BULLETIN DE LA S. M. F.

H. ANDOYER

# Sur un problème simple de mécanique céleste

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 52 (1924), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__1_0>

BULLETIN

DE LA

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

---

## SUR UN PROBLÈME SIMPLE DE MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. H. ANDOYER.

G.-W. Hill a indiqué, pour le mouvement de la Lune autour de la Terre, une orbite intermédiaire relativement très simple, et en a étudié sommairement la théorie, d'ailleurs inutile en réalité. Je me propose de reprendre dans ces quelques pages le problème ainsi défini par Hill, et d'en développer avec toute l'étendue nécessaire la solution qu'en savent donner les astronomes, dans l'espoir qu'un analyste voudra bien en discuter la valeur; je serais particulièrement heureux de voir appliquer au moins une fois les profondes et admirables recherches théoriques modernes à l'étude d'un problème particulier d'énoncé simple et précis, dans lequel on peut déjà trouver cependant toutes les difficultés analytiques qui caractérisent les problèmes de la Mécanique céleste.

1. Désignons par S, T, L les centres de gravité du Soleil, de la Terre et de la Lune; par $M'$, $M_0$, M les masses respectives de ces trois astres; par G le centre de gravité du système Terre-Lune; par $r$ la distance TL, rayon vecteur de la Lune; et par H l'angle des deux vecteurs TL et GS.

Négligeant l'excentricité de l'orbite solaire, nous supposons que cette orbite est un cercle de centre G et de rayon $a'$, décrit avec une vitesse angulaire constante $n'$, liée à $a'$ par la relation $fM' = n'^2 a'^3$, en représentant par $f$ le coefficient d'attraction.

Si l'on néglige aussi le rapport $\frac{r}{a'}$, la théorie *solaire* de la Lune revient à regarder le mouvement de L par rapport à T comme celui d'un point matériel de masse égale à l'unité sous l'action de la fonction de forces

$$f\frac{(M_0+M)}{r}+n'^2r^2\left(\frac{3}{2}\cos^2 H-\frac{1}{2}\right).$$

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées de L par rapport à des axes rectangulaires $Tx$, $Ty$, $Tz$ de directions fixes; appelons $t$ le temps, et en supposant le plan $Txy$ parallèle à celui de l'orbite de S autour de G, soit $N'=n't+l'_0$ l'angle de $Tx$ avec GS, $l'_0$ désignant une constante. On aura

$$r^2\cos^2 H=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{x^2-y^2}{2}\cos 2N'+xy\sin 2N'.$$

Négligeons alors les termes en $\cos 2N'$ et $\sin 2N'$; il nous restera la fonction de forces

$$U=\frac{f(M_0+M)}{r}+\frac{n'^2r^2}{4}-\frac{3}{4}n'^2z^2;$$

c'est celle qui détermine l'orbite intermédiaire considérée par Hill et le problème que nous avons en vue. On n'en peut trouver de plus simple, en dehors des exercices classiques de mécanique rationnelle.

**2.** Soient, comme d'habitude, $e$ et $i$ la base des logarithmes hyperboliques et l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et appelons $a$ et $n$ deux constantes arbitraires liées par la relation

$$f(M_0+M)=\left(n^2+\frac{1}{2}n'^2\right)a^3;$$

introduisons encore l'argument $N=nt+l_0$, où $l_0$ est une nouvelle constante arbitraire, et faisons

$$\begin{aligned}
x+iy&=a(1+\xi+\eta)e^{iN},\\
x-iy&=a(1+\xi-\eta)e^{-iN},\\
iz&=a\zeta,\\
\frac{a}{r}&=1+\rho,
\end{aligned}$$

de sorte que $a(1+\xi)$ et $\frac{a\eta}{i}$ sont les projections de TL sur deux axes rectangulaires T$\xi$, T$\eta$ situés dans le plan T$xy$, et tels que l'angle de T$x$ avec T$\xi$ soit constamment égal à N.

