BULLETIN DE LA S. M. F.

F. LINDEMANN

Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 113-125

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__113_1>

Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires; par M. Lindemann.

(Séance du 7 février 1877.)

Les formules qui servent à la représentation typique des formes binaires d'ordre pair par trois covariants quadratiques sont susceptibles d'une interprétation géométrique, peut-être assez remarquable pour être expliquée en peu de mots.

Nous désignerons par ξ_1, ξ_2 des variables binaires, par x_1, x_2, x_3 des coordonnées ternaires ponctuelles. Alors les coordonnées des points d'une conique se représentent comme des fonctions rationnelles du paramètre $\xi_1 : \xi_2$ sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta x_1 &= \Sigma\Sigma k_{ik}\xi_i\xi_k \equiv k_\xi^2 \equiv k_\xi'^2 \equiv \ldots, \\ \zeta x_2 &= \Sigma\Sigma l_{ik}\xi_i\xi_k \equiv l_\xi^2 \equiv l_\xi'^2 \equiv \ldots, \\ \zeta x_3 &= \Sigma\Sigma m_{ik}\xi_i\xi_k \equiv m_\xi^2 \equiv m_\xi'^2 \equiv \ldots, \end{aligned} \right.$$

à moins que l'invariant simultané des trois formes quadratiques

$$\mathrm{D} = -(kl)(lm)(mk) = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{22} \\ l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \end{vmatrix}$$

ne s'évanouisse. En éliminant les quantités ζ, ξ_1, ξ_2 des équations (1), on obtient l'équation de la conique ([1])

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_{\varkappa\varkappa} x_1^2 + \mathrm{A}_{\lambda\lambda} x_2^2 + \mathrm{A}_{\mu\mu} x_3^2 + 2\,\mathrm{A}_{\varkappa\lambda} x_1 x_2 + 2\,\mathrm{A}_{\lambda\mu} x_2 x_3 + \mathrm{A}_{\mu\varkappa} x_3 x_1 \\ \qquad \equiv \mathrm{F} \equiv p_x^2 \equiv p_x'^2 \equiv p_x''^2 \equiv \ldots = 0, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A}_{\varkappa\varkappa} = (\varkappa\varkappa')^2, & \mathrm{A}_{\lambda\lambda} = (\lambda\lambda')^2, & \mathrm{A}_{\mu\mu} = (\mu\mu')^2, \\ \mathrm{A}_{\lambda\mu} = (\lambda\mu)^2, & \mathrm{A}_{\mu\varkappa} = (\mu\varkappa)^2, & \mathrm{A}_{\varkappa\lambda} = (\varkappa\lambda)^2, \\ \varkappa_\xi^2 = (lm)\, l_\xi m_\xi, & \lambda_\xi^2 = (mk)\, m_\xi k_\xi, & \mu_\xi^2 = (kl)\, k_\xi l_\xi. \end{array}$$

Pour l'invariant simultané des formes $\varkappa_\xi^2$, λ_ξ^2, μ_ξ^2, dont nous aurons besoin plus tard, on trouve la valeur [*voir* Clebsch, *loc. cit.*, formule (19), p. 207]

$$(3)\qquad -(\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa) = \frac{1}{2}\mathrm{D}^2.$$

L'équation (2) s'écrit aussi sous la forme

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{kk} & \mathrm{A}_{kl} & \mathrm{A}_{km} & x_1 \\ \mathrm{A}_{lk} & \mathrm{A}_{ll} & \mathrm{A}_{lm} & x_2 \\ \mathrm{A}_{mk} & \mathrm{A}_{ml} & \mathrm{A}_{mm} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

car on a

$$(5)\quad \mathrm{A}_{\mu\mu} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}_{kk}\mathrm{A}_{ll} - \mathrm{A}_{kl}^2), \quad \mathrm{A}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}_{km}\mathrm{A}_{kl} - \mathrm{A}_{lm}\mathrm{A}_{kk}), \quad \ldots.$$

Cela posé, la représentation d'une forme binaire quadratique a_ξ^2 est donnée par la formule

$$(6)\qquad \mathrm{D}\, a_\xi^2 = (a\varkappa)^2 k_\xi^2 + (a\lambda)^2 l_\xi^2 + (a\mu)^2 m_\xi^2\,;$$

par conséquent, la représentation d'une forme d'ordre $2n$ est

---

([1]) *Voir* Clebsch : *Theorie der binären algebraischen Formen*, p. 205 et 415.

