

# BULLETIN DE LA S. M. F.

B. GAMBIER

**Déformation du parabolôide de révolution : cubique  
de M. Lyon et congruences de M. Thybaut**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 50 (1922), p. 153-219

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1922\\_\\_50\\_\\_153\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__153_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**DÉFORMATION DU PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION :  
CUBIQUE DE M. LYON ET CONGRUENCES DE M. THYBAUT;**

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

**CHAPITRE I.**

**SURFACES ALGÈBRIQUES DÉDUITES DE LA CUBIQUE DE M. LYON. DÉGÉ-  
NÉRESCENCE DES SURFACES  $\Sigma$ , S ET S' EN UNE SURFACE MINIMA ET  
SES DEUX DÉVELOPPÉES.**

1. Dans ce Mémoire, qui fait suite à celui qui a déjà paru dans ce *Bulletin*, je me propose d'appliquer les considérations théoriques qui précèdent à un exemple particulier qui me paraît digne de retenir l'attention des géomètres par sa simplicité. Cette étude nous fera découvrir un ensemble de lois générales, relatives à l'application de deux surfaces, que j'ai développées dans deux autres Mémoires publiés au *Bulletin des Sciences mathématiques*

(1920 et 1921). Ces lois générales m'ont permis de reprendre les résultats si élégants de M. Thybaut et de montrer quelles circonstances singulières accompagnent la déformation du parabolôide; ces circonstances ou d'autres tout analogues se retrouvent d'ailleurs dans la déformation des quadriques à centre de révolution ou même des quadriques générales; j'y reviendrai dans une série d'autres études, où j'aurai constamment à citer le nom de Darboux et les noms des géomètres français ou italiens, MM. Kœnigs, Guichard et Bianchi.

La courbe la plus simple parmi celles dont la torsion est constante est la cubique de M. Lyon; nous en déduisons les surfaces les plus simples parmi celles qui sont applicables sur le parabolôide de révolution; ce sont des surfaces algébriques unicursales.

La courbe (10b) est alors définie par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} u = t + K, & v = t - K, \\ c = \frac{1 + K^2 - t^2}{2K}, & c' = i \frac{1 - K^2 + t^2}{2K}, \quad c'' = \frac{t}{K}, \end{cases}$$

les notations étant celles du Mémoire précédent;  $t$  est le paramètre variable,  $K$  est une constante réelle; la courbe (10b<sub>1</sub>) s'obtient en remplaçant partout  $t$  par  $t_1$ . En posant  $t = \lambda + \mu i$ , nous avons

$$(S) \quad \begin{cases} x = -\frac{2\tau}{3K^2} \lambda^3, \\ y = -\frac{\tau\mu\lambda^2}{K^2} - \frac{\tau\mu^3}{3K^2} - \tau\mu \frac{1+K^2}{K^2}, \\ z = \frac{-\tau(\lambda^2 + \mu^2)^2}{4K^2} + \frac{\tau}{2K^2} (\lambda^2 - \mu^2)(1+K^2) + \frac{\tau}{4K^2} (1-K^2); \end{cases}$$

$$(S') \quad \begin{cases} x = \frac{\tau\lambda^3}{3K^2} + \frac{\tau\lambda\mu^2}{K^2} + \frac{\tau\lambda(1-K^2)}{K^2}, \\ y = \frac{2\tau\mu^3}{3K^2}, \\ z = \frac{\tau}{4K^2} (\lambda^2 + \mu^2)^2 + \frac{\tau}{2K^2} (\lambda^2 - \mu^2)(1-K^2) - \frac{\tau}{4K^2} (1-K^2); \end{cases}$$

$$(S'') \quad \begin{cases} x = \frac{-\tau}{6K^2} [\lambda^3 - 3\lambda\mu^2 + 3(K^2-1)\lambda], \\ y = \frac{-\tau}{6K^2} [3\lambda^2\mu - \mu^3 + 3(K^2+1)\mu], \\ z = \frac{\tau}{2K^2} (\lambda^2 - \mu^2). \end{cases}$$

On peut remarquer que (S), (S'), (Σ) ne dépendent de K que par l'intermédiaire de K<sup>2</sup>; en effet, changer K en -K revient à échanger (v<sub>b</sub>) avec (v<sub>b</sub>') et (v<sub>b1</sub>) avec (v<sub>b1</sub>'). D'autre part, si l'on fait les échanges

$$(2) \quad \begin{cases} x & y & z & \lambda & \mu & K \\ y & x & z & \mu & \lambda & iK \end{cases}$$

les équations de (S) et (S') s'échangent, (Σ) reste invariante. C'est facile à expliquer; si l'on change K en iK, (v<sub>b</sub>) et (v<sub>b1</sub>) sont transformées en deux courbes ( $\overline{v_b}$ ) et ( $\overline{v_{b1}}$ ), qui ne sont plus imaginaires conjuguées, car il aurait fallu, pour cela, changer K en iK dans (v<sub>b</sub>) seulement, et K en -iK dans (v<sub>b1</sub>); donc les surfaces S et S' devraient cesser d'être réelles; mais nous avons vu que le changement de K en -K remplace la courbe (v<sub>b</sub>) par (v<sub>b</sub>'); ici, quand on remplace K simultanément par iK dans (v<sub>b</sub>) et (v<sub>b1</sub>), on obtiendra donc ( $\overline{v_b}$ ) et la symétrique par rapport à l'origine de la conjuguée de ( $\overline{v_b}$ ). Grâce à cette circonstance, S restera réelle, mais deviendra en réalité une surface S' et, inversement, S' une surface S, suivant la remarque faite au Mémoire précédent (n° 3, Chap. I). Cette remarque est précieuse, parce que nous pourrons poser K<sup>2</sup> = k et conserver seulement les équations de (S) pour étudier du même coup les propriétés des surfaces S (k > 0) et des surfaces S' (k < 0).

Il n'y a pas lieu de réduire l'intervalle (-∞, +∞) trouvé pour k. En effet, quand deux surfaces S sont égales, les courbes (v<sub>b</sub>) correspondantes sont susceptibles, après un déplacement réel convenablement choisi, ou de se superposer, ou d'être disposées symétriquement par rapport à l'origine; or ici la courbe (v<sub>b</sub>) est l'intersection de la sphère avec le cylindre parabolique réel (v)

$$K^2 z^2 + 2Kx - 1 - K^2 = 0 \quad \text{ou} \quad K^2(x^2 + z^2 - 1) - (Kx - 1)^2 = 0,$$

bitangent à la sphère aux deux points du plan xOz, où la droite  $x = \frac{1}{K}$  de ce plan coupe le cercle  $x^2 + z^2 = 1$ . Il est clair que la forme de cette parabole (nous nous bornons aux valeurs de K réelles et même positives) change si K varie; le résultat est donc

obtenu. Nous voyons que  $(\mathfrak{V})$  a deux points réels

$$\left(\frac{1}{K}, 0, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}\right)$$

si  $K$  surpasse l'unité, et dans ce cas seulement.

2. Au Chapitre II du Mémoire précédent (nos 9, 10, 11), nous avons vu que :

1°  $xOz$  est plan de symétrie de première espèce pour  $S$  et seconde pour  $S'$ , coupe  $S$  suivant une géodésique et touche  $S'$  suivant une ligne de rebroussement ( $\mu = 0$ ); pour  $S$ , le plan  $zOx$  donne en outre une ligne double imaginaire.

2°  $yOz$  est plan de symétrie de seconde espèce pour  $S$  et première pour  $S'$ , touche  $S$  suivant une ligne de rebroussement et coupe  $S'$  suivant une géodésique ( $\lambda = 0$ ). Sur  $S'$ , on obtient en outre dans  $yOz$  une ligne double, réelle si  $K > 1$ ; cette ligne double est unicursale et du degré 4; la géodésique est aussi unicursale et du degré 4; la ligne de rebroussement de  $S$  est aussi unicursale et du degré 4.

3°  $Oz$  est axe de symétrie de seconde espèce pour  $S$  et  $S'$ .

Pour les points à l'infini, la courbe  $(\mathfrak{V})$  n'a qu'un point à l'infini dans la direction  $x - iy = 0, z = 0$  correspondant à un cycle de degré et classe égaux à 1 et d'indice 4. D'après le Chapitre II du Mémoire précédent, nous obtenons sur  $\Sigma$  comme points à l'infini uniquement la droite à l'infini du plan  $z = 0$  et sur  $S$  et  $S'$  les droites à l'infini des deux plans  $x - iy = 0, x + iy = 0$ . En tous les points à l'infini de  $S, S', \Sigma$ , le plan tangent est le plan de l'infini. Toutes ces propriétés sont faciles à vérifier.

$S$  et  $S'$  sont du degré 12; il suffit de couper par une droite arbitraire dont les équations ont été mises sous la forme

$$ux + vy + wz + s = 0, \quad u'x + v'y + s' = 0.$$

La surface  $\Sigma$  est du degré 9.

Pour continuer l'étude, il est assez avantageux d'effectuer une homothétie sur l'ensemble de ces trois surfaces où, ce qui revient

au même, de prendre  $\tau = 6K^2$ , de sorte que nous aurons

$$\begin{aligned}
 (\text{S}) \quad (3) \quad & \left\{ \begin{aligned} x &= -4\lambda^3, \\ y &= -6\mu\lambda^2 - 2\mu^3 - 6\mu(1 + K^2), \\ z &= -\frac{3}{2}(\lambda^2 + \mu^2)^2 + 3(1 + K^2)(\lambda^2 - \mu^2) + \frac{3}{2}(1 - K^6); \end{aligned} \right. \\
 (\text{S}') \quad (4) \quad & \left\{ \begin{aligned} x &= 2\lambda^3 + 6\lambda\mu^2 + 6\lambda(1 - K^2), \\ y &= 4\mu^3, \\ z &= \frac{3}{2}(\lambda^2 + \mu^2)^2 + 3(1 - K^2)(\lambda^2 - \mu^2) - \frac{3}{2}(1 - K^6); \end{aligned} \right. \\
 (\Sigma) \quad (5) \quad & \left\{ \begin{aligned} x &= 3(1 - K^2)\lambda + 3\lambda\mu^2 - \lambda^3, \\ y &= -3(1 + K^2)\mu - 3\lambda^2\mu + \mu^3, \\ z &= 3(\lambda^2 - \mu^2); \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

de la sorte, au lieu d'avoir comme précédemment une *infinité* de surfaces applicables sur un paraboloidé *unique*  $x^2 + y^2 = 2pz$ , nous avons un couple unique de surfaces applicables sur un paraboloidé *variable*  $x^2 + y^2 = 24K^2z$ . Les coefficients  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  du plan tangent étant les mineurs du Tableau

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix},$$

on a, pour la surface S,

$$(\text{S}) \quad (6) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= 36\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)(\mu^2 - \lambda^2 + 1 + K^2), \\ \eta &= 36\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)(-2\lambda\mu), \\ \zeta &= 36\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)(2\lambda\mu). \end{aligned} \right.$$

On aperçoit sans peine certaines lignes singulières de S : les deux droites à l'infini des plans  $x + iy = 0$  ou  $x - iy = 0$ , qui sont chacune ligne triple; la quartique de rebroussement  $\lambda = 0$ ; la quartique double  $\mu = 0$ ; la courbe gauche imaginaire, unicursale et d'ordre 6, qui a pour image le cercle  $\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2 = 0$ . Cette dernière ligne est une arête de rebroussement de la surface et une asymptotique singulière. Des coordonnées tangentielles

$$(\text{S}) \quad (7) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \mu^2 - \lambda^2 + 1 + K^2, \\ v &= -2\lambda\mu, \\ w &= 2\lambda, \\ s &= -\lambda[(\lambda^2 + \mu^2)^2 + (2\lambda^2 + 6\mu^2)(1 + K^2) + 3(1 - K^6)], \end{aligned} \right.$$

on déduit que la surface  $S$  est de classe 8, car on peut mettre les équations tangentielles d'une droite sous la forme

$$A u + B v + C w + D s = 0, \quad A' u + B' v + C' w = 0.$$

On aura, pour déterminer les coordonnées  $\lambda, \mu$  du plan tangent mené par la droite, une équation de degré 5 jointe à une autre de degré 2 et l'on doit éliminer les deux solutions fixes parasites

$$\lambda = 0, \quad \mu = \pm i \sqrt{1 + K^2}.$$

Les courbes de contact des cylindres circonscrits parallèlement à une direction quelconque sont des courbes gauches unicursales de degré 8; si la direction est parallèle à  $\gamma O z$ , la courbe de contact se décompose en la quartique de rebroussement située dans  $\gamma O z$  et une quartique gauche obtenue en laissant  $\mu$  constant.

Les courbes  $\lambda = \text{const.}$  sont des quartiques planes dont le plan est parallèle à  $\gamma O z$ ; on remarque d'ailleurs que tout plan parallèle à  $\gamma O z$  coupe la surface suivant trois quartiques de cette espèce, dont une est réelle si le plan est réel, les deux autres étant imaginaires conjuguées l'une de l'autre. Quand le plan sécant est  $\gamma O z$  lui-même, les trois quartiques sont confondues en une seule, qui est la quartique de rebroussement déjà citée.

D'après leur définition géométrique, les courbes  $\lambda$  et  $\mu$  sont conjuguées en vertu de la proposition bien connue de M. Kœnigs; elles sont conjuguées aussi bien sur  $S$  que sur  $S'$ : c'est donc le réseau conjugué commun aux deux surfaces  $S$  et  $S'$  du cas présent; dans l'application de  $S$  sur  $\mathcal{Q}$ , ce réseau se transforme sur  $\mathcal{Q}$  en un réseau conjugué; dans l'application de  $S'$  sur  $\mathcal{Q}$ , le réseau  $(\lambda, \mu)$  de  $S'$  se transforme sur  $\mathcal{Q}$  en un nouveau réseau conjugué, distinct du premier <sup>(1)</sup>. J'ai déjà attiré l'attention sur ces réseaux au Mémoire précédent (Chap. I, n° 8).

Les courbes asymptotiques de  $S$  ou  $S'$  ont pour équation  $t = \text{const.}$  ou  $t_1 = \text{const.}$ , c'est-à-dire  $\lambda \pm \mu i = \text{const.}$ ; donc la condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de courbes sur  $S$  et  $S'$  soient conjuguées est que les courbes images du plan  $(\lambda, \mu)$  soient orthogonales.

---

(1) Pour les surfaces  $S$  et  $S'$  déduites de la cubique de M. Lyon, ces résultats découlent des résultats généraux démontrés au Chapitre II de ce Mémoire, n° 4.

Pour la surface  $S'$ , on trouve aisément

$$(S') (8) \left\{ \begin{array}{l} u = -2\lambda\mu, \\ v = \lambda^2 - \mu^2 + 1 - K^2, \\ w = 2\mu, \\ s = \mu[(\lambda^2 + \mu^2)^2 + (6\lambda^2 + 2\mu^2)(1 - K^2) + 3(1 - K^4)]. \end{array} \right.$$

On aurait eu, pour les quantités  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  déjà définies,

$$(S') (9) \left\{ \begin{array}{l} \xi = 36\mu(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)(-2\lambda\mu), \\ \eta = 36\mu(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)(\lambda^2 - \mu^2 + 1 - K^2), \\ \zeta = 36\mu(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)2\mu. \end{array} \right.$$

Ici la courbe gauche unicursale de degré 6,  $\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2 = 0$  est réelle si  $K > 1$ . C'est aussi une arête de rebroussement de la surface  $S'$ , ligne asymptotique singulière. Si, sur cette ligne, on pose

$$\lambda = \sqrt{K^2 - 1} \cos \varphi, \quad \mu = \sqrt{K^2 - 1} \sin \varphi,$$

on trouve qu'elle a pour équations paramétriques

$$\begin{aligned} x &= -4(K^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \cos^3 \varphi, \\ y &= 4(K^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \sin^3 \varphi, \\ z &= -3(K^2 - 1)^2 \cos 2\varphi + 3K^2(K^2 - 1). \end{aligned}$$

Elle se projette horizontalement suivant une hypocycloïde à quatre rebroussements, et l'on voit aisément qu'elle est une hélice tracée sur le cylindre qui la projette horizontalement.

Si  $K > 1$ , la quadrique unicursale  $\lambda^2 + 3\mu^2 = 3(K^2 - 1)$ , section partielle de  $S'$  par  $yOz$  est réelle, c'est une ligne double. Elle coupe la courbe précédente aux points  $\lambda = 0$ ,  $\mu = \pm \sqrt{K^2 - 1}$ , qui sont les points singuliers de  $S'$ , déjà signalés au Chapitre précédent, obtenus par les points communs à  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{U}_1$ .

On obtient aisément les autres lignes singulières de  $S$  ou  $S'$ ; bornons-nous à  $S'$ . Considérons la section de  $S'$  par un plan  $y = y_0$ ; on obtient aussi trois quartiques planes unicursales d'équation  $\mu = \mu_0$ ,  $\mu = \mu_0 j$ ,  $\mu = \mu_0 j^2$ . Le quartique  $\mu = \mu_0$  admet deux points de rebroussement obtenus en considérant les racines du système

$$\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2 = 0 \quad \mu = \mu_0;$$



ces deux points engendrent la courbe gauche du sixième ordre, arête de rebroussement déjà considérée. La quartique  $\mu = \mu_0$  admet un point double obtenu en considérant les racines du système

$$\lambda^2 + 3\mu^2 + 3(1 - K^2) = 0, \quad \mu = \mu_0.$$

Ce point engendre la quartique plane ligne double de  $S'$  dans le plan  $\gamma O z$ .

Si maintenant nous considérons les deux quartiques différentes  $\mu = \mu_0, \mu = \mu_0'$ , leurs points d'intersection, nécessairement imaginaires, situés à distance finie, engendrent, quand  $\mu_0$  varie, le complément des lignes singulières de  $S'$ .

3. Nous avons vu que la cubique de M. Lyon dépend du seul paramètre  $K$ ; si donc on lui applique la transformation

$$U = Lu + M + Ni, \quad V = Lv + M + Ni$$

étudiée à la fin du Chapitre I du Mémoire précédent, on constate aisément que  $M$  et  $N$  ne jouent aucun rôle puisque l'équation de  $(\mathfrak{U})$  sur la sphère est  $u - v = 2K$ ; la courbe transformée  $(\overline{\mathfrak{U}})$  a pour équation  $U - V = 2LK$ , donc on obtient une surface de la famille étudiée ici,  $K$  étant remplacée par  $2LK$ . Si l'on fait varier  $M$  et  $N$ , on obtient purement et simplement une correspondance ponctuelle algébrique sur une surface déterminée  $S$  de cette famille; or les surfaces  $S$  étant unicursales, on savait déjà que chacune admet une infinité de transformations birationnelles en elle-même. Mais le résultat reprend de l'intérêt si l'on considère le couple de surfaces minima de M. Thybaut (voir plus bas, n° 5), qui sont ici des surfaces d'Enneper.

Les formules écrites au début de ce Chapitre (n° 1) supposent  $K \neq 0$ ; mais les formules (3), (4), (5) obtenues par une homothétie qui multiplie toutes les coordonnées initiales par  $\frac{12K^2}{p}$  subsistent quand on fait ensuite  $K = 0$ . On obtient alors pour  $\Sigma$  la surface minima d'Enneper et pour  $S$  et  $S'$  les deux développées de cette surface : les formules (5) coïncident alors avec les équations de Darboux (tome I, seconde édition de la *Théorie des surfaces*, p. 374), sauf que Darboux appelle  $(\alpha, \beta)$  ce que j'appelle ici

$(\lambda, -\mu)$ . Nous savons que les deux développées de la surface minima d'Enneper sont égales et coïncident après retournement autour de la droite  $x - y = 0, z = 0$ . Nous reviendrons sur ce procédé très général, que Darboux indique au Tome III, fournissant dans certain cas une surface minima et ses deux développées comme dégénérescences d'une surface  $\Sigma$  et des deux surfaces  $S, S'$  associées.