Nommons encore $m$ le rapport $\frac{n'}{n}$, et employons la caractéristique D comme signe de dérivation par rapport à la variable $i$N qui remplacera le temps. Si l'on pose

$$Q = \frac{a^3}{r^3} - 1 = 3\rho + 3\rho^2 + \rho^3,$$

les équations immédiates du mouvement s'écrivent sous la forme

$$\mathrm{D}^2\xi + 2\mathrm{D}\eta - \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)(1+\xi)\,Q = 0,$$

$$\mathrm{D}^2\eta + 2\mathrm{D}\,\xi - \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)\eta\,Q = 0,$$

$$\left(\mathrm{D}^2 - 1 - \frac{3}{2}m^2\right)\zeta - \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)\zeta\,Q = 0,$$

et si l'on fait encore

$$P = 3\rho^2 - 4\rho^3 + 5\rho^4 - 6\rho^5 + \ldots,$$

on a

$$\xi + \rho = \frac{1}{2}(P - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Sans faire attention ici à l'intégrale des aires projetées sur le plan T$xy$, nous nous servirons seulement encore de l'intégrale des forces vives, mise sous la forme avantageuse pour notre objet

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = 2\mathrm{U} + x\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} + \text{const.},$$

et due à Laplace. Ceci devient

$$\left(\mathrm{D}^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2\right)\rho - \left(\frac{1}{2}\mathrm{D}^2 + m^2\right)P - 3m^2\zeta^2 = \text{const.}$$

Il sera commode, au point de vue du calcul, de poser

$$1 - \frac{3}{2}m^2 = p^2, \qquad 1 + \frac{3}{2}m^2 = q^2,$$

de sorte que

$$p^2 + q^2 = 2,$$

et de mettre l'ensemble des équations précédentes sous la forme définitive

$$(a)\quad \begin{cases} (D^2-p^2)\rho = \left(\frac{1}{2}D^2+\frac{q^2-p^2}{3}\right)P+(q^2-p^2)\zeta^2+\text{const.}, \\ \xi = -\rho+\frac{P}{2}-\frac{\xi^2}{2}+\frac{p^2+q^2}{2}\frac{\eta^2}{2}+\frac{\zeta^2}{2}, \\ (p^2+q^2)D\eta = -D^2\xi+\frac{p^2+2q^2}{3}(1+\xi)Q, \\ D^2\eta = -2D\xi+\frac{p^2+2q^2}{3}\eta Q, \\ (D^2-q^2)\zeta = \frac{p^2+2q^2}{3}\zeta Q, \end{cases}$$

les paramètres $p$ et $q$ étant considérés dorénavant comme indépendants.

3. Les équations $(a)$ admettent la solution particulière $\xi=\eta=\zeta=\rho=0$. Si on les réduit à la forme linéaire, on les vérifie en faisant

$$\begin{aligned} \rho = -\xi &= \alpha e^{piN}+\alpha' e^{-piN}, \\ \eta &= \frac{2}{p}(\alpha e^{piN}-\alpha' e^{-piN}), \\ \zeta &= \beta e^{qiN}+\beta' e^{-qiN}; \end{aligned}$$

$\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ désignant des constantes arbitraires; et comme $n$ et $l_0$ sont déjà deux constantes arbitraires, cette solution est générale.

Tenons maintenant compte des puissances supérieures des inconnues $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\rho$. Conformément aux pratiques de la Mécanique céleste, nous pouvons chercher une solution *formelle* définie de la façon suivante :

Soient G et H deux arguments de la forme

$$gN+G_0,\quad hN+H_0,$$

en désignant par $g$ et $h$ deux coefficients constants à déterminer, par $G_0$ et $H_0$ deux angles constants arbitraires. Soient aussi $\varepsilon$ et $\gamma$ deux autres constantes arbitraires réelles, et faisons

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}e^{iG},\qquad \varepsilon_{-1}=\frac{\varepsilon}{2}e^{-iG},\qquad \gamma_1=\frac{\gamma}{2}e^{iH},\qquad \gamma_{-1}=\frac{\gamma}{2}e^{-iH}.$$

