon), \\ \frac{dy}{du} &= \varepsilon g(x, y, u, \varepsilon), \end{aligned}\right.$$

et les solutions $x(t)$, $y(t)$ de période $2\pi\varepsilon$ des équations (1) deviennent des solutions de période 2π des équations (5). Réciproquement, un système de solutions $x(u)$, $y(u)$ des équations (5), admettant la période 2π, devient, en posant $u = \frac{t}{\varepsilon}$, un système de solutions des équations (1) avec la période $2\pi\varepsilon$. Nous conviendrons de donner à ε des valeurs tant négatives que positives; remarquons que si l'on pose

$$u = -u', \qquad \varepsilon = -\varepsilon',$$

les équations (5) deviennent

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{du'} = \varepsilon' f(x, y, -u', -\varepsilon') \\[2mm] \dfrac{dy}{du'} = \varepsilon' g(x, y, -u', -\varepsilon'), \end{cases}$$

ou, en supprimant les accents,

$$\frac{dx}{du} = \varepsilon f(x, y, -u, -\varepsilon),$$
$$\frac{dy}{du} = \varepsilon g(x, y, -u, -\varepsilon),$$

et ces équations ne sont pas identiques à (5), à moins que f et g ne soient des fonctions paires de u et de ε. Le problème de la recherche des solutions de période 2π reçoit donc ainsi une extension véritable et l'on devra examiner s'il est possible de donner à ε des valeurs positives, convenant par conséquent au problème initial. Nous supposerons dans ce qui suit que les seconds membres de (5) sont des fonctions de ε holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et nous nous placerons le plus souvent dans le cas simple où les fonctions f et g sont indépendantes de ε.

Soit toujours (a, b) une position d'équilibre pour les équations (4); nous supposerons que ce point a été pris pour origine ($a = 0$, $b = 0$) et nous rechercherons les solutions de (5) de période 2π, dépendant analytiquement de ε et devenant identiquement nulles pour $\varepsilon = 0$. Les solutions de (5) prenant les valeurs ξ, η pour $u = u_0$ sont, comme on sait, représentables par les séries

$$x = \xi + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots + \varepsilon^n X_n + \ldots,$$
$$y = \eta + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \ldots + \varepsilon^n Y_n + \ldots,$$

les X_i, Y_i étant des fonctions analytiques de ξ, η, u, régulières quand $|\xi|$, $|\eta|$, $|u - u_0|$ sont inférieures à certaines constantes, et les séries qui précèdent étant alors uniformément convergentes pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$; l'intervalle de variation de u que l'on définit ainsi croît d'ailleurs indéfiniment avec $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ et peut être supposé supérieur à 2π en prenant ε_0 assez petit (*voir* à ce sujet les Traités d'Analyse de M. Picard et de M. Goursat). En procédant par identification, on trouve aisément que les X_i, Y_i, qui sont identiquement nuls pour $u = u_0$, s'obtiennent de proche en proche par des quadratures

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
X_1 &= \int_{u_0}^{u} f(\xi, \eta, u, o)\, du, \qquad Y_1 = \int_{u_0}^{u} g(\xi, \eta, u, o)\, du,\\
X_2 &= \int_{u_0}^{u} \left[X_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta, u, o) + Y_1 \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta, u, o) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\xi, \eta, u, o) \right] du,\\
Y_2 &= \int_{u_0}^{u} \left[X_1 \frac{\partial g}{\partial x}(\xi, \eta, u, o) + Y_1 \frac{\partial g}{\partial y}(\xi, \eta, u, o) + \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\xi, \eta, u, o) \right] du,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Exprimons maintenant la périodicité

$$
\frac{1}{2\pi}[x(u_0 + 2\pi) - x(u_0)] = o,
$$
$$
\frac{1}{2\pi}[y(u_0 + 2\pi) - y(u_0)] = o,
$$

il vient en supprimant le facteur ε dans les premiers membres

$$
\frac{1}{2\pi}[X_1(u_0 + 2\pi) - X_1(u_0)] + \frac{1}{2\pi}[X_2(u_0 + 2\pi) - X_2(u_0)]\varepsilon + \ldots = o,
$$
$$
\frac{1}{2\pi}[Y_1(u_0 + 2\pi) - Y_1(u_0)] + \frac{1}{2\pi}[Y_2(u_0 + 2\pi) - Y_2(u_0)]\varepsilon + \ldots = o
$$

ou en tenant compte de l'expression de X_i et de Y_i et du développement de f et g en séries de Fourier de la variable u

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_0(\xi, \eta, o) + \varepsilon \Phi_1(\xi, \eta, u_0) + \ldots &= o,\\
C_0(\xi, \eta, o) + \varepsilon \Psi_1(\xi, \eta, u_0) + \ldots &= o.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous supposons

$$
A_0(o, o, o) = o,
$$
$$
C_0(o, o, o) = o,
$$

de sorte que nos équations de condition sont vérifiées pour

$$
\varepsilon = \xi = \eta = o.
$$

Il s'agit de voir si, pour de petites valeurs réelles de ε, les équations (7) nous donnent de petites valeurs réelles de ξ et de η. Il suffit pour cela que le déterminant fonctionnel des premiers membres des équations (7) soit différent de zéro pour $\varepsilon = 0$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_0}{\partial \xi} & \dfrac{\partial A_0}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial C_0}{\partial \xi} & \dfrac{\partial C_0}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ou en posant

$$A_0(\xi, \eta, 0) = \alpha\xi + \beta\eta + \ldots,$$
$$C_0(\xi, \eta, 0) = \gamma\xi + \delta\eta + \ldots$$

que l'on ait $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. En effet les équations (7) nous donneront alors pour ξ, η des développements en séries convergentes procédant suivant les puissances croissantes de ε et nuls pour $\varepsilon = 0$, les coefficients étant des fonctions analytiques de u_0

$$\xi = P(\varepsilon, u_0),$$
$$\eta = Q(\varepsilon, u_0).$$

A toute valeur suffisamment petite de ε correspond ainsi une solution périodique qui peut être regardée comme définie par les relations précédentes, en faisant varier u_0 de 0 à 2π. Il est à remarquer toutefois que cette méthode de calcul ne donnera pas directement ξ, η sous forme de séries de Fourier convergentes pour toutes les valeurs de u_0; on ne parviendra à ce résultat qu'en faisant subir à la méthode des modifications profondes, dont Poincaré a donné un exemple (*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, Chap. III, § 45). Quoi qu'il en soit, nous avons démontré l'existence de solutions périodiques dépendant du paramètre ε, qui peut prendre des valeurs positives ou négatives, et tendant vers (0, 0) avec ε; il s'ensuit que les équations (1) admettent des solutions de période $2\pi\varepsilon$, les trajectoires correspondantes tendant vers la position d'équilibre (a, b) pour les équations (4).

Si le déterminant fonctionnel envisagé est nul pour $\xi = \eta = \varepsilon = 0$, il devient nécessaire, pour discuter de la réalité des solutions, de considérer dans l'équation (7) les termes de degré 1, 2, ... en ε. Calculons les termes $\varepsilon\Phi_1$, $\varepsilon\Psi_1$, en nous plaçant dans le cas où

$f(x, y, u)$, $g(x, y, u)$ sont indépendants de ε. On a

$$X_1 = A_0(\xi, \eta)(u - u_0)$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p(\xi, \eta)(\sin pu - \sin pu_0) - B_p(\xi, \eta)(\cos pu - \cos pu_0)}{p},$$
$$Y_1 = C_0(\xi, \eta)(u - u_0)$$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_p(\xi, \eta)(\sin pu - \sin pu_0) - D_p(\xi, \eta)(\cos pu - \cos pu_0)}{p},$$

ce que nous écrirons encore en abrégé

$$X_1 = A_0(u - u_0) + \Theta(u) - \Theta(u_0),$$
$$Y_1 = C_0(u - u_0) + \Lambda(u) - \Lambda(u_0)$$

avec des significations évidentes pour Θ et Λ.