donnée par

$$\begin{aligned}D''a_\xi^{2n} = \quad & [(a\varkappa')^2 k_\xi'^2 + (a\lambda')^2 l_\xi'^2 + (a\mu')^2 m_\xi'^2] \\ & \times [(a\varkappa'')^2 k_\xi''^2 + (a\lambda'')^2 l_\xi''^2 + (a\mu'')^2 m_\xi''^2] \\ & \times \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times \{[a\varkappa^{(n)}]^2 k_\xi^{(n)^2} + [a\lambda^{(n)}]^2 l_\xi^{(n)^2} + [a\mu^{(n)}]^2 m_\xi^{(n)^2}\}.\end{aligned}$$

Dans le second membre de cette égalité, nous effectuons la substitution (1). Égalé à zéro, ce membre nous donne alors l'équation d'une courbe de l'ordre n qui passe par les $2n$ points de la conique fondamentale $F = 0$, correspondant, en vertu des équations (1), aux $2n$ racines de l'équation $a_\xi^{2n} = 0$. Nous allons faire connaître les relations particulières par lesquelles cette courbe est attachée à ces $2n$ points et à la conique $F = 0$.

A cet effet, nous posons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha_x^n \equiv \beta_x^n \ldots = \quad & [(a\varkappa')^2 x_1 + (a\lambda')^2 x_2 + (a\mu') x_3] \\ & \times [(a\varkappa'')^2 x_1 + (a\lambda'')^2 x_2 + (a\mu'')^2 x_3] \\ & \times \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times \{[a\varkappa^{(n)}]^2 x_1 + [a\lambda^{(n)}]^2 x_2 + [a\mu^{(n)}]^2 x_3\},\end{aligned}\right.$$

de sorte que $\alpha_x^n = 0$ est l'équation de ladite courbe et que l'on a la formule symbolique

$$(8)\qquad \alpha_x = (a\varkappa)^2 x_1 + (a\lambda)^2 x_2 + (a\mu)^2 x_3.$$

Formons maintenant l'expression

$$(pp'\alpha)^2 \alpha_x^{n-2},$$

covariant simultané de la courbe $\alpha_x^n = 0$ et de la conique $F \equiv p_x^2 = 0$. Le contrevariant $(pp'u)^2$ de F est donné par l'expression

$$-\frac{1}{2}(pp'u)^2 = \begin{vmatrix} A_{\varkappa\varkappa} & A_{\varkappa\lambda} & A_{\varkappa\mu} & u_1 \\ A_{\lambda\varkappa} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} & u_2 \\ A_{\mu\varkappa} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix};$$

on trouve donc le covariant dont il s'agit, en posant, dans la dernière colonne verticale de ce déterminant,

$$u_1 = \alpha_1 = (a\varkappa')^2,\quad u_2 = \alpha_2 = (a\lambda')^2,\quad u_3 = \alpha_3 = (a\mu')^2,$$

et dans la dernière ligne horizontale,

$$u_1 = \alpha_1 = (a\varkappa'')^2, \quad u_2 = \alpha_2 = (a\lambda'')^2, \quad u_3 = \alpha_3 = (a\mu'')^2,$$

et en multipliant le déterminant ainsi transformé par

$$\begin{aligned} \alpha_x^{n-2} = \ & [(a\varkappa''')^2 x_1 + (a\lambda''')^2 x_2 + (a\mu''')^2 x_3] \\ & \times \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \times \{[a\varkappa^{(n)}]^2 x_1 + [a\lambda^{(n)}]^2 x_2 + [a\mu^{(n)}]^2 x_3\}. \end{aligned}$$

Alors on obtient une expression dont nous envisageons le facteur symbolique

$$\begin{vmatrix} A_{\varkappa\varkappa} & A_{\varkappa\lambda} & A_{\varkappa\mu} & (a\varkappa')^2 \\ A_{\lambda\varkappa} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} & (a\lambda')^2 \\ A_{\mu\varkappa} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} & (a\mu')^2 \\ (a\varkappa'')^2 & (a\lambda'')^2 & (a\mu'')^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

De l'équation (6) découlent les formules suivantes :

$$\begin{aligned} D(a\varkappa)^2 &= A_{\varkappa\varkappa}(ak)^2 + A_{\varkappa\lambda}(al)^2 + A_{\varkappa\mu}(am)^2, \\ D(a\lambda)^2 &= A_{\lambda\varkappa}(ak)^2 + A_{\lambda\lambda}(al)^2 + A_{\lambda\mu}(am)^2, \\ D(a\mu)^2 &= A_{\mu\varkappa}(ak)^2 + A_{\mu\lambda}(al)^2 + A_{\mu\mu}(am)^2. \end{aligned}$$

