J. Soula

Sur les points singuliers des deux fonctions $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{z^n}{a_n}$

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 36-49

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__36_0>

SUR LES POINTS SINGULIERS DES DEUX FONCTIONS $\sum a_n z^n$ ET $\sum \frac{z^n}{a_n}$;

PAR M. J. SOULA.

J'ai déjà indiqué l'intérêt que peut présenter une telle étude : elle est liée au problème posé par M. Borel à propos du théorème de la multiplication des singularités de M. Hadamard : sachant que α est point singulier de $f = \Sigma\, a_n z^n$, que β est point singulier de $\varphi = \Sigma\, b_n z^n$, $\alpha\beta$ est-il point singulier de $\mathrm{H}[f_1, \varphi] = \Sigma\, a_n b_n z^n$?

Le problème a reçu de M. Polya une solution remarquable dans le cas où α et β sont des points isolés ou semi-isolés (1) ; il serait possible, de plus, de donner des réponses précises à la question de M. Borel si l'on connaissait les points singuliers de $f_1 = \sum \frac{z^n}{a_n}$ sans qu'il y ait à supposer que ceux de $\varphi(z)$ soient semi-isolés.

D'un autre côté, la comparaison de $f(z)$ et de $f_1(z)$ est un cas particulier des plus simples du problème qui se pose naturellement dans l'étude des séries de Taylor : trouver les points singuliers de $\Sigma\, \mathrm{G}(a_n) z^n$ connaissant ceux de $f(z)$ quand $\mathrm{G}(u)$ est une fonction analytique donnée. J'ai déjà étudié (2) la fonction f_1 en supposant que f n'a sur son cercle de convergence qu'un ou deux points singuliers et que ces points sont d'espèce particulière. On trouvera dans le présent Mémoire des énoncés d'un genre différent ; ils ont été obtenus par des méthodes dues à M. Carlson.

Notations. — Je considérerai deux variables imaginaires u et z et je poserai toujours

$$u = r e^{i\theta}, \qquad z = \rho e^{i\omega}.$$

Le champ de la variable u sera en général une région illimitée

(1) PÓLYA, *C. R. Acad. Sc.*, 7 mars 1927.

(2) *Journal de Math. pures et appliquées*, 8e série, t. IV, 1921, et 9e série, t. I, 1922.

définie par des inégalités telles que

$$(\Sigma_\alpha) \qquad -\alpha \leqq \theta \leqq \alpha, \qquad r \geqq r_0,$$

α est un angle positif aigu, r_0 est un nombre positif. Un tel champ d'ouverture 2α sera désigné par Σ_α.

1. *Lemme I.* — Soit la fonction $h(u)$ holomorphe et de module borné dans Σ_α, soient r_1, u, et u' des nombres positifs tels que

$$r_0 < r_1 < u < u',$$

la quantité

$$\frac{u}{u'-u} \,|\, h(u') - h(u) \,|$$

admet une borne indépendante de u et de u'.

Je pose :

$$g(z) = h\left(\frac{1}{z}\right), \qquad z = \rho e^{i\omega},$$

$g(z)$ est holomorphe et de module borné dans le secteur

$$(S_\alpha) \qquad -\alpha \leqq \omega \leqq \alpha, \qquad \rho < r_0^{-1},$$

et sur le contour (origine exceptée).

Soient x et x' les inverses de u et de u'. On a

$$0 < x' < x < r_1^{-1} < r_0^{-1}.$$

Il faut établir que $\frac{x'}{x-x'} \,|\, g(x) - g(x') \,|$ est borné. J'ai donné la démonstration dans un Mémoire récent (¹).

Conséquence I. — La même méthode nous donnerait aisément la proposition suivante : si $h(u)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$ dans Σ_α d'une manière uniforme, si u et u' sont réels et si $u' > u$,

$$\frac{u}{u'-u} \,|\, h(u') - h(u) \,|$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$.

