BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur un système de numération

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 139-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__139_0>

SUR UN SYSTÈME DE NUMÉRATION;

PAR M. PAUL APPELL.

Les systèmes de numération habituellement employés ont une base B telle qu'un chiffre placé à la droite d'un autre représente des unités B fois plus petites.

Il serait intéressant d'étudier des systèmes de numération dans lesquels la base varie. Nous ne nous occuperons pas des unités, dans le sens habituel du mot, que nous appellerons E et que nous séparerons de la suite des nombres plus petits que 1 par un point et virgule. Soit un système d'entiers positifs $N_1, N_2, \ldots, N_p, \ldots$ Considérons un nombre que nous écrirons, en désignant par a_1, $a_2, \ldots, a_p$ des entiers

$$(1)\qquad E;\ a_1 a_2 \ldots a_p \ldots,$$

E représentant des unités en nombre quelconque ;
a_1 des unités N_1 fois plus petites ;
a_2 des unités N_2 fois plus petites que a_1 ;
a_3 des unités N_3 fois plus petites que les précédentes, etc.

Dans la numération habituelle

$$N_1 = N_2 = N_3 = \ldots = B.$$

Dans la numération décimale tous ces nombres sont égaux à dix. Le nombre considére est

$$E + \frac{a_1}{N_1} + \frac{a_2}{N_1 N_2} + \frac{a_3}{N_1 N_2 N_3} + \ldots$$

avec

$$a_1 \leqq N_1 - 1,$$
$$a_2 \leqq N_2 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_p \leqq N_p - 1,$$

$N_1, N_2, \ldots, N_p, \ldots$ étant au moins égaux à deux.

Dans ces conditions, la série

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_1 N_2} + \frac{1}{N_1 N_2 N_3} + \ldots = 0{;}\ 1111 \ldots \textit{ad inf.}$$

est convergente car son terme général est plus petit que $\frac{1}{2^p}$. Si nous désignons par S la somme de cette série, dans la numération décimale on a

$$S = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots = \frac{1}{9}.$$

Un nombre entier E pourra être représenté de deux facons, ou bien E, ou bien $E - 1 + \frac{N_1 - 1}{N_1} + \frac{N_2 - 1}{N_1 N_2} + \ldots$; en effet, la série

$$\frac{N_1 - 1}{N_1} + \frac{N_2 - 1}{N_1 N_2} + \ldots = 1 - \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_1 N_2} + \ldots$$

a pour somme 1, ce qui est évident car le plus grand nombre, de la forme indiquée, ne peut être que 1.

Ainsi, dans la numération décimale, un nombre entier E peut s'écrire de deux façons : ou bien E, ou bien $E - 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots$. Deux cas essentiels sont à distinguer suivant que le produit $N_1 N_2 \ldots N_p \ldots$ renferme tous les nombres premiers ou ne les renferme pas. Ainsi dans le système de numération décimal il ne les renferme pas.

On peut prendre $N_p = a + p$, a étant un entier supérieur ou égal à 1. Le cas $a = 1$ a été traité par M. Stéphanos (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, 1878-1879, p. 81).