Désignons généralement par $M_n$ les différents monomes $\varepsilon_1^{p_1}\varepsilon_{-1}^{p_{-1}}\gamma_1^{q_1}\gamma_{-1}^{q_{-1}}$, les exposants étant des entiers non négatifs dont la somme n'est pas nulle, et distinguons spécialement parmi les monomes $M_n$ ceux qui se réduisent à des constantes, soit les $M_{n'}$, de la forme $(\varepsilon_1\varepsilon_{-1})^p(\gamma_1\gamma_{-1})^q$.

Les inconnues $\rho$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont développables sous la forme

$$\rho = \Sigma\rho_n M_n, \qquad \xi = \Sigma\xi_n M_n, \qquad \ldots,$$

et il en est de même des quantités intermédiaires P, Q; de plus, les coefficients $g$ et $h$ sont développables eux aussi sous la forme plus particulière

$$g = g_0 + \Sigma g_{n'} M_{n'}, \qquad h = h_0 + \Sigma h_{n'} M_{n'}.$$

Dans les monomes $M_n$ qui figurent dans les développements de $\rho$, $\xi$, $\eta$, la somme $q_1 + q_{-1}$ des exposants de $\gamma_1$ et $\gamma_{-1}$ est paire; cette même somme est impaire quand il s'agit du développement de $\zeta$.

Les quantités $\rho$, $\xi$ sont réelles, tandis que $\eta$ et $\zeta$ sont purement imaginaires; si donc $M_{-n}$ désigne le monome conjugué de $M_n$, on a

$$\rho_{-n} = \rho_n, \qquad \xi_{-n} = \xi_n, \qquad \eta_{-n} = -\eta_n, \qquad \zeta_{-n} = -\zeta_n;$$

par suite, dans le cas d'un monome $M_{n'}$, qui est son propre conjugué, $\eta_n = 0$.

On peut choisir arbitrairement, par exemple, les coefficients $\rho_n$ et $\zeta_n$ qui correspondent aux monomes $\varepsilon_1$, $\gamma_1$, et plus généralement à ceux de la forme $\varepsilon_1 M_{n'}$, $\gamma_1 M_{n'}$; nous supposerons les deux premiers égaux à l'unité, et tous les autres nuls.

Il est clair que l'on a

$$g_0 = p, \qquad h_0 = q,$$

ces quantités étant prises positivement, si l'on veut.

D'après la forme des équations $(a)$, $\rho$, $\xi$, $\zeta$ sont alors des fonctions de $p$ et $q$ homogènes et de degré zéro; tandis que $\eta$ d'un côté, $g$ et $h$ d'un autre, sont de même homogènes des degrés $-1$ et $1$, respectivement.

Si enfin on veut revenir à la forme réelle, on aura en particulier

$$\begin{aligned}
x &= a\cos N + a\Sigma(\xi_n + \eta_n)\alpha_n\cos(N + V_n),\\
y &= a\sin N + a\Sigma(\xi_n + \eta_n)\alpha_n\sin(N + V_n),\\
z &= a\Sigma\zeta_n\alpha_n\sin V_n,\\
\frac{a}{r} &= 1 + \Sigma\rho_n\alpha_n\cos V_n,
\end{aligned}$$

en faisant

$$\alpha_n = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_{-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{q_1+q_{-1}}, \qquad V_n = (p_1 - p_{-1})\,G + (q_1 - q_{-1})\,H.$$