Ici nous trouvons un autre procédé géométrique élégant reliant la surface d'Enneper aux surfaces déduites de la cubique de M. Lyon (1). En amplifiant dans un rapport convenablement choisi les cotes de l'une des deux développées de la surface d'Enneper, dans la position indiquée, on obtient toutes les surfaces (du type  $S$  ou  $S'$ ) déduites de la cubique de M. Lyon, à une homothétie près.

Le procédé est même un peu plus général; pour simplifier un peu, bornons-nous à recopier les équations ( $S'$ ) (4) en y remplaçant  $-K^2$  par  $k$ , soit

$$(10) \quad \begin{cases} x = 2\lambda^3 + 6\lambda\mu^2 + 6\lambda(1+k), \\ y = 4\mu^3, \\ z = \frac{3}{2}(\lambda^2 + \mu^2)^2 + 3(1+k)(\lambda^2 - \mu^2). \end{cases}$$

On a même supprimé le terme constant de  $z$ , ce qui revient à un simple glissement le long de  $Oz$ ; renversons la surface ( $S$ ) (3) autour de  $x - y = 0, z = 0$ , remplaçons  $\lambda$  par  $-\mu$  et  $\mu$  par  $-\lambda$ , puis  $K^2$  par  $k$ ; supprimons le terme constant: nous obtenons encore les équations (10). Appelons  $S_k$  cette surface: elle est du type  $S$  si  $k > 0$ , du type  $S'$  si  $k < 0$ ;  $S_k$  est applicable sur le parabolôïde de paramètre  $12k$ . Enfin  $S_0$  est une développée de la surface d'Enneper. Cela posé, en multipliant toutes les cotes de  $S_k$  par un nombre arbitraire, on obtient, sauf homothétie, une autre surface  $S_{k'}$ .

En effet, si nous considérons le point  $x, y, z$  donné par les formules (10) pour des valeurs données de  $\lambda, \mu, k$  et le point  $x',$

(1) Je signalerai une autre application intéressante de la théorie de M. Thybaut rattachant à la cubique de Lyon la surface d'Enneper.

$y', z'$  donné par ces mêmes formules pour des valeurs différentes  $\lambda', \mu', k'$ , on vérifie aisément que l'on peut écrire

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{x'}{\rho^3}, & y = \frac{y'}{\rho^3}, & \rho z = \frac{z'}{\rho^3}, \\ \lambda = \frac{\lambda'}{\rho}, & \mu = \frac{\mu'}{\rho}, & \rho^2 = \frac{1+k'}{1+k}. \end{cases}$$

La surface, lieu du point  $(x, y, \rho z)$ , déduite de  $S_k$  est donc bien homothétique, dans le rapport  $\frac{1}{\rho^3}$ , de la surface  $S_k$ . La réalité de la transformation qui fait passer de  $S_k$  à  $S_{k'}$  exige que  $k$  et  $k'$  soient tous deux du même côté par rapport à  $-1$ . En particulier, s'il s'agit de deux surfaces  $S$  proprement dites ou d'une surface  $S$  et de la développée de la surface d'Enneper, la transformation est réelle.

L'une de ces surfaces joue un rôle exceptionnel, c'est la surface  $S_{-1}$ ; elle reste invariante dans une telle transformation; c'est la surface  $S'$  relative à la valeur  $K = 1$ , pour laquelle la parabole qui entre en jeu dans la définition de la cubique de M. Lyon devient surosculatrice à la section de la sphère par le plan  $y = 0$ .

4. Pour terminer l'étude de ces surfaces, nous devons donner les formules qui réalisent l'application de  $S$  ou  $S'$  sur  $\mathcal{Q}$ , autrement dit tracer sur  $S$  et  $S'$  le réseau des méridiens et des parallèles. On trouvera aisément, avec les notations du Chapitre I du Mémoire précédent et les formules (1) de ce Chapitre, en remplaçant  $t$  par  $\lambda + \mu i$  et  $t_1$  par  $\lambda - \mu i$ ,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{1 + K^4 + 2(\lambda^2 + \mu^2) - 2K^2(\lambda^2 - \mu^2) + (\lambda^2 + \mu^2)^2}{2K^2}, \\ \frac{H - 1}{2} &= \frac{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)^2 + 4K^2\mu^2}{4K^2}, \\ \frac{H + 1}{2} &= \frac{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)^2 - 4K^2\lambda^2}{4K^2}, \\ dv &= -\frac{2\tau}{K} d\mu + 2\tau K \frac{4\lambda\mu d\lambda - 2[\lambda^2 - \mu^2 + 1 - K^2] d\mu}{[\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2]^2 + 4K^2\mu^2}, \\ dv_1 &= \frac{2\tau}{K} d\lambda - 2\tau K \frac{2(1 + K^2 + \mu^2 - \lambda^2) d\lambda - 4\lambda\mu d\mu}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)^2 - 4K^2\lambda^2}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(13) \quad \begin{cases} \nu = \frac{-2\tau}{K} \mu + 2\tau \left[ \arctang \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 2K\mu + 1 - K^2}{\lambda^2 + \mu^2 + 2K\mu + 1 - K^2} - \frac{\pi}{4} \right], \\ \nu_1 = \frac{2\tau}{K} \lambda - \tau \log \frac{\lambda^2 + \mu^2 + 2K\lambda + 1 + K^2}{\lambda^2 + \mu^2 - 2K\lambda + 1 + K^2}. \end{cases}$$

L'application de S sur  $\mathcal{Q}$  se fait par les formules

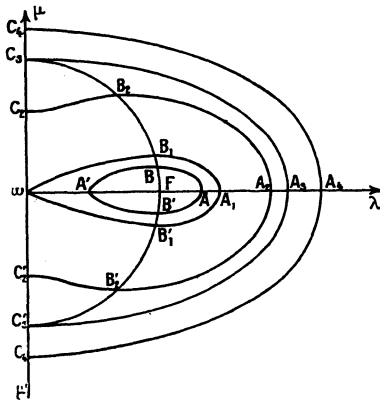
$$(14) \quad \begin{cases} \frac{r}{\rho} = \frac{\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)^2 + 4K^2\mu^2}}{2K}, \\ \theta = \arctang \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 2K\mu + 1 - K^2}{\lambda^2 + \mu^2 + 2K\mu + 1 - K^2} - \frac{\mu}{K} - \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Je n'écris pas les formules correspondantes relatives à  $S'$ , puisque l'application n'a plus de sens au point de vue physique. Étudions maintenant les diverses particularités qui se présentent dans l'application de S sur  $\mathcal{Q}$ . Il y aura à distinguer les trois cas

$$K > 1, \quad K = 1, \quad 1 > K > 0.$$

3. Soit d'abord  $K > 1$ . Pour  $\mu = 0$ ,  $\lambda = \pm \sqrt{K^2 - 1}$ ,  $r$  s'anule; ici  $r$  pourra varier de 0 jusqu'à  $+\infty$ . Je représente (fig. 1) dans le plan  $(\lambda, \mu)$  les courbes  $H = \text{const.}$ , c'est-à-dire celles que j'ai appelées « parallèles de S » : au lieu d'indiquer sur chacune

Fig. 1.



la valeur constante de  $H$ , il reviendra au même d'indiquer la valeur constante de  $r$ . D'ailleurs, tenant compte de la symétrie

de S par rapport à  $\gamma Oz$ , mise en évidence par le changement de signe de  $\lambda$ , je ne trace que la portion des images comprise à droite de  $\omega\mu$ , qui correspond à l'arête plane de rebroussement de S. Pour  $r = 0$ , l'image se réduit au point  $F(\sqrt{K^2 - 1}, 0)$  et au point  $F'$  symétrique; de  $r = 0$  à  $r = \frac{p(K^2 - 1)}{2K}$ , on a un ovale entourant F et l'ovale symétrique; pour  $r = \frac{p(K^2 - 1)}{2K}$ , les deux ovales se fondent en une courbe unique, ayant  $\omega$  pour point double, les tangentes en ce point ayant pour coefficient angulaire  $\pm \sqrt{\frac{K^2 - 1}{K^2 + 1}}$ .

Pour  $r > \frac{p(K^2 - 1)}{2K}$ , la courbe se compose d'une seule branche présentant quatre points d'inflexion réels tant que  $r$  reste inférieur à  $p\sqrt{K^2 - 1}$  et à concavité tournée constamment vers l'origine si  $r \geq p\sqrt{K^2 - 1}$ .

Pour toute valeur de  $r$ , une parallèle à  $\omega\mu$  ne donne jamais plus de deux points d'intersection réels.

Ces courbes sont du quatrième ordre; on les construit aisément soit en discutant l'équation comme équation bicarrée en  $\lambda$  ou  $\mu$ , soit encore, et ceci va nous servir, en exprimant  $\lambda$  et  $\mu$  au moyen d'un paramètre angulaire  $\varphi$  par les équations

$$(15) \quad \begin{cases} \mu = \frac{r}{p} \sin \varphi, \\ \lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2 = \frac{2Kr}{p} \cos \varphi. \end{cases}$$

Si l'on considère le cercle de centre  $\omega$  et rayon  $\omega F$ , il coupe le parallèle aux points correspondant à  $\cos \varphi = 0$ ,  $\sin \varphi = \pm 1$ , d'où  $\mu = \pm \frac{r}{p}$ , et ils ne sont réels que si  $r \leq p\sqrt{K^2 - 1}$ ; pour un tel point, sur le parallèle,  $\mu$  passe par un maximum, de sorte que la tangente est parallèle à  $\omega\lambda$ .

La seconde formule (14) peut s'écrire

$$(16) \quad \theta = -\frac{\mu}{K} - \arctang \frac{2K\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2} = -\frac{\mu}{K} - \varphi.$$

Je vais déterminer exactement la région de  $\mathcal{Q}$  sur laquelle s'applique la moitié conservée de  $S(\lambda > 0)$ ; je suppose la géodésique,  $\mu = 0$ , située dans le plan  $xOz$ , appliquée sur le méridien

$\theta = 0$  de  $\mathcal{F}$ ; cette géodésique partage la moitié conservée de  $S$  en deux régions symétriques par rapport à  $xOz$ , dont il suffira d'étudier l'une. Dans le demi-plan limité par  $\omega\mu\mu'$ , je considère le segment  $\omega F$  comme une coupure que je ne franchis pas, de façon à uniformiser la fonction  $\operatorname{arctang} \frac{2K\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2}$ . Le point  $F$  est venu au sommet de  $\mathcal{F}$ ; en ce moment, je désigne, sans inconvénient, un point de  $S$  ou son image par la même lettre; la portion de géodésique  $F\lambda$  recouvre le méridien indéfini  $\theta = 0$  (demi-parabole). Je considère l'un des parallèles correspondant à  $0 < r < p \frac{(K^2 - 1)}{2K}$ , représenté par l'ovale  $A'B'AB$ ; en  $A$ ,  $\varphi = 0$ ; l'angle  $\varphi$  suivi par continuité varie donc d'une façon continue de 0 à  $-\frac{\pi}{2}$ , puis  $-\pi$ , et toujours en décroissant, en allant de  $A$  en  $B'$ , puis  $A'$  (le faisceau de cercles passant par  $F$  et  $F'$  a pour équation  $\frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2} = \text{const.}$  et, par suite, donne d'une façon intuitive la variation de  $\varphi$  sur un parallèle); donc  $\theta$  est toujours positif et part de 0 pour aboutir à  $\pi$  quand on part de  $A$  pour aller en  $A'$  le long de  $AB'A'$ ;  $\theta$  varie toujours dans le même sens: car l'arc, sur le parallèle de  $S$ , est égal à  $r\theta$  et varie évidemment toujours dans le même sens, d'ailleurs

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = - \left( \frac{r}{pK} \cos\varphi + 1 \right)$$

sur ce parallèle; or l'expression  $1 + \frac{r}{pK} \cos\varphi$  est supérieure à  $1 - \frac{r}{pK}$  et, par suite, à  $1 - \frac{K^2 - 1}{2K^2}$  ou  $\frac{K^2 + 1}{2K^2}$ ;  $\frac{d\theta}{d\varphi}$  est donc toujours négative;  $\varphi$  décroissant de 0 à  $-\pi$ , nous retrouvons bien le résultat annoncé, à savoir que  $\theta$  varie constamment en croissant. Les résultats obtenus subsistent encore pour le parallèle limite  $r = \frac{p(K^2 - 1)}{2K}$ , de sorte que la portion de  $S$ , qui a pour image l'intérieur de cet ovale  $A, B, \omega B', A_1$ , recouvre exactement, et une fois seulement, la portion du parabolôïde comprise entre le sommet et le parallèle de rayon  $p \frac{(K^2 - 1)}{2K}$ . Cette région limitée de  $S$  est susceptible d'une déformation continue où elle ne cesse de se recouvrir elle-même sans déchirure.

Je renvoie le lecteur à une petite étude que j'ai publiée au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1920 et 1921 ; cet exemple précis illustre les conceptions théoriques que j'y ai exposées ; ce qui va suivre l'illustre peut-être encore plus.

Au delà de  $r = \frac{p(K^2 - 1)}{2K}$ , les parallèles rencontrent tous le bord  $\omega\mu\mu'$  de notre demi-plan, correspondant à la ligne de rebroussement et nous allons voir que cette ligne de rebroussement s'applique sur une certaine ligne de  $\mathcal{Q}$  qui donne la frontière de la région recouverte sur  $\mathcal{Q}$  par  $S$  dans l'application particulière adoptée. Je considère les parallèles du type  $A_2B_2C_2$

$$r < p\sqrt{K^2 - 1},$$

le parallèle intermédiaire  $A_3B_3C_3$

$$r = p\sqrt{K^2 - 1},$$

les parallèles du type  $A_nC_n$  : sur chacun d'eux, en allant du point  $A_n$  au point  $C_n$  ( $n = 2, 3, 4$ ),  $\varphi$  varie depuis zéro jusqu'à une limite inférieure à  $\pi$  [équations (15)]. Pour étudier  $\theta$ , j'ai encore  $\frac{d\theta}{d\varphi} = -\left(\frac{r}{pK} \cos\varphi + 1\right)$  ; l'expression  $1 + \frac{r}{pK} \cos\varphi$  reste supérieure à la valeur finale en  $C_n$  ; en ce point on a

$$\lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{r \cos\varphi}{p} = \frac{\mu^2 + 1 - K^2}{2K},$$

le minimum de  $1 + \frac{r}{pK} \cos\varphi$  sur le parallèle  $A_nC_n$  est donc  $\frac{\mu^2 + 1 + K^2}{2K^2}$ , on en conclut que de  $A_n$  à  $C_n$ ,  $\theta$  décroît constamment de zéro jusqu'à une valeur négative que j'appellerai  $-\Theta$  ; de  $A_n$  à  $C_n$ ,  $\theta$  varie au contraire en croissant constamment de zéro jusqu'à  $+\Theta$ .

Pour chaque valeur de  $r$ , il est intéressant de donner la valeur  $\Theta$  ; or  $r$  et  $\Theta$  s'expriment au moyen des coordonnées  $(0, M)$  du point  $C_n$  par les formules paramétriques, obtenues immédiatement par les formules (14),

$$(15) \quad \begin{cases} 2K \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}} = M^2 + 1 + K^2, \\ \theta = \frac{M}{K} + \text{arctang} \frac{2KM}{M^2 + 1 - K^2}. \end{cases}$$

Les équations (15) sont, sur  $\mathcal{Q}$ , les équations paramétriques de la courbe transformée de la quartique plane de rebroussement de S. Nous nous bornerons même à la moitié obtenue pour  $M > 0$ . On a aisément

$$\frac{d\theta}{dM} = \frac{(M^2 + 1 + K^2)(M^2 + 1 - K^2)}{K[(M^2 + 1 - K^2)^2 + 4K^2M^2]},$$

de sorte que de  $r = p \frac{(K^2 - 1)}{2K}$  à  $r = p\sqrt{K^2 - 1}$ ,  $\theta$  décroît de  $\pi$  à  $\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{K}$ , puis croît ensuite au delà de toutes les limites si  $r$  croît à partir de  $p\sqrt{K^2 - 1}$  jusqu'à  $+\infty$ . Si, au lieu de construire la courbe sur  $\mathcal{Q}$ , on construit la position horizontale de cette courbe,  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires d'un point de la projection et l'on a

$$\frac{r d\theta}{dr} = \frac{M^2 + 1 - K^2}{2KM},$$

ce qui prouve que la courbe part du parallèle initial  $r = \frac{p(K^2 - 1)}{2K}$  tangentiellement à ce parallèle; mais il est plus commode de se servir de la carte du parabolôide (voir Mémoire précédent, Chapitre I, n° 2). On a alors

$$(16) \quad \begin{cases} X = \theta = \frac{M}{K} + \arctang \frac{2KM}{M^2 + 1 - K^2}, \\ dY = \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}} \frac{dr}{r} = \frac{M dM}{K} \frac{(M^2 + 1 + K^2)^2}{(M^2 + 1 + K^2)^2 - 4K^2}. \end{cases}$$

Si l'on pose  $V = M^2 + 1 + K^2$ , on a

$$dY = \frac{V^2 dV}{2K(V^2 - 4K^2)} = \frac{dV}{2K} + \frac{2K dV}{V^2 - 4K^2}.$$

Les formules (16) se prêtent très bien, même sans effectuer l'intégration, à la construction de la courbe  $(X, Y)$ ; on a, d'ailleurs,

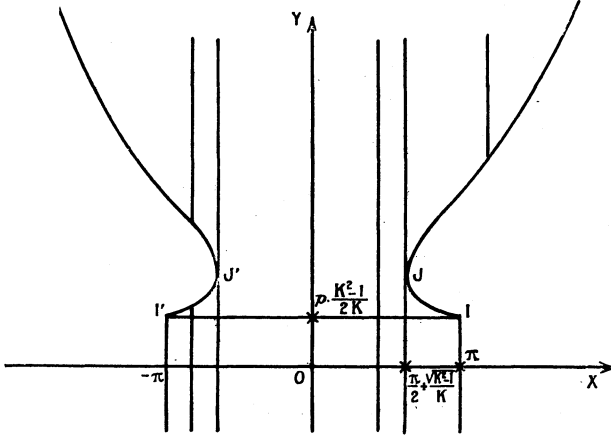
$$(17) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{M(M^2 + 1 + K^2)}{M^2 + 1 - K^2}.$$

Nous marquons sur la figure 2 les droites  $X = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  et  $-\pi, -2\pi, \dots$ . Sur l'axe des  $Y$ , inscrivons, non pas la valeur de  $Y$ , mais celle de  $r$ ; la courbe  $(X, Y)$  part tangentiellement à



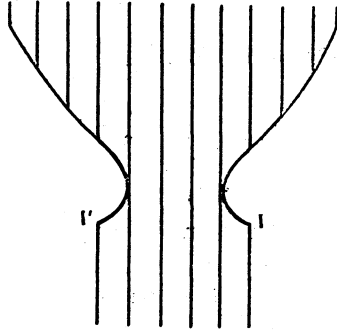
la droite parallèle à  $OX$  de numéro  $\frac{p(K^2-1)}{2K}$ , se rapproche d'abord de l'axe  $OY$ , jusqu'à la distance  $\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{K^2-1}}{K}$ , puis s'en éloigne

Fig. 2.



indéfiniment; pour  $M$  très grand,  $X$  est de l'ordre de  $M$ , donc  $Y$  est de l'ordre de  $M^2$ , donc la courbe a une forme parabolique, la tangente devenant parallèle à  $OY$ . Cette courbe, jointe à la courbe symétrique par rapport à  $Oy$ , puis aux deux parallèles à  $Oy$

Fig. 3.



menées vers le bas à partir des points initiaux, donne la représentation conforme de la région recouverte sur  $\mathcal{Q}$ : c'est la région couverte de hachures (fig. 3).