On a ensuite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta, u) = \frac{\partial A_0}{\partial x}(\xi, \eta) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\partial A_p}{\partial x}(\xi, \eta) \cos pu + \frac{\partial B_p}{\partial x}(\xi, \eta) \sin pu,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta, u) = \frac{\partial A_0}{\partial y}(\xi, \eta) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\partial A_p}{\partial y}(\xi, \eta) \cos pu + \frac{\partial B_p}{\partial y}(\xi, \eta) \sin pu$$

et des formules analogues pour $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$. Calculons maintenant, en tenant compte de la formule de Parseval, l'expression

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \Big\{ [A_0(u - u_0) + \Theta(u) - \Theta(u_0)] \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta, u)$$
$$+ [C_0(u - u_0) + \Lambda(u) - \Lambda(u_0)] \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta, u) \Big\} du.$$

Il vient, en écrivant $\frac{\partial A_p}{\partial \xi}$ au lieu de $\frac{\partial A_p}{\partial x}(\xi, \eta)$,

$$\Phi_1 = \pi A_0 \frac{\partial A_0}{\partial \xi} + \pi C_0 \frac{\partial A_0}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p \frac{\partial B_p}{\partial \xi} - B_p \frac{\partial A_p}{\partial \xi} + C_p \frac{\partial B_p}{\partial \eta} - D_p \frac{\partial A_p}{\partial \eta}}{p}$$
$$- A \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{\partial B_p}{\partial \xi} - C_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{\partial B_p}{\partial \eta} - \Theta(u_0) \frac{\partial A_0}{\partial \xi} - \Lambda(u_0) \frac{\partial A_0}{\partial \eta}.$$

On obtient de même

$$\Psi_1 = \pi A_0 \frac{\partial C_0}{\partial \xi} + \pi C_0 \frac{\partial C_0}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p \frac{\partial D_p}{\partial \xi} - B_p \frac{\partial C_p}{\partial \xi} + C_p \frac{\partial D_p}{\partial \eta} - D_p \frac{\partial C_p}{\partial \eta}}{p}$$

$$- A_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{\partial D_p}{\partial \xi} - C_0 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{\partial D_p}{\partial \eta} - \Theta(u_0) \frac{\partial C_0}{\partial \xi} - \Lambda(u_0) \frac{\partial C_0}{\partial \eta}.$$

Ceci posé, admettons que le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ étant nul, les coefficients α, β, γ, δ ne soient pas tous nuls. Par un changement de variables linéaires équivalent à un changement d'axes de coordonnées (x, y), on peut faire en sorte que A_0 et C_0, développés suivant les puissances de x et y, commencent respectivement par les termes

$$\alpha x + P_2(x, y) + \ldots,$$
$$\gamma x + Q_2(x, y) + \ldots.$$

Les expressions $A_0(\xi, \eta)$, $C_0(\xi, \eta)$, $\frac{\partial A_0}{\partial \eta}$, $\frac{\partial C_0}{\partial \eta}$ sont alors nulles pour $\xi = \eta = 0$. D'autre part on peut choisir u_0 de manière que $\Theta(u_0)$, fonction périodique de u_0 à valeur moyenne nulle, soit nulle pour $\xi = \eta = 0$. Dans l'expression de Φ_1 et de Ψ_1 les seuls termes qui ne sont pas nuls pour $\xi = \eta = 0$ sont les premières sommes infinies qui y figurent dont nous désignerons les valeurs en ce point par k et k'. Dans le développement des premiers membres de (7) suivant les puissances ascendantes de ξ, η, ε, les termes du premier degré sont ainsi

$$\alpha\xi + k\varepsilon,$$
$$\gamma\xi + k'\varepsilon.$$

Plaçons-nous dans le cas le plus général où les coefficients α, γ, k, k' sont tous différents de zéro et où $\alpha k' - k\gamma$ n'est pas nul. La première condition (7) donnera alors pour ξ un développement procédant suivant les puissances ascendantes de ε et de η et commençant par le terme

$$-\frac{k}{\alpha}\varepsilon.$$

La deuxième condition, en y remplaçant ξ par sa valeur sera alors

$$\left(k' - \frac{\gamma k}{\alpha}\right)\varepsilon + R_2(\varepsilon, \eta) + R_3(\varepsilon, \eta) + \ldots = 0,$$

R_2, R_3 désignant les groupes de termes homogènes de degrés 2, 3, ... en ε, η. Cette équation représente dans le plan (ε, η) une courbe ayant un point simple à l'origine et tangente à la droite $\varepsilon = o$. Dans le cas général, c'est-à-dire si le coefficient de η^2 dans R_2 n'est pas nul, on en déduira pour η un développement procédant suivant les puissances de $(h\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$, h constante positive ou négative, qui par conséquent ne sera réel que pour les valeurs soit positives, soit négatives de ε. Les solutions périodiques obtenues conviendront donc soit au problème proposé, soit au problème étendu suivant la remarque faite plus haut.

Il est trop long d'examiner tous les cas particuliers qui peuvent se présenter et la discussion se complique avec le nombre des variables, mais il est évident que le résultat concernant le cas général, où le déterminant fonctionnel des seconds membres des équations réduites n'est pas nul pour la position d'équilibre considérée, s'étend immédiatement à un système d'ordre n.

On peut en dire autant du cas que nous allons maintenant examiner où les termes A_0, C_0 sont identiquement nuls, de sorte que tout point du plan est une position d'équilibre pour les équations (4). Dans ce cas les équations de périodicité ont leurs premiers membres divisibles par ε^2 et deviennent après suppression de ce facteur

$$\Phi_1(\xi, \eta) + \varepsilon\Phi_2(\xi, \eta) + \ldots = o,$$
$$\Psi_1(\xi, \eta) + \varepsilon\Psi_2(\xi, \eta) + \ldots = o.$$

Φ_1 et Ψ_1 se réduisent ici aux fonctions de ξ et de η, représentées chacune par la somme d'une infinité de termes, qui figurent dans les expressions obtenues plus haut. Il n'y aura de solution périodique voisine du point d'équilibre considéré ($\xi = \eta = o$) que si Φ_1 et Ψ_1 s'y annulent simultanément. On est ramené à la démonstration précédente, Φ_1 et Ψ_1 remplaçant A_0 et C_0.

Un point d'intersection des deux courbes $\Phi_1 = o$, $\Psi_1 = o$ conviendra toujours si le déterminant fonctionnel des premiers membres n'est pas nul en ce point. On doit d'ailleurs remarquer que dans ce cas toutes les solutions de (1) sont périodiques au premier degré d'approximation par rapport à ε.

Enfin les remarques de Poincaré concernant le cas où le système (1) admet des intégrales premières uniformes trouvent encore ici leur application. Il n'y a pas lieu d'y insister puisque je ne ferais que répéter les démonstrations de Poincaré (voir *Méthodes nouvelles*, t. I, Chap. III, p. 82-88).

5. Nous donnerons plus loin une application dynamique de ces sortes de solutions périodiques; mais nous allons pour l'instant revenir à l'étude des solutions générales en considérant un système particulier d'équations différentielles du quatrième ordre de la forme suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = A_0(x,y) + A_1(x,y)\cos\dfrac{t}{\varepsilon} + B_1(x,y)\sin\dfrac{t}{\varepsilon} \\ \qquad + \ldots + A_p(x,y)\cos p\dfrac{t}{\varepsilon} + B_p(x,y)\sin p\dfrac{t}{\varepsilon} + \ldots, \\ \dfrac{d_2y}{dt^2} = C_0(x,y) + C_1(x,y)\cos\dfrac{t}{\varepsilon} + D_1(x,y)\sin\dfrac{t}{\varepsilon} \\ \qquad + \ldots + C_p(x,y)\cos p\dfrac{t}{\varepsilon} + D_p(x,y)\sin p\dfrac{t}{\varepsilon} + \ldots. \end{cases}$$

Pour plus de simplicité nous supposons ici les A, B, C, D indépendants de ε. Nous admettrons en outre que pour x compris entre $x_0 - a$ et $x_0 + a$, y compris entre $y_0 - b$ et $y_0 + b$, et pour toutes les valeurs réelles de $\frac{t}{\varepsilon}$, les seconds membres sont des fonctions analytiques régulières de ces trois variables; les séries qui les représentent sont donc absolument et uniformément convergentes; il en est de même des séries obtenues en intégrant terme à terme un nombre quelconque de fois par rapport à $\frac{t}{\varepsilon}$, et dérivant ensuite les divers termes un nombre quelconque de fois par rapport à x ou y, c'est-à-dire que, par exemple, les séries

$$\sum_p \frac{1}{p^q}\left[\frac{\partial A_p}{\partial x}\cos\left(p\frac{t}{\varepsilon} + q\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial B_p}{\partial x}\sin\left(p\frac{t}{\varepsilon} + q\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\sum_p \frac{1}{p^q}\left[\frac{\partial^2 A_p}{\partial x\,\partial y}\cos\left(p\frac{t}{\varepsilon} + q\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial^2 B_p}{\partial x\,\partial y}\sin\left(p\frac{t}{\varepsilon} + q\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sont uniformément convergentes et représentent des fonctions analytiques de x, y, $\frac{t}{\varepsilon}$, dans le domaine considéré. Nous considérons comme précédemment le système *réduit*

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = A_0(x_1, y_1), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = C_0(x_1, y_1). \end{cases}$$

A côté de la solution (x, y) de (8) définie par les valeurs initiales (x_0, y_0, x'_0, y'_0) pour $t = t_0$, nous considérons la solution de (9) définie par les valeurs initiales

$$x_0, \quad y_0, \quad x'_0 + \delta x'_0, \quad y'_0 + \delta y'_0,$$

les accroissements $\delta x'_0$, $\delta y'_0$, que nous déterminerons dans un instant étant des quantités du premier ordre par rapport à ε.