On peut donc remplacer les termes $(a\varkappa')^2$, $(a\lambda')^2$, $a\mu')^2$, o, qui forment la dernière colonne du déterminant considéré, respectivement par

$$0,\ 0,\ 0,\ -[(a\varkappa'')^2(ak)^2 + (a\lambda'')^2(al)^2 + (a\mu'')^2(am)^2].$$

La dernière somme devient, au signe près, égale au second membre de l'équation (6) quand on y pose $\xi_1 = a_2$, $\xi_2 = -a_1$; elle est donc égale à $D(aa)^2$, et par conséquent identiquement nulle. Il en résulte que le déterminant envisagé s'évanouit aussi identiquement; par suite, le covariant cherché est nul pour tous les points x de la conique $F = 0$; et, puisqu'il ne contient pas le facteur F, il doit être nul pour tous les points du plan, de sorte que

$$(9) \qquad (pp'\alpha)^2 \alpha_x^{n-2} \equiv 0.$$

Cette relation exprime que la conique $F = 0$ est harmoniquement inscrite à toutes les coniques polaires de la courbe $\alpha_x^n = 0$, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de triangles conjugués par rapport à la conique $F = 0$, qui sont inscrits à la conique polaire du point x, relative à la courbe $\alpha_x^n = 0$. Par cette propriété de ses coniques polaires, la courbe $\alpha_x^n = 0$ est parfaitement fixée. En effet, l'équation (9) nous représente $\frac{1}{2}n(n-1)$ conditions différentes de la forme

$$(10)\qquad (pp'\alpha)^2\alpha_1^r\alpha_2^s\alpha_3^t = 0,$$

où

$$r + s + t = n - 2;$$

et, en y ajoutant les $2n$ conditions qui expriment que la courbe $\alpha_x^n = 0$ passe par les $2n$ points de la conique, représentés par l'équation $a_\xi^{2n} = 0$, on obtient justement $\frac{1}{2}n(n+3)$ conditions linéaires pour ladite courbe.

Entre chaque système de six des équations (10), on peut éliminer les six quantités $(pp')_i(pp')_k$, coefficients de l'équation tangentielle $(pp'u)^2 = 0$ de la conique $F = 0$. C'est ainsi que l'on trouve un grand nombre de relations invariantes auxquelles la courbe $\alpha_x^n = 0$ doit satisfaire. Pour les écrire sous une forme convenable, nous effectuons cette élimination d'abord pour le cas $n = 4$. Dans ce cas, on n'arrive qu'à une condition, à savoir

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{1111} & \alpha_{1122} & \alpha_{1133} & \alpha_{1123} & \alpha_{1131} & \alpha_{1112} \\
\alpha_{2211} & \alpha_{2222} & \alpha_{2233} & \alpha_{2223} & \alpha_{2231} & \alpha_{2212} \\
\alpha_{3311} & \alpha_{3322} & \alpha_{3333} & \alpha_{3323} & \alpha_{3331} & \alpha_{3312} \\
\alpha_{2311} & \alpha_{2322} & \alpha_{2333} & \alpha_{2323} & \alpha_{2331} & \alpha_{2312} \\
\alpha_{3111} & \alpha_{3122} & \alpha_{3133} & \alpha_{3123} & \alpha_{3131} & \alpha_{3112} \\
\alpha_{1211} & \alpha_{1222} & \alpha_{1233} & \alpha_{1223} & \alpha_{1231} & \alpha_{1212}
\end{vmatrix} = 0,$$

si

$$\alpha_x^4 = \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\,\alpha_{rstu}\,x_r x_s x_t x_u.$$

La courbe du quatrième ordre satisfaisant à la question est donc cette courbe particulière qui a été étudiée par MM. Clebsch et Lueroth [1].

---

[1] *Voir* le *Journal de Crelle*, t. 59, et *Mathematische Annalen*, t. I.