4. Substituant dans les équations $(a)$ les valeurs supposées pour les diverses inconnues, $g$ et $h$ comprises, on voit immédiatement que l'on pourra déterminer sans peine les coefficients $\rho_n$, $\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_n$, $g_{n'}$, $h_{n'}$, en identifiant dans les deux membres de chaque équation les coefficients d'un même monome $M_n$ (*ce n'est qu'un procédé de calcul formel*). On ne rencontrera aucune difficulté si l'on envisage successivement les monomes $M_n$ de degrés croissants ; le calcul est rendu très facile en observant que

$$DM_n = [(p_1 - p_{-1})\,g + (q_1 - q_{-1})\,h]\,M_n.$$

Mais précisons un peu plus, en distinguant les divers cas qui peuvent se présenter, et supposant d'abord connues les parties principales

$$\rho = \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}, \qquad \xi = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}), \qquad \eta = \frac{2}{p}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}),$$
$$\zeta = \gamma_1 - \gamma_{-1}, \qquad g = p, \qquad h = q.$$

1° $M_n$ contient $\gamma$ à une puissance paire, et n'est ni un monome $M_{n'}$, ni de la forme $\varepsilon_{\pm 1} M_{n'}$.

La première équation $(a)$ détermine alors $\rho_n$; la seconde fournit ensuite $\xi_n$, et les deux suivantes doivent donner deux valeurs concordantes pour $\eta_n$ : c'est une importante vérification du calcul.

2° $M_n$ est de la forme $\varepsilon_{\pm 1} M_{n'}$.

On a alors $\rho_n = 0$, par convention, et la première équation $(a)$ donne $g_{n'}$; les trois suivantes fournissent $\xi_n$ et $\eta_n$, comme cidessus.

3° $M_n$ est de la forme $M_{n'}$.

La première et la quatrième équation $(a)$ sont alors inutiles ; la troisième donne $\rho_n$, et ensuite la seconde fournit $\xi_n$.

4° $M_n$ contient $\gamma$ à une puissance impaire et n'est pas de la forme $\gamma_{\pm 1} M_{n'}$.

La dernière équation $(a)$ donne $\zeta_n$.

5° $M_n$ est de la forme $\gamma_{\pm 1} M_{n'}$.

On a alors $\gamma_n = 0$, par convention, et la dernière équation $(a)$ donne $h_{n'}$.

Calculant ainsi tous les termes jusqu'au troisième degré inclus, et en outre les termes du quatrième degré de $\rho$, $\xi$, $\eta$, qui correspondent à des monomes constants ou bien dépendant de l'argument G — H, on trouve :

$$g = p - \frac{(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{6p^3}\varepsilon_1\varepsilon_{-1} + \frac{2(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{p(p^2 - 4q^2)}\gamma_1\gamma_{-1} + \ldots,$$

$$h = q + \frac{2(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{q(p^2 - 4q^2)}\varepsilon_1\varepsilon_{-1} - \frac{(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{2q(p^2 - 4q^2)}\gamma_1\gamma_{-1} + \ldots;$$

