BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur quelques théorèmes de Joachimsthal

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 92-95

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__92_1>

Sur quelques théorèmes de Joachimsthal; par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 mars 1877.)

1. Joachimsthal termine ainsi (¹) une des Notes nombreuses et élégantes qu'il a publiées sur la théorie des normales à une conique :

« Je vais indiquer une proposition qui est fondamentale dans cette théorie :

» THÉORÈME. — *Soient p, q, r trois points d'une conique, tels que les normales en ces points concourent en un même point. Si l'on tire, par un sommet* S *de la conique, trois parallèles à pq, qr, rp, le centre de gravité des trois points où ces parallèles rencontrent la courbe est situé sur l'axe qui contient le sommet* S. »

(¹) *Sur la construction des normales qu'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complétement trouvée* (*Journal de Crelle*, t. 48).

La proposition précédente, ainsi que beaucoup d'autres dues au même géomètre, peuvent se déduire très-simplement des considérations suivantes.

2. Étant donnés une conique K et deux points fixes A et B, dont le premier A soit sur la courbe, si l'on imagine les divers cercles qui passent par ces deux points, chacun d'eux rencontre la conique en trois points distincts du point A, et il est clair que le triangle déterminé par ces points enveloppe, lorsque le cercle varie, une parabole.

Réciproquement, *si divers triangles, inscrits dans une conique* K, *sont circonscrits à une parabole, les cercles qui leur sont circonscrits passent par deux points fixes, dont l'un est situé sur la conique et dont l'autre, situé en dehors de cette conique, est le foyer de la parabole.*

On en déduit immédiatement que :

Si divers triangles, inscrits dans une conique K, *sont circonscrits à une parabole :*

1° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles sont situés sur une même droite ;*

2° *Les centres de gravité de ces triangles sont également situés sur une ligne droite.*

3. Soient M un point situé sur une conique K et MN la normale en ce point ; si de chaque point m de la droite MN on mène des normales à la courbe, les pieds des normales distinctes de MN formeront un triangle dont les côtés enveloppent évidemment une parabole.

On en conclut que les cercles circonscrits à ces triangles passent par un point fixe de la courbe. Soient a, a' et b, b' les extrémités des axes de la conique, M′ et M″ les symétriques du point M relativement à ces axes ; si l'on abaisse les normales du point α où MN rencontre aa', les pieds des normales distincts de M sont a, a' et M′ ; de même, si l'on abaisse les normales du point p où MN coupe bb', les pieds des normales distincts de M sont b, b' et M″. Or il est évident que les cercles circonscrits aux deux triangles aa'M′ et bb'M″ se coupent tous deux sur la courbe, au point μ symétrique de M par rapport au centre.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, en quatre points d'une conique p, q, r, s, *les normales concourent en un même point, le cercle circonscrit aux trois points* q, r, s *passe par le point* p' *symétrique du point* p *par rapport au centre de la conique.* (JOACHIMSTHAL.)

On peut remarquer de plus que le centre de gravité du triangle $aa'M'$ et le centre de gravité du triangle $bb'M''$ sont situés sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point M. Donc :

Si les normales menées en trois points p, q, r *d'une conique concourent en un même point* μ, *le centre de gravité du triangle* pqr *se trouve sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe par le pied de la quatrième normale que l'on peut abaisser du point* μ.

4. Il est à remarquer que toutes les propriétés des normales à une même conique sont multiples. Si l'on considère, en effet, le triangle formé par les deux axes et la droite de l'infini, chacun des côtés de ce triangle joue le même rôle relativement aux normales. Cela résulte immédiatement de cette propriété très-simple : *Si l'on effectue une transformation homographique de façon qu'aux foyers d'une conique correspondent les deux ombilics* (1) *du plan, les normales à cette conique deviennent après la transformation les normales à la conique transformée.*

En particulier, si l'on prend pour point de départ la proposition de Joachimsthal énoncée plus haut et que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s *tels, que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par* p' *le point diamétralement opposé à* p, *les droites* rs *et* qp' *sont également inclinées sur les axes,*

---

(1) J'appelle ici *ombilics* les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles d'un plan; j'appelle de même *ombilicale* la conique imaginaire située à l'infini et commune à toutes les sphères de l'espace.

Les propriétés des normales à une surface du second ordre sont également multiples; car, si l'on effectue une transformation homographique, de telle sorte qu'à la focale d'une surface du second ordre corresponde l'ombilicale, les normales à la surface ont pour transformées les normales à la surface transformée.

on en déduira immédiatement la proposition suivante qui, sous une autre forme, a été donnée également par Joachimsthal :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s tels, que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par p' le symétrique du point p par rapport à l'un des axes, les droites rs et qp' rencontrent cet axe en deux points situés à égale distance du centre.

5. En conservant les notations précédentes (3), soit MN la normale menée en un point M d'une conique K. De chaque point m de cette droite on peut mener trois normales à la courbe distinctes de MN ; soient a, b, c les pieds de ces normales. Par un sommet S de la conique, menons des droites parallèles à bc, ca, ab et soient respectivement α, β, γ les points où ces droites coupent la courbe. En remarquant qu'on ne peut mener à la parabole enveloppée par les côtés du triangle abc qu'une tangente parallèle à une direction donnée, on verra facilement que le point α détermine les points associés β et γ ; par suite le triangle $\alpha\beta\gamma$ enveloppe une conique que l'on voit immédiatement être une parabole. Le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$ décrit par suite une ligne droite ; en plaçant successivement le point m sur chacun des axes, on voit que, pour chacun des triangles correspondants, le centre de gravité est sur l'axe passant par le point S.

La proposition de Joachimsthal que j'ai énoncée au commencement de cette Note est donc démontrée.