Bulletin de la S. M. F.

J. Chazy

Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 17-38
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__17_1>

SUR LE CHAMP DE GRAVITATION DE DEUX MASSES FIXES DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ;

Par M. Jean Chazy.

1. On appelle souvent dans la Mécanique classique *problème d'Euler* le problème du mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré de la distance par deux centres fixes. C'est là un problème fictif, qui ne peut être considéré comme une représentation ni comme une approximation d'un problème réel. Ce n'est ni un cas particulier, ni un cas limite du problème des trois corps, par rapport auquel il a exactement la position suivante.

Le problème des trois corps admet un cas limite que Poincaré a appelé *problème restreint*, où l'une des trois masses est nulle, et où les deux autres masses, de valeurs m_1 et m_2, ont un mouvement circulaire uniforme. Les équations différentielles du mouvement de la masse nulle, rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz

passant au centre de gravité des deux masses m_1 et m_2, dont les deux premiers sont mobiles et dirigés l'axe Ox suivant la droite joignant ces deux masses, l'axe Oy dans le plan du mouvement, sont les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x'' - 2ny' - n^2 x &= \frac{fm_1(a_1 - x)}{r_1^3} + \frac{fm_2(a_2 - x)}{r_2^3}, \\ y'' + 2nx' - n^2 y &= -\frac{fm_1 y}{r_1^3} \qquad -\frac{fm_2 y}{r_2^3}, \\ z'' &= -\frac{fm_1 z}{r_1^3} \qquad -\frac{fm_2 z}{r_2^3}: \end{aligned}\right.$$

on a dans ces équations

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0,$$
$$r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + y^2 + z^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + y^2 + z^2},$$

et l'on désigne par f le coefficient de l'attraction universelle, par a_1 et a_2 les abscisses des deux masses m_1 et m_2 sur l'axe Ox et par n la vitesse angulaire constante du mouvement circulaire. D'après les propriétés du mouvement newtonien circulaire, cette vitesse angulaire satisfait à la relation

$$(2)\qquad n^2(a_2 - a_1)^3 = f(m_1 + m_2).$$

Au contraire, les équations différentielles du problème d'Euler, si le mouvement est rapporté à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz passant au centre de gravité des deux masses fixes m_1 et m_2, et dont le premier est dirigé suivant la droite joignant ces deux masses, sont

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x'' &= \frac{fm_1(a_1 - x)}{r_1^3} + \frac{fm_2(a_2 - x)}{r_2^3}, \\ y'' &= -\frac{fm_1 y}{r_2^3} \qquad -\frac{fm_2 y}{r_2^3}, \\ z'' &= -\frac{fm_1 z}{r_1^3} \qquad -\frac{fm_2 z}{r_2^3}, \end{aligned}\right.$$

avec

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0,$$
$$r_1 = \sqrt{(x - a_1)^2 + y^2 + z^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + y^2 + z^2}:$$

la masse du point matériel mobile est d'ailleurs quelconque.

On voit qu'on passe des équations (1) aux équations (3) en annulant la constante n, mais en conservant les expressions des seconds membres, contrairement à la relation (2). Donc le problème restreint et le problème d'Euler sont deux cas particuliers d'un même problème, dont les équations différentielles sont les équations (1) où n désigne une constante, et sans addition de la relation (2); mais aucun des deux problèmes n'est un cas particulier de l'autre.

Cependant Euler, Lagrange, Legendre, Serret, Desboves, M. Andrade et d'autres ont étudié le problème du mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré de la distance par deux centres fixes; ce problème figure aujourd'hui dans les Traités de Mécanique rationnelle, et d'ailleurs s'intègre par les transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques. Lagrange disait (¹) déjà : « Quoique ce problème ne puisse avoir aucune application au système du monde, où tous les centres d'attraction sont en mouvement, il est néanmoins assez intéressant du côté analytique pour mériter d'être traité en particulier avec quelque détail. »

2. Par analogie on s'est posé dans la théorie de la Relativité le problème de la détermination du champ de gravitation de deux masses supposées fixes, c'est-à-dire de la formation du ds^2 de ce champ de gravitation : les géodésiques de ce ds^2, si on le connaît, définissent les mouvements d'une masse infiniment petite sous l'action des deux masses fixes. Ce nouveau problème est, si l'on veut, un exercice d'Analyse sur l'intégration des dix équations différentielles d'Einstein. Entre le champ de gravitation à symétrie sphérique de Schwarzschild, qui dépend de la seule distance au centre unique d'attraction, et les champs de gravitation correspondant aux cas particuliers et aux cas limites du problème des trois corps, où les potentiels (²) sont fonctions de trois variables, il peut être intéressant de considérer le cas intermédiaire d'un champ de gravitation où les potentiels dépendent de deux variables, et qui offre d'ailleurs un exemple d'addition de deux masses.

Le problème de la détermination du champ de gravitation de deux masses fixes a été traité déjà par M. E. Trefftzt, M. Attilio Palatini, et M. Horace Levinson.

(¹) *Mécanique analytique, Dynamique*, Chap. III : *Œuvres*, t. XII, p. 101.

(²) On appelle souvent *potentiels de gravitation* les coefficients des carrés et des doubles produits des différentielles dans le ds^2.

M. Trefftzt suppose (¹) que les surfaces des deux masses fixes sont deux sphères, et considère, au sens de la géométrie élémentaire, le faisceau de sphères dont ces deux-là font partie : soit x un paramètre définissant les sphères de ce faisceau, et soient C_1 et C_2 ses deux points limites. M. Trefftzt prend comme coordonnées d'un point M de l'espace le paramètre x de la sphère du faisceau précédent passant au point M, l'angle θ avec la droite C_1C_2 de la circonférence passant aux trois points C_1, C_2 et M, et l'angle φ désignant l'azimut autour de la droite C_1C_2. Et il admet que le ds^2 cherché a la forme

$$ds^2 = A(x)\,dt^2 - B(x)\,dx^2 - C(x)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

du ds^2 d'un champ de gravitation possédant la symétrie sphérique, où x, θ, φ désignent les trois coordonnées polaires classiques ; dans les deux cas $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ sont trois fonctions à déterminer de la distance ou du paramètre x. L'hypothèse ainsi introduite nous semble arbitraire (²). En fait, M. Trefftzt aboutit au ds^2 du champ de gravitation d'une masse sphérique, dans le cas où l'on prend comme équations de la gravitation à l'extérieur des masses, au lieu des dix équations

$$R_{ik} = 0,$$

les dix équations

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = 0 \qquad (\lambda = \text{const.}),$$

et où par conséquent l'on suppose l'espace fini (³), Mais l'équivalence de ce dernier problème et du problème proposé nous semble douteuse.