Appliquons la méthode d'approximations successives comme au paragraphe 1, en prenant comme valeurs de première approximation pour x et y les solutions x_1 et y_1 de (9) que nous venons de définir; soient x_2, y_2 les valeurs de deuxième approximation; nous aurons

$$\frac{d}{dt}(x_2 - x_1) + \delta x'_0 = \int_{t_0}^{t} f\left(x_1, y_1, \frac{t}{\varepsilon}\right) dt,$$

$$\frac{d}{dt}(y_2 - y_1) + \delta y'_0 = \int_{t_0}^{t} g\left(x_1, y_1, \frac{t}{\varepsilon}\right) dt.$$

La première de ces équations devient, en faisant au second membre la même intégration partielle qu'au paragraphe 1,

$$(10)\quad \frac{d}{dt}(x_2 - x_1) + \delta x'_0 = \varepsilon \left[\sum \frac{A_p \sin \frac{pt}{\varepsilon} - B_p \cos \frac{pt}{\varepsilon}}{p} \right]_{t_0}^{t} - \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left[\sum \frac{\frac{dA_p}{dt} \sin \frac{pt}{\varepsilon} - \frac{dB_p}{dt} \cos \frac{pt}{\varepsilon}}{p} \right] dt$$

en écrivant pour abréger A_p, B_p au lieu de $A_p(x_1, y_1)$, $B_p(x_1, y_1)$. On a en outre

$$\frac{dA_p}{dt} = \frac{\partial A_p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial A_p}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt},$$

$$\frac{dB_p}{dt} = \frac{\partial B_p}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial B_p}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt}.$$

Effectuons une deuxième intégration partielle sur le second terme du second membre de (10). Nous aurons

$$
\begin{aligned}
(11)\quad \frac{d(x_2-x_1)}{dt}+\delta x'_0 = {} & \varepsilon[\Phi(t)-\Phi(t_0)] \\
& + \varepsilon^2\left(\frac{dx_1}{dt}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\dfrac{\partial A_p}{\partial x_1}\cos\dfrac{pt}{\varepsilon}+\dfrac{\partial B_p}{\partial x_1}\sin\dfrac{pt}{\varepsilon}}{p} \\
& + \varepsilon^2\,\frac{dy_1}{dt}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\dfrac{\partial A_p}{\partial y_1}\cos\dfrac{pt}{\varepsilon}+\dfrac{\partial B_p}{\partial y_1}\sin\dfrac{pt}{\varepsilon}}{p} \\
& - \varepsilon^2\int_{t_0}^{t}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\dfrac{d^2A_p}{dt^2}\cos\dfrac{pt}{\varepsilon}+\dfrac{d^2B_p}{dt^2}\sin\dfrac{pt}{\varepsilon}}{p}\right]dt
\end{aligned}
$$

et une équation analogue pour $\dfrac{d(y_2-y_1)}{dt^2}$. Dans la dernière intégrale, on doit remplacer $\dfrac{d^2A_p}{dt^2}$ par

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial A_p}{\partial x_1}A_0(x_1, y_1)+\frac{\partial A_p}{\partial y_1}C_0(x_1, y_1)+\frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 \\
& \qquad + 2\,\frac{\partial^2 A_p}{\partial x_1\,\partial y_1}\,\frac{dx_1}{dt}\,\frac{dy_1}{dt}+\frac{\partial^2 A_p}{\partial y_1^2}\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2
\end{aligned}
$$

et $\dfrac{d^2B_p}{dt^2}$ par une expression analogue. La fonction sous le signe $\int$ se décompose alors en une somme de plusieurs séries, dont les valeurs restent bornées d'après nos hypothèses, tant que le point (x_1, y_1) reste à l'intérieur d'un certain domaine défini précédemment, ces séries étant multipliées respectivement par

$$
\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2,\ \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2,\ \ldots,
$$

c'est-à-dire encore par des quantités bornées, tant que t demeure dans l'intervalle (t_0-h, t_0+h). Les termes tout intégrés qui figurent au second membre de (11) et qui contiennent ε^2 en facteur sont bornés dans les mêmes conditions.

Nous déterminerons maintenant $\delta x'_0$ par la condition

$$
\delta x'_0 = -\varepsilon\Phi(t_0).
$$

$\Phi(t_0)$ ayant pour expression

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p(x_0, y_0)\sin\frac{pt_0}{\varepsilon} - B_p(x_0, y_0)\cos\frac{pt_0}{\varepsilon}}{p},$$

quantité bornée, on le voit, quand ε tend vers zéro. Nous déterminerons $\delta y'_0$ par une condition analogue. L'équation (11) peut alors s'écrire

$$\frac{d(x_2 - x_1)}{dt} = \varepsilon\Phi(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 P(t, \varepsilon),$$

P étant une fonction bornée pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ et $|t - t_0| \leqq h$.

En intégrant de t_0 à t et remarquant que x_2 et x_1 prennent tous deux la valeur x_0 pour $t = t_0$, on obtient

$$x_2 - x_1 = \varepsilon\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \varepsilon)\,dt + \varepsilon^2\int_{t_0}^{t} P(t, \varepsilon)\,dt.$$

En effectuant encore une fois sur le premier terme du second membre une intégration par parties, ce premier terme devient

$$-\varepsilon^2\sum \frac{A_p(x_1, y_1)\cos\frac{pt}{\varepsilon} + B_p(x_1, y_1)\sin\frac{pt}{\varepsilon}}{p^2}$$
$$+\varepsilon^2\int_{t_0}^{t}\left[\sum \frac{\frac{dA_p}{dt}\cos\frac{pt}{\varepsilon} + \frac{dB_p}{dt}\sin\frac{pt}{\varepsilon}}{p^2}\right]dt.$$

En définitive on obtient

$$x_2 - x_1 = \varepsilon^2 R,$$
$$y^2 - y_1 = \varepsilon^2 S,$$

R et S, fonctions dont on peut indiquer une limite supérieure en valeur absolue, indépendante de ε, quand t varie dans l'intervalle indiqué.

Dans ces mêmes conditions, $\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}$ resteront de l'ordre de ε. En continuant d'appliquer les approximations successives, les relations

$$\left|\frac{d^2(x_{n+1}-x_n)}{dt^2}\right| < \mathrm{H}\,|x_n-x_{n-1}| + \mathrm{H}\,|y_n-y_{n-1}|,$$

$$\left|\frac{d^2(y_{n+1}-y_n)}{dt^2}\right| < \mathrm{H}\,|x_n-x_{n-1}| + \mathrm{H}\,|y_n-y_{n-1}|,$$

en posant toujours

$$\left(\frac{dx_n}{dt}\right)_0 = x'_0, \quad \left(\frac{dy_n}{dt}\right)_0 = y'_0 \qquad \text{pour } n > 1,$$

nous montrent que ε^2 sera toujours en facteur dans $x_{n+1}-x_n$, $y_{n+1}-y_n$. Il s'ensuit que $x-x_1$, $y-y_1$ seront de l'ordre de ε^2, tandis qu'en général $\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy}{dt}$ seront seulement de l'ordre de ε.

Ainsi il est possible d'attribuer aux valeurs initiales des dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, pour une solution du système réduit, des accroissements du premier ordre par rapport à ε, tels que les solutions de ce système ainsi obtenues ne diffèrent des solutions du système primitif que par des quantités de l'ordre de ε^2, les valeurs initiales de x et y demeurant les mêmes pour l'un et l'autre système. La démonstration s'applique évidemment à des équations de même forme avec un plus grand nombre de variables x, y, z, ...

Si l'on regarde ces équations comme définissant le mouvement d'un système de N points matériels soumis à des forces dépendant de la position de ces points et fonctions périodiques du temps avec une période $2\pi\varepsilon$, on voit que si l'on réduit les forces agissant sur chacun des points à leurs valeurs moyennes, le mouvement du système ainsi modifié différera peu du mouvement primitif si la période est très courte. D'une manière précise les écarts entre les positions et les vitesses pour l'un et l'autre mouvement seront de l'ordre de la période, si les conditions initiales sont les mêmes; mais on peut, en faisant varier les vitesses initiales pour le mouvement réduit de quantités de l'ordre de la période, faire en sorte que les écarts de position des points matériels, quand on passe d'un mouvement à l'autre, soient de l'ordre du carré de la période.