En appliquant la notation symbolique, on peut écrire la condition trouvée sous la forme [1]

$$(11) \qquad [(\alpha\gamma\delta)(\alpha\varepsilon\zeta)(\beta\gamma\varepsilon)(\beta\delta\zeta) - (\alpha\gamma\varepsilon)(\alpha\delta\zeta)(\beta\gamma\delta)(\beta\varepsilon\zeta)]^2 = 0,$$

si

$$\alpha_x^4 \equiv \beta_x^4 \equiv \gamma_x^4 \equiv \delta_x^4 \equiv \varepsilon_x^4 \equiv \zeta_x^4.$$

Multiplions le premier membre par les facteurs symboliques

$$\alpha_x^{n-4}\beta_x^{n-4}\gamma_x^{n-4}\delta_x^{n-4}\varepsilon_x^{n-4}\zeta_x^{n-4}.$$

Si nous supposons alors que l'équation (11) ait lieu, quel que soit le point x, elle exprime la condition pour que toutes les coniques polaires par rapport aux polaires du quatrième ordre de la courbe $\alpha_x^n = 0$, c'est-à-dire pour que toutes les coniques

$$(12) \qquad \alpha_x^{n-4}\alpha_y^2\alpha_z^2 = 0,$$

où z_i sont les variables ponctuelles, soient harmoniquement inscrites à la conique $F = 0$. Cela a donc lieu, en particulier, pour $x = y$, c'est-à-dire pour toutes les coniques polaires de la courbe $\alpha_x^n = 0$.

Réciproquement, si toutes les coniques $\alpha_x^{n-2}\alpha_z^2 = 0$ jouissent de cette propriété, il en est de même pour toutes les coniques représentées par l'équation (12). En effet, on a, d'après l'équation (8),

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_x^{n-2}\alpha_z^2 = \; & [(a\varkappa')^2 z_1 + (a\lambda')^2 z_2 + (a\mu')^2 z_3] \\ & \times [(a\varkappa'')^2 z_1 + (a\lambda'')^2 z_2 + (a\mu'')^2 z_3] \\ & \times [(a\varkappa''')^2 x_1 + (a\lambda''')^2 x_2 + (a\mu''')^2 x_3] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times \{[a\varkappa^{(n)}]^2 x_1 + [a\lambda^{(n)}]^2 x_2 + [a\mu^{(n)}]^2 x_3\}. \end{aligned}\right.$$

La courbe d'ordre $n-2$ représentée par l'équation $\alpha_x^{n-2}\alpha_z^2 = 0$, deuxième polaire du point z par rapport à la courbe $\alpha_x^n = 0$, est donc évidemment attachée à la forme binaire $a_\xi^{2n-4}a_\xi^4$, de la même manière que la courbe $\alpha_x^n = 0$ à la forme a_ξ^{2n}; par suite, toutes les coniques polaires de cette courbe d'ordre $n-2$ jouissent des mêmes propriétés à l'égard de la conique $F = 0$ que les coniques polaires de la courbe $\alpha_x^n = 0$; ce qui était à démontrer.

[1] *Voir* CLEBSCH : *Journal de Crelle*, t. 59.

Plus généralement, x et z étant des points de la conique fondamentale, on peut, en vertu de l'équation (8), exprimer chaque polaire $\alpha_x^{n-r}\alpha_z^r$ par une polaire binaire $a_\xi^{2n-2r}a_\zeta^{2r}$ et aussi chaque polaire $a_x^r a_y^s \ldots a_z^t$ par $a_\xi^{2r} a_\eta^{2s} \ldots a_\zeta^{2t}$. On a donc, en récapitulant ce qui précède, le théorème suivant :

Si l'on représente les zéros d'une forme binaire a_ξ^{2n} *d'ordre* $2n$ *par* $2n$ *points d'une conique* $F = 0$, *on peut mener par ces points une certaine courbe d'ordre* n

$$\alpha_x^n \equiv \beta_x^n \equiv \gamma_x^n \equiv \delta_x^n \equiv \varepsilon_x^n \equiv \zeta_x^n = 0,$$

dont toutes les coniques polaires sont harmoniquement inscrites à la conique $F = 0$. *Elle jouit de cette propriété particulière que son covariant*

$$\begin{aligned}&[(\alpha\gamma\delta)(\alpha\varepsilon\zeta)(\beta\gamma\varepsilon)(\beta\delta\zeta) - (\alpha\gamma\varepsilon)(\alpha\delta\zeta)(\beta\gamma\delta)(\beta\varepsilon\zeta)]^2\\ &\quad\times \alpha_x^{n-4}\beta_x^{n-4}\gamma_x^{n-4}\delta_x^{n-4}\varepsilon_x^{n-4}\zeta_x^{n-4}\end{aligned}$$

s'évanouit identiquement, et elle est attachée à la forme binaire a_ξ^{2n} *par cette relation que la* $(2\rho)^{\text{ième}}$ *polaire binaire d'un point de la conique* $F = 0$ *par rapport à la forme* a_ξ^{2n} *se trouve déterminée par les intersections de cette conique avec la* $\rho^{\text{ième}}$ *polaire du même point par rapport à la courbe* $\alpha_x^n = 0$.