Conséquence II. — Si $|h(u)|$ est borné dans Σ_α, si $h(u)$ tend

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XLIV, 1927, p. 128.

vers zéro quand on donne à u une suite de valeurs réelles, positives en progression arithmétique, $h(u)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ dans tout secteur Σ_{α_1} intérieur à Σ_α.

Supposons, par exemple, que $h(n)$ tende vers zéro pour n entier positif. Soit

$$n < u < n+1.$$

On a

$$|h(u) - h(n)| < B\frac{u-n}{u} < \frac{B}{u} \qquad (B \text{ constant});$$

$\frac{B}{u}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{u}$; il en est de même de $h(n)$; $h(u)$ tend vers zéro sur l'axe réel. Comme cette fonction est de module borné, un théorème de M. Montel (¹) nous apprend que $h(u)$ tend vers zéro dans tout domaine Σ_{α_1} intérieur à Σ_α.

2. *Lemme II.* — Soit une fonction $\psi(u)$ holomorphe dans un domaine Σ_α. Si la partie réelle de $\psi(u)$ reste dans ce domaine inférieure à $Mr + C$ (M et C étant des constantes positives), si $\frac{\psi(n)}{n}$ tend vers zéro pour n entier positif, $\frac{\psi(u)}{u}$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{u}$ dans tout domaine Σ_{α_1} intérieur à Σ_α.

Traçons le cercle (R) dont le centre est le point d'affixe n, dont le rayon est $R = n\sin\alpha$ et qui est tangent aux côtés de Σ_α; supposons n assez grand pour que ce cercle soit intérieur à Σ_α. Traçons aussi le cercle (R') concentrique au précédent et de rayon $R' = \lambda R$, λ étant un nombre fixe compris entre 0 et 1. Si A est le maximum de la partie réelle de $\psi(u)$ sur le cercle (R), on peut écrire l'inégalité suivante de M. Borel (²), pour u dans le cercle (R'),

$$|\psi(u)| < 2|\psi(n)| + [4A + 2|\psi(n)|]\frac{R'}{R - R'} = 4A\frac{\lambda}{1-\lambda} + 2|\psi(n)|\frac{1}{1-\lambda}.$$

A sera inférieur à la limite donnée où l'on aura remplacé r par sa

---

(¹) MONTEL, *Annales de l'École Normale*, 1916. — LINDELÖF, *Acta Societatis Scientiarum fennicae*, t. 46, 1915. J'ai donné une démonstration, *loc. cit.*, *Annales de l'École Normale*, p. 100.

(²) *Voir*, par exemple, BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, note 1, p. 104.

plus grande valeur sur le cercle (R), soit $n + R = n(1 + \sin\alpha)$.

$$|\psi(n)| < n\left[4M(1+\sin\alpha) + \frac{4C}{n}\right] + |\psi(n)|\frac{2}{1-\lambda},$$

Comme on a $u > n(1 - \lambda\sin\alpha)$, j'en déduis

$$\left|\frac{\psi(u)}{u}\right| < \frac{1}{1-\lambda\sin\alpha}\left\{4\left[M(1+\sin\alpha) + \frac{C}{n}\right] + \frac{|\psi(n)|}{n}\frac{2}{1-\lambda}\right\}.$$

$\frac{|\psi(n)|}{n}$ tend vers o; $\left|\frac{\psi(u)}{u}\right|$ est borné pour u dans un des cercles (R′). Tous ces cercles recouvrent un domaine Σ_{α_1} dont l'ouverture $2\alpha_1$ vérifie $\sin\alpha_1 = \lambda\sin\alpha$. $\left|\frac{\psi(u)}{u}\right|$ est borné dans Σ_{α_1}; un corollaire du lemme I montre que cette fonction tend uniformément vers zéro dans tout domaine Σ_β intérieur à Σ_{α_1}. Or α_1 est arbitrairement voisin de α puisque λ est arbitrairement voisin de 1.