L'exemple simple qui suit, emprunté aux éléments de la théorie des perturbations planétaires, peut servir à illustrer les considérations précédentes. Étudions les perturbations produites dans le mouvement d'une planète P de masse m par une planète P' de masse m', en nous plaçant dans le cas où le rapport des distances de P' et de P au soleil reste très petit. Supposons de plus la masse m négligeable, de sorte que le centre de gravité G du soleil S et de la planète P' soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de P; x', y', z' celles de P' par rapport à trois axes de direction fixe passant par G. Les équations différentielles du mouvement de P peuvent s'écrire

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(13)\qquad U = \frac{fM}{PS} + \frac{fm'}{PP'}.$$

Soient r, r', r_1 les trois rayons vecteurs GP, GP', GS, et σ l'angle de GP et GP'; l'angle de GP et GS sera $180^\circ - \sigma$. On a d'ailleurs

$$(14)\qquad M r_1 = m' r'.$$

Développons maintenant $\frac{1}{PS}$ et $\frac{1}{PP'}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{r}$, en désignant par P_n le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre :

$$\frac{1}{PS} = \frac{1}{r} - \frac{r_1}{r^2}\cos\sigma + \frac{r_1^2}{r^3}\,\frac{(3\cos^2\sigma - 1)}{2} + \frac{r_1^3}{r^4}P_3(\cos\sigma) + \ldots,$$

$$\frac{1}{PP'} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}\cos\sigma + \frac{r'^2}{r^3}\,\frac{(3\cos^2\sigma - 1)}{2} + \frac{r'^3}{r^4}P_3(\cos\sigma) + \ldots,$$

d'où, en tenant compte de (13) et (14),

$$U = \frac{f(M + m')}{r} + f\left(m' + \frac{m'^2}{M}\right)\frac{r'^2}{r^3}\,\frac{(3\cos^2\sigma - 1)}{2} + f\left(m' - \frac{m'^3}{M^2}\right)\frac{r'^3}{r^4}P_3(\cos\sigma) + \ldots.$$

Nous regarderons $\frac{m'^2}{M}$ comme négligeable devant m'; de plus nous négligerons dans le développement de U les termes en $\frac{r'^3}{r^4}$ et ceux qui suivent, ce qui nous donnera une approximation suffisante pour l'objet que nous avons en vue. Le mouvement relatif de P′ et de S étant d'ailleurs képlérien d'après nos hypothèses, nous supposerons que le plan de l'orbite de P′ est pris pour plan des xy; on a donc

$$z' = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{3\cos^2\sigma - 1}{2} &= \frac{1}{2r^2r'^2}[3(xx' + yy')^2 - (x^2 + y^2 - z^2)(x'^2 + y'^2)] \\ &= \frac{1}{2r^2r'^2}[x^2(2x'^2 - y'^2) + y^2(2y'^2 - x'^2) - z^2(x'^2 + y'^2)].\end{aligned}$$

Négligeons l'excentricité de l'orbite de P′ et soit alors

$$x' = a'\cos l', \qquad y' = a'\sin l', \qquad r' = a',$$
$$l' = n't + l'_0$$

et par suite

$$U = \frac{f(M + m')}{r} + \frac{fm'a'^2}{4r^5}[(r^2 - 3z^2) + 3(x^2 - y^2)\cos 2l'].$$

Choisissons les unités de masse et de temps de manière que

$$f = 1, \qquad M + m' = 1.$$

L'expression de U devient

$$U = \frac{1}{r} + \frac{m'a'^2}{4r^5}[r^2 - 3z^2 + 3(x^2 - y^2)\cos 2l'] \qquad (l' = n't + l'_0)$$

et sa valeur moyenne est

$$U_0 = \frac{1}{r} + \frac{m'a'^2}{4r^5}(r^2 - 3z^2).$$

Si l'on remplace U par U_0 dans les équations (12), on obtient une *orbite intermédiaire* qui représentera le mouvement réel avec une approximation généralement bien meilleure que celle du mouvement képlérien; si nous regardons n' comme un infiniment grand du premier ordre, sans avoir égard à la troisième loi de Képler, c'est-à-dire en laissant a' fixe, l'approximation sera de l'ordre de $\frac{1}{n'}$; mais d'après ce qu'on a vu plus haut, il sera possible de choisir les composantes de la vitesse initiale pour l'orbite intermédiaire de manière que l'approximation donnée par celle-ci pour les coordonnées x, y, z soit de l'ordre de $\frac{1}{n'^2}\cdot$ D'autre part on a

$$U - U_0 = \frac{3m'a'^2}{4r^5}(x^2 - y^2)\cos 2l'.$$

Si r s'écarte peu d'une valeur fixe a, $U - U_0$ est au plus de l'ordre de $\frac{3m'a'^2}{4a^3}$, et les dérivées partielles de $U - U_0$, respectivement égales à

$$\frac{3m'a'^2 x\cos 2l'(7y^2 - 3x^2)}{4r^7}, \quad \frac{3m'a'^2 y\cos 2l'(3y^2 - 7x^2)}{4r^7},$$
$$\frac{-15m'a'^2(x^2 - y^2)z\cos 2l'}{4r^7},$$

sont inférieures en valeur absolue à $\frac{4m'a'^2}{r^4}$, c'est-à-dire au plus de l'ordre de $\frac{4m'a'^2}{a^4}\cdot$

On aura donc une approximation pour x, y, z de l'ordre de $\frac{m'a'^2}{n'^2a^4}$ ou (en tenant compte de la troisième loi de Képler) une approximation *relative* pour x, y, z de l'ordre de

$$\frac{1}{a}\frac{m'a'^5}{a^4} = m'\left(\frac{a'}{a}\right)^5,$$

c'est-à-dire du produit de la masse perturbatrice par la puissance cinquième de la parallaxe, mais ceci doit être précisé, puisque nous n'avons pas tenu compte dans ce dernier calcul des facteurs purement numériques qui peuvent s'introduire et accroître les erreurs.

Observons d'abord que, parmi les orbites intermédiaires qui correspondent à la fonction de forces U_0, il en est qui peuvent être déterminées par des quadratures; ce sont celles d'inclinaison nulle ($z = 0$) et qui ne sont autres que les trajectoires d'un point attiré par un centre fixe, la force attractive, fonction de la distance seule, étant

$$F(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r} + \frac{m'a'^2}{4r^3}\right].$$

La longitude l s'exprime alors en fonction de $\frac{1}{r}$ au moyen d'une intégrale elliptique de première espèce, qui se ramène de suite à la forme canonique de Weierstrass et l'on en déduit pour $\frac{1}{r}$ une expression de la forme

$$\frac{1}{r} = A + B\,p(l).$$

On obtiendra d'ailleurs r et l en fonction (périodique) du temps, en faisant l'inversion d'intégrales elliptiques, mais qui ne seront plus de première espèce. Nous n'insistons pas sur ces calculs, étrangers à notre objet, mais il était nécessaire d'indiquer que la détermination effective de l'orbite intermédiaire peut être obtenue dans ce cas par les formules de la théorie des fonctions elliptiques et qu'il est possible d'utiliser pour la représentation du mouvement des séries rapidement convergentes. Si maintenant l'inclinaison n'est pas nulle, mais assez petite pour qu'on puisse calculer z au moyen de l'équation aux variations, on achèvera la détermination de l'orbite en intégrant une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z\left[\frac{1}{r^3} + \frac{9m'a'^2}{4r^5}\right] = 0,$$

où l'on remplace r par la fonction périodique de t qui correspond à l'orbite d'inclinaison nulle obtenue en remplaçant $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ par zéro à l'instant d'un passage au nœud ($z_0 = 0$). Les recherches classiques concernant l'intégration de l'équation de Gylden-Lindstedt permettront le calcul effectif de cette solution. On voit donc par ces indications sommaires qu'il sera possible de déterminer avec beaucoup d'exactitude l'orbite intermédiaire considérée ici; mais nous allons considérer seulement les solutions particulières qui correspondent à des circonférences de centre O du plan xOy décrites d'un mouvement uniforme; si a est le rayon d'une telle circonférence, n la vitesse angulaire de l'astre sur celle-ci, on a, en exprimant que la force centrifuge fait équilibre à l'attraction,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{3m'a'^2}{4a^4} = n^2 a.$$