Évidemment, à chaque invariant ou covariant de la forme binaire a_ξ^{2n} correspond, en vertu de ces relations, un invariant ou covariant simultané de la conique $F = 0$ et de la courbe $\alpha_x^n = 0$. Nous allons en donner quelques exemples, en développant les formules principales qui peuvent servir pour exprimer les facteurs symboliques de ces invariants et covariants binaires et ternaires, les uns par les autres.

En appliquant la formule (3), on trouve d'abord pour le facteur symbolique $(\alpha\beta\gamma)$ le résultat (¹)

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}(\alpha\beta\gamma) &= \begin{vmatrix}(a\varkappa)^2 & (a\lambda)^2 & (a\mu)^2\\ (b\varkappa')^2 & (b\lambda')^2 & (b\mu')^2\\ (c\varkappa'')^2 & (c\lambda'')^2 & (c\mu'')^2\end{vmatrix}\\ &= 2(\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa)(ab)(bc)(ca)\\ &= -D^2(ab)(bc)(ca).\end{aligned}\right.$$

(¹) *Voir* Clebsch, *loc. cit.*, p. 204.

On en déduit que *les zéros du covariant*

$$(ab)^2(bc)^2(ca)^2 a_\xi^{2n-4} b_\xi^{2n-4} c_\xi^{2n-4}$$

sont les points d'intersection de la conique F = o *avec la courbe hessienne*

$$(\alpha\beta\gamma)^2 \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2} \gamma_x^{n-2} = 0$$

de la courbe $\alpha_x^n = 0$. Posons en particulier $n = 3$; alors on sait qu'il y a dans le faisceau de courbes du troisième ordre

$$\varkappa\alpha_x^3 + \lambda(\alpha\beta\gamma)^2 \alpha_x \beta_x \gamma_x = 0$$

quatre courbes qui se décomposent chacune en trois droites. *Il y a donc dans le faisceau de formes binaires*

$$kf + lj \equiv ka_\xi^6 + l(ab)^2(bc)^2(ca)^2 a_\xi^2 b_\xi^2 c_\xi^2$$

quatre formes dont les zéros se trouvent déterminés par une équation du troisième degré et par trois équations du second degré; et ces quatre formes sont données par les racines de cette même équation, dont dépend la détermination des points d'inflexion de la courbe $\alpha_x^3 = 0$. De même, on vérifie les énoncés suivants, qui ne reposent que sur la relation (14) et sur les résultats connus de la théorie des cubiques ternaires.

Pour chacune de ces quatre formes du faisceau, le covariant j est proportionnel à la forme fondamentale. Dans le faisceau il y a trois formes qui sont les formes fondamentales d'une forme quelconque du même faisceau, cette dernière considérée comme leur covariant j. Il y en a quatre dont les covariants j ont une réduite du troisième degré; elles satisfont à la condition

$$[(ab)^2(bc)^2(ca)^2(ad)^2(bd)^2(cd)^2]_{kl} = 0,$$

correspondant à la condition ternaire $S_{\varkappa\lambda} = 0$. Il y en a six pour lesquelles les covariants j de ses covariants j se confondent avec les formes fondamentales; elles sont données par l'équation

$$[(ab)^2(bc)^2(ca)^2(de)^2(ef)^2(fd)^2(ad)(bd)(ae)(ce)(bf)(cf)]_{kl} = 0,$$

correspondant à la condition ternaire $T_{\varkappa\lambda} = 0$.

Pour $n = 2$ on obtient le résultat que la conique $\alpha_x^2 = 0$, attachée à une forme biquadratique a_ξ^4 dont l'invariant

$$j = (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2$$

s'évanouit, se décompose en deux droites; il en résulte que toutes les deuxièmes polaires de cette forme font partie de la même involution.

Quant aux facteurs symboliques

$$(\alpha\beta p) p_x = [(\alpha\beta)_1 p_1 + (\alpha\beta)_2 p_2 + (\alpha\beta)_3 p_3] p_x,$$