3. *Lemme III*. — Soit une fonction analytique holomorphe dans le domaine Σ_α et vérifiant, dans cette région, l'inégalité

$$|G(u)| < e^{[\Omega|\sin\theta|+\varepsilon]r},$$

où ε est positif et arbitrairement petit, où M et Ω sont des constantes positives; Ω, inférieur à π, est indépendant de ε.

Si $G(u)$ est nul pour toute valeur entière positive de u à partir de r_0, on peut affirmer que dans un certain domaine Σ_{α_1} intérieur à Σ_α, G vérifie

$$|G(u)| < e^{-ar} \qquad (a > 0).$$

Ce lemme a été utilisé par M. Carlson; j'en ai donné une généralisation. Dans certains énoncés, on a supprimé le terme en ε; il est bien facile de voir que si le théorème est vrai quand on suppose seulement que $|G(u)e^{-\Omega|\sin\theta|r}|$ est borné, il est encore vrai dans le cas actuel.

4. *Lemme IV*. — Pour que la série $\Sigma a_n z^n$ dont le cercle de convergence est 1 représente une fonction holomorphe sur l'arc AB du cercle de convergence défini par

$$(AB) \qquad \Omega \leqq |\omega| \leqq \pi,$$

il faut et il suffit qu'il existe une fonction $G(u)$ holomorphe dans un domaine Σ_α telle que $G(n) = a_n$ et vérifiant l'inégalité

$$|G(u)| < M e^{[\Omega|\sin\theta| + \varepsilon] r}.$$

Des énoncés analogues ont été souvent donnés ; je ne puis que renvoyer aux travaux de M. Carlson.

Si les a_n sont réels, la fonction G peut être choisie réelle pour u réel. Cette fonction est, en effet, donné par M. Carlson sous forme d'intégrale

$$G(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z} e^{-u\log z}\,dz,$$

où l'on doit poser $\log z = \log\rho + i\omega$, ω variant de $-\pi$ à π. Le contour C, qui entoure l'origine, peut être pris symétrique par rapport à l'axe réel ; un rayon issu de l'origine ne le coupe qu'en un point. On a donc, pour u réel,

$$G(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [A(\omega) + iB(\omega)][C(\omega) + i]\,d\omega,$$

A, B, C étant des fonctions réelles ; A est une fonction paire ; B et C sont impaires. On déduira aisément de là que $G(u)$ est réel.

5. Nous abordons maintenant l'étude des deux fonctions définies par

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, \qquad f_1(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{a_n},$$

en supposant que la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite ; on peut admettre sans inconvénient que cette limite est 1. Nous admettons qu'aucun des a_n n'est nul et nous les supposons tous réels, pour commencer.

Supposons que la fonction $f(z)$ soit holomorphe au point -1 du cercle de convergence et aussi sur l'arc

(AB) $$\Omega \leqq |\omega| \leqq \pi, \qquad \rho = 1.$$

Supposons que $f_1(z)$ n'ait pas son cercle de convergence comme coupure et qu'elle soit holomorphe sur l'arc qui a pour milieu le point $-e^{i\beta}$ et qui a pour longueur $2(\pi - \Omega_1)$. La fonction

$$f_2(z) = \sum \frac{e^{in\beta}}{a_n} z^n$$

est holomorphe au point pour lequel $ze^{i\beta} = -e^{i\beta}$, donc pour $z = -1$. Elle est aussi holomorphe sur l'arc

$$(A_1 B_1) \qquad \Omega_1 \leqq |\omega| \leqq \pi, \qquad \rho = 1.$$

Considérons les fonctions $G(u)$ et $G_2(u)$ définies au lemme IV et telles que

$$G(n) = a_n, \qquad G_2(n) = \frac{e^{in\beta}}{a_n}.$$

Dans un certain domaine Σ_α, on a

$$|G(u)\,G_2(u)| < M e^{(\Omega + \Omega_1)|\sin\theta| r + \varepsilon r},$$

M est une constante, ε est arbitrairement petit. Je pose

$$H(u) = G(u)\,G_2(u) - e^{i\beta u}.$$

J'ai

$$|H(u)| < M e^{(\Omega + \Omega_1)|\sin\theta| r + \varepsilon r} + e^{|r \sin\theta| r}.$$