(¹) *Mathematische Annalen*, Band 86, 1922, p. 317-326.

(²) Comme il s'agit d'un problème fictif, une telle appréciation renferme une part subjective. Cependant on peut faire aux résultats de M. Trefftzt l'objection suivante. Dans le champ de gravitation considéré ces résultats comportent des mouvements d'une masse infiniment petite qui ont lieu sur une circonférence arbitraire passant aux points C_1 et C_2. Or il est connu que dans la Mécanique classique le problème d'Euler n'admet pas de trajectoires qui soient des arcs de circonférences joignant les deux centres fixes, ou qui soient voisines de tels arcs de circonférences. La loi de gravitation obtenue n'admet donc pas comme approximation la loi du carré de la distance.

(³) Hermann WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 4ᵉ éd.; Berlin, 1921, p. 254-255. — Jean CHAZY, *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 1157. — Maurice NUYENS, *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 1376. — J. HAAG, *Ibid.*, p. 1358.

M. Attilio Palatini a formé [1] un autre ds^2 du champ de gravitation de deux masses fixes : ce ds^2 se rattache aux potentiels newtoniens des surfaces de deux ellipsoïdes de révolution ayant même axe de révolution, et aux recherches que M. Levi-Cività a intitulées [2] : « *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani* ». Nous reviendrons sur le ds^2 de M. Palatini à la fin de cet Article.

Enfin M. Horace Levinson a étudié [3] les développements des coefficients du ds^2 du champ de gravitation considéré suivant les puissances des valeurs des deux masses fixes.

Nous nous proposons ici de donner une nouvelle expression du ds^2 du champ de gravitation de deux masses fixes [4].

3. Considérons d'abord un champ de gravitation *statique* [5], et qui en outre admette un axe de révolution. M. Levi-Cività a donné l'expression générale [6] du ds^2 d'un tel champ de gravitation; nous allons en premier lieu retrouver cette expression par une méthode moins élégante mais plus directe.

Pour l'une des trois coordonnées d'espace prenons l'azimut autour de l'axe de révolution, soit φ; par hypothèse l'angle φ ne figure dans le ds^2 que par sa différentielle $d\varphi$, afin que tous les plans méridiens soient identiques, et cette différentielle $d\varphi$ ne figure dans le ds^2 que par son carré, afin que tous les plans méridiens soient des plans de symétrie. Le ds^2 pourra s'écrire

$$ds^2 = \mathrm{A}\,dt^2 + \mathrm{B}\,d\varphi^2 + \mathrm{P}(x, y, dx, dy),$$

---

(1) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, série 5ª, vol. XXXII, 1923, 1er sem., p. 263-267; *Il nuovo Cimento*, série VII, vol. XXVI, 1923. p. 5-24.

(2) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, série 5ª, vol. XXVI, XXVII, XXVIII, 1917, 1918 et 1919.

(3) *Le Champ gravitationnel de deux points matériels fixes dans la théorie d'Einstein;* Paris, Gauthier-Villars, 1923 (Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 9 juin 1923).

(4) J'ai publié cette expression dans les *Comptes rendus* (t. 177, 1923, p. 303 et p. 939).

(5) C'est-à-dire dans le ds^2 duquel le temps t figure seulement par le carré dt^2 de sa différentielle. On appelle souvent *ds^2 stationnaires* les ds^2 où le temps ne figure que par sa différentielle dt, mais où cette différentielle figure à la fois au carré et au premier degré : tel est dans un champ de gravitation euclidien le ds^2 transformé du ds^2 galiléen par rapport à des axes animés d'un mouvement de rotation uniforme.

(6) *Loc. cit.*, vol. XXVIII, 1919, 1er sem., p. 9.

A et B désignant deux fonctions des deux autres coordonnées d'espace x, y, et $P(x, y, dx, dy)$ une forme quadratique des deux différentielles dx et dy dont les trois coefficients sont trois fonctions de x et y. On peut choisir en particulier les deux coordonnées x et y réelles, orthogonales et isothermes, c'est-à-dire telles que la forme quadratique P soit

$$P(x, y, dx, dy) = C(x, y)(dx^2 + dy^2);$$

d'où le ds^2

$$ds^2 = A\,dt^2 + B\,d\varphi^2 + C(dx^2 + dy^2),$$

A, B, C désignant trois fonctions des deux variables x et y. Entre ces trois fonctions nous allons écrire les dix équations différentielles d'Einstein, dont les premiers membres sont les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel contracté

$$R_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

On simplifie des calculs ultérieurs en mettant en évidence les racines carrées des trois coefficients A, B, C et en écrivant

$$(4) \qquad ds^2 = a^2\,dt^2 + b^2\,d\varphi^2 + c^2(dx^2 + dy^2).$$

On remarque d'ailleurs que si le point gravitant est assez éloigné des masses fixes, le champ de gravitation est voisin d'un champ de gravitation euclidien, la fonction A est positive, les fonctions B et C négatives ; par conséquent, au moins si le point gravitant est assez éloigné des masses fixes, la fonction a est réelle et les fonctions b et c sont purement imaginaires.