on a, en vertu de (1), (2) et (8),

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha\beta p) p_x = {} & [(a\lambda)^2 (b\mu)^2 - (a\mu)^2 (b\lambda)^2] [\mathrm{A}_{\varkappa\varkappa} k_\xi^2 + \mathrm{A}_{\varkappa\lambda} l_\xi^2 + \mathrm{A}_{\varkappa\mu} m_\xi^2] \\ & + [(a\mu)^2 (b\varkappa)^2 - (a\varkappa)^2 (b\mu)^2] [\mathrm{A}_{\lambda\varkappa} k_\xi^2 + \mathrm{A}_{\lambda\lambda} l_\xi^2 + \mathrm{A}_{\lambda\mu} m_\xi^2] \\ & + [(a\varkappa)^2 (b\lambda)^2 - (a\lambda)^2 (b\varkappa)^2] [\mathrm{A}_{\mu\varkappa} k_\xi^2 + \mathrm{A}_{\mu\lambda} l_\xi^2 + \mathrm{A}_{\mu\mu} m_\xi^2]; \end{aligned}$$

et en appliquant les formules (12), p. 416 (où il faut poser $2\mathrm{A}_{\varkappa\varkappa}$ au lieu de B_{ll}, etc.), et, en outre, la formule (4), p. 204 du livre de Clebsch, on trouve

$$(15) \qquad \zeta(\alpha\beta p) p_x = \mathrm{D} \begin{vmatrix} (a\varkappa)^2 & (a\lambda)^2 & (a\mu)^2 \\ (b\varkappa')^2 & (b\lambda')^2 & (b\mu')^2 \\ \varkappa_\xi''^2 & \lambda_\xi''^2 & \mu_\xi''^2 \end{vmatrix} = 2\mathrm{D}^3 (ab) a_\xi b_\xi.$$

Il en résulte que le covariant simultané $(ab) a_\xi b_\xi$ des deux formes quadratiques a_ξ^2, b_ξ^2 est représenté par la polaire du point d'intersection des deux droites qui représentent les deux formes a_ξ^2, b_ξ^2, par rapport à la conique $\mathrm{F} = 0$, ce qu'il est aisé de vérifier par un raisonnement géométrique. Plus généralement, on a ce résultat que le déterminant de deux formes binaires d'ordre pair est représenté par les intersections de la conique $\mathrm{F} = 0$ avec la courbe jacobienne de cette conique et des deux courbes qui sont attachées aux deux formes binaires proposées.

En prenant le carré des deux membres de l'équation (15), et en y ajoutant les facteurs symboliques α_x^{n-2}, β_x^{n-2}, on obtient, pour la hessienne de la forme binaire a_ξ^{2n}, la relation

$$(16) \qquad 4\mathrm{D}^{2n+2} (ab)^2 a_\xi^{2n-2} b_\xi^{2n-2} = \zeta^{2n-2} (\alpha\beta p)(\alpha\beta p') p_x p'_x \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2}$$

Pour $n = 2$, on a, en particulier, le résultat

$$4\mathrm{D}^6 (ab)^2 a_\xi^2 b_\xi^2 = \zeta^2 (\alpha\beta p)(\alpha\beta p') p_x p'_x.$$

Sur la conique $F = 0$, les zéros de la forme hessienne d'une forme biquadratique a_ξ^4 sont donc déterminés par le lieu des points dont les polaires par rapport à $F = 0$ touchent la conique $\alpha_x^2 = 0$, attachée à la forme a_ξ^4, c'est-à-dire *les zéros de la hessienne de la forme* a_ξ^4 *sont les points de contact des quatre tangentes communes aux coniques* $F = 0$ *et* $\alpha_x^2 = 0$.

D'un autre côté, des relations

$$\begin{aligned} D a_\xi^2 &= (a\varkappa)^2 k_\xi^2 + (a\lambda)^2 l_\xi^2 + (a\mu)^2 m_\xi^2, \\ D b_\xi^2 &= (b\varkappa')^2 k_\xi'^2 + (b\lambda')^2 l_\xi'^2 + (a\mu')^2 m_\xi'^2, \end{aligned}$$

découle la formule

$$\begin{aligned} D^2(ab)^2 = {} & (a\varkappa)^2 (b\varkappa')^2 A_{kk} + (a\lambda)^2 (b\lambda')^2 A_{ll} + (a\mu)^2 (b\mu')^2 A_{mm} \\ & + 2(a\varkappa)^2 (b\lambda)^2 A_{kl} + 2(a\lambda)^2 (b\mu)^2 A_{lm} + 2(a\mu)^2 (b\varkappa)^2 A_{mk}. \end{aligned}$$

Or on a

$$D^2 A_{kk} = 2(A_{\lambda\lambda} A_{\mu\mu} - A_{\lambda\mu}^2), \ \ldots,$$

et par conséquent

$$(17) \quad D^4(ab)^2 = -2 \begin{vmatrix} A_{\varkappa\varkappa} & A_{\varkappa\lambda} & A_{\varkappa\mu} & (a\varkappa)^2 \\ A_{\lambda\varkappa} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} & (a\lambda)^2 \\ A_{\mu\varkappa} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} & (a\mu)^2 \\ (b\varkappa')^2 & (b\lambda')^2 & (b\mu')^2 & 0 \end{vmatrix} = (pp'\alpha)(pp'\beta).$$