Or, $|\beta|$ peut être supposé inférieur à π ; si $\Omega + \Omega_1$ est aussi inférieur à π, la fonction H, qui est nulle pour u entier, tombe sous le coup du lemme III et l'on a

$$|H(u)| < e^{-ar} \qquad (a > 0),$$

dans un domaine Σ_{α_1}. Écrivons

$$(1) \qquad G\,G_2\,e^{-i\beta u} = 1 + H e^{-i\beta u}.$$

Dans Σ_{α_1} on a

$$|H(u) e^{-i\beta u}| < e^{-(a - |\beta| \sin\theta|) r}.$$

Cette quantité tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ si $|\sin\theta| < \frac{a}{|\beta|}$; le premier membre de (1) tend donc vers 1 dans certain domaine Σ_{α_2} intérieur à Σ_{α_1}. Il est donc certain que G et G_2 n'ont pas de racine quand u est intérieur à Σ_{α_2}.

Ce résultat nous permet de définir une fonction $\psi(u)$ par l'égalité

$$\psi(u) = \log G(u).$$

Une détermination du logarithme étant choisie pour une valeur de u, ψ se laisse définir dans Σ_{α_2} par prolongement analytique ; un raisonnement connu montre que ψ est holomorphe dans le domaine simplement connexe Σ_{α_2}. Pour u réel, la fonction G est réelle ;

comme elle n'a pas de racines, on peut la supposer positive ; on pourra donc choisir ψ réel. On a

$$|G(u)| < e^{Kr} \qquad \text{dans } \Sigma_{\alpha_2},$$

et la partie réelle de ψ est inférieure à Kr. Enfin $\frac{\psi(n)}{n} = \frac{La_n}{n}$ et ce nombre réel tend vers zéro. On peut donc appliquer le lemme II : $\frac{\psi(u)}{u}$ tend uniformément vers zéro dans un domaine Σ_{α_3}. Il en est de même de la partie réelle de $\frac{\psi(u)}{r}$. On a donc, dans Σ_{α_3} et pour r assez grand,

$$e^{-\varepsilon r} < |G(u)| < e^{\varepsilon r}.$$

Le lemme IV montre que, dans ces conditions, $f(z)$ ne possède que le point singulier 1 sur son cercle de convergence.

Passons à $f_1(z)$. Comme le deuxième membre de l'équation (1) est voisin de 1, on en déduit

$$|G_2 e^{-i\beta u}| < \frac{K}{G} \qquad (K \text{ constant}).$$

L'inégalité obtenue pour G donne

$$|G_2 e^{-i\beta u}| < K e^{\varepsilon r}.$$

Or, la fonction $G(n)e^{-i\beta n}$ prend la valeur $\frac{1}{a_n}$ pour n entier ; il en résulte que $f_1(z)$ n'a que le point singulier 1 sur le cercle de rayon 1, elle aussi.

Théorème I. — *Si les a_n sont réels, si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1, si les fonctions $\Sigma a_n z^n$ et $\sum \frac{z^n}{a_n}$ sont holomorphes sur des arcs du cercle de convergence de longueurs respectives α et α_1, si l'un de ces arcs a pour milieu le point -1, si enfin $\alpha + \alpha_1$ est supérieur à 2π, on peut affirmer que les deux fonctions n'ont l'une et l'autre que le point singulier 1 sur le cercle de convergence.*

6. Supposons que l'on sache *a priori* que f n'a que le point singulier 1 sur le cercle de convergence, on peut supposer α arbitrai-

rement voisin de 2π ; si f_1 est holomorphe sur un arc quelconque α_1 du cercle, elle n'a que le point singulier 1.

Théorème II. — *Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1, si les a_n sont réels, si f n'a que le point singulier 1 sur le cercle de convergence, de deux choses l'une : ou f_1 n'a sur le cercle de rayon 1 que le point singulier 1, ou elle admet ce cercle comme coupure.*

Gardant les mêmes hypothèses, je vais indiquer quelques propriétés de f et de f_1 quand elles n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de rayon 1.