Si l'on considère d'une façon générale un ds^2 où les coefficients des termes rectangles sont nuls, et si l'on met en évidence les racines carrées des quatre autres coefficients :

$$(5) \qquad ds^2 = \gamma_1^2\,dx_1^2 + \gamma_2^2\,dx_2^2 + \gamma_3^2\,dx_3^2 + \gamma_4^2\,dx_4^2,$$

l'expression R_{12} est

$$R_{12} = \frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial^2\gamma_3}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial^2\gamma_4}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{1}{\gamma_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial\gamma_3}{\partial x_1} + \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial\gamma_4}{\partial x_1}\right)$$
$$- \frac{1}{\gamma_2}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial\gamma_3}{\partial x_2} + \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial\gamma_4}{\partial x_2}\right),$$

et les cinq autres expressions R_{ik} d'indices i et k différents s'en déduisent par permutations des indices. On remarque que chacun des termes de R_{12} est le produit d'une dérivée par rapport à x_1 par une dérivée par rapport à x_2, ou contient en facteur une dérivée seconde de la forme $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Dans le ds^2 (4) posons

$$t = x_1, \qquad \varphi = x_2, \qquad x = x_3, \qquad y = x_4.$$

Puisque les deux variables x_3 et x_4 figurent seules dans les coefficients du ds^2 (4), il résulte de la dernière remarque que les six expressions R_{ik} d'indices i et k différents sont nulles, à l'exception de l'expression R_{34}, qui est

$$\begin{aligned} R_{34} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial^2 b}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\right) \\ - \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Reste à écrire les quatre expressions R_{ii} : la première est dans le cas général du ds^2 (5)

$$\begin{aligned} R_{11} = {} & \frac{1}{\gamma_2}\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial^2 \gamma_4}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2^2}\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_2^2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_3^2}\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_3^2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_4^2}\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial x_4^2} \\ & - \frac{1}{\gamma_1}\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\gamma_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} + \frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial \gamma_3}{\partial x_1} + \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial \gamma_4}{\partial x_1}\right) \\ & + \frac{\gamma_1}{\gamma_2^2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2}\left(-\frac{1}{\gamma_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial \gamma_3}{\partial x_2} + \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial \gamma_4}{\partial x_2}\right) \\ & + \frac{\gamma_1}{\gamma_3^2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\gamma_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_3} - \frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial \gamma_3}{\partial x_3} + \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial \gamma_4}{\partial x_3}\right) \\ & + \frac{\gamma_1}{\gamma_4^2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_4}\left(\frac{1}{\gamma_2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial x_4} + \frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial \gamma_3}{\partial x_4} - \frac{1}{\gamma_4}\frac{\partial \gamma_4}{\partial x_4}\right), \end{aligned}$$

et les trois autres s'en déduisent par permutations circulaires. D'où les quatre équations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{b}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}\right) = 0, \\ R_{22} &= \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

et, si l'on pose encore $c = e^\gamma$ pour simplifier les calculs ([1]),

$$R_{33} = \Delta\gamma + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0,$$

$$R_{44} = \Delta\gamma + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0.$$

Avec le même changement de variable l'équation $R_{34} = 0$ s'écrit

$$R_{34} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial^2 b}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\right) - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial y}\right) = 0.$$

Nous avons à intégrer le système des cinq équations

$$R_{11} = 0, \qquad R_{22} = 0, \qquad R_{33} = 0, \qquad R_{44} = 0, \qquad R_{34} = 0$$

entre les trois fonctions a, b et γ des deux variables x et y.

Remarquons en premier lieu que la deuxième de ces cinq équations peut être remplacée par la combinaison suivante des deux premières :

$$(7) \qquad bR_{11} + aR_{22} = \frac{\partial^2(ab)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(ab)}{\partial y^2} = \Delta(ab) = 0;$$

donc *le produit ab satisfait à l'équation de Laplace*. De même les trois équations

$$R_{34} = 0, \qquad R_{33} - R_{44} = 0, \qquad R_{33} + R_{44} = 0.$$

peuvent s'écrire respectivement

$$(8) \qquad \frac{\partial(ab)}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial(ab)}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial^2(ab)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{\partial(ab)}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial(ab)}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(ab)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(ab)}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial y} = 0,$$

$$(10) \qquad 2\Delta\gamma + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = 0.$$

([1]) On pose aussi selon la notation classique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$$

Nous considérons donc le nouveau système des cinq équations (6), (7), (8), (9), (10).

Supposons d'abord le produit ab constant. Les deux équations (8) et (9) se réduisent à

$$\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}=0;$$

il résulte que sont identiquement nulles, ou bien les deux dérivées $\frac{\partial b}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial y}$, ou bien la somme $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2$, donc les deux dérivées $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$ quand la fonction a est réelle. Par suite a ou b est constant, et, comme le produit ab est constant et d'ailleurs différent de zéro, *les deux quantités a et b sont constantes.* Des cinq équations reste l'équation (10) qui se réduit à

$$\Delta\gamma=0.$$

Or la courbure totale de la surface dont le carré de l'élément linéaire est $e^{2\gamma}(dx^2+dy^2)$ a pour expression $-e^{-2\gamma}\Delta\gamma$: donc cette courbure totale est nulle, la surface considérée est développable, et le carré de l'élément linéaire est la somme de deux carrés. Au total le ds^2 à quatre variables du champ proposé est réductible à une somme de quatre carrés, *c'est un ds^2 euclidien.* Il correspond à un champ de gravitation ne contenant aucune masse, qui en coordonnées galiléennes est statique, et admet toutes les droites de l'espace comme axes de révolution : c'est là une solution banale du problème proposé.