Supposons qu'à l'origine des temps on ait $l_0 = 0$, l étant l'angle du rayon vecteur OP avec Ox. Nous allons chercher à déterminer les constantes initiales pour le mouvement défini par les équations (12) de manière que les écarts des coordonnées rectangulaires quand on passe de l'orbite intermédiaire à l'orbite réelle soient de l'ordre de $\frac{1}{n'^2}$, la position initiale de P n'étant pas modifiée. Soient comme précédemment $x_1, y_1, z_1 = 0$ les coordonnées d'un point de l'orbite intermédiaire

$$x_1 = a\cos l, \qquad y_1 = a\sin l$$

et x_2, y_2, z_2 les valeurs de deuxième approximation pour l'orbite réelle; nous supposerons que la composante initiale de la vitesse suivant Oz reste nulle; on a donc $z_2 = 0$. On a ensuite

$$\frac{d^2(x_2-x_1)}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U}-\mathrm{U}_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2(y_2-y_1)}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{U}-\mathrm{U}_0),$$

en remplaçant dans les seconds membres x, y, z par x_1, y_1, 0; ces seconds membres deviennent alors

$$\frac{3m'a'^2}{dt^2}\cos 2l'(2-5\cos 2l) \quad \text{et} \quad \frac{3m'a'^2}{4a^4}\cos 2l'\sin l(-2-5\cos 2l),$$

ce qui se transforme en

$$\frac{3m'a'^2}{8a^4}[\cos(l+2l')+\cos(l-2l')](2-5\cos 2l)$$

et

$$-\frac{3m'a'^2}{8a^4}[\sin(l+2l')+\sin(l-2l')](2+5\cos 2l)$$

et finalement en

$$\frac{3m'a'^2}{16a^4}[-\cos(l+2l')-\cos(l-2l')-5\cos(3l+2l')-5\cos(3l-2l')]$$

et

$$\frac{3m'a'^2}{16a^4}[\sin(l-2l')+\sin(l+2l')-5\sin(3l-2l')-5\sin(3l+2l')].$$

Ces expressions intégrées terme à terme après y avoir remplacé l et l' par leurs valeurs deviennent

$$\frac{3m'a'^2}{16a^4}\left[-\frac{\sin(l+2l')}{n+2n'}+\frac{\sin(l-2l')}{2n'-n}\right.$$
$$\left.-\frac{5\sin(3l+2l')}{2n'+3n}+\frac{5\sin(3l-2l')}{2n'-3n}\right]$$

et

$$\frac{3m'a'^2}{16a^4}\left[\frac{\cos(l-2l')}{2n'-n}-\frac{\cos(l-2l')}{2n'+n}\right.$$
$$\left.-\frac{5\cos(3l-2l')}{2n'-3n}+\frac{5\cos(3l+2l')}{2n'+3n}\right].$$

D'après ce que nous avons dit pour le cas général nous devons prendre les différences

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0-\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0-\left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0,$$

égales aux valeurs des quantités précédentes pour $t=t_0=0$, $l_0=0$, ce qui donne

$$-\frac{3m'a'^2}{16a^4}\sin 2l'_0\left[\frac{1}{2n'+n}+\frac{1}{2n'-n}+\frac{5}{2n'+3n}+\frac{5}{2n'-3n}\right]$$

et

$$\frac{3m'a'^2}{16a^4}\cos 2l'_0\left[\frac{1}{2n'-n}-\frac{1}{2n'+n}-\frac{5}{2n'-3n}+\frac{5}{2n'+3n}\right].$$

On aura alors, en appelant x_2, y_2 les valeurs de deuxième approximation pour x et y,

$$x_2-x_1=\frac{3m'a'^2}{16a^4}\left[\frac{\cos(l+2l')}{(2n'+n)^2}+\frac{\cos(l-2l')}{(2n'-n)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{5\cos(3l+2l')}{2n'+3n)^2}+\frac{5\cos(3l-2l')}{(2n'-3n)^2}\right]_0^t,$$

$$y_2-y_1=\frac{3m'a'^2}{16a^4}\left[\frac{\sin(l-2l')}{(2n'-n)^2}-\frac{\sin(l+2l')}{2(n'+n)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{5\sin(3l-2l')}{(2n'-3n)^2}+\frac{5\sin(3l+2l')}{(2n'+3n)^2}\right]_0^t$$

et ces quantités sont inférieures en valeur absolue à

$$\frac{3m'a'^2}{8a^4}\left[\frac{1}{(2n'+n)^2}+\frac{1}{(2n'-n)^2}+\frac{5}{(2n'+3n)^2}+\frac{5}{(2n'-3n)^2}\right].$$

Supposons par exemple $\frac{n'}{n}>5,6$, ce qui est à peu près le rapport des moyens mouvements de Saturne et de Neptune; l'expression précédente ne dépassera pas

$$1,5.m'\left(\frac{a'}{a}\right)^2.a.$$

Nous avons donc seulement le facteur 1,5 devant l'expression précédemment obtenue comme limite des erreurs commises sur x et y en substituant l'orbite intermédiaire à l'orbite réelle. Quand nous passerons aux approximations suivantes, l'ordre de grandeur de cette erreur ne sera pas modifiée; par exemple pour obtenir $x_3 - x_2$ nous aurons à intégrer deux fois une expression dont le terme le plus important sera l'accroissement $\delta\left(-\frac{x}{r^3}\right)$, de la quantité $-\frac{x}{r^3}$ quand on passe de (x_1, y_1) à (x_2, y_2) et l'on a en assimilant les accroissements à des différentielles

$$\begin{aligned}\delta\left(-\frac{x}{r^3}\right) &= \delta x \frac{2x_1^2 - y_1^2}{r_1^5} + 3\,\delta y \frac{x_1 y_1}{r_1^5} \\ &= (x_2 - x_1)\frac{(2\cos^2 l - \sin^2 l)}{a^3} + 3(y_2 - y_1)\frac{\sin l \cos l}{a^3} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(1 + 3\cos 2l) + 3(y_2 - y_1)\sin 2l}{2a^3}.\end{aligned}$$

En remplaçant $x_2 - x_1$ et $y_2 - y_1$ par leurs valeurs obtenues plus haut, on aura après une double intégration qui n'introduit pas de terme séculaire une quantité de l'ordre de

$$\frac{m' a'^2}{a^7 n'^4} = \frac{m' a'^8}{a^7} = m'\left(\frac{a'}{a}\right)^8 a.$$

En définitive, nous obtenons ainsi pour les coordonnées héliocentriques une erreur relative de l'ordre du produit de la masse perturbatrice (celle du Soleil étant 1) par la puissance cinquième de la parallaxe.

Nous devons observer toutefois que les équations différentielles du mouvement de P d'où nous sommes partis n'est exacte que si la masse de P est négligeable, c'est-à-dire dans le cas du *problème restreint*. Mais on peut toujours les regarder comme exactes au premier degré d'approximation par rapport aux masses. Prenons en effet comme origine le centre de gravité S du Soleil et soient alors x, y, z les coordonnées de P; x', y', z' celles de P'. On a exactement

$$(15) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -f(\mathrm{M}+m)\frac{x}{\overline{\mathrm{SP}}^3} - fm'\frac{x-x'}{\overline{\mathrm{PP'}}^3} - f\frac{m'x'}{\overline{\mathrm{P'S}}^3}$$

et deux équations analogues pour le mouvement projeté sur Sy et Sz. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G de S et de P'

$$\xi = \frac{m'x'}{M+m'}, \qquad \eta = \frac{m'y'}{M+m'}, \qquad \zeta = \frac{m'z'}{M+m'}.$$

Ramenons l'origine en G en conservant la direction des axes et soit

$$X + \xi = x, \qquad Y + \eta = y, \qquad Z + \zeta = z,$$
$$X' + \xi = x', \qquad Y' + \eta = y', \qquad Z' + \zeta = z'.$$

L'équation (15) devient

$$(16) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{d^2\xi}{dt^2} = -f(M+m)\frac{(X+\xi)}{\overline{SP}^3} - \frac{m'(X-X')}{\overline{PP'}^3} - \frac{(M+m')\xi}{\overline{P'S}^3}.$$

Mais on sait que l'on peut, dans la première approximation par rapport aux masses, négliger les perturbations produites par P sur le mouvement de P', ce dernier étant regardé comme képlérien. On a alors

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -(M+m')\frac{x'}{\overline{SP'}^3}$$

et par suite

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -(M+m')\frac{\xi}{\overline{SP'}^3}.$$

L'équation (16) devient alors

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -f(M+m)\frac{(X+\xi)}{\overline{SP}^3} - fm'\frac{(X-X')}{\overline{PP'}^3},$$

et comme $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ sont les coordonnées de S par rapport à Gx, Gy, Gz, on obtient bien les équations du mouvement d'un point soumis à la fonction de forces $\frac{f(M+m)}{PS} + \frac{fm'}{PP'}$, ce qui nous ramène au problème traité, M étant seulement remplacé par $M+m$. On doit remarquer d'autre part que l'on a négligé les termes de la fonction perturbatrice de l'ordre de $\frac{a'^3}{a^4}$, l'inclinaison, les excentricités; mais l'ordre de grandeur des quantités $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ restera le même, si l'on fait des hypothèses moins simples, du moins si les excentricités et l'inclinaison restent faibles.