Il existe une fonction $G(u)$ telle que $G(n) = a_n$ et telle que $|G(u)e^{-\varepsilon r}|$ soit borné dans un domaine Σ_{α_3}. De la démonstration du lemme IV, telle que je l'ai présentée ([1]), résulte que $f(z)$ est holomorphe au voisinage du point singulier 1, dans la région intérieure à un angle *supérieur à* π et qui a la droite qui joint l'origine au point 1 pour bissectrice. J'exprimerai cette propriété en disant que le point 1 est un point singulier « sans contact ».

Théorème II'. — *Si $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont que le point singulier 1 sur leur cercle de convergence de rayon 1, ce point est singulier sans contact.*

Les coefficients a_n ont tous même signe dès que n est assez grand ; je puis donc les supposer positifs. Cela nous permet d'affirmer que l'on n'est pas dans le cas actuel lorsqu'on étudie des exemples simples tels que $\Sigma \sin \log n\, z^n$ ou $\Sigma \sin \sqrt{n}\, z^n$.

Je remarquerai encore que la fonction $\Sigma \sqrt[2]{a_n}\, z^n$ n'a que le point singulier 1 sur le cercle de rayon 1 ; $\sqrt[2]{G(u)}$ est, en effet, holomorphe dans $\Sigma\alpha_3$ et de l'ordre de $e^{\varepsilon r}$.

Pour avoir une autre propriété, je reprends la fonction $\psi(u)$ du n° 5 et j'applique le lemme I à $\frac{\psi(u)}{u}$ pour $u' = n+1$ et $u = n$ (n entier). $\frac{\psi(u)}{u}$ tend vers zéro dans un domaine Σ_{α_3} ; j'en ai déduit que

$$n \left| \frac{\psi(n)}{n} - \frac{\psi(n+1)}{n+1} \right| = \varepsilon(n)$$

([1]) *Journal de Math. pures et appl.*, t. IV, 1921, p. 124.

tend aussi vers zéro (lemme I, conséquence I),

$$\left|\psi(n) - \psi(n+1) + \frac{\psi(n+1)}{n+1}\right| = \varepsilon(n),$$

$$|\psi(n) - \psi(n+1)| < \varepsilon(n) + \frac{\psi(n+1)}{n+1} = \varepsilon'(n),$$

expression qui tend encore vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On peut écrire

$$-\varepsilon'(n) < \psi(n+1) - \psi(n) < \varepsilon'(n),$$

$$e^{-\varepsilon'(n)} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < e^{\varepsilon'(n)};$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend donc vers 1.

Théorème III. — *Si les a_n sont réels, si $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont que le point singulier 1 sur leur cercle de convergence commun de rayon 1, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1.*

J'ai étudié des fonctions telles que $\psi(u)$ (1); des résultats obtenus on déduit aisément des propriétés des coefficients; je n'en donnerai qu'une :

Théorème IV. — *Gardons les hypothèses du théorème III et supposons de plus que a_n soit égal à un nombre déterminé, a, pour n égal à un des entiers d'une suite, $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$; si $\frac{n_{p+1}}{n_p}$ tend vers 1, a_n tend vers a.*

7. On peut obtenir des résultats dans le cas où les coefficients sont imaginaires. Nous poserons

$$a_n = \rho_n e^{i\omega_n}, \qquad \rho_n = |a_n|, \qquad f(z) = \Sigma \rho_n e^{i\omega_n}, \qquad f_1(z) = \sum \frac{1}{\rho_n} e^{-i\omega_n} z^n.$$

Nous supposerons encore que $\sqrt[n]{\rho_n}$ tend vers 1.