Cette solution banale écartée, *le produit ab dépend des variables x, y.* Satisfaisant à l'équation de Laplace (7) et étant purement imaginaire quand a est réel et b purement imaginaire, ce produit est la partie imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe $x+iy$. Si nous prenons comme nouvelles variables X et Y le quotient par i du produit ab et la partie réelle de cette fonction analytique, nous conservons, selon une propriété connue, avec le caractère réel, le caractère orthogonal et isotherme des variables, et par suite notre système de cinq équations. Supposons donc le produit ab égal à iX et remplaçons dans nos équations b par $\frac{iX}{a}$: le facteur i disparaîtra des équations obtenues qui sont homogènes en a et en b. L'équation (6) devient

$$\frac{\partial^2 a}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial Y^2} - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial a}{\partial X}\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial a}{\partial Y}\right)^2 + \frac{1}{X}\frac{\partial a}{\partial X} = 0,$$

d'où, si l'on pose $a = e^{\alpha}$, *l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{1}{X}\frac{\partial \alpha}{\partial X} = 0. \tag{11}$$

Substituons de même les expressions $a = e^{\alpha}, b = iXe^{-\alpha}$ dans les équations (8) et (9) : on obtient les deux équations

$$\frac{\partial \gamma}{\partial Y} = -\frac{\partial \alpha}{\partial Y} + 2X\frac{\partial \alpha}{\partial X}\frac{\partial \alpha}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial X} = -\frac{\partial \alpha}{\partial X} + X\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y}\right)^2\right],$$

et l'on constate que la condition d'intégrabilité de ces deux équations est précisément l'équation (11). Enfin, en substituant dans l'équation (10) les mêmes expressions $a = e^{\alpha}$, $b = iXe^{-\alpha}$, et les expressions précédentes de $\frac{\partial \gamma}{\partial X}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial Y}$, et tenant compte de l'équation (11), on obtient une identité.

D'où le résultat suivant : *Le ds^2 d'un champ de gravitation statique et admettant un axe de révolution peut, par un choix convenable des coordonnées d'espace, recevoir la forme*

$$ds^2 = e^{2\alpha}dt^2 - e^{2\beta}d\varphi^2 - e^{2\gamma}(dX^2 + dY^2),$$

où les trois fonctions α, β, γ *des deux variables* X *et* Y *sont déterminées par les trois équations*

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{1}{X}\frac{\partial \alpha}{\partial X} = 0,$$

$$\beta = -\alpha + \log|X| + \text{const.}, \tag{12}$$

$$\gamma = -\alpha + \int X\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)^2 - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y}\right)^2\right]dX + 2X\frac{\partial \alpha}{\partial X}\frac{\partial \alpha}{\partial Y}dY + \text{const.}, \tag{13}$$

et où toutes les quantités sont réelles, au moins à distance assez grande des masses fixes; la constante arbitraire ajoutée à la fonction β équivaut au facteur constant arbitraire par lequel on peut multiplier les variables X et Y. C'est le résultat obtenu par M. Levi-Cività.

On peut remarquer que, si l'on considère les trois coordonnées d'espace X, φ, Y comme des coordonnées cylindriques, l'équation (11) est l'équation de Laplace dans l'espace

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{1}{X^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{1}{X}\frac{\partial \alpha}{\partial X} = 0$$

où l'on annule la dérivée $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2}$; donc à toute fonction harmonique dans l'espace et inaltérée par une rotation quelconque autour d'un axe de révolution ([1]), correspond une solution de l'équation aux dérivées partielles (11).

Au point de vue formel, on peut remarquer encore que, si l'on fait le changement de variables

$$X + iY = u, \qquad X - iY = -v,$$

les trois équations (11), (12), (13) deviennent

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{2(u-v)}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial v}\right) = 0,$$

$$\beta = -\alpha + \log|u - v| + \text{const.},$$

$$\gamma = -\alpha + \int (u-v)\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 du - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 dv\right] + \text{const.}$$

L'équation aux dérivées partielles transformée est un cas particulier d'une équation bien connue ([2]), savoir de l'équation d'Euler et de Poisson

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} - \frac{\beta'}{u-v}\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\beta}{u-v}\frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,$$

où l'on a donné aux deux paramètres β et β' la valeur commune $\frac{1}{2}$. On sait que, quand les variables u et v sont réelles, toutes les solutions réelles de l'équation d'Euler et de Poisson sont représentées par la somme de deux intégrales définies dépendant chacune d'une fonction arbitraire d'une variable.

([1]) M. Levi-Cività appelle une telle fonction *potentiel symétrique*.

([2]) *Cf.* Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2e Partie, Chap. III.

4. *Le ds^2 de Schwarzschild.* — Le ds^2 de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right) dt^2 - r^2 \cos^2\theta \, d\varphi^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2a}{r}} - r^2 \, d\theta^2,$$

où a désigne une constante positive [1], est le ds^2 du champ de gravitation statique et extérieur à une masse sphérique : un tel champ possède la symétrie sphérique, c'est-à-dire est inaltéré par une rotation quelconque autour du centre O de la masse correspondante, et par suite admet comme axes de révolution toutes les droites passant au point O. Proposons-nous de retrouver le ds^2 de Schwarzschild à partir de l'expression générale obtenue du ds^2 d'un champ de gravitation statique et admettant un axe de révolution. Posant $\theta = y$, substituons à la variable r une nouvelle variable x telle que les coefficients de dx^2 et de dy^2 soient égaux : il faut que l'on ait

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 = r(r - 2a),$$

soit

$$r = 2a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad x > 0;$$

et le ds^2 de Schwarzschild devient alors

$$ds^2 = \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} dt^2 - 4a^2 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2} \cos^2 y \, d\varphi^2 - 4a^2 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2} (dx^2 + dy^2). \tag{14}$$

Les variables canoniques X et Y sont telles que l'on ait, si l'on néglige le facteur a,

$$X = \operatorname{th} \frac{x}{2} . 2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} \cos y = \operatorname{sh} x \cos y$$

et, par suite,

$$X + iY = \operatorname{sh}(x + iy).$$

---

(1) La constante a désigne l'expression $\frac{fm}{V^2}$, où f est le coefficient de l'attraction universelle, m la valeur de la masse sphérique considérée, et V la vitesse de la lumière : cette constante a évidemment d'ailleurs, et quelles que soient les unités, les dimensions de la variable r, c'est-à-dire les dimensions d'une longueur. Dans ce qui suit, nous supposons égaux à l'unité le coefficient de l'attraction universelle et la vitesse de la lumière : la constante a a alors même valeur que la masse sphérique considérée.

Au lieu d'exprimer le ds^2 en fonction des variables X et Y, il est plus simple de conserver les variables x et y.