La figure 2 renseigne d'une façon parfaite sur la forme des géodésiques de S correspondant aux méridiens de  $\mathcal{Q}$ . De  $\theta = 0$  à  $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{K}$ , elles se composent d'un seul arc partant de F (j'entends du point de S correspondant à F de  $\omega\lambda\mu$ , ou au sommet de  $\mathcal{Q}$ ), de longueur illimitée s'éloignant à l'infini sur la surface S; de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  à  $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{K}$ , elles se composent de deux arcs séparés : un de longueur finie allant de F jusqu'à la ligne de rebroussement dans la région II, et un autre de longueur illimitée repartant d'un autre point de la ligne de rebroussement; à partir de  $\theta = \pi$ , la géodésique ne comprend plus qu'une branche ne passant plus en F.

Il est bon, pour terminer cette étude, de tracer dans le plan  $\omega\lambda\mu$  les images des méridiens de S. Elles correspondent à la relation  $\nu = \text{const.}$ ; les formules (12) donnent donc immédiatement leur équation différentielle, la formule (13) leur équation en termes finis

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{4K^2\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)}, \\ \theta_0 = -\frac{\mu}{K} - \arctang \frac{2K\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2}, \end{cases}$$

où  $\theta_0$  est une constante ( $\nu_0 = p\theta_0$ ). L'équation (18) donne l'orientation de la tangente à l'intégrale qui passe au point  $\lambda, \mu$ . L'intégrale qui passe en un point de la droite  $\omega\mu$ , autre que le point  $\lambda = 0, \mu = \pm\sqrt{K^2 - 1}$ , a une tangente horizontale; pour le point  $\lambda = 0, \mu = \pm\sqrt{K^2 - 1}$ , on posera  $L = \lambda^2, M = \mu^2$ ; de sorte que l'équation différentielle devient une équation de Riccati

$$4MK^2 \frac{dL}{dM} = (L + M + 1)^2 - K^4$$

régulière pour  $L_0 = 0, M_0 = K^2 - 1$ ; on en déduit aisément pour cette intégrale particulière

$$\lambda = \pm \frac{(\mu^2 + 1 - K^2)}{2\sqrt{K^2 - 1}} [1 + a(\mu^2 + 1 - K^2) + \dots],$$

on obtient deux arcs réguliers aboutissant au point  $\lambda = 0$ ,

$\mu = \pm \sqrt{K^2 - 1}$ , avec une tangente de coefficient angulaire  $\pm \frac{1}{\sqrt{K^2 - 1}}$ .

L'intégrale qui passe en un point du cercle  $\lambda^2 + \mu^2 = K^2 - 1$  a sa tangente verticale.

L'intégrale qui passe en un point de l'axe des  $\lambda$  autre que F ou F' se réduit à cet axe. Enfin une infinité d'intégrales passent par F ou F'; leur équation en termes finis est donnée par la seconde formule (18) qui peut s'écrire

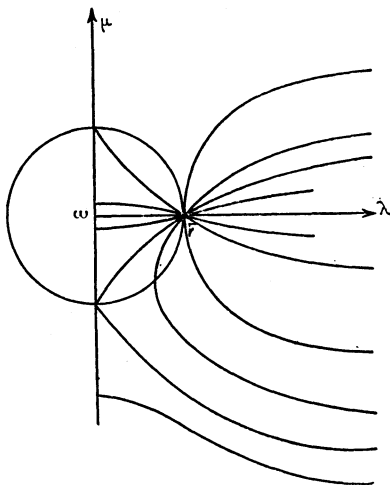
$$(19) \quad \lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2 + 2K\mu \cot\left(\theta_0 + \frac{\mu}{K}\right) = 0.$$

Cette équation, quand  $\theta_0$  est fixé et différent de 0 ou  $\pi$ , donne pour  $\lambda$  deux fonctions régulières de  $\mu$  au voisinage de  $\mu = 0$ ; si nous prenons celle qui tend vers  $\sqrt{K^2 - 1}$ , on a

$$\lambda = \sqrt{K^2 - 1} - \frac{\mu K \cot \theta_0}{\sqrt{K^2 - 1}} + \dots,$$

autrement dit le coefficient angulaire de la tangente en F est  $-\frac{\sqrt{K^2 - 1}}{K} \tan \theta_0$ . En rapprochant ces résultats de ceux qui résultent de la représentation conforme de  $\mathcal{Q}$  (ou S), on a la figure 4 :

Fig. 4.



$\theta_0 = 0$ , axe  $F\lambda$  de F vers les  $\lambda$  positifs.

$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , on a un arc de courbe partant de F au-dessous de F $\lambda$  et vers la droite, à concavité toujours tournée vers le haut et à asymptote horizontale.

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , même résultat, la courbe part de F tangentielllement au cercle de centre  $\omega$  et rayon  $\omega F$ .

$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{K^2-1}}{K}$ , la courbe pénètre d'abord à l'intérieur du cercle  $\omega F$ , en sort avec une tangente verticale, pour s'éloigner indéfiniment à l'infini vers le bas et la droite. La première équation (18) prouve que, sur cet arc, en dehors du cercle  $\omega F$ ,  $\frac{d\mu}{d\lambda}$  restera constamment négatif; donc,  $\lambda$  croissant,  $\mu$ , qui est négatif, croît en valeur absolue; l'équation (19) prouve que  $\theta_0 + \frac{\mu}{K}$ , égal à  $\frac{\pi}{2}$  au point du cercle  $\omega F$  dont part cet arc, décroît, mais reste constamment positif; d'autre part,  $\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2$  croît nécessairement au delà de toutes limites puisque  $\lambda$  croît par valeurs positives et que  $\mu$  croît en valeur absolue, donc  $\theta_0 + \frac{\mu}{K}$  tend vers zéro; autrement dit, l'arc de courbe est asymptote à la droite  $\mu = -K\theta_0$ ; en posant  $\mu = -K(\theta_0 - \epsilon)$ , l'équation (19) permet de calculer  $\lambda$  pour les petites valeurs positives de  $\epsilon$ .

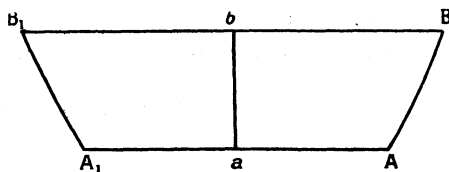
Pour  $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{K^2-1}}{K}$ , l'intégrale part de F, aboutit au point le plus bas du cercle  $\omega F$  avec une tangente de coefficient angulaire, calculé plus haut  $\frac{1}{\sqrt{K^2-1}}$ , se réfléchit en ce point sur  $\omega\mu$ ; l'arc réfléchi se comporte comme précédemment, il est asymptote à la droite  $\mu = -\left(\frac{K\pi}{2} + \sqrt{K^2-1}\right)$ .

Pour  $\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{K^2-1}}{K} < \theta_0 < \pi$ , on a les géodésiques composées de deux morceaux séparés; un morceau descend de F et aboutit en un point de  $\omega\mu$  intérieur au cercle  $\omega F$ , arrive sur  $\omega\mu$  normalement, la concavité étant tournée vers le haut; l'autre part d'un point de  $\omega\mu$  extérieur au cercle  $\omega F$ , normalement à  $\omega\mu$  et s'éloigne indéfiniment asymptotiquement à la droite  $\mu = -K\theta_0$  comme précédemment. Pour  $\pi < \theta_0$ , on ne trouve que cette dernière branche.

On peut remarquer que les images des géodésiques correspondant à deux valeurs égales et de signe contraire de  $\theta$  sont symétriques par rapport à  $\omega\lambda$ ; pour  $0 < \theta < \pi$ , les tangentes en  $F$  à l'image de la géodésique  $\pi - \theta$  et à l'image de la géodésique  $-\theta$  sont dans le prolongement l'une de l'autre, ce qui est assez naturel, les deux géodésiques en question étant les transformées de deux moitiés d'une même parabole de  $\mathcal{Q}$ .

6. On peut remarquer que, sur chaque parallèle de  $S$ , on peut franchir, dans le plan  $\omega\lambda\mu$ , l'axe des  $\mu$ ; mais alors l'angle  $\varphi$  suivi par continuité [formules (15)] repasse en sens inverse par les mêmes valeurs, donc  $\theta$  aussi [formule (16)]; donc les portions de  $S$  ainsi rencontrées, dans la moitié négligée jusqu'ici, reviennent en sens inverse sur les morceaux de  $\mathcal{Q}$  déjà recouverts. J'ai expliqué cette circonstance dans le Mémoire déjà cité du *Bulletin des Sciences mathématiques*. On peut supposer  $\mathcal{Q}$  découpé en rondelles que je représente schématiquement par le dessin  $ABA_1B_1$  obtenu par la représentation conforme déjà employée (fig. 5);

Fig. 5.

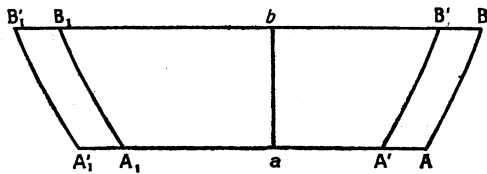


$AA_1$  et  $BB_1$  sont les parallèles,  $AB$ ,  $A_1B_1$  les frontières correspondant à la ligne de rebroussement de  $S$  et  $ab$  est la méridienne de symétrie de cette rondelle; chaque rondelle, si l'on se sert de la moitié de  $S$ , correspondant à  $\lambda > 0$ , n'est recouverte qu'une fois; mais si l'on utilise les deux moitiés de  $S$ , on pourra considérer cette rondelle comme recouverte deux fois, telle une lame dans sa gaine. Remarquons que si les rayons des parallèles  $AA_1$  et  $BB_1$  sont suffisamment grands, cette rondelle fait plusieurs tours sur le paraboloidé; on doit considérer comme distincts deux points du paraboloidé ayant même situation dans l'espace, mais correspondant à des tours différents; ils proviennent de deux points distincts de  $S$ .

D'autre part,  $S$  admet une double série d'applications sur elle-même, provenant de ce que  $\mathcal{Q}$  est surface de révolution. Indiquons ce qui se passe pour la région  $ABA_1B_1$  de  $S$  déjà considérée, correspondant à  $\lambda > 0$ . Elle admet une série d'applications sur elle-même, les unes du type rotation, les autres du type symétrie. La rotation, sur la représentation conforme, est figurée par une translation : supposons cette zone réalisée matériellement dans l'espace par deux canevas de fil infiniment minces : le mouvement, qui se traduit par le glissement de  $ABA_1B_1$  en  $A'B'A_1'B_1$  sur la carte, met à nu la portion  $ABA'B'$  du premier canevas, tandis que la portion  $A_1B_1A_1'B_1$  du second pend inutilisée, dans le vide, au delà de l'arête de rebroussement  $A_1B_1$  : on peut découper  $A_1B_1A_1'B_1$  et en recouvrir  $ABA'B'$ , mais alors cette dernière opération est du type symétrie et non plus rotation (*fig. 6*).

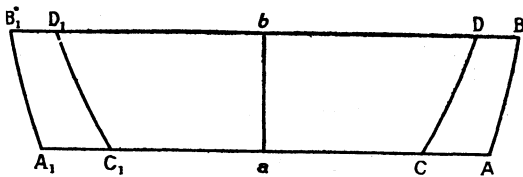
Si nous considérons deux valeurs de  $K$  différentes, cet emploi de la carte et la décomposition des surfaces en rondelles fait

Fig. 6.



sauter aux yeux les diverses applications des deux surfaces  $S$  l'une sur l'autre : on pourra d'abord associer deux rondelles en superposant leurs géodésiques planes ( $\mu = 0$ ), d'où le dessin  $ABA_1B_1$ ,

Fig. 7.

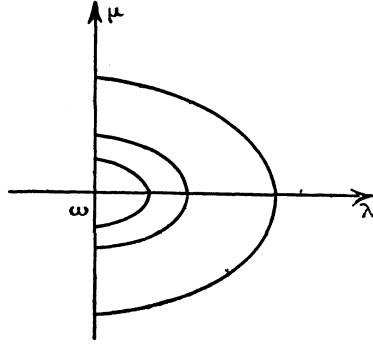


$CDC, D_1$  sur la carte, puis faire glisser  $CDC, D_1$  d'un mouvement de translation (*fig. 7*). De toutes façons il y aura toujours une

portion de l'une ou l'autre surface, ou des deux qui ne sera pas recouverte; le rôle des arêtes de rebroussement est évident.

7. Il est facile de voir ce qui se passe si  $K$  devient égal à 1. Sur le plan  $\lambda, \mu$ , les parallèles de  $S$  ont pour image (fig. 8) des

Fig. 8



ovales convexes l'entourant l'origine; tous rencontrent l'axe  $\omega\mu$ , de sorte qu'il n'y a plus de calotte sur  $\mathcal{P}$  correspondant à un morceau de  $S$  exactement; ou plutôt elle est réduite au sommet. La courbe frontière part du sommet de  $\mathcal{P}$ . On écrit ici des formules analogues aux précédentes

$$(20) \quad \mu = \frac{r}{p} \sin \varphi, \quad \lambda^2 + \mu^2 = \frac{2r}{p} \cos \varphi$$

pour construire les parallèles de  $S$ , puis

$$(21) \quad \theta = -\mu - \arctan \frac{2\mu}{\lambda^2 + \mu^2} = -\mu - \varphi$$

pour construire les méridiens de  $S$ .

La courbe, frontière sur  $\mathcal{P}$ , transformée de l'arête de rebroussement de  $S$ , s'obtient par les équations

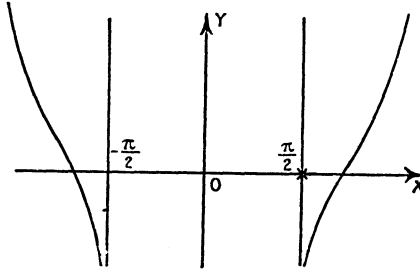
$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}} = \frac{M^2}{2} + 1, \\ \theta = M + \arctan \frac{2}{M}, \end{array} \right.$$

et la carte (*fig. 9*) donne la courbe

$$(23) \quad \begin{cases} X = M + \text{arc tang} \frac{2}{M}, \\ dY = \frac{(M^2 + 2)^2 dM}{M^3 + 4M} = \frac{M^2 + 2}{M} dX. \end{cases}$$

Cette courbe est asymptote à la droite  $X = \frac{\pi}{2}$  vers le bas et a une branche parabolique parallèle à OY.

Fig. 9.



Toutes les géodésiques méridiennes de S sont indéfinies, pour  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$ ; elles passent effectivement par le point correspondant au sommet de  $\mathcal{Q}(\lambda = \mu = 0)$ . Pour  $|\theta| > \frac{\pi}{2}$ , elles n'y passent plus et partent d'un point de la quartique de rebroussement de S.

L'équation des images de ces méridiens sur le plan  $\lambda, \mu$  est

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2)(\lambda^2 + \mu^2 + 2)}, \\ \theta_0 = -\mu - \text{arc tang} \frac{2\mu}{\lambda^2 + \mu^2}. \end{cases}$$

La dernière équation peut s'écrire

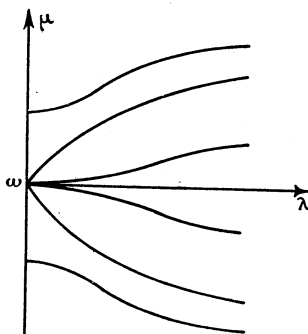
$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\mu \cot(\theta_0 + \mu) = 0.$$

On voit que pour  $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < +\frac{\pi}{2}$ , l'image part de  $\omega$  tangentielle-ment à  $\omega\lambda$ ; pour  $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ , on a une courbe partant de  $\omega$  tangen- tiellement à  $\lambda = \pm \mu$ ; pour  $|\theta_0| > \frac{\pi}{2}$ , la courbe part d'un point



de  $\omega\mu$  avec une tangente horizontale. Toutes ces courbes ont une asymptote horizontale (fig. 10).

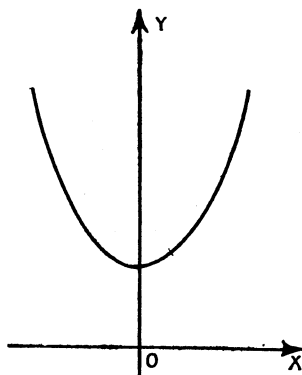
Fig. 10.



7. Soit maintenant  $0 < K < 1$ . L'équation (14) montre que  $r$  a un minimum égal à  $\frac{p(1-K^2)}{2K}$ ; la région du parabolôïde située en dessous de ce parallèle n'a donc pas d'homologue sur  $S$ ; si  $K$  devient très petit, cette région devient de plus en plus étendue; d'ailleurs si  $K$  tend vers zéro,  $S$  s'éloigne tout entière à l'infini.

L'image des parallèles de  $S$  sur le plan  $\lambda, \mu$  est toujours un

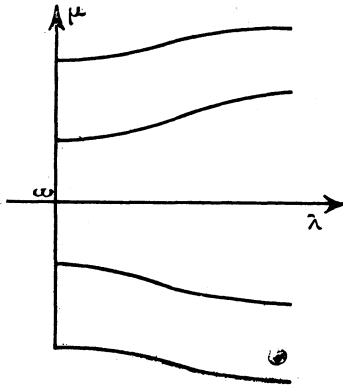
Fig. 11.



ovale convexe comme dans la figure 8. La figure 11 donne la forme, sur la carte, de la courbe frontière sur  $\mathcal{Q}$ . Les géodésiques

de  $S$  partent toutes normalement de  $\omega\mu$  dans la représentation sur le plan  $\lambda, \mu$ . La figure 12 donne leur forme.

Fig. 12.



8. Enfin il me reste à donner quelques mots d'explication sur le procédé qui permet, dans certains cas, de déduire une surface minima et ses deux développées de la surface  $\Sigma$  et des deux surfaces  $S$  et  $S'$  associées à  $\Sigma$ . Ce procédé réussit chaque fois que les coordonnées d'un point *quelconque* de (15) augmentent indéfiniment quand les paramètres de *forme* dont dépend cette courbe tendent vers certaines valeurs numériques et que les produits de  $c, c', c''$  par une certaine quantité numérique  $h$ , tendant vers zéro dans les mêmes conditions, restent finis. Par exemple pour l'indicatrice sphérique de M. Lyon [formules (1) de ce Chapitre];  $c, c', c''$  augmentent indéfiniment si  $K$  tend vers zéro, et les produits  $Kc, Kc', Kc''$  restent finis. Parmi les courbes algébriques à torsion constante que j'ai étudiées d'autre part, quelques-unes ne dépendent d'aucun paramètre et ne donnent rien ici; les autres contiennent soit rationnellement, soit algébriquement, des paramètres arbitraires et par suite les valeurs numériques de ces paramètres qui sont singularités polaires des coefficients assurent le succès du procédé. Si  $S$  et  $S'$  sont algébriques, la surface minima obtenue est algébrique.