La fonction $\Sigma \rho_n e^{-i\omega_n} z^n$ a ses points singuliers conjugués de ceux de $f(z)$. Le théorème de la multiplication des singularités de M. Hadamard donnera les points singuliers de $\Sigma \rho_n^2 z^n$. Si $f(z)$ est holomorphe sur l'arc ($|\omega| \geqq \Omega$, $\rho = 1$) et si Ω est inférieur à $\frac{\pi}{2}$,

(1) *Annales de l'École Normale*, 1927, p. 119.

$\Sigma\rho_n^2 z^n$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq 2\Omega$, $(2\Omega < \pi)$. De même, si $f(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq \Omega_1$, $\sum \frac{z^n}{\rho_n^2}$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq 2\Omega_1$. Si donc $\Omega + \Omega_1 < \frac{\pi}{2}$, les deux séries $\Sigma\rho_n^2 z^n$ et $\sum \frac{z^n}{\rho_n^2}$ n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence ; une remarque donnée plus haut montre que $\Sigma\rho_n z^n$ et $\sum \frac{z^n}{\rho_n}$ n'ont aussi que le point singulier 1 sur ce cercle.

Théorème V. — *Si* $\sqrt[n]{\rho_n}$ *tend vers* 1, *si* $f(z)$ *est holomorphe sur l'arc* $|\omega| \geqq \Omega$ *et* $f_1(z)$ *sur l'arc* $|\Omega| \geqq \Omega_1$ *du cercle de rayon* 1, *si* $\Omega + \Omega_1 < \frac{\pi}{2}$, *les fonctions* $\Sigma\rho_n z^n$ *et* $\sum \frac{z^n}{\rho_n}$ *n'ont que le point singulier* 1 *sur le cercle de convergence.*

On peut ajouter que ces deux fonctions possèdent les propriétés données par le théorème II′ et que les ρ_n possèdent les propriétés des a_n donnéés au n° 6. Si, de plus, on sait que $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence, il en est de même de $\Sigma e^{i\omega_n} z^n$ et de $\Sigma e^{-i\omega_n} z^n$ comme le montre le théorème de la multiplication des singularités.

8. Je me propose, maintenant, d'étudier les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ dans le cas où l'on suppose qu'elles n'ont l'une et l'autre qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence; $\sqrt[n]{|a_n|}$ tendant vers 1, les a_n n'étant pas nécessairement réels pour le moment.

Un procédé, dû à M. Carlson [1], permet de transformer $f(z)$ et $f_1(z)$ de manière à placer les points singuliers au voisinage du point 1. Soient

$$z = e^{i\varphi_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p')$$

les points singuliers de $f(z)$ sur le cercle de convergence et

$$z = e^{i\varphi_\nu} \qquad (\nu = p'+1, p'+2, \ldots, p)$$

ceux de $f_1(z)$, p points en tout.

Donnons-nous un nombre q supérieur à 1 ; il existe, on le sait,

---

[1] Carlson, *Math. Annalen*, t. 79, 1919, p. 244.

un entier m et d'autres entiers m_1, m_2, ..., m_p tels que

$$\left|\frac{\varphi_\nu}{2\pi} - \frac{m_\nu}{m}\right| < \frac{1}{m(2q)};$$

m est au plus égal à $(2q)^p$.

On peut donc enfermer chacun des points singuliers considérés dans l'un des arcs b_s dont le milieu est le point $e^{\frac{2\pi i s}{m}}$ et dont la longueur est $\frac{2\pi}{mq}$. On posera

$$F_\mu(z) = m\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\mu+m\lambda}\, z^{m\lambda}, \qquad F'_z = m\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{z^{m\lambda}}{a_{\mu+m\lambda}}.$$

Il est bien facile de voir que les points singuliers de $F_\mu(z)$ se déduisent de ceux de $f(z)$ par des rotations de $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}$, $\cdots$ autour de l'origine. Ceux de $F'_\mu(z)$ se déduisent de la même façon de ceux de $f_1(z)$; tous ces points sont donc intérieurs aux arcs b_s. On a d'ailleurs

$$(2) \qquad mf(z) = \sum_{\mu=0}^{m-1} x^\mu F_\mu(z), \qquad mf_1(z) = \sum_{m=0}^{m-1} x^\mu F'_\mu(z).$$