Donc, *le ds^2 de Schwarzschild est le cas particulier* du ds^2 d'un champ de gravitation statique et admettant un axe de révolution, *que l'on obtient en prenant comme solution* $\alpha(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *de l'équation* (11) *la fonction définie par les équations*

$$\alpha = \log \operatorname{th} \frac{x}{2}, \qquad \mathrm{X} + i\mathrm{Y} = \operatorname{sh}(x + iy),$$

x étant positif, y réel et variant de 0 *à* 2π, *et* X, Y *étant réels :* des deux constantes figurant dans les équations (12) et (13), l'une est la constante a, l'autre correspondrait à la valeur de la vitesse de la lumière, si nous ne supposions pas cette valeur égale à l'unité.

Remarquons d'ailleurs qu'on arriverait à la même formule (14) comme expression transformée du ds^2 de Schwarzschild, si l'on remplaçait dans les équations précédentes Y par $\mathrm{Y} + c$, c désignant une constante réelle arbitraire. Notons encore que l'équation (11), si l'on prend x et y comme variables, devient

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{1}{\operatorname{th} x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \operatorname{tang} y \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0.$$

5. Nous arrivons maintenant au ds^2 que nous proposons pour le champ de gravitation de deux masses fixes. Pour généraliser la solution précédente de l'équation aux dérivées partielles (11), et comme cette équation est linéaire, choisissons la solution $\alpha(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ définie par les équations

$$\alpha = k \log \operatorname{th} \frac{x}{2} + k_1 \log \operatorname{th} \frac{x_1}{2},$$

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{X} + i\mathrm{Y} = \operatorname{sh}(x + iy), \qquad \mathrm{X} + i\mathrm{Y} + ic = \operatorname{sh}(x_1 + iy_1),$$

où k et k_1 désignent deux constantes positives de somme égale à l'unité, où c désigne une constante positive, x, x_1 des quantités positives, y, y_1 des quantités réelles variant de 0 à 2π, et enfin X et Y des variables réelles; et formons les fonctions β et γ d'après les équations (12) et (13). En prenant comme variables x et y au lieu de X et Y, nous obtenons le ds^2

$$(16)\quad ds^2 = \text{th}^{2k}\frac{x}{2}\,\text{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}\,dt^2 - a^2\,\frac{\text{sh}^2 x\cos^2 y}{\text{th}^{2k}\frac{x}{2}\,\text{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}}\,d\varphi^2$$

$$- a^2(dx^2+dy^2)\,\frac{\text{sh}^2 x+\cos^2 y}{\text{th}^{2k}\frac{x}{2}\,\text{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}}$$

$$\times\left(\frac{\text{sh}^2 x}{\text{sh}^2 x+\cos^2 y}\right)^{k^2}\left(\frac{\text{sh}^2 x_1}{\text{sh}^2 x_1+\cos^2 y_1}\right)^{k_1^2}\left(1+\frac{2}{c}\,\frac{\sin y-\sin y_1}{\text{ch}\,x+\text{ch}\,x_1}\right)^{2kk_1},$$

où a désigne une constante positive, et où la vitesse de la lumière est supposée égale à 1. Au total, le ds^2 obtenu dépend donc de trois paramètres k ou k_1, c et a. Il est à remarquer que la quadrature d'expression compliquée donnant la fonction γ d'après l'équation (13) conduit à un résultat relativement simple, en ce qui concerne en particulier le dernier facteur $1+\frac{2}{c}\frac{\sin y-\sin y_1}{\text{ch}\,x+\text{ch}\,x_1}$.

Le ds^2 obtenu remplit les conditions suivantes :

1° Il satisfait rigoureusement aux dix équations d'Einstein $R_{ik}=0$.

2° Il ne change pas si l'on échange les deux systèmes de quatre quantités x, y, k, c et $x_1, y_1, k_1, -c$; ce qui résulte de la première des deux équations

$$(17)\qquad \text{sh}\,x\cos y = \text{sh}\,x_1\cos y_1,$$

$$(18)\qquad \text{ch}\,x\sin y + c = \text{ch}\,x_1\sin y_1,$$

déduites des équations (15), et de ce que l'on a

$$\frac{dX^2+dY^2}{dx^2+dy^2} = |\,\text{ch}(x+iy)\,|^2 = \text{ch}(x+iy)\,\text{ch}(x-iy)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{ch}\,2x+\cos 2y) = \text{sh}^2 x+\cos^2 y$$

et, par suite,

$$dX^2+dY^2 = (dx^2+dy^2)(\text{sh}^2 x+\cos^2 y) = (dx_1^2+dy_1^2)\,\text{sh}^2 x_1+\cos^2 y_1).$$

3° *Le ds^2 (16) tend vers le ds^2 à symétrie sphérique (14) relatif à la masse a quand l'un des paramètres k_1 ou c tend vers zéro.* Nous serons conduits à attribuer aux deux masses fixes correspondant au ds^2 (16) les valeurs ka et $k_1 a$, en supposant le coefficient de l'attraction universelle égal à l'unité comme la vitesse de la lumière : cette troisième condition signifie donc d'une part que, quand l'une des masses tend vers zéro, l'autre qui devient une masse isolée acquiert la symétrie sphérique ([1]).

D'autre part, quand le paramètre c tend vers zéro, les différences $x_1 - x$ et $y_1 - y$ tendent vers zéro, et le facteur $1 + \frac{2}{c}\frac{\sin y - \sin y_1}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x_1}$ tend vers la quantité $1 - \frac{\cos y \frac{\partial r}{\partial c}}{\operatorname{ch} x}$, égale à $\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}$ après substitution de la valeur de la dérivée partielle $\frac{\partial y}{\partial c}$ calculée sur les équations (17) et (18) : le ds^2 (16) tend ainsi vers le ds^2 (14) puisque la somme $k + k_1$ est égale à 1. Par suite, si le ds^2 (16) est le ds^2 du champ de gravitation de deux masses fixes, on est conduit à considérer ces deux masses comme confondues en une seule quand le paramètre c s'annule; leur distance tend vers zéro avec ce paramètre.

Il importe de remarquer que, tandis que les deux premières conditions restent valables quelles que soient les valeurs des deux paramètres k et k_1 la troisième condition ne se trouve réalisée que grâce à la restriction $k + k_1 = 1$.