L'hypothèse est donc que nous avons une courbe (15) qui s'éloigne *tout entière* à l'infini sur la sphère : ceci entraîne qu'à

partir d'une certaine époque de la déformation, la courbe (15) soit imaginaire [accidentellement réelle (G)]. Sur la courbe (15) exprimons  $c, c', c''$  au moyen d'un paramètre  $t$ ; les fonctions  $c(t), c'(t), c''(t)$  sont supposées contenir un paramètre arbitraire  $h$  tendant vers zéro et tel que les produits  $hc(t, h), hc'(t, h), hc''(t, h)$  tendent vers des fonctions bien déterminées de  $t, \gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t)$  pour  $h$  voisin de zéro. Le cône C dépend de  $h$  et pour  $h = 0$  il se réduit au cône isotrope.

Pour simplifier, reprenons les formules (5) du Chapitre I et remplaçons  $\tau$  par 2 de façon à avoir le paraboloidé  $\mathcal{Q} x^2 + y^2 = 8z$ . Les surfaces S, S',  $\Sigma$  s'éloignent tout entières à l'infini : en effet les produits  $h^2x, h^2y, h^2z$  restent finis. La surface limite de la surface lieu de point  $h^2x, h^2y, h^2z$  est représentée par les équations

$$(25) \quad \begin{cases} X = i \int \gamma'' d\gamma' - \gamma' d\gamma'' - i \int \gamma_1'' d\gamma_1' - \gamma_1' d\gamma_1'' + \varepsilon i (\gamma' \gamma_1'' - \gamma'' \gamma_1'), \\ Y = i \int \gamma d\gamma'' - \gamma'' d\gamma - i \int \gamma_1 d\gamma_1'' - \gamma_1'' d\gamma_1 + \varepsilon i (\gamma'' \gamma_1 - \gamma \gamma_1'), \\ Z = i \int \gamma' d\gamma - \gamma d\gamma' - i \int \gamma_1' d\gamma_1 - \gamma_1 d\gamma_1' + \varepsilon i (\gamma \gamma_1' - \gamma' \gamma_1), \end{cases}$$

où

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2 = 0.$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , on a une surface minima; pour  $\varepsilon = +1$  et  $-1$ , on a deux développées.

Un point de la surface S( $x, y, z$  et  $\varepsilon = +1$ ) correspond dans l'application sur  $\mathcal{Q}$  à un point du parallèle  $r$  où  $r$  se calcule par la formule (14) du même Chapitre,

$$r^2 = 2[cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1 - 1].$$

Ce rayon augmente indéfiniment si  $h$  tend vers zéro, donc S s'éloignant à l'infini, la région de  $\mathcal{Q}$  qu'elle est susceptible de recouvrir disparaît aussi tout entière à l'infini. On doit remarquer que le rayon  $r$  du parallèle est de l'ordre de  $\frac{1}{h}$ , la longueur de ce parallèle sur un tour unique,  $2\pi r$ , est du même ordre; mais la longueur de la courbe de S que j'appelle « parallèle » est de l'ordre de  $\frac{1}{h^2}$ , donc le nombre de tours que le parallèle de S devra

faire sur  $\mathcal{Q}$  pour recevoir le parallèle homologue de  $\mathcal{Q}$  est de l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{h}$ . Si nous passons à la surface homothétique, que je peux appeler  $h^2S$ , lieu du point  $(h^2x, h^2y, h^2z)$ , elle recouvre le parabolôide  $h^2\mathcal{Q}$ ,  $x^2 + y^2 = 8h^2z$ ; le parabolôide  $h^2\mathcal{Q}$  se resserre de plus en plus autour de l'axe des  $z$ ; sur le parabolôide  $\mathcal{Q}$  la cote  $z$  du parallèle  $r$  est

$$z = \frac{r^2}{8} = \frac{1}{4}(cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1 - 1);$$

donc sur le parabolôide  $h^2\mathcal{Q}$  on trouve un parallèle de cote

$$\frac{h^2}{4}(cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1 - 1)$$

qui reste finie; la surface  $h^2S$  est à distance finie et a des proportions finies non nulles; du moment qu'elle recouvre une portion de ce parabolôide  $h^2\mathcal{Q}$  restant à distance finie, il n'est pas étonnant qu'elle doive s'enrouler sur lui un nombre de fois de plus en plus grand. A la limite, pour  $h = 0$ , il n'y a donc plus rien d'intéressant à déduire de ce qui précède pour l'étude du parabolôide proprement dit.

En tout cas, nous avons une application intéressante de notre théorie aux surfaces minima. On pourra remarquer que si l'on pose

$$(26) \quad \gamma = \frac{1-u^2}{2} \sqrt{\mathcal{F}(u)}, \quad \gamma' = i \frac{1+u^2}{2} \sqrt{\mathcal{F}(u)}, \quad \gamma'' = u \sqrt{\mathcal{F}(u)}$$

et de même

$$(27) \quad \gamma_1 = \frac{1-u_1^2}{2} \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)}, \quad \gamma'_1 = -i \frac{1+u_1^2}{2} \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)}, \quad \gamma''_1 = u_1 \sqrt{\mathcal{F}_1(u_1)},$$

les formules (25) se réduisent aux formules usuelles, depuis Weierstrass, dans la théorie des surfaces minima. Les formules (5) à (16) du Chapitre I, où l'on écrira

$$\begin{aligned} \gamma &= hc, & \gamma_1 &= hc_1, & X &= h^2x, & \eta &= h^2H, & U &= h^2u, \\ U' &= -h^2u', & V &= hv, & V_1 &= hv_1, \end{aligned}$$

montrent sans peine, en passant à la limite pour  $h = 0$ , que si

l'on pose

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \gamma\gamma_1 + \gamma'\gamma'_1 + \gamma''\gamma''_1, \\ dV = \frac{2}{\eta} \begin{vmatrix} \gamma & \gamma_1 & d\gamma_1 - d\gamma \\ \gamma' & \gamma'_1 & d\gamma'_1 - d\gamma' \\ \gamma'' & \gamma''_1 & d\gamma''_1 - d\gamma'' \end{vmatrix}, \\ dV_1 = \frac{2i}{\eta} \begin{vmatrix} \gamma & \gamma_1 & d\gamma_1 + d\gamma \\ \gamma' & \gamma'_1 & d\gamma'_1 + d\gamma' \\ \gamma'' & \gamma''_1 & d\gamma''_1 + d\gamma'' \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

l'élément linéaire de la surface obtenue en faisant  $\varepsilon = +1$  puis  $-1$  dans (25) est

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = +1, \quad ds^2 = d\eta^2 + \frac{1}{2} \eta dV^2, \\ \varepsilon = -1, \quad ds^2 = d\eta^2 + \frac{1}{2} \eta dV_1^2. \end{array} \right.$$

Ici, comme il est bien connu, les deux développées de la surface minima sont *applicables physiquement* <sup>(1)</sup> l'une sur l'autre. Si l'on considère deux surfaces minima distinctes et une développée de chacune d'elles, ces deux développées s'appliquent physiquement l'une sur l'autre tout au moins dans les régions où  $\eta$  a la même valeur numérique. Or

$$\eta = \frac{(1 + uu_1)^2}{2} \sqrt{\mathcal{F}(u) \mathcal{F}_1(u_1)},$$

de sorte que  $\eta$  est la valeur absolue des deux rayons de courbure

(1) Les explications qui précèdent, sur le passage à la limite pour  $h = 0$ , prouvent bien qu'on ne doit pas s'étonner de trouver un résultat différent pour les surfaces primitives  $S$  et  $S'$ , puis pour les deux développées d'une surface minima. Mais on peut même retrouver complètement l'analogie; on peut remarquer que l'élément linéaire  $ds^2 = d\eta^2 + \frac{1}{2} \eta dV^2$  si l'on pose  $\eta = -\eta'$  et  $V = iV'$  devient

$$d\eta'^2 + \frac{1}{2} \eta' dV'^2;$$

il a conservé la même forme, de sorte que toute développée de surface minima, en dehors des auto-applications physiques à un paramètre qu'elle possède, admet aussi les auto-applications ainsi définies faisant correspondre un point imaginaire à un point réel. J'avais déjà signalé cette propriété, aux *Comptes rendus* (17 mars 1919). Les deux développées trouvées ici comme dégénérescences de  $S$  et  $S'$  admettent donc toutes les propriétés de  $S$  et  $S'$ ; elles admettent en plus d'autres propriétés, spéciales à elles seules.

principaux de la surface minima au point  $(u, u_1)$ ;  $4\eta^2$  est le produit des rayons de courbure principaux de l'une et l'autre développée aux points  $(u, u_1)$ . Si nous prenons

$$\mathcal{F}(u) = u^2, \quad \mathcal{F}_1(u_1) = u_1^2,$$

nous obtenons une surface minima particulière, algébrique, soit  $M$ , telle que la développée de toute autre surface minima s'appliquera nécessairement tout entière sur l'une ou l'autre développée de  $M$ , car sur  $M$  la fonction positive  $\eta$  prend toutes les valeurs positives depuis zéro compris. (On peut remarquer en passant que pour cette surface  $M$ , comme pour la surface d'Enneper, les deux développées sont non seulement applicables, mais égales entre elles.)

Si nous prenons une surface minima, telle que la caténoïde engendrée par la chaînette

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

en tournant autour de sa base, le minimum de  $\eta$  est  $a$  et non zéro; si donc on essaie d'étaler la développée de  $M$  sur la développée de la caténoïde, celle-ci sera recouverte tout entière, mais les régions de la développée de  $M$  correspondant à  $0 < \eta < a$  ne trouvent pas où se loger.

Si nous prenons pour  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux séries de Fredholm arbitraires, et si nous calculons  $\gamma''$  par la formule

$$\gamma'' = i\sqrt{\gamma^2 + \gamma'^2},$$

nous obtenons une surface minima  $F$  continue admettant, ainsi que ses développées, un bord constituant ligne d'arrêt. Si  $a$  est pris supérieur au plus grand rayon de courbure de cette surface minima  $F$ , on voit que les développées de  $F$  ne pourront recouvrir aucune région des développées de la caténoïde correspondant à cette valeur  $a$ .

Pour les symétries étudiées au Mémoire précédent (Chap. II), les conditions qui y ont été formées restent suffisantes, mais elles ne sont pas nécessaires; cela tient à ce que la courbe

$$\int \gamma'' d\gamma' + \gamma' d\gamma'', \dots,$$

qui est minima, peut admettre un plan de symétrie ou un centre de symétrie contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une courbe à torsion constante. C'est ainsi que la surface d'Enneper déduite de la cubique de M. Lyon présente d'autres symétries que les surfaces  $S$ ,  $S'$ ,  $\Sigma$  associées.

Enfin je tiens à signaler cette propriété importante, c'est que toute surface  $\bar{S}$  provenant de la déformation d'une développée  $S$  de surface minima est elle-même développée d'une surface minima. En effet, la surface  $S$  est applicable sur une surface de révolution, à savoir la développée d'une caténoïde quelconque; donc la surface  $\bar{S}$  possède la même propriété;  $\bar{S}$  est donc l'une des focales de la congruence des normales d'une famille de surfaces parallèles  $W$  et la relation caractéristique existant entre les rayons de courbure principaux d'une de ces surfaces est la même que pour la développée de la caténoïde.

J'ai signalé au Chapitre I (n° 7), l'intérêt qu'il y a à trouver les surfaces pour lesquelles le problème de la déformation se réduit à des quadratures. Les développées de surfaces minima donnent donc une solution nouvelle de ce problème [formules (25)] et même une solution plus précise, puisque, grâce aux travaux de Weierstrass, nous savons obtenir *explicitement*, au moyen de deux fonctions arbitraires d'une variable, toutes les surfaces minima

## CHAPITRE II.

### ÉTUDE DES RÉSULTATS DE M. THYBAUT.

1. Dans les Mémoires déjà cités, M. Thybaut a obtenu des résultats tout à fait curieux, dont le géomètre italien Bianchi a cru devoir souligner l'importance (1).

Je vais montrer ici comment la lecture attentive du travail de M. Thybaut permet, par comparaison avec les résultats que j'ai signalés au début de mon Mémoire sur les courbes à torsion cons-

---

(1) BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, t. II, p. 334. — THYBAUT, *Annales de l'École Normale*, années 1897 et 1900.

tante, d'obtenir des formules intéressantes et des propriétés géométriques élégantes à propos du problème suivant :

« Trouver deux surfaces minima  $B$  et  $B_1$  qui se correspondent comme focales d'une congruence rectiligne, avec conservation des lignes asymptotiques et des lignes de longueur nulle. »

M. Thybaut a montré que ce problème est exactement équivalent à la recherche des surfaces applicables sur le paraboloidé ; d'autre part, adoptant les notations de M. Thybaut, la surface  $B$  étant définie par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = i \int \frac{A^2 - 1}{A'} da - i \int \frac{B^2 - 1}{B'} db, \\ y = \int \frac{A^2 + 1}{A'} da + \int \frac{B^2 + 1}{B'} db, \\ z = 2i \int \frac{A}{A'} da - 2i \int \frac{B}{B'} db, \end{cases}$$

et la surface  $B_1$  par les formules analogues où l'on conserve les paramètres  $a$  et  $b$ , mais où l'on remplace  $A$  par une autre fonction  $A_1$  de  $a$  et  $B$  par une autre fonction  $B_1$  de  $b$ , la correspondance ponctuelle entre les points  $B$  et  $B_1$  revient à prendre les points obtenus pour les mêmes valeurs de  $a$  et  $b$ ; les fonctions  $A$  et  $A_1$  de  $a$  sont liées par la relation

$$(2) \quad \frac{A' A_1'}{(A - A_1)^2} = \frac{2}{\rho}$$

et  $B$  et  $B_1$  par la relation semblable

$$(3) \quad \frac{B' B_1'}{(B - B_1)^2} = \frac{2}{\rho}.$$

Moyennant les conditions (2) et (3), un choix convenable des constantes introduites par les intégrations (1) amène les deux surfaces dans la position voulue.

Remarquons que la surface  $B$  étant connue, la surface  $B_1$  s'obtient par l'intégration des deux équations différentielles ordinaires (2) et (3) qui sont des équations de Riccati. Si l'on se borne aux surfaces réelles, les fonctions  $A$  et  $B$  sont imaginaires conjuguées; on prendra donc pour  $A_1$  une solution *quelconque* de (2) et  $B_1$  sera la fonction conjuguée de  $A_1$ .



Or si nous avons la curiosité de revenir aux notations de Weierstrass, soient  $u$  et  $u_1$  les variables conjuguées relatives à la surface  $B$  et  $\mathcal{F}(u)$ ,  $\mathcal{F}_1(u_1)$  les fonctions correspondantes : on trouve aisément

$$(4) \quad u \equiv -A, \quad 2i da^2 = \mathcal{F}(u) du^2.$$

Pour la surface  $B_1$  nous introduirons les éléments analogues  $v$ ,  $v_1$ ,  $\Phi(v)$  et  $\Phi_1(v_1)$  avec les relations

$$(5) \quad v \equiv -A_1, \quad 2i da^2 = \Phi(v) dv^2,$$

et l'équation (2) devient

$$(6) \quad \frac{du dv}{(u-v)^2} = \frac{2}{p} da^2 = \frac{1}{ip} \mathcal{F}(u) du^2 = \frac{1}{ip} \Phi(v) dv^2.$$

En remplaçant suivant l'habitude  $\mathcal{F}(u)$  par  $f'''(u)$  et  $\Phi(v)$  par  $\varphi'''(v)$ , on obtient les conditions

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{(u-v)^2} = \frac{1}{ip} f'''(u) du, \\ \frac{du}{(u-v)^2} = \frac{1}{ip} \varphi'''(v) dv, \end{array} \right.$$

qui ne sont autre chose que les formules indiquées dans mon *Mémoire de l'École Normale*, année 1919, page 269 : ces équations (7) permettent, étant donnée une première courbe minima *arbitraire*  $M$ , de trouver une seconde courbe minima  $\bar{M}$  associée à la première, de façon à déterminer la courbe la plus générale  $(\mathcal{A})$  à torsion constante.

Ce résultat n'est pas dû au hasard : si l'on songe d'une part aux formules qui déterminent la surface  $B$  de  $M$ . Thybaut quand  $M$  est connue, puis  $B_1$  quand  $M_1$  a été déterminée, et d'autre part aux formules qui donnent, la courbe  $(\mathcal{A})$  étant déterminée, les surfaces  $S$  et  $S'$  applicables sur le paraboléide, il n'est pas difficile d'arriver aux constructions géométriques suivantes que je peux maintenant exposer d'une façon synthétique, l'exposé précédent ayant attribué à chacun sa part dans la découverte et l'exposé suivant donnant la solution explicite du problème et faisant de plus la distinction si curieuse que l'on rencontre ici dans les éléments imaginaires et réels à cause des propriétés différentes des surfaces que j'ai appelées  $S$  ou  $S'$ .

2. Considérons sur la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  les deux courbes sphériques  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  que j'ai si souvent introduites, lieux respectivement des points  $(c, c', c'')$  et  $(c_1, c'_1, c''_1)$ . J'appelle toujours  $p$  et  $\tau$  deux constantes liées par la relation  $p = 2\tau$ ; soient  $\Theta$  et  $\Theta_1$  les arcs de  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$ . Je considère les quatre courbes minima :

$$(M) \quad x = i\tau c + \tau \int c'' dc' - c' dc'' \dots$$

$$(\overline{M}) \quad \bar{x} = -i\tau c + \tau \int c'' dc' - c' dc'' \dots$$

$$(M_1) \quad x_1 = -i\tau c_1 + \tau \int c''_1 dc'_1 - c'_1 dc''_1 \dots$$

$$(\overline{M}_1) \quad x_1 = i\tau c_1 + \tau \int c''_1 dc'_1 - c'_1 dc''_1 \dots$$

les formules étant à compléter par des permutations circulaires évidentes.

Les milieux  $\mu$  de  $MM_1$  et  $\bar{\mu}$  de  $\overline{MM}_1$  décrivent,  $\Theta$  et  $\Theta_1$  variant indépendamment, deux surfaces minima que j'appellerai  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  dont l'ensemble forme le couple le plus général répondant au problème exposé au paragraphe précédent. La démonstration est très simple : il suffit de considérer la courbe  $(a, a', a'')$  supplémentaire de la courbe  $(c, c', c'')$  sur la sphère; soient  $(b, b', b'')$  les cosinus directeurs de la tangente à la courbe  $(a, a', a'')$  ou à la courbe  $(c, c', c'')$ ; si  $\varpi$  désigne l'arc de  $(a, a', a'')$  on aura

$$(8) \quad \begin{cases} dc = b d\varpi, & da = b d\tau, & db = -a d\tau - c d\varpi, \\ d\bar{x} = \tau[a + ib] d\varpi, & d\bar{x} = \tau[a - ib] d\varpi, \\ dx_1 = \tau[a_1 - ib_1] d\varpi_1, & d\bar{x}_1 = \tau[a_1 + ib_1] d\varpi_1, \end{cases}$$

et l'on trouve aisément pour équation des asymptotiques de  $(MM_1)$  :

$$(9) \quad \begin{cases} D d\varpi^2 + D' d\varpi_1^2 = 0, \\ D = \begin{vmatrix} a + ib & a' + ib' & a'' + ib'' \\ a_1 - ib_1 & a'_1 - ib'_1 & a''_1 - ib''_1 \\ -ic & -ic' & -ic'' \end{vmatrix}, \\ D' = \begin{vmatrix} a + ib & a' + ib' & a'' + ib'' \\ a_1 - ib_1 & a'_1 - ib'_1 & a''_1 - ib''_1 \\ ic_1 & ic'_1 & ic''_1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

En développant  $D$  par rapport à la seconde ligne,  $D''$  par rapport à la première, on trouve

$$D = -S(a + ib)(a_1 - ib_1), \quad D'' = S(a + ib)(a_1 - ib_1).$$

Il résulte de là que l'équation trouvée  $d\Theta^2 - d\Theta_1^2 = 0$  n'est pas modifiée, si l'on remplace la courbe  $(c, c', c'')$  et la courbe  $(c_1, c'_1, c''_1)$  par les courbes respectivement symétriques  $(\mathfrak{b}')$  lieu de  $(-c, -c', -c'')$  et  $(\mathfrak{b}'_1)$  lieu de  $(-c'_1, -c''_1, c_1)$  et que les deux surfaces  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$ , qui s'échangent dans cette opération, ont leurs asymptotiques correspondantes; la détermination de ces asymptotiques exige en plus des six quadratures déjà introduites le calcul de l'arc  $(\mathfrak{b})$  et le calcul de l'arc de  $(\mathfrak{b}_1)$ . Les lignes de longueur nulle sur  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  se correspondent évidemment, donc les réseaux conjugués ainsi que les réseaux orthogonaux se conservent; les lignes de courbure se correspondent donc. Sur les surfaces adjointes de ces deux surfaces minima, on obtient aussi conservation des lignes de longueur nulle, des asymptotiques et des lignes de courbure. Pour vérifier que la droite  $\mu\bar{\mu}$  est tangente en  $\mu$  à la surface  $(MM_1)$ , il suffit de remarquer que les paramètres directeurs de cette droite sont  $c - c_1, c' - c'_1, c'' - c''_1$ ; la vérification revient à écrire

$$(10) \quad |a + ib \quad a_1 - ib_1 \quad c - c_1| = 0,$$

ce qui revient à  $D + D'' = 0$ , égalité vérifiée précédemment. Le même calcul réussit pour prouver le contact en  $\bar{\mu}$ .