$$\begin{aligned}
\rho = {} & \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1} + \frac{5p^2 + q^2}{3p^2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2) + \frac{p^2 - q^2}{p^2 - 4q^2}(\gamma_1^2 + \gamma_{-1}^2) \\
& + \frac{(3p^2 + q^2)(25p^2 + 2q^2)}{24p^4}(\varepsilon_1^3 + \varepsilon_{-1}^3) \\
& + \frac{(p - q)(-p^3 + 16p^2q + 10pq^2 + 8q^3)}{4pq(p^2 - 4q^2)}(\varepsilon_1\gamma_1^2 + \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}^2) \\
& + \frac{(p + q)(p^3 + 16p^2q - 10pq^2 + 8q^3)}{4pq(p^2 - 4q^2)}(\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}\gamma_1^2) \\
& - \frac{p^2 - q^2}{3p^2}\varepsilon_1^2\varepsilon_{-1}^2 + \frac{8(p^2 - q^2)}{p^2 - 4q^2}\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1} - \frac{p^2 - q^2}{p^2 - 4q^2}\gamma_1^2\gamma_{-1}^2 \\
& + \frac{(p+q)(p-q)^2\begin{pmatrix}15p^6 + 167p^5q - 676p^4q^2 \\ \quad + 518p^3q^3 - 400p^2q^4 + 128pq^5 - 16q^6\end{pmatrix}}{6p^3q(p + 2q)(p - 2q)^3(3p - 2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}^2\gamma_1^2) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi = {} & -(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) + \frac{p^2 + 2q^2}{3p^2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2) - \frac{2q^2}{p^2}\varepsilon_1\varepsilon_{-1} - \frac{p^2 + 2q^2}{2(p^2 - 4q^2)}(\gamma_1^2 + \gamma_{-1}^2) - \gamma_1\gamma_{-1} \\
& + \frac{(p^2 + 2q^2)(3p^2 + q^2)}{8p^4}(\varepsilon_1^3 + \varepsilon_{-1}^3) - \frac{5p^4 + 5p^2q^2 + 2q^4}{6p^4}\varepsilon_1\varepsilon_{-1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) \\
& + \frac{(p^2 + 2q^2)(3p^2 - 3pq - 2q^2)}{4pq(p^2 - 4q^2)}(\varepsilon_1\gamma_1^2 + \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}^2) - \frac{3p^2}{p^2 - 4q^2}\gamma_1\gamma_{-1}(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) \\
& + \frac{(p^2 + 2q^2)(-3p^2 - 3pq + 2q^2)}{4pq(p^2 - 4q^2)}(\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}\gamma_1^2) \\
& + \frac{15p^6 - 253p^4q^2 - 16p^2q^4 + 92q^6}{72p^6}\varepsilon_1^2\varepsilon_{-1}^2 \\
& + \frac{-20p^8 + 66p^6q^2 - 80p^4q^4 - 48p^2q^6 + 64q^8}{p^4(p^2 - 4q^2)^2}\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1} \\
& + \frac{-p^6 + 21p^4q^2 - 72p^2q^4 - 20q^6}{8q^2(p^2 - 4q^2)^2}\gamma_1^2\gamma_{-1}^2 \\
& + \frac{(p^2 + 2q^2)\begin{pmatrix}9p^7 + 300p^6q - 519p^5q^2 - 278p^4q^3 \\ \quad + 698p^3q^4 - 444p^2q^5 + 184pq^6 - 16q^7\end{pmatrix}}{24p^3q(p + 2q)(p - 2q)^3(3p - 2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}^2\gamma_1^2) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\eta = \frac{2}{p}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}) + \frac{p^2+2q^2}{6p^3}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{-1}^2) + \frac{p^2+2q^2}{2q(p^2-4q^2)}(\gamma_1^2 - \gamma_{-1}^2)$$
$$+ \frac{(p^2+2q^2)(13p^2+q^2)}{36p^5}(\varepsilon_1^3 - \varepsilon_{-1}^3) + \frac{5p^4-4p^2q^2-4q^4}{6p^5}\varepsilon_1\varepsilon_{-1}(\varepsilon_1-\varepsilon_{-1})$$
$$+ \frac{(p^2+2q^2)(-2p+5q)}{2q(p+2q)^2(p-2q)}(\varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}^2) + \frac{2p^4-4p^2q^2+8q^4}{p^3(p^2-4q^2)}\gamma_1\gamma_{-1}(\varepsilon_1-\varepsilon_{-1})$$
$$+ \frac{(p^2+2q^2)(2p+5q)}{2q(p-2q)^2(p+2q)}(\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 - \varepsilon_{-1}\gamma_1^2)$$
$$+ \frac{(p^2+2q^2)\begin{pmatrix}-3p^5-4p^4q-206p^3q^2\\ +228p^2q^3+20pq^4-8q^5\end{pmatrix}}{12p^2q(p+2q)(p-2q)^3(3p-2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_{-1}^2 - \varepsilon_{-1}^2\gamma_1^2)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\zeta = \gamma_1 - \gamma_{-1} + \frac{p^2+2q^2}{p(p+2q)}(\varepsilon_1\gamma_1 - \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}) - \frac{p^2+2q^2}{p(p-2q)}(\varepsilon_1\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}\gamma_1)$$
$$+ \frac{(p^2+2q^2)(11p^2+5pq+2q^2)}{12p^3(p+2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_1 - \varepsilon_{-1}^2\gamma_{-1})$$
$$+ \frac{(p^2+2q^2)(-11p^2+5pq-2q^2)}{12p^3(p-2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}^2\gamma_1)$$
$$+ \frac{(p^2-q^2)(p^2+2q^2)}{8q^2(p^2-4q^2)}(\gamma_1^3 - \gamma_{-1}^3)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on supposait $\gamma = 0$, de sorte que $z = 0$, le problème se ramènerait aux quadratures elliptiques.