4° Faisons dans l'expression (16) $dt = dx = dy = 0$: on voit que, dans le champ de gravitation défini par le ds^2 (16) et admettant un axe de révolution, le rayon du parallèle passant au point

---

([1]) Par raison de simplicité, on suppose que la répartition des masses élémentaires constituant les deux masses fixes M et M_1 est sphérique si ces deux masses sont infiniment distantes, ou sphérique pour la masse M si la valeur de la masse M_1 s'annule ou réciproquement. Mais, pour se rapprocher des idées admises dans la théorie de la Relativité, on doit supposer que la répartition des masses élémentaires perd le caractère sphérique quand les masses M et M_1 sont à distance finie et qu'aucune n'a pour valeur zéro, car chacune engendre alors un champ de gravitation qui agit sur l'autre : et les centres des deux masses que nous considérons plus loin ne sont pas en toute rigueur des centres de symétrie, mais sont plutôt des centres de gravité. De même, la valeur d'une masse dépend du champ de gravitation où elle se trouve : les valeurs ka et $k_1 a$, que nous attribuons plus loin aux masses M et M_1, doivent être entendues comme les valeurs limites de chacune d'elles quand l'autre s'éloigne indéfiniment.

de coordonnées x et y a pour valeur [1]

$$\frac{a \operatorname{sh} x \,|\cos y\,|}{\operatorname{th}^{k}\frac{x}{2}\operatorname{th}^{k_1}\frac{x_1}{2}} = \frac{a \operatorname{sh} x_1 \,|\cos y_1\,|}{\operatorname{th}^{k}\frac{x}{2}\operatorname{th}^{k_1}\frac{x_1}{2}}.$$

Pour que ce rayon et la distance du point gravitant à l'axe de révolution croissent indéfiniment, il faut que les deux variables x et x_1 croissent indéfiniment. Or, quand ces deux variables sont infiniment grandes, ce sont des infiniment grands équivalents, puisque, d'après les équations (15), le rapport $\frac{\operatorname{sh}(x_1 + iy_1)}{\operatorname{sh}(x + iy)}$ est infiniment voisin de 1. Si l'on remplace alors dans les coefficients du ds^2 (16) tous les facteurs sauf $\cos^2 y$ par leurs parties principales ou par des infiniment grands équivalents, on peut écrire

$$ds^2 = dt^2 - 4a^2 \operatorname{ch}^4\frac{x}{2}\cos^2 y\, d\varphi^2 - 4a^2 \operatorname{ch}^4\frac{x}{2}(dx^2 + dy^2)$$

ou, en posant $2a \operatorname{ch}^2\frac{x}{2} = r$,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(dy^2 + \cos^2 y\, d\varphi^2);$$

c'est là le ds^2 de la théorie de la relativité restreinte, exprimé en coordonnées polaires dans l'espace. Donc, *quand le point gravitant s'éloigne indéfiniment*, sauf peut-être dans la direction de l'axe de révolution, *le ds^2* (16) *tend à devenir euclidien;* ce qui répond bien à ce fait que l'action des deux masses fixes s'affaiblit et tend à disparaître.

5° Considérons encore *a priori* le ds^2 (16) et étudions la métrique de l'espace correspondant. Considérons la constante c comme un paramètre infiniment grand, et supposons la coordonnée x bornée.

Dans l'équation (18) le terme c est supérieur, dans un rapport aussi grand que l'on veut, à la valeur absolue du terme $\operatorname{ch} x \sin y$; par suite, le terme c est voisin du troisième terme $\operatorname{ch} x_1 \sin y_1$ en valeur relative; $\sin y_1$ est positif, et d'ailleurs y_1 est voisin de $\frac{\pi}{2}$,

---

(1) Comme la variable r du ds^2 de Schwarzschild, ce rayon est le quotient de la longueur de la circonférence par 2π, mais non, du moins en toute rigueur, la distance radiale.

sans quoi l'égalité (17) ne pourrait exister. En termes précis, $\operatorname{ch} x_1$ est un infiniment grand équivalent à c. Prenons comme coordonnée au lieu de x la fonction $r = 2a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}$, et remplaçons dans les coefficients du ds^2 (16) les facteurs dépendant de x_1 par des infiniment grands équivalents : nous pouvons écrire

$$(19)\quad ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^k dt^2 - \frac{r(r-2a)\cos^2 y\, d\varphi^2}{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)^k}$$
$$- [dr^2 + r(r-2a)\, dy^2] \frac{1 + \frac{a^2 \cos^2 y}{r(r-2a)}}{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)^k} \left[1 - \frac{a^2 \cos^2 y}{r(r-2a) + a^2 \cos^2 y}\right]^k$$

ou, en négligeant dans les coefficients des différentielles d'espace des termes contenant a^2 en facteur,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^k dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)^k} - \frac{r(r-2a)(dy^2 + \cos^2 y\, d\varphi^2)}{\left(1 - \frac{2a}{r}\right)^k}.$$

Faisons le nouveau changement de coordonnée (¹)

$$r = a(1-k) + u,$$

et négligeons encore les termes en a^3 dans le coefficient de dt^2 et des termes en a^2 dans les trois autres coefficients; nous obtenons

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2ka}{u}\right) dt^2 - \frac{du^2}{1 - \frac{2ka}{u}} - u^2(dy^2 + \cos^2 y\, d\varphi^2),$$

(¹) L'addition à la variable r figurant dans le ds^2 de Schwarzschild d'une quantité de l'ordre de a est indifférente dans les applications de la théorie de la Relativité aux mouvements des planètes et des satellites : dans le champ de gravitation du Soleil la quantité $2a$, qui a les dimensions d'une longueur, est un peu inférieure à 3 kilomètres, dans le champ de Jupiter elle est inférieure à 3 mètres, dans le champ de la Terre à 1 centimètre.