On verra facilement, en consultant une table des éléments des planètes principales, que pour calculer les perturbations produites par Jupiter sur les coordonnées héliocentriques de Neptune, il n'y aurait pas d'inconvénient à remplacer l'attraction de Jupiter par sa valeur moyenne, c'est-à-dire cette planète par l'anneau de Gauss qu'on peut lui substituer dans le calcul des inégalités séculaires. On néglige ainsi des perturbations périodiques qui, si l'on applique la méthode indiquée, n'introduiraient dans la longitude héliocentrique de Neptune que des erreurs inférieures à 0″,08. Il en serait de même pour l'action perturbatrice des autres planètes, à l'exception d'Uranus (¹). Cela ne veut pas dire que pour calculer les perturbations de Neptune, on puisse remplacer simultanément les planètes perturbatrices par les anneaux équivalents. On doit observer en effet que d'une part on a pris pour origine non le Soleil, mais le centre de gravité de celui-ci et de la planète perturbatrice; que d'autre part pour obtenir une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n'^2}$ pour les coordonnées, le moyen mouvement de la planète perturbatrice étant égal à n', on doit prendre pour l'orbite intermédiaire des vitesses initiales différant des vitesses réelles de quantités de l'ordre de $\frac{m'}{n'}$ et qui dépendent des éléments de la planète perturbatrice.

6. Considérons d'une manière générale un système holonome à liaisons indépendantes du temps. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_k$ les coordonnées de ce système; $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ leurs dérivées par rapport au temps; T l'énergie cinétique qui est homogène et du second degré par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$. Soit $\Sigma Q_\alpha\, \delta q_\alpha$ l'expression du travail virtuel. Les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha.$$

Supposons que l'on ait

$$Q_\alpha = R_\alpha + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} U\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right),$$

R_α pouvant dépendre des q_α et des q'_α mais non de t, et U étant une fonction périodique de période 2π de $\frac{t}{\varepsilon}$, fonction également des q_i et de ε. Les forces données sont ainsi décomposées en deux groupes, celles du premier groupe dépendant des coordonnées et

(¹) Les erreurs commises sur les vitesses et par suite sur les éléments elliptiques en appliquant cette méthode de calculs des perturbations, c'est-à-dire en négligeant les termes à courte période de la fonction perturbatrice, seront beaucoup plus considérables. Il paraît donc que dans toutes les questions de calcul des perturbations où n'interviennent en outre des inégalités séculaires, que des perturbations à courte période, il y a intérêt à n'employer comme variables que les coordonnées rectangulaires.

des vitesses mais non du temps, tandis que celles du deuxième groupe dérivent d'une fonction de force, laquelle est une fonction périodique du temps de période $2\pi\varepsilon$. Les premiers membres des équations de Lagrange sont ainsi des fonctions linéaires de q''_1, q''_2, ..., les coefficients qui multiplient ces dérivées secondes dépendent uniquement des q_i. Ces équations résolues par rapport aux q''_i prennent la forme

$$q''_i = \frac{dq'_i}{dt} = \Phi_i(q_1, \ldots, q_k, q'_1, \ldots, q'_k) + \sum_\alpha \mathrm{A}_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \mathrm{U}\left(q_1, \ldots, q_k, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right).$$

Les $\mathrm{A}_{i\alpha}$ dépendent seulement des q_i, la valeur moyenne des seconds membres, regardés comme fonction de $\frac{t}{\varepsilon}$, s'obtiendra en y remplaçant U par sa valeur moyenne U_0, c'est-à-dire par le premier coefficient de sa série de Fourier, relativement à la variable $\frac{t}{\varepsilon}$. On pourra donc, si la période $2\pi\varepsilon$ est infiniment petite, remplacer les équations de Lagrange par celles qui s'en déduisent en substituant à la fonction de forces U sa valeur moyenne U_0 et y faisant $\varepsilon = 0$ si U_0 dépend de ε; les erreurs qui en résultent pour les q_i et q'_i sont de l'ordre de ε.

On peut même supposer que les R_α soient des fonctions non seulement des q_i et q'_i mais encore de t, mais pourvu qu'elles restent bien déterminées et continues pour $\varepsilon = 0$; ce pourront être, par exemple, des fonctions périodiques de t à période indépendante de ε. On peut encore dans ce cas, comme nous l'avons vu, appliquer les théorèmes généraux démontrés dans ce Mémoire. Ainsi parmi les forces produisant le travail $\Sigma \mathrm{R}_\alpha \delta q_\alpha$, peuvent se trouver des forces d'inertie, dépendant des vitesses et même du temps, ce qui permet les applications à certains problèmes de mouvement relatif; il peut y avoir également des forces dissipatives. Au voisinage d'une position d'équilibre relatif du système soumis aux forces *réduites*, c'est-à-dire obtenues en réduisant U_0 à sa valeur moyenne, il y aura généralement des solutions périodiques pour le mouvement initial, si la période $2\pi\varepsilon$ est suffisamment petite.

On peut appliquer ces considérations à l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à l'attraction d'un corps de forme invariable animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'un de ses axes principaux d'inertie. Si la vitesse de rotation est infinie, tout se passe comme si l'on avait affaire à un solide fixe, la distribution des masses étant de révolution autour de l'axe de rotation. Il existe alors pour le point matériel des trajectoires circulaires dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation et dont tous les points sont ainsi des positions d'équilibre relatif. Pour une vitesse angulaire de rotation finie mais très grande, il pourra donc y avoir des trajectoires périodiques, relativement à des axes entraînés, et voisines de ces positions d'équilibre relatif; mais comme tous les points de la trajectoire circulaire sont de telles positions d'équilibre dans le cas limite, nous sommes précisément dans le cas où le déterminant fonctionnel des seconds membres des équations différentielles du mouvement *réduit* devient nul pour la position d'équilibre considérée. Une discussion est donc nécessaire, discussion qui ne présente pas de difficultés de principe, mais peut être assez longue. Nous ferons ici des hypothèses de nature à la simplifier. Nous supposerons d'abord que le corps tournant possède un équateur que nous prendrons pour plan des xy; le centre de gravité, situé dans ce plan et sur l'axe de rotation, sera pris pour origine. Nous admettrons de plus que le corps diffère assez peu d'une sphère formée de couches concentriques homogènes pour que, dans le développement en série du potentiel en un point éloigné,

$$\frac{M}{r} + \frac{\Phi_1}{r^2} + \ldots + \frac{\Phi_n}{r^{2n+1}} + \ldots,$$

où Φ_n est un polynome harmonique, homogène et de degré n en x, y, z, on puisse négliger les termes de rang $n \geqq 3$. Enfin, nous n'envisagerons que les trajectoires situées dans le plan de l'équateur ($z = 0$); nous n'aurons ainsi à discuter qu'un problème à deux degrés de liberté.

L'expression du potentiel en un point de coordonnées

$$(r\cos\theta, \quad r\sin\theta, \quad 0)$$

sera, si le corps est immobile (¹),

$$U = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}[k + h\cos 2(\theta - \beta)].$$

(¹) On a en effet $\Phi_1 = 0$, puisque le centre de gravité est O; au terme $\frac{M}{r}$ où

Pour les corps célestes, qui sont des sphéroïdes aplatis, k est positif, et h qui provient de l'inégale distribution de densité dans les divers méridiens paraît être en général très petit. Nous supposerons qu'il en est bien ainsi [1]

Si le corps tourne avec la vitesse angulaire n' on aura

$$U = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}[k + h\cos(2\theta - 2n't - 2\gamma)].$$

Si l'on réduit U à sa valeur moyenne $U_0 = \frac{1}{r} + \frac{k}{r^3}$, il existe pour le point attiré des orbites circulaires qui s'obtiennent en exprimant qu'il y a équilibre entre la force attractive $\frac{1}{r^2} + \frac{3k}{r^4}$ dirigée vers l'origine et la force centrifuge $n^2 r$. On a donc en appelant a le rayon du cercle

$$n^2 a = \frac{1}{a^2} + \frac{3k}{a^4}.$$

Prenons maintenant deux axes rectangulaires tournant autour de O avec la vitesse angulaire n. Soit ω l'angle de OP avec le nouvel axe des x

$$\theta = \omega + nt + \text{const.}$$

Posons d'autre part

$$n' - n = \frac{1}{\varepsilon}.$$

On aura dans ce système d'axes

$$U = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}\left[k + h\cos 2\left(\omega - \frac{t}{\varepsilon} - \alpha\right)\right].$$

Les équations du mouvement sont, en coordonnées rectilignes, en tenant compte de la force centrifuge ordinaire $(n^2 x,\ n^2 y)$ et de la

---

nous faisons $M = 1$, il suffira d'ajouter le terme $\frac{\Phi r}{r^2}$ qui prend la forme

$$\frac{A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}{r^3}$$

pour $z = 0$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

[1] Les inégalités auxquelles doivent satisfaire k et h résultent de la discussion ultérieure. Ces quantités peuvent être beaucoup plus grandes qu'elles ne le sont dans le cas des corps célestes sur lesquels on possède des renseignements à ce point de vue. Le principe de la discussion qui suit consiste d'ailleurs à regarder h et k comme fixes et $\frac{n}{n'}$ comme une variable infiniment petite. La théorie ne s'applique pas à des satellites comme ceux de Mars dont la durée de révolution est voisine de celle de la rotation de la planète, les dissymétries de cette dernière suivant les différents méridiens pouvant entraîner des inégalités à longue période de mouvement des satellites.