Supposons maintenant $n' = 0$, et par suite $p = q = 1$. C'est le problème de Képler, et il est facile de s'en assurer. On trouve en effet alors

$$g = h = 1,$$

$$\frac{a}{r} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1} + 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2) + \frac{9}{2}(\varepsilon_1^3 + \varepsilon_{-1}^3) - \frac{5}{2}(\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}\gamma_1^2) + \ldots,$$

$$x + iy = ae^{iN}\Big[1 + \varepsilon_1 - 3\varepsilon_{-1} + \frac{3}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{-1}^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_{-1} + \gamma_{-1}^2 - \gamma_1\gamma_{-1}$$
$$+ \frac{8}{3}\varepsilon_1^3 + \frac{1}{3}\varepsilon_{-1}^3 - \frac{5}{2}\varepsilon_1^2\varepsilon_{-1} - \frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_{-1}^2$$
$$+ \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}^2 - \varepsilon_1\gamma_1\gamma_{-1} + 3\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1} + \frac{9}{2}\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 - \frac{5}{2}\varepsilon_{-1}\gamma_1^2$$
$$- \frac{9}{4}\varepsilon_1^2\varepsilon_{-1}^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1} - \gamma_1^2\gamma_{-1}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\gamma_{-1}^2 + 5\varepsilon_{-1}^2\gamma_1^2 + \ldots\Big],$$

$$\frac{iz}{a} = \gamma_1 - \gamma_{-1} + \varepsilon_1\gamma_1 - \varepsilon_{-1}\gamma_{-1} + 3(\varepsilon_1\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}\gamma_1)$$
$$+ \frac{3}{2}(\varepsilon_1^2\gamma_1 - \varepsilon_{-1}^2\gamma_{-1}) + 2(\varepsilon_1^2\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}^2\gamma_1) + \ldots.$$

Pour réduire ces formules à celles bien connues du mouvement elliptique, il suffit d'un changement de constantes arbitraires.

Soit une orbite keplérienne de demi-grand axe $a$ et de longitude moyenne $l$ égale à $nt+\lambda_0$; appelons $\alpha$ l'excentricité, $\beta$ le double du sinus de la demi-inclinaison, P l'anomalie moyenne, Q l'argument moyen de la latitude, et faisons

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} e^{iP}, \qquad \alpha_{-1} = \frac{\alpha}{2} e^{-iP}, \qquad \beta_1 = \frac{\beta}{2} e^{iQ}, \qquad \beta_{-1} = \frac{\beta}{2} e^{-iQ}.$$

En remplaçant

$$iN \text{ par } il + \frac{5}{2}(\alpha_1^2 \beta_{-1}^2 - \alpha_{-1}^2 \beta_1^2) + \ldots,$$

$$\varepsilon_1 \text{ par } \alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 \alpha_{-1} + \frac{5}{2}\alpha_{-1}\beta_1^2 + \ldots,$$

$$\gamma_1 \text{ par } \beta_1 - 2\alpha_1\alpha_{-1}\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_1^2\beta_{-1} - \frac{5}{2}\alpha_1^2\beta_{-1} + \ldots,$$

et traitant de même $\varepsilon_{-1}$, $\gamma_{-1}$, les formules précédentes deviennent

$$\frac{a}{r} = 1 + \alpha_1 + \alpha_{-1} + 2(\alpha_1^2 + \alpha_{-1}^2) + \frac{9}{2}(\alpha_1^3 + \alpha_{-1}^3) - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_{-1}(\alpha_1 + \alpha_{-1}) + \ldots,$$

