BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Sur la théorie des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 135-137
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__135_0>

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES ;

PAR M. HADAMARD.

M. Landau est arrivé récemment, par un artifice extrêmement ingénieux, à donner en quelques lignes la démonstration des résultats essentiels relatifs aux fonctions entières de genre fini (¹). Sa méthode dispense en particulier de la recherche de cercles successifs assujettis à éviter les zéros de la fonction $G(z)$ considérée.

Mais non moins remarquable peut-être est la simplicité de l'hypothèse qu'elle fait sur la fonction $G(z)$ en question, hypothèse beaucoup moins restrictive et en même temps beaucoup plus naturelle que celles que l'on a été obligé d'invoquer jusqu'ici.

Bornons-nous, pour le moment, au cas le plus simple, celui du genre zéro, et supposons en outre $G(0) = 1$. En désignant par $M(r)$, comme d'habitude, le maximum du module de $G(z)$ sur la circonférence $|z| = r$; par $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les zèros de $G(z)$ dont les modules sont inférieurs à une certaine valeur déterminée de r, M. Landau arrive à limiter la valeur du « reste » du produit infini $\prod\left(1 - \frac{z}{a_i}\right)$, c'est-à-dire de la quantité $g(z)$ définie par la relation

$$G(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\cdot g(z) \tag{1}$$

en un point déterminé quelconque dont l'affixe z a un module ρ plus petit que r; il trouve (¹)

$$|\log g(z)| \leqq \frac{2\rho}{r - \rho} \log M(2r). \tag{2}$$

(¹) Voir *Math. Zeitschr.*, t. 26, 1927, p. 170 et suiv., particulièrement p. 174. La démonstration à laquelle était tout d'abord arrivé M. Landau, et qu'il m'a communiquée personnellement, était un peu différente de celle qu'il a publiée en cet endroit et employait directement l'inégalité connue de M. Carathéodory

Or, ceci fait, *il suffit de supposer que* $\frac{1}{r}\log M(r)$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire *que l'on a l'inégalité*

$$|G(z)| < e^{\varepsilon|z|} \tag{3}$$

quelque petit que soit ε, *pourvu qu'on prenne* z *suffisamment grand*, pour établir à la fois :

1° Que le produit infini

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right) \tag{4}$$

converge;

2° Que sa valeur est précisément celle de $G(z)$.

En effet, moyennant l'hypothèse (3), l'inégalité (2) montre que le reste $g(z)$ tend vers 1 lorsque, z restant fixe, r et, par conséquent, n augmentent indéfiniment.

La relation (3), qu'il suffit ainsi de prendre pour hypothèse, *n'est autre que celle que trouve Poincaré*, dans son Mémoire fondamental publié au tome XI du *Bulletin de la Société*, comme condition *nécessaire* pour qu'une fonction entière soit de genre zéro.

Aucun raisonnement n'avait jusqu'ici fait intervenir cette relation à titre de condition *suffisante*.

Bien entendu, d'ailleurs, elle ne saurait l'être pour que la fonction soit de genre zéro (l'existence d'une condition nécessaire et suffisante dans cet ordre d'idées étant impossible, puisqu'en contradiction avec le résultat connu de Lindelöf et de Boutroux); et, en effet, ce que démontre le raisonnement précédent, est la convergence du produit infini *lorsque les* a_n, *qui interviennent dans les facteurs primaires, sont rangés par ordre de modules croissants*. La série $\sum \frac{1}{a}$ est également, d'après cela, convergente dans les mêmes conditions. Au contraire, la définition classique du genre zéro comporte une convergence *absolue* de la série et du produit en question

Par exemple, le raisonnement ci-dessus s'applique intégralement à la fonction

$$\prod\left(1-\frac{z^2}{n^2\log^2 n}\right),$$

que Poincaré signale comme une fonction de genre *un* satisfaisant à l'inégalité (3).

M. Landau (*loc. cit.*) complète d'ailleurs la démonstration en établissant la convergence absolue du produit infini; mais pour cela, bien entendu, l'hypothèse (3) ne lui suffit plus, et il revient à l'hypothèse classique. Or, même en vue de ce résultat, celle-ci, en vertu de ce qui précède, peut être simplifiée : il suffit évidemment de combiner notre résultat avec les données classiques fournies par la formule de Jensen. On voit ainsi que *la fonction entière* G(z) *est de genre zéro dès que, la condition* (3) *étant remplie, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\log M(n) \tag{5}$$

correspondante est convergente.

A ma connaissance, c'est la condition suffisante minima énoncée jusqu'à ce jour, en tant qu'on ne fait intervenir que la fonction M(r).