force centrifuge composée $\left(2n\frac{dy}{dt}, -2n\frac{dx}{dt}\right)$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + n^2 x + 2n\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} + n^2 y - 2n\frac{dx}{dt}.$$

En passant aux coordonnées polaires, on obtient le système suivant de quatre équations du premier ordre :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \omega', \\ \frac{dr}{dt} &= r', \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial r} + r(n+\omega')^2, \\ \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{2r'}{r}(n+\omega'), \end{aligned}\right.$$

qui, après le changement de variable indépendante $\left(\frac{t}{\varepsilon} = u\right)$, devient

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\omega}{du} &= \varepsilon\omega', \\ \frac{dz}{du} &= \varepsilon r', \\ \frac{dr'}{du} &= \varepsilon\left[\frac{\partial U}{\partial r} + r(n+\omega')^2\right], \\ \frac{d\omega'}{du} &= \varepsilon\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial \omega} - \frac{2r'}{r}(n+\omega')\right] \end{aligned}\right.$$

avec

$$U = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}[k + h\cos 2(\omega - u - \alpha)].$$

On peut supposer $\alpha = 0$, ce qui revient à changer α en $u + \alpha$ dans les équations (18). On doit remarquer d'ailleurs que les seconds membres ne changent pas si l'on change simultanément u et ω en $u + C$ et $\omega + C$, puisque U ne dépend que de $\omega - u$ et r [1]. Les

---

[1] Ceci est lié à l'existence d'une intégrale première qui s'obtient aisément en rapportant le mobile à des axes OX, OY, Oz, invariablement liés au solide, OX et OY tournant ainsi avec la vitesse angulaire n'. Si V est la vitesse par rapport à ces axes et W le potentiel de l'attraction on a

$$V^2 = n'^2 r^2 + 2(W + H),$$

H étant une constante. On déduirait de là les conséquences analogues à celles solutions qui se déduisent ainsi de l'une d'entre elles ne sont pas réellement distinctes, et correspondent à des trajectoires obtenues en faisant tourner l'une d'elles de l'angle C autour de Oz, avec un changement corrélatif dans le choix de l'origine des temps.

Effectuons maintenant le développement suivant les puissances de ε des solutions de (18) pour les valeurs initiales ω_0, $r_0 = a + \rho_0$, r'_0, ω'_0, et soit

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \ldots, \\ r &= r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \ldots, \\ r' &= r'_0 + \varepsilon r'_1 + \varepsilon_2 r'_2 + \ldots, \\ \omega' &= \omega'_0 + \varepsilon\omega'_1 + \varepsilon^2\omega'_2 + \ldots \end{aligned}$$

avec

$$\omega_1 = \omega'_0 u, \qquad r_1 = r'_0 u$$

et

$$\omega'_n = \frac{d\omega_{n+1}}{du}, \qquad r'_n = \frac{dr_{n+1}}{du} \qquad (n \geqq 1).$$

On obtient les ω_i, r_i, ω'_i, r'_i par des quadratures et l'on trouve

$$r'_1 = u\left[r_0(n + \omega'_0)^2 - \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{3k}{r_0^4}\right)\right] - \frac{3h}{2r_0^4}[\sin(2u - 2\omega_0) + \sin 2\omega_0],$$

$$\omega'_1 = \frac{h}{r_0^5}[\cos 2\omega_0 - \cos(2u - 2\omega_0)] - \frac{2r'_0}{r_0}(n + \omega'_0)u,$$

$$\omega_2 = \frac{h}{r_0^5}\cos 2\omega_0 . u - \frac{h}{2r_0^5}[\sin(2u - 2\omega_0) + \sin 2\omega_0] - \frac{r'_0}{r_0}(n + \omega'_0)u^2,$$

$$\begin{aligned} r_2 = {} & \left[r_0(n + \omega'_0)^2 - \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{3k}{r_0^4}\right)\right]\frac{u^2}{2} \\ & + \frac{3h}{4r_0^4}[\cos(2u - 2\omega_0) - \cos 2\omega_0] - \frac{3h}{2r_0^4}\sin 2\omega_0 . u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r'_2 = \int_0^u \Bigg[& \frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathrm{U}(r_0, \omega_0, u).r_1 + \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\omega}\mathrm{U}(r_0, \omega_0, u).\omega_1 \\ & + (n + \omega'_0)^2 r_1 + 2r_0(n + \omega'_0)\omega'_1\Bigg]du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega'_2 = \int_0^u \Bigg[& -\frac{2}{r_0^3}\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{U}(r_0, \omega_0, u)r_1 + \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\omega}\mathrm{U}(r_0, \omega_0, u).r_1 \\ & + \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\mathrm{U}(r_0, \omega_0, u).\omega_1 + \frac{2r'_0}{r_0^2}(n + \omega'_0)r_1 \\ & - \frac{2}{r_0}(n + \omega'_0)r'_1 - \frac{2r'_0}{r_0}\omega'_1\Bigg]du, \end{aligned}$$

. . . .

---

qui concernent le problème restreint des trois corps, notamment au point de vue de la stabilité des trajectoires.

Toutes ces expressions sont des fonctions régulières de

$$\rho_0 = r_0 - a, \quad r'_0, \ \omega'_0,$$

pour des valeurs suffisamment petites de ces quantités ; ce sont de plus des fonctions analytiques et périodiques de période 2π (et même de période π, en raison des simplifications introduites dans la valeur de U) de ω_0. Nous avons ensuite à former les équations de condition exprimant la périodicité des solutions

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\omega_0, \rho_0, r'_0, \omega'_0, \varepsilon) &= \frac{\omega(2\pi) - \omega(0)}{2\pi\varepsilon} = \frac{\omega_1(2\pi) - \omega_1(0)}{2\pi} \\ &\quad + \varepsilon \frac{\omega_2(2\pi) - \omega_2(0)}{2\pi} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots = 0, \\ G(\omega_0, \rho_0, r'_0, \omega'_0, \varepsilon) &= \frac{r(2\pi) - r(0)}{2\pi\varepsilon} = \frac{r_1(2\pi) - r_1(0)}{2\pi} \\ &\quad + \varepsilon \frac{r_2(2\pi) - r_2(0)}{2\pi} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots = 0, \\ H(\omega_0, \rho_0, r'_0, \omega'_0, \varepsilon) &= \frac{r'(2\pi) - r'(0)}{2\pi} = \frac{r'_1(2\pi) - r'_1(0)}{2\pi} \\ &\quad + \varepsilon \frac{r'_2(2\pi) - r'_2(0)}{2\pi} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots = 0, \\ K(\omega_0, \rho_0, r'_0, \omega'_0, \varepsilon) &= \frac{\omega'(2\pi) - \omega'(0)}{2\pi\varepsilon} = \frac{\omega'_1(2\pi) - \omega'_1(0)}{2\pi} \\ &\quad + \varepsilon \frac{\omega'_2(2\pi) - \omega'_2(0)}{2\pi} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour $\varepsilon = 0$, les premiers membres de ces équations deviennent

$$\omega'_0, \quad r'_0, \quad r_0(n + \omega'_0)^2 - \frac{1}{r_0^2} - \frac{2k}{r_0^4}, \quad -\frac{2r'_0}{r_0}(n + \omega'_0),$$

ou, en ne conservant que les termes du premier degré en ρ_0, r'_0, ω'_0,

$$\omega'_0, \quad r'_0, \quad \rho_0\left(n^2 + \frac{2}{a^3} + \frac{12k}{a^5}\right) + 2an\omega'_0, \qquad -\frac{2n}{a} r'_0.$$

Il s'ensuit que, pour $\varepsilon = 0$, le déterminant fonctionnel de F, G, H. ou de F, H, K, par rapport à ρ_0, r'_0, ω'_0 est différent de zéro et l'on peut résoudre les trois équations correspondantes par rapport à ces trois inconnues, qui seront exprimées par des séries entières en ε à coefficients périodiques en ω_0. On trouve ainsi en prenant les trois premières équations, et désignant par $O(\varepsilon^2)$ toute quantité de l'ordre de ε^2

$$\omega'_0 = -\frac{\varepsilon h}{a^5}\cos 2\omega_0 + O(\varepsilon^2),$$

$$r'_0 = \varepsilon\cdot\frac{3h}{2a^4}\sin 2\omega_0 + O(\varepsilon^2),$$

$$\rho_0 = O(\varepsilon^2).$$

Portons ces valeurs dans la quatrième équation

$$(20)\qquad K = -\frac{2r'_0}{r_0}(n+\omega'_0) + \varepsilon K_1 + \ldots = 0,$$

il vient

$$-\frac{2n}{a}\cdot\frac{3h}{2a^4}\sin 2\omega_0.\varepsilon + O(\varepsilon^2) + \varepsilon K_1(\omega_0, \rho_0, r'_0, \omega'_0) + \varepsilon^2 K_2 + \ldots = 0.$$