$$\begin{aligned} x + iy = a\, e^{il} \Big[ & 1 + \alpha_1 - 3\alpha_{-1} + \frac{3}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_{-1}^2 - 2\alpha_1\alpha_{-1} + \beta_{-1}^2 - \beta_1\beta_{-1} \\ & + \frac{8}{3}\alpha_1^3 + \frac{1}{3}\alpha_{-1}^3 - 3\alpha_1^2\alpha_{-1} \\ & + \alpha_{-1}\beta_{-1}^2 - \alpha_1\beta_1\beta_{-1} + 3\alpha_{-1}\beta_1\beta_{-1} - 3\alpha_1\beta_{-1}^2 \\ & - \frac{1}{4}\alpha_1^2\alpha_{-1}^2 + 2\alpha_1\alpha_{-1}\beta_1\beta_{-1} + \frac{1}{2}\alpha_1^2\beta_{-1}^2 + \ldots \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{iz}{a} = {} & \beta_1 - \beta_{-1} + \alpha_1\beta_1 - \alpha_{-1}\beta_{-1} + 3(\alpha_1\beta_{-1} - \alpha_{-1}\beta_1) \\ & + \frac{3}{2}(\alpha_1^2\beta_1 - \alpha_{-1}^2\beta_{-1}) - 2\alpha_1\alpha_{-1}(\beta_1 - \beta_{-1}) \\ & - \frac{1}{2}(\alpha_1^2\beta_{-1} - \alpha_{-1}^2\beta_1) - \frac{1}{2}\beta_1\beta_{-1}(\beta_1 - \beta_{-1}) + \ldots. \end{aligned}$$

Ce sont les formules mêmes du mouvement elliptique keplérien.

Si nous revenons aux formules générales, et que nous supposions $m$ petit, comme il arrive réellement dans la théorie de la Lune, on voit qu'il n'en résulte aucune difficulté; les coefficients qui figurent dans les développements des inconnues restent finis; les quantités $g-1$, $h-1$ sont de l'ordre de $m^2$, et il en est de même de la partie constante de $\rho$, qui d'ailleurs ne contient pas de termes en $\varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$ et $\gamma_1 \gamma_{-1}$; en outre, la partie de $\rho$ qui dépend de l'argument à longue période $2(G-H)$ est de l'ordre de $m^4$. Toutes ces particularités, et quelques autres qu'il serait trop long de signaler, sont conformes aux théorèmes généraux de la Mécanique céleste.

5. Pour terminer, imaginons que l'on cherche comment doivent être modifiées les formules générales trouvées précédemment, si l'on vient à compléter la fonction de forces U par une fonction perturbatrice.

Ces formules dépendent des six éléments $n$, $\varepsilon$, $\gamma$, N, G, H; soit $u$ l'un quelconque d'entre eux et faisons

$$J_u = \left[\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial u}\right]_0,$$

en marquant par l'indice o la partie constante du développement d'une fonction périodique.

On a évidemment $J_n = J_\varepsilon = J_\gamma = 0$, et nous appellerons J, $J_1$, $J_2$ les quantités $J_N$, $J_G$, $J_H$ qui peuvent remplacer $n$, $\varepsilon$, $\gamma$.

Les équations qui déterminent les nouvelles valeurs des éléments $J_n$, $J_G$, $J_H$, N, G, H sont de la forme

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial N}, & \frac{dN}{dt} &= n - \frac{\partial R}{\partial J},\\ \frac{dJ_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial G}, & \frac{dG}{dt} &= n_1 - \frac{\partial R}{\partial J^1},\\ \frac{dJ_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial H}, & \frac{dH}{dt} &= n_2 - \frac{\partial R}{\partial J_2},\end{aligned}\right.$$

en appelant $n_1$, $n_2$ les quantités $ng$ et $nh$.