De même, dans les mouvements d'une masse infiniment petite représentés par les géodésiques du ds^2 considéré, les termes correctifs de l'attraction newtonienne du premier ordre par rapport à la quantité a sont les seuls qui puissent avoir une importance pratique dans des problèmes se rapprochant par les ordres de grandeur des distances et des masses, du problème fictif traité dans cet Article, et ces termes proviennent des termes d'ordre 1 et 2 du coefficient de dt^2 et des termes d'ordre 1 des autres coefficients.

c'est-à-dire exactement le ds^2 de Schwarschild relatif à la masse de valeur ka. Donc, *quand la constante c est grande, et dans la région de l'espace où la coordonnée x est bornée, le champ de gravitation défini par le ds* (16) *diffère peu du champ de gravitation d'une masse possédant la symétrie sphérique et de valeur ka.*

On interprète le résultat précédent en considérant la région de l'espace où la coordonnée x est bornée comme le voisinage de l'une des deux masses fixes du problème proposé ; la valeur de cette masse, soit M, est ka. En outre, d'après l'étude de l'espace correspondant au ds^2 de Schwarzschild, la distance d'un point de coordonnée x au centre de la masse M est

$$u = 2a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{2} - a(1-k) = a(\mathrm{ch}\,x + k),$$

ou $a\,\mathrm{ch}\,x$, avec une erreur relative de l'ordre de $\frac{x}{\mathrm{ch}\,x}$, pour x supérieur à un certain nombre positif : car les erreurs que nous avons commises en négligeant des termes en a^2 dans les coefficients du ds^2, et en remplaçant les facteurs qui dépendent de x_1 par leurs parties principales, sont d'ordre égal ou supérieur à l'ordre précédent. De même, la région de l'espace où la variable x_1 est bornée sera le voisinage de la seconde des masses fixes, soit M_1, de valeur $k_1 a$; et la distance du point correspondant à la valeur x_1 de cette variable au centre de la masse M_1 est $a\,\mathrm{ch}\,x_1$, avec une erreur relative de l'ordre de la quantité $\frac{x_1}{\mathrm{ch}\,x_1}$, pour x_1 supérieur à un nombre positif δ_1.

6° En outre, le résultat obtenu conduit à penser que la distance des deux masses fixes est d'autant plus grande que le paramètre c est plus grand ; effectivement, nous allons montrer que, quand le paramètre c est infiniment grand, la distance des deux masses est un infiniment grand équivalent au produit ca. Considérons au voisinage de la seconde masse M_1 une région de l'espace dont les points soient à une distance du centre de la masse M_1 de l'ordre de Na, N désignant un nombre de beaucoup supérieur à $\mathrm{ch}\,\delta_1$; la fonction $\mathrm{ch}\,x$ dans cette région est voisine du paramètre c, et la fonction $\mathrm{ch}\,x_1$ est de l'ordre de N. Pour étudier la région considérée relativement à la masse M, on peut réduire encore le ds^2 (16) au ds^2 (19) : les erreurs relatives ainsi commises sur les coefficients de dt^2 et de $d\varphi^2$ sont de l'ordre de $\frac{1}{N}$, et celle commise sur le coefficient de $dx^2 + dy^2$ est de l'ordre de $\frac{1}{N^2}$. Par conséquent, la distance des points de la région considérée au centre de la masse M est encore $a\,\mathrm{ch}\,x$ avec deux erreurs relatives des ordres respectifs de $\frac{1}{N^2}$ et de $\frac{x}{\mathrm{ch}\,x}$. Dès lors donnons-nous un nombre positif arbitraire ε : on peut choisir le nombre N assez grand, puis le fixer et faire croître indéfiniment le paramètre c de façon que la distance des centres des deux masses M et M_1 et la fonction $a\,\mathrm{ch}\,x$, dans la région qui sert d'intermédiaire pour aller de la masse M à la masse M_1 ou encore la quantité ca, soient dans un rapport compris entre les deux nombres $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$. Donc, en termes précis, *la distance des centres des deux masses fixes est un infiniment grand équivalent au produit ca.*

En résumé LE ds^2 (16) SATISFAIT AUX CONDITIONS LES PLUS SIMPLES QUE L'ON PEUT IMAGINER D'INTRODUIRE DANS LE PROBLÈME FICTIF DU CHAMP DE GRAVITATION DE DEUX MASSES FIXES DE VALEURS ka ET $k_1 a$; LES DEUX MASSES TENDENT A SE CONFONDRE QUAND LE PARAMÈTRE c TEND VERS ZÉRO. ET LEUR DISTANCE CROÎT INDÉFINIMENT AVEC CE PARAMÈTRE, AYANT COMME VALEUR PRINCIPALE ca.

Remarquons qu'*a priori* le ds^2 satisfaisant aux cinq premières conditions n'est pas nécessairement unique. Si à la solution $\alpha(X, Y)$ précédemment choisie on ajoute le produit par $kk_1 c$ d'une solution arbitraire de l'équation (11), la condition 3° subsiste pour le ds^2 déduit de la solution nouvelle obtenue. Les conditions 4° et 5° subsistent si la solution ajoutée à $\alpha(X, Y)$ et ses dérivées partielles tendent convenablement vers zéro quand le point gravitant s'éloigne indéfiniment ou vient au voisinage des deux masses fixes.

Ajoutons que l'on peut être tenté de considérer la solution simple de l'équation (11), de structure analogue à la structure de la solution précédemment choisie,

$$\alpha = \frac{-lb}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{l_1 b}{\sqrt{x^2 + (y - d)^2}},$$

où nous remplaçons X, Y par x, y, et où l, l_1, b, d désignent quatre constantes positives dont les deux premières ont pour somme l'unité. Cette nouvelle solution conduit au ds^2

$$ds^2 = e^{\frac{-2lb}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{-2l_1 b}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}}}\,dt^2 - x^2\,e^{\frac{2lb}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2l_1 b}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}}}\,d\varphi^2$$
$$-(dx^2+dy^2)\,e^{\frac{2lb}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2l_1 b}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}}-\frac{l^2 b^2 x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{l_1^2 b^2 x^2}{[x^2+(y-d)^2]^2}+\frac{4ll_1 b^2}{d^2}\left[\frac{x^2+y(y-d)}{\sqrt{(x^2+y^2)[x^2+(y-d)^2]}}-1\right]}.$$

Quand l'un des coefficients l_1 ou d tend vers zéro, ce dernier ds^2 tend vers le ds^2

$$ds^2 = e^{\frac{-2b}{\sqrt{x^2+y^2}}}\,dt^2 - e^{\frac{2b}{\sqrt{x^2+y^2}}}\,d\varphi^2 - (dx^2+dy^2)\,e^{\frac{2b}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{b^2x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

qui ne possède pas la symétrie sphérique.