On pourra remarquer que si l'on remplace  $(\mathfrak{b}_1)$  seule par  $(\mathfrak{b}'_1)$ , on obtient un second couple de surfaces minima  $(M\overline{M}_1)$  et  $(\overline{M}M_1)$  répondant aux conditions du problème. Si l'on suppose  $\tau$  réel,  $(\mathfrak{b})$  et  $(\mathfrak{b}_1)$  imaginaires conjuguées, le couple  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  se compose de deux surfaces séparément réelles, tandis que le couple  $(M\overline{M}_1)$  et  $(\overline{M}M_1)$  se compose de deux surfaces imaginaires, conjuguées l'une de l'autre. Sur les deux couples obtenus ensemble, l'un est donc tout entier réel, l'autre tout entier imaginaire et l'on vérifie aisément que si  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  sont séparément réelles, il est nécessaire que  $\tau$  soit réel et  $(\mathfrak{b})$  et  $(\mathfrak{b}_1)$  conjuguées. Je me borne à ces hypothèses précises dans tout ce qui suit.

3. La figure que nous avons ainsi constituée possède une configuration remarquable.

Le milieu A de  $\overline{MM}$  décrit une courbe  $(\mathfrak{A})$  de rayon de torsion constant et égal à  $\tau$ ; la surface minima  $(\overline{MM})$ , lieu des milieux des cordes s'appuyant sur  $(M)$  et  $(\overline{M})$ , admet  $(\mathfrak{A})$  pour asymptotique particulière; pour que cette nouvelle surface soit réelle, il faut et suffit que  $(\mathfrak{B})$ , et par suite  $(\mathfrak{A})$ , soient réelles, soit au sens vulgaire, soit au sens de M. Goursat; cette condition entraîne des identités de courbes ou surfaces que l'on peut écrire schématiquement

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M) = (\overline{M}_1), \quad (\overline{M}) = (M_1), \\ (MM_1) = (\overline{M}\overline{M}_1) = (\overline{MM}) = (\overline{M}_1M_1). \end{array} \right.$$

On voit donc que le couple  $(MM_1)$ ,  $(\overline{M}\overline{M}_1)$  ne forme plus cette fois qu'une surface minima unique sur laquelle on associe le point  $(\Theta, \Theta_1)$  au point  $(\Theta_1, \Theta)$ ; la surface minima  $(\overline{MM})$  coïncide elle-même avec cette surface minima; la courbe  $(\mathfrak{A})$  est l'asymptotique particulière d'équation  $\Theta = \Theta_1$ . La surface adjointe, comme l'a montré M. Cosserat, est circonscrite à la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$  tout le long de la courbe  $(\tau c, \tau c', \tau c'')$  homothétique à  $(\mathfrak{B})$ .

Reprenons l'étude de la figure en supposant que  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}_1)$  soient conjuguées, sans être réelles ni au sens vulgaire, ni au sens de M. Goursat, autrement dit

$$(M) \neq (\overline{M}_1) \quad \text{et} \quad (\overline{M}) \neq (M_1).$$

Nous avons déjà remarqué que le remplacement de  $(\mathfrak{B}_1)$  par  $(\mathfrak{B}'_1)$  sans toucher à  $(\mathfrak{B})$  ou de  $(\mathfrak{B})$  par  $(\mathfrak{B}'_1)$  sans toucher à  $(\mathfrak{B}_1)$  remplace le couple  $(MM_1)$  et  $(\overline{M}\overline{M}_1)$  par le couple  $(M\overline{M}_1)$  et  $(\overline{M}M_1)$ ; de la sorte nous devons encore distinguer deux cas suivant que  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}'_1)$  [et par suite aussi  $(\mathfrak{B}_1)$  et  $(\mathfrak{B}'_1)$ ] sont distinctes ou non. Dans le premier cas le premier couple  $(MM_1)$ ,  $(\overline{M}\overline{M}_1)$  est analytiquement distinct dans son ensemble du second couple  $(M\overline{M}_1)$ ,  $(\overline{M}M_1)$ ; mais dans le second cas on peut écrire encore des égalités schématiques pour exprimer l'identité de certaines courbes ou surfaces

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M) = (\overline{M}), \quad (M_1) = (\overline{M}_1), \\ (MM_1) = (\overline{M}\overline{M}_1) = (M\overline{M}_1) = (\overline{M}M_1). \end{array} \right.$$

Cette fois nos quatre surfaces minima ne forment plus que des portions d'une seule et unique surface analytiquement indécomposable : on a mis en évidence deux nappes réelles et deux nappes imaginaires de cette surface.

Si l'on suppose de plus  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  coïncidant, autrement dit  $(\mathfrak{W})$  réelle au sens vulgaire ou au sens de Goursat et non analytiquement distincte de  $(\mathfrak{W}')$ , on doit réunir ce résultat au résultat antérieur : on a une surface minima unique, qui est surface double au sens adopté dans la théorie des surfaces minima.

4. Je considère maintenant le couple des deux surfaces réelles S et S' applicables sur le paraboloidé  $(\mathfrak{P})$   $x^2 + y^2 = 2pz$  qui sont données par les quadratures déjà effectuées :

$$\begin{aligned}
 (S) \quad & \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\tau i}{2} \int c'' dc' - c' dc'' - \frac{\tau i}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'' + \frac{\tau i}{2} (c' c_1'' - c'' c_1'), \\ \eta &= \frac{\tau i}{2} \int c dc'' - c'' dc - \frac{\tau i}{2} \int c_1 dc_1'' - c_1'' dc_1 + \frac{\tau i}{2} (c'' c_1 - c c_1''), \\ \zeta &= \frac{\tau i}{2} \int c' dc - c dc' - \frac{\tau i}{2} \int c_1' dc_1 - c_1 dc_1' + \frac{\tau i}{2} (c c_1' - c' c_1); \end{aligned} \right. \\
 (S') \quad & \left\{ \begin{aligned} \xi' &= \frac{\tau i}{2} \int c'' dc' - c' dc'' - \frac{\tau i}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'' - \frac{\tau i}{2} (c' c_1'' - c'' c_1'), \\ \eta' &= \frac{\tau i}{2} \int c dc'' - c'' dc - \frac{\tau i}{2} \int c_1 dc_1'' - c_1'' dc_1 - \frac{\tau i}{2} (c'' c_1 - c c_1''), \\ \zeta' &= \frac{\tau i}{2} \int c' dc - c dc' - \frac{\tau i}{2} \int c_1' dc_1 - c_1 dc_1' - \frac{\tau i}{2} (c c_1' - c' c_1). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(S) et (S') sont, comme nous le savons, les deux développées d'une famille de surfaces W, (S) est applicable physiquement sur  $(\mathfrak{P})$ , mais non (S'). Les formules qui précèdent conduisent à écrire les formules définissant les adjointes des surfaces minima considérées plus haut. La surface  $(MM_1)$  est le lieu du point  $\mu$  milieu de  $MM_1$ ; j'appelle  $\mu'$  le point correspondant à  $\mu$  sur l'adjointe, surface que j'appellerai  $(MM_1)'$ ; en  $\mu$  et  $\mu'$  les plans tangents à  $(MM_1)$  et  $(MM_1)'$  sont parallèles. Je figure les points  $\mu, \bar{\mu}, \mu', \bar{\mu}'$  et les points correspondants P et P' sur S et S'.

Le point  $\mu'$  a pour coordonnées

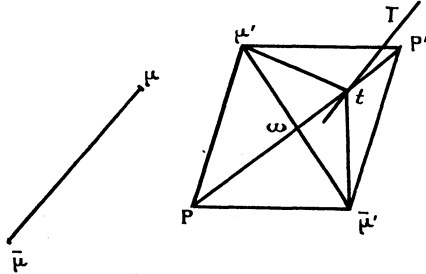
$$(13) \quad \frac{\tau}{2} \left[ -c + i \int c'' dc' - c' dc'' - c_1 - i \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'' \right] \dots$$

et le point  $\overline{\mu}$  pour coordonnées celles qui se déduisent des précédentes en changeant de signe  $c, c', c'', c_1, c'_1, c''_1$ , à savoir

$$(14) \quad \frac{\tau}{2} \left[ c + i \int c'' dc' - c' dc'' - c_1 - i \int c''_1 dc'_1 - c'_1 dc''_1 \right] \dots,$$

de la sorte on vérifie immédiatement que le milieu  $\omega$  de  $\mu'\overline{\mu'}$  est aussi le milieu de  $PP'$  : le point  $\omega$  décrit la surface que j'ai

Fig. 13.



appelée  $\Sigma$ ; la droite  $\mu\overline{\mu}$  est parallèle à la normale de  $S'$  en  $P'$ ; la droite  $\mu'\overline{\mu'}$  a pour paramètres directeurs  $c + c_1, c' + c'_1, c'' + c''_1$ , elle est parallèle à la normale de  $S$  en  $P$ . La figure  $\mu'P'\overline{\mu'}P$  est un losange puisque les deux droites  $\mu'\overline{\mu'}$  et  $PP'$  se coupent orthogonalement en leur milieu et le plan de ce losange est perpendiculaire à  $\mu\overline{\mu}$ . Calculons la longueur de chaque côté : le vecteur  $\mu'P'$  a pour composantes

$$(15) \quad \frac{\tau}{2} [c + c_1 - i(c'c'_1 - c''c''_1)] \dots;$$

le carré de ce vecteur s'obtient immédiatement, il est égal au carré de  $\frac{\tau}{2}$  multiplié par  $2 + 2H - (1 - H^2)$  en appelant toujours

$$H = cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1;$$

l'expression qui vient d'être écrite est  $1 + 2H + H^2$ , on en conclut que la longueur

$$\mu'P' = P'\overline{\mu'} = \overline{\mu'}P = P\mu'$$

est égale à  $\frac{\tau}{2}(1 + H)$ . Vérifions maintenant que  $P\mu'$  est normale en  $\mu'$  à  $(MM_1)'$  et  $P\overline{\mu'}$  normale en  $\overline{\mu'}$  à  $(\overline{M}\overline{M}_1)'$ . Il suffit de faire la

vérification pour  $P\bar{\mu}'$  dont nous avons déjà écrit les composantes; le plan tangent en  $\bar{\mu}'$  ou en  $\bar{\mu}$  est défini par deux droites de paramètres directeurs

$$a - ib, \quad a' - ib', \quad a'' - ib''$$

et

$$a_1 + ib_1, \quad a'_1 + ib'_1, \quad a''_1 + ib''_1.$$

Il suffit de vérifier que  $P\bar{\mu}'$  ou  $P'\mu'$  est perpendiculaire sur chacune de ces deux droites; la vérification est aisée, car

$$(16) \quad \begin{cases} S(c + c_1)(a - ib) = Sac_1 - iSbc_1, \\ Sa(c'_1 - c''c'_1) = |a \ c \ c_1| = -Sbc_1, \\ Sb(c'_1 - c''c'_1) = |b \ c \ c_1| = Sac_1. \end{cases}$$

On a ainsi le résultat remarquable suivant : de chaque point P de la surface S comme centre, avec un rayon égal à  $\frac{\tau}{2}(1 + H)$ , décrivons une sphère; cette sphère variable dépend de deux paramètres et enveloppe les deux surfaces minima  $(MM_1)'$  et  $(\bar{M}\bar{M}_1)'$ ; sur les deux nappes de l'enveloppe les lignes de courbure se correspondent. Nous retrouvons donc des propriétés nombreuses relatives aux enveloppes de sphères et aux systèmes cycliques. Voyons d'abord ce que nous obtenons en faisant rouler sur  $\mathcal{F}$  la surface S qui, ne l'oublions pas, est applicable physiquement sur  $\mathcal{F}$  <sup>(1)</sup>; sur la parabolôide  $\mathcal{F}$ , nous savons que

$$\frac{H + 1}{2} = 1 + \frac{r^2}{p^2}$$

(voir Chapitre I, n° 2); donc

$$\frac{\tau}{2}(1 + H) = \frac{p}{2} + \frac{r^2}{2p} = z + \frac{p}{2},$$

c'est la distance du point du parabolôide au foyer F; si donc la

(1) On retrouve ici un cas particulier de propositions établies par Darboux, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, premier semestre 1899. Dans le même Tome se trouve une note de M. Guichard que l'on pourra comparer avec les résultats du texte à condition de faire rouler le parabolôide  $\mathcal{F}$  sur la surface  $S'$  : dans ce mouvement imaginaire les droites  $\Delta, \Delta'$  de M. Guichard sont  $P\mu'$  et  $P\bar{\mu}'$ , le plan  $PP'\mu'\bar{\mu}'$  étant le plan tangent à  $S'$ . J'aurai l'occasion de revenir sur cette application si curieuse au domaine réel de mouvements essentiellement imaginaires produits dans le roulement sur une surface réelle d'une surface imaginaire.

surface  $S$  roule sur  $\mathcal{Q}$ , chaque sphère va passer par le foyer et les deux nappes de l'enveloppe analogue relative au paraboloidé lui-même sont : d'abord le foyer  $F$  lui-même, d'autre part le plan directeur; dans le mouvement de  $S$ , l'une des deux surfaces minima, enveloppe des sphères, supposée invariablement liée à  $S$ , passera constamment par  $F$ , tandis que l'autre restera tangente au plan directeur. Marquons l'orthocentre  $t$  du triangle  $\mu P' \bar{\mu}'$ ;  $t$  est situé sur  $PP'$  et la parallèle  $tT$  à  $\mu \bar{\mu}$  menée par  $t$  est l'intersection des plans tangents à la sphère en  $\mu'$  et  $\bar{\mu}'$ . Nous savons que les quatre droites  $P\mu'$ ,  $P\bar{\mu}'$ ,  $\mu'\bar{\mu}'$ ,  $tT$  engendrent simultanément des développables; les deux premières découpent sur les surfaces minima  $(MM_1)'$  et  $(\bar{M}\bar{M}_1)'$  le réseau d'équation  $\Theta \pm \Theta_1 = \text{const.}$ , elles découpent sur  $S$  le réseau conjugué commun à  $S$  et  $(\mathcal{Q})$  dans l'application de  $S$  sur  $(\mathcal{Q})$  <sup>(1)</sup>: ce fait important, que M. Thibaut a obtenu par d'autres considérations, résulte d'une remarque due à M. Kœnigs (voir DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 123 et suiv.): c'est que si  $S$  roule sur  $(\mathcal{Q})$ , à chaque instant du mouvement la sphère de centre  $P$  et rayon  $\frac{1}{2}P\mu'$  passe par un point fixe, qui est le foyer  $F$ , quand  $P$  coïncide avec le point de contact des deux surfaces: les développables engendrées par la corde des contacts  $\mu'\bar{\mu}'$  correspondent au réseau conjugué commun. En joignant  $P$ ,  $\mu'$  et  $\bar{\mu}'$  aux points focaux de  $tT$ , nous obtenons six nouvelles droites décrivant des développables en même temps que les quatre précédentes: ce sont les tangentes principales des surfaces minima  $(MM_1)'$  et  $(\bar{M}\bar{M}_1)'$ , et les tangentes aux courbes du réseau conjugué défini sur  $S$ . Il est très remarquable que, pour tout point réel de  $S$ , les points  $\mu'$  et  $\bar{\mu}'$  soient toujours réels. On pourra remarquer que le diamètre de la sphère de centre  $P$ ,  $\tau(H+1)$  est égal à  $\sqrt{RR'}$ ,  $R$  et  $R'$  étant les rayons de courbure principaux de  $S$  en  $P$ .

Si l'on considère de même le point  $P'$  de la surface  $S'$  et la sphère de rayon  $\frac{\tau}{2}(H-1)$  et centre  $P'$ , cette sphère enveloppe deux surfaces minima, cette fois tout entières imaginaires et con-

---

(1) Il est important de remarquer que ce réseau est réel soit sur  $S$ , soit sur  $S'$ , soit sur  $\mathcal{Q}$ ; il correspond en effet aux asymptotiques de  $(MM_1)$  ou  $(\bar{M}\bar{M}_1)$ .



juguées l'une de l'autre. On a cette fois à considérer un losange ayant en commun avec le premier les deux sommets P et P', situé dans le plan perpendiculaire à celui du premier mené par P et P', les deux autres sommets étant imaginaires.

Au point de vue géométrique, j'ai montré que la connaissance d'une surface réelle S ou S' permet de trouver par différentiations et éliminations la valeur du paramètre p, la surface complémentaire, le nom S ou S' qui doit être attribué à chacune et la valeur H en chaque point de S ou S'; sur S nous menons de chaque point P comme centre la sphère de rayon  $\frac{z}{2}(1+H)$ ; les deux nappes de l'enveloppe de cette sphère donnent les surfaces minima  $(MM_1)'$   $(\overline{MM}_1)$ ; les adjointes de ces deux surfaces donnent  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$ . On doit remarquer ici que l'adjointe d'une surface minima peut être remplacée par la surface symétrique par rapport à un point quelconque; donc pour  $(MM_1)$  ou  $(\overline{MM}_1)$  on a l'embarras du choix entre deux surfaces : mais on doit associer les déterminations de  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  de façon que la droite  $\mu\overline{\mu}$  soit perpendiculaire au plan  $PP'\mu'\overline{\mu}'$ , de sorte que l'on ne trouve que deux déterminations pour le couple  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$ . De même la connaissance d'un couple  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  de deux surfaces minima focales d'une même congruence rectiligne, avec conservation des asymptotiques et lignes de longueur nulle, permet de construire le couple  $(MM_1)'$  et  $(\overline{MM}_1)'$  : comme plus haut, pour ce couple, on a à choisir entre deux déterminations seulement : dans ces conditions, le plan perpendiculaire au milieu de  $\mu'\overline{\mu}'$  enveloppe une surface S, pendant que le centre de la sphère tangente à  $(MM_1)'$  en  $\mu'$  et à  $(\overline{MM}_1)'$  en  $\overline{\mu}'$  décrit S : la surface S est ainsi définie par plans tangents et par points. Suivant la détermination prise pour  $(MM_1)'$  et  $(\overline{MM}_1)'$  on trouve pour S l'une ou l'autre de deux surfaces symétriques par rapport à un certain point.