Si l'on fait

$$\begin{aligned} x &= a\Sigma x_n \cos(N + V_n),\\ y &= a\Sigma y_n \sin(N + V_n),\\ z &= a\Sigma z_n \sin V_n,\end{aligned}$$

les arguments $V_n$ étant *différents*, de la forme $rG + sH$, on a

$$\begin{aligned} J &= na^2\Sigma \quad (1 + rg + sh)\,x_n^2,\\ J_1 &= na^2\Sigma \left\{ r(1 + rg + sh)\,x_n^2 + r(rg + sh)\,z_n^2 \right\},\\ J_2 &= na^2\Sigma \left\{ s(1 + rg + sh)\,x_n^2 + s(rg + sh)\,z_n^2 \right\},\end{aligned}$$

et l'on trouve sans peine, d'après les résultats calculés ci-dessus :

$$\begin{aligned} J = na^2 \Bigg[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} &- \frac{4p^4 + 13p^2q^2 + q^4}{72p^4}\varepsilon^4 \\ &- \frac{17p^6 - 60p^4q^2 + 36p^2q^4 + 16q^6}{4p^2(p^2 - 4q^2)^2}\varepsilon^2\gamma^2 \\ &\qquad + \frac{3p^4 - 15p^2q^2 + 3q^4}{8(p^2 - 4q^2)^2}\gamma^4 + \ldots \Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 = na^2 p \Bigg[ \frac{\varepsilon^2}{2} &+ \frac{17p^4 + 5p^2q^2 + 14q^4}{144p^4}\varepsilon^4 \\ &+ \frac{5p^6 - 11p^4q^2 - 2p^2q^4 + 8q^6}{4p^2(p^2 - 4q^2)^2}\varepsilon^2\gamma^2 + \ldots \Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 = na^2 q \Bigg[ \frac{\gamma^2}{2} &+ \frac{p^8 - 6p^6q^2 - 14p^4q^4 + 12p^2q^6 + 16q^8}{4p^2q^2(p^2 - 4q^2)^2}\varepsilon^2\gamma^2 \\ &+ \frac{p^2(-p^4 + 5p^2q^2 + 14q^4)}{16q^2(p^2 - 4q^2)^2}\gamma^4 + \ldots \Bigg]. \end{aligned}$$

Appelons encore P la partie constante de la fonction

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + U$$

ou bien

$$-\frac{1}{2}\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) + U,$$

c'est-à-dire ici

$$\frac{3}{2}f(M_0 + M)\left(\frac{1}{r}\right)_0;$$

on a donc

$$P = n^2a^2\frac{p^2 + 2q^2}{p^2 + q^2}(1 + \rho_0),$$

c'est-à-dire

$$P = n^2a^2\frac{p^2 + 2q^2}{p^2 + q^2}\left[1 - \frac{p^2 - q^2}{48p^2}\varepsilon^4 + \frac{p^2 - q^2}{2(p^2 - 4q^2)}\left(\varepsilon^2\gamma^2 - \frac{\gamma^4}{8}\right) + \ldots\right].$$

On sait qu'on a l'identité

$$dP = J\,dn + J_1\,dn_1 + J_2\,dn_2,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial n} &= J + J_1\frac{\partial n_1}{\partial n} + J_2\frac{\partial n_2}{\partial n}, \\ \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} &= \phantom{J +{}} J_1\frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} + J_2\frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial P}{\partial \gamma} &= \phantom{J +{}} J_1\frac{\partial n_1}{\partial \gamma} + J_2\frac{\partial n_2}{\partial \gamma}, \end{aligned}$$

égalités faciles à vérifier.

De plus, l'identité précédente montre que $n$, $n_1$, $n_2$ sont les dérivées par rapport à $J$, $J_1$, $J_2$ de la fonction

$$nJ + n_1 J_1 + n_2 J_2 - P,$$

égale ici à la constante des forces vives

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right] - U;$$

par suite, les équations ($b$) ont la forme rigoureusement canonique.