Posons :

$$t = z^m,$$

$$F_\mu(z) = m\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\mu+m\lambda}\, t^\lambda = mg_\mu(t),$$

$$F'_\mu(z) = m\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{t^\lambda}{a_{\mu+m\lambda}} = mg'_\mu(t).$$

Les points singuliers de $g_\mu(t)$ se déduisent de ceux de $F_\mu(z)$ par la transformation $t = z^m$; le milieu de l'arc b_s devient $e^{2\pi i s} = 1$, la longueur de l'arc devient $\frac{2\pi}{q}$; les points singuliers de $g_\mu(t)$ situés sur le cercle ont donc leurs arguments inférieurs à $\frac{\pi}{q}$ en valeur absolue; il en est de même de ceux de $g'_\mu(t)$.

Si tous les coefficients a_n sont réels, on prendra $q > 2$; on pourra appliquer à g_μ et g'_μ le théorème I : ces deux fonctions n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence. F_μ et F'_μ n'ont que les points singuliers $e^{\frac{2i\pi s}{m}}$; cela est vrai pour toute valeur de μ et, en vertu de (2), la même propriété est valable pour $f(z)$ et $f_1(z)$.

Théorème VI. — *Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers* 1, *si les a_n sont réels, si les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont l'une et l'autre qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence, ces points singuliers sont des sommets d'un polygone régulier dont le point* 1 *est un sommet.*

On peut ajouter que les signes des a_n varient de façon périodique, pour n assez grand ; que les points singuliers en question sont « sans contact » ; que le nombre des sommets du polygone est au plus 4^p, p étant le nombre total des points singuliers de f et de f_1 sur le cercle.

De même, à l'aide du théorème V, on démontrera :

Théorème VII. — *Si $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers* 1, *si $f(z)$ et $f_1(z)$ n'ont l'une et l'autre qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence, les fonctions $\Sigma|a_n|z^n$ et $\sum \frac{z^n}{|a_n|}$ n'ont qu'un nombre fini de points singuliers sur le cercle de convergence et ces points sont des sommets d'un polygone régulier.*

9. On peut encore étudier le cas où l'on sait seulement que $f(z)$ n'a que des points singuliers en nombre fini sur le cercle de convergence.

Supposons, par exemple, que $f(z)$ n'ait que deux points singuliers $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$ sur le cercle de convergence ; admettons toujours que $\sqrt[n]{|a_n|}$ tende vers 1 et que les a_n soient réels. J'effectue la transformation du n° 8 sur $f(z)$ et sur $f_1(z)$ en prenant $p=2$ et en laissant q indéterminé. $g(t)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega|>\frac{\pi}{q}$. Si $f_1(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega|\geqq\left(\pi-\frac{\pi}{q}\right)\frac{1}{m}$, $g'_\mu(t)$ sera holomorphe sur l'arc $|\omega|\geqq\pi-\frac{\pi}{q}$ et $g_\mu(t)$ et $g'_\mu(t)$ n'auront que le point singulier 1 (théorème I). $f_1(z)$ n'aura qu'un nombre fini de points singuliers de module 1 et les points singuliers de $f(z)$ et de $f_1(z)$ seront des sommets d'un polygone régulier dont le nombre des côtés est $m\leqq(2q)^2$.

On sera certainement dans ce cas si $f_1(z)$ est régulier sur l'arc $|\omega|\geqq\left(\pi-\frac{\pi}{q}\right)\frac{1}{4q^2}$ puisque $m\leqq(2q)^2$. Or le maximum de $\left(\pi-\frac{\pi}{q}\right)\frac{1}{4q^2}$ quand q prend toute valeur de 1 à ∞ est $\frac{\pi}{27}$, obtenu pour $q = \frac{3}{2}$ et m est au plus égal à 9. Dans l'arc $|\omega| < \frac{\pi}{27}$ il ne peut y avoir qu'un sommet du polygone régulier de m côtés; $f_1(z)$ a donc un seul point singulier sur le cercle; il en est de même de $f(z)$ d'après le théorème I.