6. Terminons en donnant la relation qui existe entre le ds^2 de M. Attilio Palatini et le ds^2 (16); nous allons pour cela former un ds^2 qui les contient tous deux, sans convenir d'ailleurs en général au champ de gravitation considéré.

Conservant les notations précédentes, considérons la solution $\alpha(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ de l'équation linéaire aux dérivées partielles (11) définie par les équations

$$\alpha = k \log \operatorname{th}\frac{x}{2} + k_1 \log \operatorname{th}\frac{x_1}{2},$$
$$\mathrm{X} + i\mathrm{Y} = a \operatorname{sh}(x+iy), \qquad \mathrm{X} + i\mathrm{Y} + ic = a_1 \operatorname{sh}(x_1 + iy_1),$$

où k, k_1, a, a_1, c désignent cinq constantes positives, X, Y des variables réelles, x, x_1 des variables positives, et y, y_1 des quantités réelles variant de 0 à 2π. Et formons les fonctions β et γ d'après les équations (12) et (13) en annulant les constantes additives. Nous obtenons le ds^2

$$(20)\quad ds^2 = \operatorname{th}^{2k}\frac{x}{2}\operatorname{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}\,dt^2 - a^2\,\frac{\operatorname{sh}^2 x \cos^2 y}{\operatorname{th}^{2k}\frac{x}{2}\operatorname{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}}\,d\varphi^2$$
$$-a^2(dx^2+dy^2)\,\frac{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}{\operatorname{th}^{2k}\frac{x}{2}\operatorname{th}^{2k_1}\frac{x_1}{2}}$$
$$\times\left(\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}\right)^{k^2}\left(\frac{\operatorname{sh}^2 x_1}{\operatorname{sh}^2 x_1 + \cos^2 y_1}\right)^{k_1^2}\left(\frac{1}{1+\mathrm{L}}\right)^{2kk_1}$$

en prenant comme variables x et y au lieu de X et Y, et posant

$$L = \frac{2aa_1(M+N)}{[(a+a_1)^2 - c^2]\operatorname{sh}x \operatorname{sh}x_1} = \frac{2\cos y \cos y_1}{M-N}$$

et

$$M = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}x_1 \cos y \cos y_1 + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}x_1 \sin y \sin y_1,$$
$$N = \cos y \cos y_1 - \operatorname{sh}x \operatorname{sh}x_1.$$

Le ds^2 (20) satisfait, quelles que soient les cinq constantes k, k_1, a, a_1, c aux dix équations d'Einstein $R_{ik} = 0$. Il ne change pas si l'on échange les deux systèmes de cinq quantités x, y, k, a, c et x_1, y_1, k_1, a_1, $-c$. Il est euclidien à l'infini. L'étude de la métrique de l'espace correspondant au ds^2 (20) est entièrement analogue à l'étude que nous avons faite à partir du ds^2 (16).

Si l'on y fait $a_1 = a$ et $k + k_1 = 1$, le ds^2 (20) se réduit au ds^2 (16), où l'on doit seulement remplacer au dernier terme $\frac{1}{c}$ par $\frac{a}{c}$, et qui dépend des trois paramètres k ou k_1, a et c; les deux masses fixes ont pour valeurs ka et $k_1 a$ et leur distance est infiniment grande avec le paramètre c et équivalente à ce paramètre.

Si l'on y fait $k = k_1 = 1$, le ds^2 (20) se réduit à un ds^2 identique aux notations près au ds^2 de M. Palatini, et dépend alors des trois paramètres a, a_1 et c; les deux masses fixes ont pour valeurs a et a_1, et leur distance est infiniment grande avec le paramètre c, et équivalente à ce paramètre. Le ds^2 ainsi transformé du ds^2 de M. Palatini, et exprimé en quelque sorte relativement à l'une des masses, tend comme le ds^2 (16) vers un ds^2 à symétrie sphérique réductible au ds^2 de Schwarzschild, quand la seconde masse tend vers zéro ou s'éloigne indéfiniment.

Mais la différence entre les deux ds^2 considérés consiste en ce que *le ds^2* (16) *tend aussi vers un ds^2 à symétrie sphérique, transformé du ds^2 de Schwarzschild, quand le paramètre c tend vers zéro et que les deux masses tendent à se confondre, tandis que le ds^2 de M. Palatini ne satisfait pas à la même condition de continuité*. Cette condition de continuité est évidemment une condition nécessaire, si au lieu de deux masses on introduit deux points matériels selon la conception classique. Mais, dans la réalité, les deux masses occupent un certain volume de l'espace, et la condition de continuité considérée n'a de sens physique que tant que ces deux masses en se rapprochant restent extérieures l'une à l'autre.

Si d'ailleurs on applique une proposition (¹) générale de la théorie de la Relativité, les coefficients du ds^2 du champ de gravitation de deux masses fixes données peuvent s'exprimer en première approximation par des potentiels newtoniens; et d'après une formule bien connue de la Mécanique céleste classique, le potentiel newtonien en un point éloigné d'un système de masses voisines est égal en première approximation au potentiel de la masse totale, soit A, supposée placée au centre de gravité. Au total, les valeurs approchées des coefficients ainsi obtenues conduisent à un ds^2 de la forme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{A}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

qui par transformation donne une approximation du ds^2 de Schwarzschild. Au premier degré d'approximation les deux ds^2 considérés se réduisent au ds^2 précédent. Peut-être y aurait-il lieu de former à partir des équations d'Einstein et de deux masses données les approximations suivantes, et de comparer aux nouveaux termes obtenus les termes correspondants des deux ds^2 considérés?

(¹) *Voir* par exemple Einstein, *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie gehalten in Mai* 1921 *an der Universität Princeton*, Braunschweig, 1922, p. 57.