5. Il est à peu près évident que l'on obtient par cette méthode les surfaces minima que M. Thybaut associe à toute surface applicable sur le paraboloidé de révolution  $x^2 + y^2 = 2pz$ . Nous allons

le vérifier très simplement; sur le parabolôide ( $\mathcal{P}$ ) on pose

$$u = \frac{x + iy}{\sqrt{2p}}, \quad v = \frac{x - iy}{\sqrt{2p}},$$

d'où l'on déduit

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{p}{2}}(u + v), \quad y = \sqrt{\frac{p}{2}} \frac{u - v}{i}, \quad z = uv, \\ ds^2 = [d(uv)]^2 + 2p \, du \, dv. \end{array} \right.$$

Je reprends les notations de M. Thybaut : soient  $\xi, \eta, \zeta$  les coordonnées d'un point d'une surface  $\Sigma$  applicable sur ( $\mathcal{P}$ ) et A le point

$$x = \frac{\partial \xi}{\partial v}, \quad y = \frac{\partial \eta}{\partial u}, \quad z = \frac{\partial \zeta}{\partial v},$$

A, le point

$$x_1 = \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad y_1 = \frac{\partial \eta}{\partial u}, \quad z_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial u}.$$

On a manifestement

$$(18) \quad x^2 + y^2 + z^2 = u^2, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = v^2.$$

La surface minima B que M. Thybaut définit correspond à A par orthogonalité des éléments linéaires; elle est donnée par les formules déduites de la théorie des douze surfaces de M. Darboux :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \int z_1 \, dy - y_1 \, dz, \\ Y = \int x_1 \, dz - z_1 \, dx, \\ Z = \int y_1 \, dx - x_1 \, dy; \end{array} \right.$$

la surface adjointe est définie par les quadratures

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = \int x_1 \, du - v \, dx, \\ Y' = \int y_1 \, du - v \, dy, \\ Z' = \int z_1 \, du - v \, dz. \end{array} \right.$$

Si l'on se rappelle que par définition on a

$$\xi = \int x_1 \, du + x \, dv,$$

on a immédiatement

$$(21) \quad \xi = X' + vx, \quad \eta = Y' + vy, \quad \zeta = Z' + vz.$$

Tout est symétrique en  $u, v$  : à la surface  $A_1$  correspond la surface minima  $B_1$  de M. Thybaut et l'on a les formules semblables :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} = \int z dy_1 - y dz_1 \dots, \\ \bar{X}' = \int x dv - u dx_1 \dots, \\ \xi = \bar{X}' + ux_1 \dots \end{array} \right.$$

Les deux vecteurs  $vx, vy, vz$  d'une part, et  $ux_1, uy_1, uz_1$  de l'autre, ont tous deux pour longueur  $|uv|$ ; le premier est parallèle à la normale de la surface  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  ou  $(\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}')$ , l'autre est parallèle à la normale de la surface  $(X, Y, Z)$  ou  $(X', Y', Z')$ . Tous deux sont tangents à la surface  $\Sigma$ .

On a d'ailleurs  $uv = \frac{r^2}{2p}$ . Appliquons ce qui précède à la surface  $S'$  : pour chaque point réel de  $S'$ , on a calculé  $r$  et l'angle  $\theta$  par les formules (19) du Chapitre I (n° 6) :

$$\frac{r}{p} = i \sqrt{\frac{H+1}{2}}, \quad \theta = i \frac{v_1}{p} + \frac{\pi}{2},$$

que je recopie en augmentant  $\theta$  de  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui revient à compter les angles méridiens à partir d'une autre origine. On a alors

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{re^{i\theta}}{\sqrt{2p}} = -\sqrt{\frac{p}{2}} \sqrt{\frac{H+1}{2}} e^{-\frac{v_1}{p}}, \\ v = \frac{re^{-i\theta}}{\sqrt{2p}} = +\sqrt{\frac{p}{2}} \sqrt{\frac{H+1}{2}} e^{\frac{v_1}{p}}, \\ uv = \frac{r^2}{2p} = -\frac{p}{4} \frac{H+1}{2}. \end{array} \right.$$

Or, dans la figure  $P'u'\bar{u}'$  trouvée plus haut, nous trouvons précisément ces relations entre les directions et les longueurs : il y a donc coïncidence entre les éléments de M. Thybaut et ceux que j'ai définis. On pourra remarquer que M. Thybaut n'a pas complètement achevé la détermination du couple  $B, B_1$  : il apprend, B

étant donnée, à trouver  $B_1$ , *sauf translation de  $B_1$* . J'ai, dans ce qui précède, mis en place tous les éléments géométriques et donné toutes les formules explicites. J'ai mis en évidence le fait complémentaire que le réseau conjugué à  $S$ ,  $S'$  et  $(\mathcal{P})$  s'obtient par deux quadratures et donné l'interprétation géométrique de ces quadratures.

D'ailleurs, au moment où M. Thybaut a rédigé son Mémoire, personne n'avait mis en évidence ce fait remarquable que l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{1}{4} [d(uv)]^2 + du dv + 4p^2$$

peut être réalisé en surfaces réelles soit en prenant  $u$  et  $v$  imaginaires conjuguées, c'est le cas de  $(\mathcal{P})$  et des surfaces que j'ai appelées  $S$ , soit en prenant  $u$  et  $v$  réelles, c'est le cas des surfaces que j'ai appelées  $S'$ . Chaque surface  $S$  est associée à une surface  $S'$ ; en reprenant la théorie de M. Thybaut, j'ai montré de nouveau l'enchevêtrement curieux de ces deux surfaces et des divers éléments géométriques associés. En réalité, le fait que la méthode de M. Thybaut fournit des couples réels de surfaces minima prouvait l'existence de ces applications de surfaces réelles par point réel sur point imaginaire.

Il est clair que tous les éléments géométriques suivants : courbe à torsion constante ( $\mathcal{A}_b$ ); surface  $S$ ; surface  $S'$ ; couple  $(MM_1)$  et  $(\overline{M}\overline{M}_1)$ , sont simultanément algébriques ou transcendants.

Si nous appliquons ce qui précède à la cubique de M. Lyon en reprenant les notations déjà usitées, on trouve aisément

$$\begin{aligned} (MM_1) \quad & \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\tau}{6K^2} [\mu^3 - 3(\lambda - K)\mu + 3\mu], \\ Y &= \frac{\tau}{6K^2} [(\lambda - K)^2 - 3(\lambda - K)\mu^2 + 3(\lambda - K) - 4K^3], \\ Z &= \frac{\tau}{6K^2} [6(\lambda - K)\mu]; \end{aligned} \right. \\ (\overline{M}\overline{M}_1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \overline{X} &= \frac{\tau}{6K^2} [\mu^3 - 3(\lambda + K)\mu + 3\mu], \\ \overline{Y} &= \frac{\tau}{6K^2} [(\lambda + K)^2 - 3(\lambda + K)\mu^2 + 3(\lambda + K) - 4K^3], \\ \overline{Z} &= \frac{\tau}{6K^2} [6(\lambda + K)\mu]. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les deux surfaces trouvées sont égales entre elles; si nous négli-

geons le facteur de proportionnalité  $\frac{\tau}{6K^2}$ , nous obtenons encore la surface minima d'Enneper. D'une façon plus précise, considérons la surface minima d'Enneper dans la position indiquée au Tome I de la *Théorie des Surfaces* de Darboux : nous prenons l'adjointe de cette surface et la déplaçons, dans un sens ou l'autre, parallèlement à  $Oy$  de la quantité  $4K^3$  : les deux surfaces obtenues forment un couple répondant aux conditions de M. Thybaut. Comme la surface d'Enneper est égale à toutes ses associées et qu'elle ne diffère de son adjointe que par une rotation de  $\frac{\pi}{4}$  autour de  $Oz$ , on pourra, si l'on veut garder la surface d'Enneper dans la position indiquée par Darboux, la déplacer parallèlement à l'une ou l'autre des bissectrices de l'angle  $xOy$ . L'amplitude de la translation correspond aux diverses valeurs de  $K$  <sup>(1)</sup>;  $K$  est supposée, pour la cubique de Lyon, réelle et non nulle; pour  $K = 0$  on retombe encore sur le cas de dégénérescence signalé plus haut.

On trouve aisément

$$(MM_1)' \begin{cases} X' = \frac{\tau}{6K^2} [\lambda'^3 - 3\lambda'\mu^2 - 3\lambda' + 4K^3] \\ Y' = \frac{\tau}{6K^2} [\mu^3 - 3\lambda'^2\mu - 3\mu] \\ Z' = \frac{\tau}{6K^2} [3(\lambda'^2 - \mu^2 - K^2)] \end{cases} \quad (\lambda' = \lambda - K),$$

la surface  $(\overline{MM}_1)'$  s'obtenant en changeant  $K$  en  $-K$  dans les formules qui précèdent. En négligeant le facteur  $\frac{\tau}{6K^2}$ , cette surface  $(MM_1)'$  ne diffère de la surface d'Enneper indiquée par Darboux que par une translation  $(2q, 0, p)$ ,  $p$  et  $q$  étant deux constantes liées par la relation

$$4p^3 + 27q^2 = 0,$$

résultat de forme curieuse; la translation relative à  $(\overline{MM}_1)'$  est  $(-2q, 0, p)$ .

<sup>(1)</sup> Au n° 3 nous avons indiqué la signification de la variation de  $K$ . La transformation  $U = Lu, V = Lv$  revient à remplacer  $K$  par  $LK$ . La transformation

$$U = u + M + Ni, \quad V = v + M + Ni$$

revient à remplacer  $\lambda$  par  $\lambda + M$  et  $\mu$  par  $\mu + N$ , ce qui produit une transformation birationnelle simple sur chaque surface minima d'Enneper.

Quand on fait tendre  $K$  vers zéro, en considérant les surfaces  $\frac{6K^2}{\tau} (MM_1), \dots$ , les deux points  $\mu'$  et  $\bar{\mu}'$  tendent vers le même point  $m$  d'une surface minima d'Enneper et le point  $P$  tend vers l'un des centres de courbure principaux de cette surface en  $m$ , de sorte que nous retrouvons une développée de surface minima, comme cas limite de surface applicable sur le parabolôïde.

6. Je terminerai enfin en remarquant qu'une courbe minima *arbitraire* peut être prise pour courbe  $(M)$ ; simultanément une surface minima *arbitraire* peut être prise comme surface  $(MM_1)$ ; je me borne dans ce cas à ne prendre qu'une surface minima réelle. Je prends la courbe minima  $(M)$  comme arête de rebroussement de la développable isotrope enveloppe du plan

$$(24) \quad (1 - u^2)x + i(1 + u^2)y + 2uz + 4f(u) = 0,$$

de façon à garder les notations de Weierstrass si je considère la surface minima  $(MM_1)$  en même temps que la courbe minima  $(M)$ . La courbe minima  $(\bar{M})$  est définie par la développable analogue

$$(25) \quad (1 - v^2)x + i(1 + v^2)y + 2vz + 4\varphi(v) = 0$$

avec la relation

$$(26) \quad \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{i}{p} f''(u) \times (v - u)^2,$$

qui définit  $v$  en fonction de  $u$  par une équation de Riccati; l'intégrale  $v$  calculée on a, sans intégration nouvelle,

$$(27) \quad \varphi(v) = \frac{(v - u)^2}{2} f''(u) + (v - u)f'(u) + f(u),$$

comme je l'ai montré dans mon *Mémoire de l'École Normale*, année 1919, page 269. A toute solution de l'équation (26) correspond une courbe  $(\bar{M})$  et par suite une surface minima réelle  $(\bar{M}\bar{M}_1)$  que l'on peut faire correspondre à la surface minima primitive, et un couple  $S, S'$  réel. Si nous partons maintenant de la courbe  $(\bar{M})$  ou de la surface  $(\bar{M}\bar{M}_1)$ , nous avons à intégrer une équation de Riccati, analogue à (26),

$$(28) \quad \left(\frac{dw}{dv}\right)^2 = \frac{i}{p} \varphi''(v) \times (w - v)^2.$$

Mais on connaît une intégrale particulière de (28), c'est  $u$ , car la relation entre  $(M)$  et  $(\bar{M})$  est réciproque; donc l'équation (28) s'intègre cette fois, si  $\nu$  est intégrale de (26), par deux quadratures au plus : nous déterminons un nouveau couple de surfaces minima ayant en commun avec le précédent la surface  $(\bar{M}\bar{M}_1)$ . L'application de la méthode peut se continuer par quadratures successives; un couple de surfaces minima connu permet de constituer une chaîne de couples ayant à chaque fois un élément commun; on a en même temps une succession de surfaces  $S$  ou de surfaces  $S'$ . On reconnaît ici un mode d'opération qui se rencontre aussi dans la détermination de certaines surfaces à courbure totale constante ou de certains systèmes triples imaginés par M. Bianchi. J'aurai l'occasion de revenir sur ces analogies qui ne sont pas dues au hasard. Mais je ferai remarquer dès à présent que si nous considérons le roulement du paraboloidé  $\mathcal{P}$  sur la surface réelle  $S$  et la sphère de rayon nul ayant son centre en  $F$  considérée comme invariablement liée à  $\mathcal{P}$ , quand le contact de  $\mathcal{P}$  et  $S$  se fait au point  $P$ , le foyer  $F$  prend la position  $\mu'$  ou  $\bar{\mu}'$ ; supposons que ce soit  $\mu'$ ; le plan tangent commun en  $P$  à  $\mathcal{P}$  et  $S$  est alors coupé par cette sphère de rayon nul suivant un cercle de centre  $\omega$  et rayon  $i \times \frac{\mu' \bar{\mu}'}{2}$ ; or les formules (13) et (14) donnent immédiatement pour la valeur de ce rayon  $i\tau \sqrt{\frac{1+H}{2}}$ . Ces cercles engendrent un système cyclique imaginaire et fournissent un système triple orthogonal tout entier imaginaire.

Mais alors considérons le roulement du paraboloidé  $\mathcal{P}$  sur la surface réelle  $S'$  : il suffit, d'après une remarque faite au Chapitre I (n° 3), de changer  $c_1, c'_1, c''_1$  en  $-c_1, -c'_1, -c''_1$  et  $H$  en  $-H$  sans changer  $c, c', c''$ . Nous obtenons le résultat curieux suivant : considérons le point  $\omega$  qui engendre la surface  $\Sigma$ , point défini par les coordonnées

$$(\omega) \quad \begin{cases} \frac{\tau i}{2} \int c'' dc' - c' dc'' - \frac{\tau i}{2} \int c'_1 dc_1 - c'_1 dc''_1, \\ \frac{\tau i}{2} \int c dc'' - c'' dc - \frac{\tau i}{2} \int c_1 dc''_1 - c'_1 dc_1, \\ \frac{\tau i}{2} \int c' dc - c dc' - \frac{\tau i}{2} \int c'_1 dc_1 - c_1 dc'_1. \end{cases}$$

Dans le plan tangent à  $S'$  mené par  $PP'$ , plan de paramètres directeurs  $i(c - c_1)$ ,  $i(c' - c'_1)$ ,  $i(c'' - c''_1)$ , décrivons le cercle de centre  $\omega$  et rayon  $\tau\sqrt{\frac{H-1}{2}}$  : ces cercles décrivent un système cyclique réel; quand le point  $P'$  décrit sur  $S'$  l'une des courbes du système conjugué commun à  $S'$  et  $\mathcal{Q}$ , le cercle décrit une surface à lignes de courbure circulaires; nous définissons ainsi deux séries de surfaces *réelles*, qui, associées aux surfaces trajectoires orthogonales des cercles, donnent un système triple orthogonal *réel*. Darboux avait prévu l'existence de tels systèmes triplés ou cycliques réels (*Théorie des Surfaces*, t. IV, p. 162), mais sans donner d'exemple. Dans le cas de la cubique de Lyon, les deux familles de surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système sont algébriques, la troisième famille se compose de surfaces transcendantes.

7. Il est intéressant de confronter les résultats obtenus dans ce Chapitre depuis le n° 2 avec : 1° ceux que j'ai indiqués au Mémoire précédent (Chap. I, n° 10); 2° ceux qu'a donnés M. Goursat aux *Acta mathematica* (t. XI).

Au Mémoire précédent j'ai montré que, de toute surface *déjà connue*  $S$  ou  $S'$  applicable sur le parabolôïde, on déduit par de simples différentiations ou éliminations une infinité de surfaces de même définition, renfermant trois paramètres nouveaux de forme. Or, dans ce Chapitre, j'ai montré que les deux problèmes suivants : « Trouver un couple de deux surfaces minima se correspondant comme focales d'une même congruence rectiligne avec conservation des lignes de longueur nulle, des asymptotiques et des lignes de courbure », ou bien « Trouver une surface  $S$  (ou  $S'$ ) applicable sur le parabolôïde », sont deux problèmes strictement équivalents. Il résulte donc immédiatement de ce rapprochement que tout couple déjà connu de deux surfaces minima satisfaisant aux conditions citées permet d'en obtenir une triple infinité de même définition.

M. Goursat, au Mémoire cité, établit le résultat suivant : soient  $(M)$ ,  $(M_1)$  deux courbes minima conjuguées,  $(MM_1)$  la surface minima réelle lieu des milieux des cordes s'appuyant sur  $(M)$  et  $(M_1)$ ; soit  $(M^p)$  la courbe minima obtenue en imprimant à  $(M)$



un déplacement  $D$  réel ou imaginaire;  $(M_1^{D_1})$  la courbe minima obtenue en imprimant à  $(M_1)$  le déplacement  $D_1$  imaginaire conjugué de  $D$ ;  $(M^D)$  et  $(M_1^{D_1})$  sont encore conjuguées; la surface minima réelle qu'elles définissent étant représentée par l'écriture  $(MM_1)^{DD_1}$ , M. Goursat a montré que les coordonnées d'un point de  $(M)$  étant exprimées au moyen d'un paramètre  $t$ , celles d'un point de  $(M_1)$  au moyen d'un paramètre  $t_1$ , si l'on fait correspondre sur  $(M)$  et  $(M)^D$  les points de même  $t$ , sur  $(M_1)$  et  $(M_1)^{D_1}$  les points de même  $t_1$  et par suite sur  $(MM_1)$  et  $(MM_1)^{DD_1}$  les points de mêmes coordonnées curvilignes  $t, t_1$ , cette correspondance ponctuelle fait correspondre les lignes de longueur nulle, les lignes de courbure, les lignes asymptotiques sur les deux surfaces minima. Si le déplacement  $D$  est réel,  $D_1$  coïncide avec  $D$  et l'on n'obtient qu'un déplacement d'ensemble sur la figure, transformation banale; mais cette remarque permet de composer  $D$ , dans le cas où il est imaginaire, avec un déplacement réel, antérieur ou consécutif, de façon à réduire  $D$  à une rotation d'amplitude imaginaire pure, autour d'une droite réelle; on ne conserve ainsi que trois paramètres de forme : amplitude de la rotation, paramètres d'orientation de la droite. Dans une telle transformation appliquée à toutes les surfaces minima, les surfaces minima algébriques restent algébriques; de simples éliminations algébriques ou différentiations font passer d'une surface minima donnée à sa transformée.