Théorème VIII. — *Soit $f_1(z) = \sum \frac{z^n}{a_n}$ où les a_n sont réels, où $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1. Si $f_1(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq \frac{\pi}{27}$ du cercle de rayon 1, de deux choses l'une : ou $\Sigma a_n z^n$ a plus de deux points singuliers sur ce cercle, ou $f(z)$ et $f_1(z)$ n'en ont qu'un seul, le point 1.*

10. Je reviens sur les énoncés de ce travail pour chercher si toutes les hypothèses qu'ils acceptent sont bien nécessaires.

Le théorème I suppose les a_n réels. Cette hypothèse est essentielle; on le voit en posant $f = \Sigma e^{in\beta} z^n$; f et f_1 sont réguliers sur l'arc $|\omega| > \beta$ et, si $\beta < \frac{\pi}{2}$, le double de la longueur de cet arc dépasse 2π.

Je rappelle d'ailleurs que M. Fabry [1] a construit des fonctions de la forme $\Sigma e^{i\omega_n} z^n$ ayant telle singularité que l'on voudra sur le cercle de rayon 1. Il est donc impossible de modifier le théorème V et de conclure par une propriété des fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ elles-mêmes.

La condition $\alpha + \alpha_1 > 2\pi$ qui figure au théorème I est nécessaire : la fonction $f = \Sigma(-1)^n (z^{2n} + z^{2n+1})$ ne possède que les points singuliers i et $-i$; il en est de même de f_1.

La condition que $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'ait qu'une limite est, elle aussi, indispensable. J'ai pu construire une fonction $f(z)$ telle que $\sqrt[n]{|a_n|}$ ait pour plus grande limite 1 et pour plus petite limite un nombre a inférieur à 1, le seul point singulier de module 1 étant 1, f_1 ayant les points singuliers a et $-a$, et ceux-là seulement sur le cercle de rayon a. Je n'insiste pas sur la démonstration de ce point de détail.

Enfin, une question se pose : les cas prévus au théorème I sont-ils possibles tous les deux? Il est bien certain qu'il existe des fonc-

(1) Fabry, *Acta math.*, t. 22, p. 85.

tions f et f_1 répondant aux conditions de l'hypothèse et n'ayant que le point singulier 1 sur le cercle de convergence. Il reste à construire des fonctions telles que f n'ait que le point singulier 1 sur ce cercle et que f_1 l'admette comme coupure. Je prendrai

$$f(z) = \sum \sin \pi \sqrt{n - \frac{1}{2}}\, z^n = \Sigma a_n z^n.$$

Par l'application du lemme IV, on voit que le seul point singulier de module 1 est 1. Soit p la racine de n : écrivons

$$n = p^2 + r, \qquad \sqrt{n - \frac{1}{2}} = p + \alpha_n, \qquad \alpha_n = \frac{r - \frac{1}{2}}{\sqrt{n - \frac{1}{2}} + p},$$

$$|\alpha_n| > \frac{\frac{1}{2}}{2p+1},$$

$$a_n = \sin \pi \sqrt{n - \frac{1}{2}} = \pm \sin \alpha_n \pi = \pm (1 + \varepsilon_n)\, \alpha_n \pi,$$

ε_n tendant vers zéro. $\sqrt[n]{a_n}$ a même limite que $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$; cette quantité est comprise entre 1 et $\left(\frac{1}{4p+2}\right)^{\frac{1}{n}} > \left(\frac{1}{4p+2}\right)^{\frac{1}{p^2}}$ qui tend vers 1. $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers 1. D'autre part, les a_n présentent une infinité de changements de signe, ce qui, comme je l'ai dit, entraîne que f n'a pas le seul point singulier 1 sur le cercle de convergence ; on est donc dans le deuxième cas : celui où ce cercle est coupure pour f_1.