Après suppression du facteur ε, il restera une équation de la forme

$$(21)\qquad \left[-\frac{3nh}{a^5}\sin 2\omega_0 + K_1(\omega_0, 0, 0, 0)\right] + \varepsilon P_1(\omega_0) + \varepsilon^2 P_2(\omega_0) + \ldots = 0.$$

Nous devons donc calculer $K_1(\omega_0, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire la valeur de $\frac{\omega'_2(2\pi) - \omega'_2(0)}{2\pi}$ pour $\omega'_0 = r'_0 = 0$, $r_0 = a$. On a alors $r_1 = \omega_1 = 0$ et d'après l'expression trouvée pour ω'_2

$$\frac{\omega'_2(2\pi) - \omega'_2(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{2}{r_0}(u+\omega'_0)r'_1\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{2n}{a}r'_1\,du.$$

Mais r'_1 se réduit à

$$-\frac{3h}{2a^4}[\sin(2u - 2\omega_0) + \sin 2\omega_0)]$$

et l'on a simplement

$$\begin{aligned}\frac{\omega'_2(2\pi) - \omega'_2(0)}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2n}{2a^5}\cdot 3h[\sin(2u - 2\omega_0) + \sin 2\omega_0]\\ &= \frac{3hn}{a^5}\sin 2\omega_0.\end{aligned}$$

Ainsi le premier terme de (21) est identiquement nul; ε est encore en facteur et après suppression de ce facteur il vient

$$(22)\qquad P_1(\omega_0) + \varepsilon P_2(\omega_0) + \ldots = 0.$$

Il devient donc nécessaire pour discuter cette équation de calculer le terme $P_1(\omega_0)$, c'est-à-dire les termes en ε^2 dans le développement de K où l'on a remplacé ω'_0, r'_0 et ρ_0 par leurs valeurs en ε et ω_0. Le premier terme de l'expression (20) de K nous donnera un seul terme en ε^2

$$\left(-\frac{2}{a}\right)\left(\frac{3h}{2a^4}\sin 2\omega_0\right)\left(\frac{-h}{a^5}\right)\cos 2\omega_0 . \varepsilon^2 = \frac{3h^2}{a^{10}}\sin 2\omega_0 \cos 2\omega_0 . \varepsilon^2.$$

Nous devons ensuite calculer le terme en ε de K_1; pour cela nous remplaçons, dans l'expression de ω'_2 sous forme d'intégrale, les quantités $r_1 = r'_0 u$ et $\omega_1 = \omega'_0 u$ respectivement par $\frac{3h}{2a^4}\sin 2\omega_0$, εu et $-\frac{h}{a^5}\cos 2\omega_0 . \varepsilon u$; de r'_1 nous ne garderons que les termes suivants : le terme indépendant de ε et le terme

$$2uan\omega'_0 = -\frac{2hn}{a^4}\cos 2\omega_0 . \varepsilon u,$$

puisque nous négligeons ε^2. De ω'_1 nous ne conserverons que le terme indépendant de ε et le terme

$$-\frac{2n}{a}r'_0 u = -\frac{3hn}{a^4}\sin 2\omega_0 . \varepsilon u.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{K_1}{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[& -\frac{2}{a^3}\frac{\partial}{\partial\omega}U(a, \omega_0, u)\cdot\frac{3h}{2a^4}\sin 2\omega_0 . u \\ & + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\omega}U(a, \omega_0, u)\cdot\frac{3h}{2a^4}\sin 2\omega_0 . u \\ & - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}U(a, \omega_0, u)\frac{h}{a^5}\cos 2\omega_0\, u \\ & + \frac{4n^2h}{a^5}\cos 2\omega_0\, u + \frac{2h}{a^6}\cos 2\omega_0\, R'_1 - \frac{3h}{a^5}\sin 2\omega_0\,\Omega'_1\Big]\,du.\end{aligned}$$

On a remplacé r_0 par a, ce qui est permis puisque $r_0 - a = O(\varepsilon^2)$, et l'on a désigné par R'_1 et Ω'_1, ce que deviennent r'_1 et ω'_1 pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire

$$R'_1 = \frac{3h}{2a^4}[\sin(2u - 2\omega_0) + \sin 2\omega_0],$$

$$\Omega'_1 = \frac{h}{a^5}[\cos 2\omega_0 - \cos(2u - 2\omega_0)].$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \mathrm{U}(a, \omega_0, u) = -\frac{2h}{a^3} \sin(2\omega_0 - 2u),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial \omega} \mathrm{U}(a, \omega_0, u) = \frac{6h}{a^4} \cos(2\omega_0 - 2u),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \mathrm{U}(a, \omega_0, u) = -\frac{4h}{a^3} \cos(2\omega_0 - 2u).$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à effectuer quelques quadratures élémentaires pour obtenir l'expression de $\frac{\mathrm{K}}{\varepsilon}$. On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u \sin(2\omega_0 - 2u)\, du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u}{2} \frac{d}{du} \cos(2\omega_0 - 2u)$$
$$= \left[\frac{u}{2}\cos(2\omega_0 - 2u)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cos 2\omega_0$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u \cos(2\omega_0 - 2u)\, du = -\frac{1}{2}\sin 2\omega_0;$$

d'où

$$\frac{\mathrm{K}_1}{\varepsilon} = \frac{3h^2}{a^{10}} \sin 2\omega_0 \cos 2\omega_0 - \frac{9h^2}{2a^{10}} \sin^2 2\omega_0 - \frac{2h^2}{a^{10}} \sin 2\omega_0 \cos 2\omega_0$$
$$+ \frac{4n^2 h}{a^5} \cos 2\omega_0 - \frac{3h^2}{a^{10}} \cos 2\omega_0 \sin 2\omega_0 - \frac{3h^2}{a^{10}} \sin 2\omega_0 \cos 2\omega_0.$$

Il vient donc

$$\mathrm{P}_1(\omega) = \frac{4n^2 h}{a^5} \cos 2\omega_0 - \frac{h^2}{a^{10}} \sin 4\omega_0 - \frac{9h^2}{4a^{10}}(1 - \cos 4\omega_0).$$

On a d'ailleurs

$$n^2 a^3 = 1 + \frac{k}{a^2}.$$

Dans les conditions habituelles, k est une quantité assez petite, et $n^2 a^3$ est voisin de 1; $\sqrt{k}$ et $\sqrt{h}$, du point de vue de l'homogénéité, sont des longueurs notablement plus petites que les dimensions du corps tournant. Si donc on écrit

$$\frac{1}{h}\mathrm{P}_1(\omega_0) = \left(\frac{4}{a^8} + \frac{4k}{a^{10}}\right) \cos 2\omega_0 - \frac{h}{a^{10}} \sin 4\omega_0 - \frac{9h^2}{4a^{10}}(1 - \cos 4\omega_0),$$

on voit que le premier terme est prépondérant. L'équation

$$\mathrm{P}_1(\omega_0) = 0$$

a donc des racines réelles voisines de celles de

$$\cos 2\omega_0 = 0,$$

c'est-à-dire de $\pm \frac{\pi}{4} +$ un multiple de π. Soit λ l'une de ces racines; en posant

$$\omega_0 - \lambda = w$$

la relation entre ω_0 et ε devient

$$Q(w) + \varepsilon Q_1(w) + \ldots = 0.$$

relation qui présente dans le plan (ε, w) une courbe ayant un point simple à l'origine; l'existence des solutions périodiques est ainsi démontrée, car w est développable suivant les puissances entières de ε, $Q'(w)$ n'étant pas nul à l'origine. On pourra donc prendre soit $\varepsilon > 0$, soit $\varepsilon < 0$, ce qui donnera des solutions pour lesquelles la rotation du corps et la révolution de P s'effectueraient respectivement dans le même sens et en sens contraire.

On peut enfin appliquer au problème actuel les considérations développées dans le cas général concernant les solutions quelconques. En particulier on voit que si l'on pose

$$\omega'_0 = -\frac{\varepsilon h}{a^5} \cos 2\omega_0 + O(\varepsilon^2),$$

$$r'_0 = \varepsilon \cdot \frac{3h}{2a^4} \sin 2\omega_0 + O(\varepsilon^2),$$

$$\rho_0 = O(\varepsilon^2),$$

on obtient une solution pour laquelle le mobile P ne s'écarte de la circonférence $r = a$ que d'une quantité de l'ordre de ε^2; ce résultat ne s'applique qu'à un intervalle de temps fini, mais d'autant plus grand que h est plus petit.