Ici je considère la sphère qui porte la courbe sphérique  $(\mathcal{U})$ , la courbe  $(\mathcal{A})$  à torsion constante déduite de  $(\mathcal{U})$ , les courbes minima  $(M)$  et  $(\bar{M})$  déduites de  $(\mathcal{U})$  par les formules de ce Chapitre, n° 2; je prendrai pour  $D$  une rotation d'amplitude imaginaire autour d'un diamètre réel de la sphère et je considère les nouvelles positions  $(\mathcal{U})^D, (\mathcal{A})^D, (M)^D, (\bar{M})^D$  des éléments géométriques définis. Le déplacement conjugué  $D_1$  remplace  $(\mathcal{U}_1), (\mathcal{A}_1), (M_1), (\bar{M}_1)$  par  $(\mathcal{U}_1)^{D_1}, (\mathcal{A}_1)^{D_1}, (M_1)^{D_1}, (\bar{M}_1)^{D_1}$ ; la surface réelle  $S$  applicable physiquement sur  $\mathcal{E}$  est remplacée par une surface réelle  $S^{DD_1}$  de mêmes propriétés; de même  $S'$  est remplacée par la surface  $S'^{DD_1}$  complémentaire de  $S^{DD_1}$ ; le couple  $(MM_1), (\bar{M}\bar{M}_1)$  est remplacé par le nouveau couple  $(MM_1)^{DD_1}$  et  $(\bar{M}\bar{M}_1)^{DD_1}$ . On a supposé sur  $(\mathcal{U})$  les quantités  $(c, c', c'')$  exprimées au moyen d'un certain paramètre  $t$ ; le point  $(c, c', c'')$  devient par le déplace-

ment D un point  $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ , de même  $t$ ; de même sur  $\mathfrak{B}_1$ , on a pris un paramètre  $t_1$  et sur tous les éléments définis, courbes et surfaces, on associe, avant et après l'opération D, ou l'opération  $D_1$ , ou l'opération que je peux appeler  $DD_1$ , les points de mêmes coordonnées curvilignes  $t, t_1$ . Alors chaque surface  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  subit individuellement la transformation de M. Goursat; mais, de plus, dans leur ensemble, les points de même  $t, t_1$  sur  $(MM_1)$  et  $(\overline{MM}_1)$  établissaient la correspondance conforme, conservant les lignes de courbure et les lignes asymptotiques : après l'opération  $DD_1$ , les points respectivement transformés réalisent la correspondance de même définition sur les surfaces transformées <sup>(1)</sup>.

De même sur S et S' les points de même  $t, t_1$  se correspondent de façon que la droite joignant ces deux points engendre une congruence W dont ils sont les points focaux : après la transformation  $DD_1$ , il en est encore de même. D'ailleurs  $t = \text{const.}$  ou  $t_1 = \text{const.}$  définissent les deux séries d'asymptotiques de S ou S', ou encore de  $S^{DD_1}$  et  $S'^{DD_1}$ , de sorte que tout réseau conjugué sur S reste conjugué soit sur S', soit sur  $S^{DD_1}$ , soit sur  $S'^{DD_1}$ ; je n'avais pas signalé cette propriété dans le premier Mémoire. De plus les relations géométriques établies aux nos 2 et suivants entre tous les éléments, courbes ou surfaces,  $(\mathfrak{B}), (\mathfrak{B}_1), (\mathfrak{A}), (\mathfrak{A}_1), (S), (MM_1), (\overline{MM}_1)$  subsistent après la transformation : les applications des nos 2, 3, 4 rendent ce fait à peu près évident.

Au Mémoire précédent j'avais indiqué uniquement la correspondance entre S et  $S^{DD_1}$ ; j'ai choisi pour le déplacement imaginaire D une autre forme réduite que celle de M. Goursat : si l'on prend sur la sphère comme coordonnées  $u, v$  les expressions

$$u = \frac{c + ic'}{1 - c''}, \quad v = -\frac{c + ic'}{1 + c''},$$

---

<sup>(1)</sup> M. Goursat prend pour D une rotation d'amplitude imaginaire pure autour d'un diamètre réel de la sphère. Ce diamètre réel prend le nom d'*axe de dérivation*. Supposons cet axe vertical; sur une surface minima donnée, et sur la transformée de cette surface par dérivation, les points homologues sont à la même cote, les tangentes aux sections horizontales étant parallèles. De la sorte la congruence rectiligne de M. Thybaut se transforme en une autre congruence rectiligne, de sorte que deux points focaux associés  $\mu$  et  $\bar{\mu}$  sont remplacés par deux points focaux associés tels que chacun a même cote que celui dont il *dérive*.

je définis D par la substitution

$$U = \lambda u + \mu + \nu i, \quad V = \lambda v + \mu + \nu i,$$

où  $\lambda, \mu, \nu$  sont trois nombres réels; le déplacement imaginaire le plus général revient à ce déplacement réduit précédé ou suivi d'un déplacement réel, qui finalement disparaît du résultat; de la sorte, adopter cette réduction ou celle de M. Goursat est indifférent : dans chaque cas particulier, l'une pourra être préférable à l'autre.

8. Pour éviter toute ambiguïté, je ferai remarquer que la correspondance  $(tt_1)$  entre S et  $S^{D^1}$  n'est pas une application, ce qui résulte de diverses raisons; d'abord pour deux surfaces applicables sur le parabolôïde et par suite entre ellès, aux points correspondants dans l'application, H a la même valeur; or H a pour valeur  $cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1$  sur S et au point de même  $(tt_1)$  sur  $S^{D^1}$ ,  $\gamma\gamma_1 + \gamma'\gamma'_1 + \gamma''\gamma''_1$ ; l'expression  $cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1$  est le cosinus de l'angle des deux rayons vecteurs joignant l'origine aux points  $t$  de  $\mathfrak{B}$  et  $t_1$  de  $(\mathfrak{B}_1)$ ; comme ces deux courbes ne participent pas au même mouvement, l'angle et son cosinus changent de valeur. D'ailleurs la correspondance  $(tt_1)$  conservant sur S et  $S^{D^1}$  les asymptotiques, elle ne pourrait être une application que si S et  $S^{D^1}$  ne différaient que par un déplacement, et cela n'arrive que si D est réel.

De même en revenant pour un instant aux notations employées en note au n° 8 du Chapitre I du précédent Mémoire, notations différentes de celles de ce Chapitre, si je considère la correspondance  $(tt_1)$  entre S et  $S'$  qui fait correspondre à un point M de S un point M' de  $S'$ , cette correspondance engendre la congruence de normales MM' à une surface W. Dans l'application de S sur  $\mathcal{Q}$ , M a pour homologue un point  $\alpha$ , et cette correspondance ponctuelle  $(M, \alpha)$  admet pour réseau conjugué commun celui qui est défini par  $\Theta \pm \Theta_1 = \text{const.}$ ,  $\Theta$  et  $\Theta_1$  désignant les arcs de  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}_1)$ ; si l'on considère ensuite l'application de  $S'$  sur  $\mathcal{Q}$ , M' a pour correspondant un point  $\alpha'$ , le réseau conjugué commun à  $S'$  et  $\mathcal{Q}$  dans la correspondance  $(M', \alpha')$  a pour équation encore  $\Theta \pm \Theta_1 = \text{const.}$ , mais les courbes ainsi obtenues sur  $\mathcal{Q}$  sont distinctes de celles qui précèdent, bien que l'équation semble la même : cela tient à ce que les expressions au moyen de  $t, t_1$  des

coordonnées du point  $a$ , point courant de  $\mathcal{Q}$ , et celles de  $a'$ , point courant aussi de  $\mathcal{Q}$ , différent. La correspondance ponctuelle  $(a, a')$  sur  $\mathcal{Q}$  donne comme réseau conjugué le réseau trouvé sur  $\mathcal{Q}$  dans la correspondance  $(M, a)$  et le réseau trouvé ensuite sur  $\mathcal{Q}$  dans la correspondance  $(M', a')$ . On pourrait de même sur le couple  $S, S^{DD_1}$  considérer les points  $(t, t_1)$  et considérer sur le parabolôïde les deux points distincts  $a, a_{DD_1}$ , correspondants par application au point  $(tt_1)$  de  $S$  ou  $(tt_1)$  de  $S^{DD_1}$  : l'équation  $\Theta \pm \Theta_1 = \text{const.}$  définit toujours les réseaux conjugués, mais bien que la forme d'équation soit la même, le réseau obtenu avec  $a$  et le réseau obtenu avec  $a_{DD_1}$ , diffèrent : ces deux réseaux sont conjugués simultanément dans la nouvelle correspondance ponctuelle  $(a, a_{DD_1})$ .

### CHAPITRE III.

#### ÉTUDE DES SURFACES APPLICABLES SUR LE PARABOLOÏDE IMAGINAIRE

$$x^2 + y^2 = 2piz.$$

1. Il est intéressant de chercher ce que deviennent les résultats établis dans ce Mémoire ou le précédent quand on remplace  $p$  par  $ip$ . Le parabolôïde  $\mathcal{Q}$  est remplacé par un parabolôïde imaginaire  $\mathcal{Q}'$  d'équation  $x^2 + y^2 = 2piz$  et je définis trois surfaces :  $s$  pour  $\varepsilon = +1$ ,  $s'$  pour  $\varepsilon = -1$  et  $\sigma$  pour  $\varepsilon = 0$  par les formules ( $p = 2\tau$ ) :

$$(1) \begin{cases} x = \frac{\tau}{2} \int c' dc' - c' dc'' - \frac{\tau}{2} \int c'_1 dc'_1 - c'_1 dc''_1 + \frac{\varepsilon\tau}{2} (c' c'_1 - c'' c''_1), \\ y = \frac{\tau}{2} \int c dc'' - c'' dc - \frac{\tau}{2} \int c_1 dc''_1 - c''_1 dc_1 + \frac{\varepsilon\tau}{2} (c'' c_1 - c c''_1), \\ z = \frac{\tau}{2} \int c' dc - c dc' - \frac{\tau}{2} \int c'_1 dc_1 - c_1 dc'_1 + \frac{\varepsilon\tau}{2} (c c'_1 - c' c_1). \end{cases}$$

Darboux indique au Tome III de la *Théorie des Surfaces* l'interprétation géométrique de ces formules (p. 372 et 373). On utilise cette fois deux courbes à torsion constante réelles, ayant leur torsion égale et de signe contraire.

Si la courbe  $(\mathfrak{b}) (c, c', c'')$  et si la courbe  $(\mathfrak{b}_1) (c_1, c'_1, c''_1)$  sont réelles séparément (d'ailleurs distinctes ou non), les trois surfaces  $s, s', \sigma$  sont réelles; on a supposé  $\tau$  réel et désormais je me

borne aux courbes  $(\mathfrak{b})$ ,  $(\mathfrak{b}_1)$  réelles, le mot *réel* étant pris dans l'acception ordinaire (l'acception de M. Goursat étant désormais exclue).

Les formules (1) reviennent à recopier celles du premier Mémoire en divisant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  par  $i$ ; de la sorte on pourra écrire pour la surface  $s$  :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} H = c c_1 + c' c'_1 + c'' c''_1, \\ dv = \frac{\tau}{1-H} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc - dc_1 \\ c' & c'_1 & dc' - dc'_1 \\ c'' & c''_1 & dc'' - dc''_1 \end{vmatrix}, \\ \frac{2 dx}{\tau} = \frac{-dH}{1-H} (c' c''_1 - c'' c'_1) - \frac{c - c_1}{1-H} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc - dc_1 \\ c' & c'_1 & dc' - dc'_1 \\ c'' & c''_1 & dc'' - dc''_1 \end{vmatrix}, \\ du = \frac{\tau}{2} dH \sqrt{\frac{1+H}{1-H}}, \\ dx = -\frac{c' c''_1 - c'' c'_1}{\sqrt{1-H^2}} du + \frac{c_1 - c}{\sqrt{2(1-H)}} dv \sqrt{\frac{1-H}{2}}, \\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + \frac{1-H}{2} dv^2. \end{array} \right.$$

La quantité  $H$  ici est réelle et plus petite que 1 quand on se borne aux points réels de  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}_1$ .

Les formules relatives à la surface  $s'$  s'obtiennent immédiatement en changeant dans ce qui précède  $c_1$ ,  $c'_1$ ,  $c''_1$  de signe. On aura donc à écrire

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} dv' = \frac{\tau}{1+H} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc + dc_1 \\ c' & c'_1 & dc' + dc'_1 \\ c'' & c''_1 & dc'' + dc''_1 \end{vmatrix}, \\ du' = \frac{\tau}{2} dH \sqrt{\frac{1-H}{1+H}}, \\ dx' = -\frac{c' c''_1 - c'' c'_1}{\sqrt{1-H^2}} du' + \frac{c + c_1}{\sqrt{2(1+H)}} dv' \sqrt{\frac{1+H}{2}}, \\ ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = du'^2 + \frac{1+H}{2} dv'^2. \end{array} \right.$$

2. Cette fois il n'y a plus à faire de distinction physique entre une surface  $s$  et une surface  $s'$ ; en effet  $(\mathfrak{b})$  et  $(\mathfrak{b}_1)$  étant supposées réelles, quand on remplace  $(\mathfrak{b})$  par la courbe symé-

trique ( $\mathfrak{W}'$ ),  $s'$  s'échange avec  $s$  et réciproquement.  $H$  a une signification géométrique évidente : c'est le cosinus de l'angle formé par les deux rayons aboutissant en  $(c, c', c'')$  et  $(c_1, c'_1, c''_1)$ . Pour appliquer physiquement, au moins sur une certaine étendue,  $s$  sur  $s'$  il suffit de pouvoir trouver un premier couple  $(c, c', c'')$ ,  $(c_1, c'_1, c''_1)$  sur ( $\mathfrak{W}$ ) et ( $\mathfrak{W}_1$ ) respectivement, puis un second couple  $(\bar{c}, \bar{c}', \bar{c}'')$ ,  $(\bar{c}_1, \bar{c}'_1, \bar{c}''_1)$  encore sur ( $\mathfrak{W}$ ) et ( $\mathfrak{W}_1$ ) fournissant deux angles supplémentaires ou, si l'on préfère, trouver des solutions réelles de l'équation à quatre variables  $t, t_1, \bar{t}, \bar{t}_1$  :

$$(1) \quad cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1 + \bar{c}\bar{c}_1 + \bar{c}'\bar{c}'_1 + \bar{c}''\bar{c}''_1 = 0.$$

L'équation  $H = \text{const.}$  représente sur  $s$  une famille de courbes que j'appellerai encore *parallèles*; connaissant sur  $s$  et  $s'$  respectivement deux parallèles correspondant à deux valeurs égales et de signe contraire de  $H$ , on aura deux infinités de façons d'appliquer  $s$  sur  $s'$  en faisant correspondre arbitrairement un point du parallèle de  $s$  à un point du parallèle de  $s'$ .

Si sur le paraboloidé  $\mathfrak{Q}'$  on pose

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

d'où

$$r^2 = 2pi z,$$

on a comme correspondant du point  $(x, y, z)$  de  $s$  dans l'application  $(s, \mathfrak{Q}')$  le point défini par

$$r = p \sqrt{\frac{1-H}{2}}, \quad \theta = \frac{v}{p},$$

de sorte que le point de  $\mathfrak{Q}'$  correspondant à un point réel de  $s$  a ses coordonnées  $x, y$  réelles, sa coordonnée  $z$  imaginaire pure. Le point de  $\mathfrak{Q}'$  correspondant au point  $(x', y', z')$  de  $s'$  a pour coordonnées

$$r = p \sqrt{\frac{1+H}{2}}, \quad \theta = \frac{v'}{p},$$

de sorte que  $x, y$  sont encore réelles et  $z$  imaginaire pure (1).

(1) De là résulte que  $\mathfrak{Q}'$  roulant sur une surface  $s$  et  $s'$  engendre des systèmes cycliques réels; nous savons que le réseau conjugué commun à  $\mathfrak{Q}'$  et  $s$  pour équation  $\Theta \pm \Theta_1 = \text{const.}$  où  $\Theta$  et  $\Theta_1$  sont les arcs de ( $\mathfrak{W}$ ) et ( $\mathfrak{W}_1$ ).

On voit que le paraboloidé  $\mathcal{U}'$  n'intervient ici, si l'on se borne aux points réels des surfaces  $s$  applicables sur lui, que par les points  $x, y$  réels,  $z$  imaginaire pure; or un tel champ de variation pour  $x, y, z$  n'est pas plus général que le champ  $x, y, z$ , tous réels. Les surfaces applicables sur le paraboloidé réel exigent que l'on prenne des fonctions de variables complexes (tout au moins si l'on veut obtenir une surface réelle); ici, au contraire, on peut se borner à des fonctions de variables réelles, même s'il est impossible d'étendre leur définition pour des valeurs complexes de variables indépendantes.

3. Pour bien faire comprendre ma pensée, on remarquera que l'étude d'une fonction  $f(x) + i\varphi(x)$ , où  $f$  et  $\varphi$  sont deux fonctions réelles de la variable réelle  $x$  n'exige nullement la théorie des fonctions de variable complexe : on peut dériver, intégrer sans avoir besoin de cette théorie. Ce paraboloidé  $x^2 + y^2 = 2\pi iz$  n'aura donc rien de plus spécial qu'une surface réelle, dont on n'étudierait que les points réels. Dans un autre ordre d'idées l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

entraîne, même si l'on se borne aux solutions réelles, l'introduction des fonctions de variable complexe, tandis que l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

n'entraîne que l'étude des fonctions d'une variable réelle et admet pour solutions des expressions

$$z = f(x + y) + \varphi(x - y),$$

où les fonctions  $f$  et  $\varphi$  n'admettent de dérivées que jusqu'à l'ordre 2. Cette propriété a son analogue dans la théorie des surfaces  $s$  définies ici : j'y reviendrai un peu plus loin.

4. On a encore des résultats analogues à ceux du début :  $M$  et  $M'$  se correspondant sur  $s$  et  $s'$ ,  $\rho$  et  $\rho'$  étant les inverses des courbures

totales en  $M$  et  $M'$  respectivement, on a

$$(7) \quad \begin{cases} \rho = -\tau^2(1+H)^2, & \rho' = -\tau^2(1-H)^2, \\ \rho - \rho' = -4\tau^2 H, \\ \sqrt{-\rho} = \tau(1+H), & \sqrt{-\rho'} = \tau(1-H), \\ \sqrt{-\rho} + \sqrt{-\rho'} = 2\tau = p, & \sqrt{-\rho} \times \sqrt{-\rho'} = MM'^2, \end{cases}$$

à condition de prendre  $\sqrt{-\rho}$  et  $\sqrt{-\rho'}$  positivement. La formule  $\sqrt{-\rho} + \sqrt{-\rho'} = p$  montre bien la symétrie des rôles de  $s$  et  $s'$  et ensuite l'on déduit par élévation au carré

$$(8) \quad \begin{cases} 2MM'^2 - \rho - \rho' = p^2, \\ H = \frac{\rho' - \rho}{2MM'^2 - \rho - \rho'}. \end{cases}$$

Comme plus haut, on voit que la connaissance d'une surface  $s$  permet, par des éliminations algébriques, par des extractions de racines carrées et des différentiations de trouver la surface complémentaire  $s'$ , la valeur de  $p$ , de déterminer la courbe  $(\mathfrak{B})$ , la courbe  $(\mathfrak{B}_1)$ , les courbes  $(\mathfrak{A})$  et  $(\mathfrak{A}_1)$ , de tracer sur  $s$  et  $s'$  le réseau des asymptotiques et des parallèles. Seul le tracé des méridiens exige une quadrature sur  $s$  et une nouvelle sur  $s'$ .

La connaissance d'une surface  $s$  réelle permet, par les opérations que je viens d'indiquer (quadratures exclues) de déterminer aussi une infinité d'autres surfaces  $s$  réelles dépendant de trois paramètres de forme nouveaux : il suffit de déplacer  $(\mathfrak{B}_1)$  arbitrairement sur la sphère, laissant  $(\mathfrak{B})$  fixe.