Si $n = 1$, on peut poser $\alpha_i = \beta_i$ dans le second membre, car alors les quantités α_i, β_i n'ont plus une signification symbolique; en effet, le discriminant $(ab)^2$ doit être nul quand la droite $\alpha_x = 0$, correspondant à la forme a_ξ^2, touche la conique $p_x^2 = 0$, ce qui arrive si $(pp'\alpha)^2 = 0$.

En multipliant les deux membres par $\alpha_x^{n-1}\beta_x^{n-1}$, on obtient une nouvelle représentation de la forme hessienne, savoir :

$$(18) \qquad D^{2n+2}(ab)^2 a_\xi^{2n-2} b_\xi^{2n-2} = \zeta^{2n-2}(pp'\alpha)(pp'\beta)\alpha_x^{n-1}\beta_x^{n-1}.$$

A l'aide de l'équation $p_x^2 = 0$, on peut déduire cette même formule de l'équation (16), car on a l'identité connue

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} 2(\alpha\beta p)(\alpha\beta p')p_x p'_x = {} & -(\alpha pp')^2\beta_x^2 - (\beta pp')^2\alpha_x^2 + (\alpha\beta p)^2 p_x'^2 \\ & + (\alpha\beta p')^2 p_x^2 + 2(\alpha pp')(\beta pp')\alpha_x\beta_x, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle les deux premiers termes du second membre s'évanouissent identiquement suivant la relation (9). Les courbes, représentées par les seconds membres des équations (16) et (18), ont donc en effet les mêmes intersections avec la conique $F = 0$.

Le carré de l'équation (17) nous donne

$$D^8 (ab)^4 = (pp'\alpha)(pp'\beta)(p''p'''\alpha)(p''p'''\beta).$$

Transformons le deuxième membre par l'identité (19); en y posant $x_i = (p''p''')_i$, nous obtenons

$$\begin{aligned} D^8 (ab)^4 &= (\alpha\beta p)(\alpha\beta p')(pp''p''')(p'p''p''') - (\alpha\beta p)^2 (p'p''p''')^2 \\ &= P - (\alpha\beta p)^2 (p'p''p''')^2. \end{aligned}$$

En conséquence de la permutabilité des lettres p', p'', on peut remplacer le terme P du second membre par cette expression

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(\alpha\beta p)(p'p''p''')[(\alpha\beta p')(pp''p''') - (\alpha\beta p'')(pp'p''')] \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\beta p)^2 (p'p''p''')^2 - \frac{1}{2}(\alpha\beta p)(\alpha\beta p')(pp''p''')(p'p''p''') \\ &= \frac{1}{2}(\alpha\beta p)^2 (p'p''p''')^2 - \frac{1}{2} P. \end{aligned}$$

Or on a, en vertu de la formule (5), p. 204 du livre de Clebsch,

$$\begin{aligned} (pp'p'')^2 = 6 &\begin{vmatrix} A_{\varkappa\varkappa} & A_{\varkappa\lambda} & A_{\varkappa\mu} \\ A_{\lambda\varkappa} & A_{\lambda\lambda} & A_{\lambda\mu} \\ A_{\mu\varkappa} & A_{\mu\lambda} & A_{\mu\mu} \end{vmatrix} \\ &= 12(\varkappa\lambda)(\lambda\mu)(\mu\varkappa)(\varkappa'\lambda')(\lambda'\mu')(\mu'\varkappa') = 3D^4, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(20) \qquad D^4 (ab)^4 = -2(\alpha\beta p)^2.$$

On en déduit, pour $n = 2$, le résultat connu, que le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de deux coniques est équianharmonique, quand les deux invariants simultanés des coniques s'annulent. En y ajoutant les facteurs symboliques α_x^{n-2}, β_x^{n-2}, on trouve généralement

$$D^n (ab)^4 a_\xi^{2n-4} b_\xi^{2n-4} = -2\zeta^{2n-4}(\alpha\beta p)^2 \alpha_x^{n-2}\beta_x^{n-2}.$$

Envisageons en particulier le cas où $n = 3$. Nous venons de voir que la courbe du troisième ordre, attachée à la forme a_ξ^6, se décompose en trois droites, si cette forme devient proportionnelle à son covariant j. Alors toutes les coniques polaires $\alpha_x^2 \alpha_z = 0$ passent par les sommets du triangle formé par les trois droites. Or, on sait que ce dernier est un triangle conjugué par rapport à chaque conique, à laquelle les coniques $\alpha_z^2 \alpha_x = 0$ sont harmoniquement inscrites; il l'est donc aussi pour la conique fondamentale $F = 0$. Par conséquent, on peut poser

$$p_x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$
$$\alpha_x^2 \alpha_z = z_1 x_2 x_3 + z_2 x_3 x_1 + z_3 x_1 x_2,$$

et alors on trouve

$$(\alpha\beta p)^2 \alpha_x \beta_x = C(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

C étant un facteur constant. Le covariant ternaire $(\alpha\beta p)^2 \alpha_x \beta_x$ devient donc proportionnel à p_x^2, et, par suite, le covariant binaire

$$i = (ab)^4 a_\xi^2 b_\xi^2$$

s'évanouit identiquement. En effet, il est démontré par Clebsch que la forme a_ξ^6 (étant alors le covariant T d'une infinité de formes biquadratiques) se décompose à l'aide d'une équation du troisième degré en trois facteurs quadratiques pour le cas $i = 0$. M. Wedekind ([1]) a prouvé que le covariant

$$i = (ab)^4 a_\xi^{m-4} b_\xi^{m-4}$$

d'une forme a_ξ^m ne peut s'annuler identiquement sans que l'équation $a_\xi^m = 0$ ait une racine multiple d'ordre $m - 1$, excepté dans le cas où $m = 6$, mentionné tout à l'heure, et le cas où $m = 12$, étudié plus profondément par M. Klein ([2]). Donc le covariant

$$(\alpha\beta p)^2 \alpha_x^{n-2} \beta_x^{n-2},$$

ne peut être proportionnel à p_x^2 que si $n = 3$ ou $n = 6$, pourvu que

---

([1]) *Studien im binären Werthgebiet* (*Habilitationschrift;* Carlsruhe, 1876, p. 46).
([2]) *Ueber das Ikosaëder* (*Mathematische Annalen,* Bd. 10).

la courbe $\alpha_x^n = 0$ n'ait pas avec la conique $F = 0$ un contact d'ordre $2n - 2$.

Nous nous bornons à indiquer ici que les mêmes raisonnements s'appliquent aussi à l'étude des formes binaires d'ordre impair, lorsqu'on considère le faisceau des premières polaires au lieu de la forme elle-même, ces polaires étant des formes d'ordre pair. De même on peut établir des méthodes pour construire les polaires d'ordre impair, quand on a trouvé les polaires d'ordre pair suivant les développements précédents. Nous allons en donner un exemple pour le cas $n = 2$. Nous connaissons la seconde polaire $a_\xi^2 a_\eta^2$ de η par rapport à a_ξ^4; elle est représentée par la polaire du point y, correspondant au paramètre η, par rapport à la conique $\alpha_x^2 = 0$. Pour la forme hessienne de cette polaire

$$(ab)^2 a_\xi b_\xi a_\eta b_\eta, \tag{21}$$

nous avons, d'après l'équation (15),

$$4D^6 (ab)^2 a_\xi b_\xi a_\eta b_\eta = \zeta^2 (\alpha\beta p)(\alpha\beta p') p_x p'_y\,;$$

elle est donc représentée par la polaire du point y par rapport à la conique

$$(\alpha\beta p)(\alpha\beta p') p_x p'_x = 0,$$

lieu des points x dont les polaires par rapport à $F = 0$ touchent la conique $\alpha_x^2 = 0$. Les tangentes de $F = 0$ en les deux zéros, $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$, de la forme (21) et la droite qui représente la polaire $a_\xi^2 a_\eta^2$ passent par un même point, car les polaires quadratiques d'une cubique binaire forment une involution. Ces trois droites d'une part, et, d'autre part, la tangente de $F = 0$ en y et les deux droites $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ qui joignent le point y aux points $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ déterminent deux faisceaux de droites, projectifs l'un à l'autre, dans lesquels nous faisons correspondre la droite $u^{(2)}$ à la tangente de $\xi^{(1)}$, et la droite $u^{(1)}$ à la tangente de $\xi^{(2)}$. Alors la conique formée par les intersections des droites correspondantes de ces deux faisceaux passe par le point y; et *ses trois autres intersections avec la conique* $F = 0$ *représentent la polaire* $a_\xi^3 a_\eta$ *qui était à chercher;* ce qu'il est aisé de prouver.