Si les deux courbes  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}_1)$  sont *chacune* analytiquement distinctes de sa symétrique  $(\mathfrak{B}')$  et  $(\mathfrak{B}'_1)$  par rapport au centre de la sphère,  $s$  et  $s'$  sont analytiquement distinctes; si  $(\mathfrak{B})$  coïncide avec  $(\mathfrak{B}')$ , que  $(\mathfrak{B}_1)$  soit ou non distincte de  $(\mathfrak{B}'_1)$ , les deux surfaces  $s$  et  $s'$  sont morceaux d'une même surface analytique.

§. Enfin, si les courbes  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}_1$  sont toutes deux algébriques, il en est de même de  $s$  et  $s'$  et réciproquement. Bornons-nous désormais à supposer  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}_1$  algébriques, ce qui exclura en particulier le cas de courbes et surfaces périodiques. Les surfaces  $s$  et  $s'$  sont alors tout entières à distance finie.

La discussion faite précédemment pour les points à l'infini



**subsiste sans modification : il suffit de** remarquer qu'en prenant l'homothétique d'une surface  $s$  ou  $s'$  avec le rapport d'homothétie  $i$ , on obtient une surface  $S$  ou  $S'$ ; la discussion est faite de façon à ne rien supposer sur la réalité de sorte que l'homothétie en question ne change rien à la disposition des points à l'infini : la section par le plan de l'infini des surfaces  $s$  ou  $s'$  se réduit à une série de droites, tangentes au cercle de l'infini aux points où il est percé par les courbes  $(\mathfrak{w})$  et  $(\mathfrak{w}_1)$ . Il peut arriver que l'on ait deux tangentes conjuguées : le point d'intersection est réel, mais isolé sur la surface  $s$  ou  $s'$ .

Les résultats relatifs à la séparation de deux côtés sur une surface  $s$  ou  $s'$  sont analogues à ceux déjà rencontrés; les cosinus directeurs de la normale à  $s$  sont

$$(9) \quad \frac{c + c_1}{\sqrt{2(H+1)}}, \quad \frac{c' + c'_1}{\sqrt{2(H+1)}}, \quad \frac{c'' + c''_1}{\sqrt{2(H+1)}},$$

ceux de  $s'$  sont

$$(10) \quad \frac{c - c_1}{\sqrt{2(1-H)}}, \quad \frac{c' - c'_1}{\sqrt{2(1-H)}}, \quad \frac{c'' - c''_1}{\sqrt{2(1-H)}}.$$

On peut toujours raisonner sur la surface étudiée en l'appelant  $s'$  : sinon on remplacerait  $(\mathfrak{w}_1)$  par  $(\mathfrak{w}'_1)$  sans toucher à  $(\mathfrak{w})$ . La longueur  $c - c_1, c' - c'_1, c'' - c''_1$  portée à partir de  $M'$  sur la normale en  $M'$  à  $s'$  a pour longueur  $\sqrt{2(1-H)}$ , elle ne peut devenir nulle que si le point  $m$  de coordonnées  $(c, c', c'')$  pris sur  $(\mathfrak{w})$  appartient aussi à  $(\mathfrak{w}_1)$ . Cela posé, supposons que  $(\mathfrak{w})$  et  $(\mathfrak{w}')$ , d'une part, soient analytiquement confondues et que  $(\mathfrak{w}_1)$  et  $(\mathfrak{w}'_1)$ , d'autre part, le soient aussi; nous supposons  $\mathfrak{w}$  et  $\mathfrak{w}_1$  distinctes; si le point  $m(c, c', c'')$  pris sur  $(\mathfrak{w})$  est relié au point diamétralement opposé  $m'$ , qui appartient aussi à  $(\mathfrak{w})$  par un arc continu réel de  $(\mathfrak{w})$  (cela arrivera certainement si la courbe  $\mathfrak{w}$  ne comprend qu'un seul trait), et si le point  $m_1(c_1, c'_1, c''_1)$  pris sur  $\mathfrak{w}_1$  possède la même propriété relativement à  $m'_1$ , on pourra imaginer un premier mobile partant de  $m$  et allant en  $m'$  sur  $(\mathfrak{w})$ , et un second mobile partant en même temps de  $m_1$  pour arriver au même moment en  $m'_1$ , la marche des deux mobiles étant réglée de façon qu'ils ne passent pas au même instant aux points de croisement  $(\mathfrak{w})$  et  $(\mathfrak{w}_1)$ , s'il en existe; dans ces conditions, le vec-

teur  $c - c_1$ ,  $c' - c'_1$ ,  $c'' - c''_1$  ne s'annule jamais et suivi par continuité revient au point de départ avec le sens opposé : il existe donc une infinité de circuits réels changeant le sens de la normale.

Si toutes les conditions énoncées ne sont pas remplies, c'est-à-dire si l'une des courbes  $(\mathfrak{B})$  ou  $(\mathfrak{B}_1)$  ou toutes deux sont distinctes de leur symétrique  $(\mathfrak{B}')$  ou  $(\mathfrak{B}'_1)$ ; ou bien si  $(\mathfrak{B})$ , par exemple, étant analytiquement confondue avec  $(\mathfrak{B}')$ , les deux points  $m$  et  $m'$  appartiennent à deux traits physiquement séparés de  $\mathfrak{B}$ , le point  $M'$  appartient à une nappe de  $S'$  qui possède deux côtés bien distincts au point de vue *physique*; ce résultat subsiste alors même si  $\mathfrak{B}$  coïncide avec  $\mathfrak{B}_1$ , mais alors l'existence d'un centre de symétrie pour  $s'$  complique la démonstration : je renvoie au premier Mémoire.

En supposant toujours  $(\mathfrak{A})$ ,  $(\mathfrak{A}_1)$  algébriques, si la courbe  $(\mathfrak{B})$  est distincte de sa symétrique  $(\mathfrak{B}')$  et si elle se compose de  $p$  arcs réels séparés, la courbe  $(\mathfrak{A})$  se compose aussi de  $p$  arcs réels séparés : la raison en est que si tout est algébrique il y a une correspondance birationnelle entre les coordonnées d'un point de  $(\mathfrak{A})$  et celles d'un point de  $(\mathfrak{B})$ . Si la courbe  $(\mathfrak{B})$  est confondue analytiquement avec sa symétrique et se compose de plusieurs arcs réels séparés, un certain nombre  $p_1$  sont chacun son propre symétrique, les autres en nombre pair  $2q_1$  sont deux à deux symétriques : dans ces conditions, la courbe  $(\mathfrak{A})$  se compose de  $p_1 + q_1$  arcs séparés; la raison en est que la section par le plan  $z = 1$  du cône qui a son sommet au centre de la sphère et s'appuie sur  $(\mathfrak{B})$  se compose de  $p_1 + q_1$  arcs séparés et que cette section et  $(\mathfrak{A})$  sont liées birationnellement. Ayant ainsi déterminé le nombre  $P$  d'arcs séparés de  $(\mathfrak{A})$  et le nombre  $P_1$  relatif à  $(\mathfrak{A}_1)$ , chaque surface  $s$  ou  $s'$  se compose de  $PP_1$  nappes, physiquement distinctes, chacune connexe; les indications précédentes permettent de reconnaître si chaque nappe a deux côtés *physiquement* distincts ou non [le résultat peut varier pour chaque nappe si  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}')$  sont confondues et en même temps  $(\mathfrak{B}_1)$  et  $(\mathfrak{B}'_1)$ ].

Les points communs à  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}_1)$  fournissent un point singulier sur la surface  $s'$  et ceux communs à  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}'_1)$  un point singulier sur  $s$ .

6. Enfin tout ce qui a été dit pour les symétries, et éventuelle-

ment leur espèce, première ou seconde, s'applique sans changement en passant du paraboloidé  $\mathcal{Q}$  au paraboloidé  $\mathcal{Q}'$  : la condition nécessaire et suffisante pour que les trois surfaces (algébriques)  $s$ ,  $s'$ ,  $\sigma$  aient un centre de symétrie, d'ailleurs commun, est que  $(\mathfrak{W})$  coïncide avec  $(\mathfrak{W}_1)$  ou  $(\mathfrak{W}'_1)$ ; les cônes des tangentes au centre, qui est point conique, se déterminent sans changement. Ici pour les surfaces réelles il ne s'agit que de courbes réelles au sens vulgaire : c'est la seule différence entre les deux études.

De même pour que les trois surfaces algébriques  $s$ ,  $s'$ ,  $\sigma$  aient un plan de symétrie, il faut et il suffit que  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  soient symétriques l'une de l'autre soit par rapport à ce plan, soit par rapport au diamètre perpendiculaire.

Pour que les trois surfaces  $s$ ,  $s'$ ,  $\sigma$  admettent un axe de rotation  $\frac{2\pi}{m}$ , il faut et il suffit que les deux courbes  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  possèdent simultanément la propriété soit de se reproduire chacune par cette même rotation, soit de s'échanger chacune avec sa symétrique  $\mathfrak{W}'$  ou  $\mathfrak{W}'_1$ .

Les courbes à torsion constante algébriques que j'ai données en grand nombre fournissent donc sans effort un grand nombre d'exemples de surfaces algébriques possédant les divers types de symétrie et rotation.

7. Le paraboloidé  $\mathcal{Q}'$   $x^2 + y^2 = 2pz$  ne joue qu'un rôle effacé dans cette étude : il est facile de construire des surfaces de révolution réelles ayant le même  $ds^2$ . En effet en posant

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

le  $ds^2$  de  $\mathcal{Q}'$  est

$$(11) \quad ds^2 = dr^2 \left( 1 - \frac{r^2}{p^2} \right) + r^2 d\theta^2.$$

On aura une surface de révolution réelle en posant

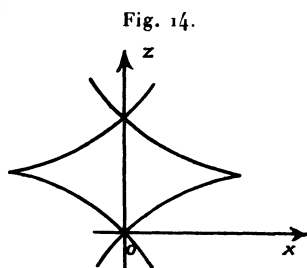
$$(12) \quad \begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta_1, & y_1 = r_1 \sin \theta_1, & r_1 = ar, & \theta = \frac{\theta_1}{a}, \\ dz_1 = dr \sqrt{1 - a^2 - \frac{r^2}{p^2}}, \end{cases}$$

où  $a$  est une constante réelle quelconque comprise entre 0 et 1.

On a aisément les formules paramétriques

$$(13) \quad \begin{cases} r_1 = ap \sqrt{1 - a^2} \sin \varphi, \\ z_1 = (1 - a^2)p \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right), \end{cases}$$

pour représenter la méridienne : on a ainsi une courbe fermée de forme indiquée par la figure 14, se reproduisant périodiquement



par translation le long de l'axe  $Oz$ . Quand  $a$  varie, toutes ces méridiennes sont des transformées homographiques simples de l'une d'elles ou de la courbe

$$(14) \quad \begin{cases} X = \sin \varphi, \\ Y = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}. \end{cases}$$

Ces surfaces sont les surfaces  $s$  correspondant à une courbe  $\mathfrak{w}$  et  $\mathfrak{w}_1$  coïncidant toutes deux avec un même petit cercle réel de la sphère;  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}_1$  sont deux hélices circulaires tracées sur un même cylindre de révolution, symétriques l'une de l'autre par rapport à un méridien.

Si  $(\mathfrak{w})$  et  $(\mathfrak{w}_1)$  sont deux petits cercles parallèles de la sphère, on obtient un hélicoïde applicable sur  $\mathcal{Q}'$ .

8. Chaque couple associé  $SS'$  applicable sur le parabolôïde  $x^2 + y^2 = 2pz$ , chaque couple  $ss'$  relatif au parabolôïde  $x^2 + y^2 = 2pi z$  définit une congruence de normales à une surface  $W$  dont on obtient aisément la relation caractéristique entre les rayons de courbure principaux.

Nous savons qu'étant donnée une surface  $W$ , ses deux développées  $\Sigma, \Sigma'$  et les points correspondants  $P, M, M'$  de ces surfaces

sur la normale en  $P$  à  $W$ , si l'on fait rouler sans glissement  $\Sigma$  sur une surface  $\Sigma_1$  applicable sur elle, la droite  $PMM'$  invariablement liée à  $\Sigma$  dans ce mouvement prend la position  $P_1M_1M'_1$  quand  $M$  s'applique sur le point homologue de  $\Sigma_1$ ;  $P_1$  engendre une surface  $W_1$  correspondant à la même relation que  $W$ ,  $M_1$  et  $M'_1$  étant les deux centres de courbure relatifs à  $P_1$  sur  $W_1$ .

Considérons donc une surface  $S$ , réduisons-la à  $\mathcal{Q}$ ,  $S'$  se réduit à l'axe de révolution de  $\mathcal{Q}$ ; la surface  $W$  est la surface de révolution admettant pour méridienne la développante de parabole  $x^2 = 2pz$  passant par exemple par le sommet. On trouve aisément qu'en posant  $x = p \operatorname{sh} \frac{\omega}{2}$ , on a le droit d'écrire en grandeur et signe,  $R$  et  $R'$  étant alors de signe contraire,

$$(15) \quad \begin{cases} R = PM = \frac{p}{4}(\omega + \operatorname{sh} \omega), \\ R' = PM' = \frac{p}{4}(\omega - \operatorname{sh} \omega), \end{cases}$$

ou encore

$$(16) \quad \begin{cases} 2(R - R') = p \operatorname{sh} \omega, \\ 2(R + R') = p \omega; \end{cases}$$

d'où la relation caractéristique

$$(17) \quad 2 \left( \frac{R - R'}{p} \right) = \operatorname{sh} \left( \frac{2R + 2R'}{p} \right).$$

Pour les surfaces  $s$  et  $s'$ , inutile de recommencer un calcul : il suffit, dans les formules générales (17), de remplacer  $p$  par  $pi$ ; on trouve ainsi

$$(18) \quad 2 \left( \frac{R - R'}{p} \right) = \sin \left( \frac{2R + 2R'}{p} \right).$$

L'étude qui précède, suite de celle que Darboux avait amorcée, donne le moyen d'obtenir explicitement toutes les surfaces, réelles ou non, satisfaisant à la relation (17) et à la relation (18). Les formules renferment six quadratures, à savoir les trois quadratures

$$\int c'' dc' - c' dc'', \quad \int c dc'' - c'' dc, \quad \int c' dc - c dc'$$

pour obtenir la courbe (16), et les trois quadratures analogues

relatives à  $\mathcal{A}_1$ ; on remarquera que les quadratures donnant les fonctions  $v$  et  $v'$ , c'est-à-dire les méridiens des surfaces  $S$  et  $S'$  (ou  $s$  et  $s'$  suivant le cas) ne sont pas nécessaires pour avoir les surfaces  $W$ : mais ces deux quadratures supplémentaires donnent les lignes de courbure de la surface  $W$ .

9. Il est intéressant de remarquer que les formules du début de ce Chapitre

$$(19) \quad x = \frac{\pi}{2} \int c'' dc' - c' dc'' - \frac{\pi}{2} \int c_1'' dc'_1 - c'_1 dc''_1 + \frac{\pi\pi}{2} (c' c''_1 - c'' c'_1) \dots$$

et celles qui définissent  $H$ ,  $v$ ,  $v'$  supposent simplement que  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  admettent des dérivées du premier ordre. Supposons, par exemple, que nous considérons la fonction devenue classique depuis Weierstrass

$$(20) \quad f(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos \pi a^n t,$$

où  $a$  est un entier positif impair  $\geq 3$ ,  $b$  un nombre positif tel que

$$(21) \quad \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{a} < b < 1.$$

Cette fonction est continue pour toute valeur de  $t$ , intégrable dans tout intervalle, mais n'a pas de dérivée.

Je prends  $c$  égal à la primitive de cette fonction, de sorte que  $c$  est dérivable une seule fois; prenons pour  $c'$  une fonction continue quelconque de  $t$  dérivable soit au moins une fois, soit une seule fois, et calculons  $c''$  par la formule  $c'' = \sqrt{1 - c^2 - c'^2}$ , de sorte que  $c''$  est continue et dérivable comme  $c$  et  $c'$ , une seule fois comme  $c$ . Pour les fonctions  $c_1$ ,  $c'_1$ ,  $c''_1$  de la variable  $t_1$ , nous choisirons soit des fonctions usuelles, dérivables indéfiniment, soit des fonctions analogues à  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ .

Il est clair que les formules (19) définissent alors  $x$ ,  $y$ ,  $z$  comme fonctions continués de  $t$  et  $t_1$ , admettant des dérivées partielles par rapport à  $t$ ,  $t_1$ , mais non susceptibles d'être dérivées deux fois par rapport à  $t$ . On a ainsi une surface définie *analytiquement*, constituée par un ensemble de points  $x$ ,  $y$ ,  $z$  qui ont la puissance

du continu et se déplacent d'une façon continue quand  $t$  et  $t_1$  varient eux-mêmes d'une façon continue; en chaque point, il existe un plan tangent bien déterminé.

Puisque les éléments différentiels du second ordre manquent, il semblerait devoir être impossible de parler de directions asymptotiques, de directions principales, de lignes asymptotiques, de lignes de courbure. On peut pourtant, et c'est là le fait extrêmement curieux, définir ces éléments, analytiquement bien entendu, avec un certain nombre (sinon toutes) de leurs propriétés géométriques usuelles.

Cela tient à ce que les paramètres directeurs de la normale ne font pas intervenir les éléments, différentiels du premier ordre, à cause du choix particulier de l'exemple, si l'on se borne aux surfaces  $s$  et  $s'$  ( $\varepsilon = +1$  et  $\varepsilon = -1$ ), la surface  $\sigma$  ( $\varepsilon = 0$ ) étant au contraire privée de *lignes* asymptotiques ou de courbure ou même simplement de *directions* asymptotiques ou de courbure en chaque point.

J'ai dit qu'on pouvait pour  $s$  et  $s'$  se borner à  $\varepsilon = +1$  et la surface  $s$ , sinon on changerait  $c_1, c'_1, c''_1$  de signe. On a

$$(22) \quad \frac{2}{\tau} \frac{dx}{\tau} = (c'' + c''_1)(dc' - dc'_1) - (c' + c'_1)(dc'' - dc''_1)$$

et formules analogues d'où l'on déduit

$$(23) \quad (c + c_1) dx + (c' + c'_1) dy + (c'' + c''_1) dz = 0,$$

ce qui prouve, comme on l'a remarqué déjà, que

$$(24) \quad c + c_1, \quad c' + c'_1, \quad c'' + c''_1$$

sont les paramètres directeurs de la normale. Les directions asymptotiques peuvent donc être définies par l'équation

$$(25) \quad dx d(c + c_1) + dy d(c' + c'_1) + dz d(c'' + c''_1) = 0,$$

à défaut de l'équation

$$(26) \quad (c + c_1) d^2 x + (c' + c'_1) d^2 y + (c'' + c''_1) d^2 z = 0,$$

qui n'existe pas ici. Les lignes asymptotiques sont donc définies par la propriété d'admettre une tangente perpendiculaire à celle

de la représentation sphérique : d'ailleurs, l'équation (25) se réduit à la relation  $dt dt_1 = 0$  qui est bien intégrable.

Le fait que le plan tangent existe en chaque point de  $s$  permet de parler de la représentation sphérique et le fait que les paramètres de la normale ne font pas intervenir les éléments différentiels permettent de plus de parler de tangentes aux courbes images sphériques de courbes de la surface  $s$ , quand celles-ci ont une tangente. Mais il ne saurait être ici question de dire que le plan osculateur de la ligne asymptotique est tangent à la surface, car nous pouvons bien définir la différentielle première mais non la différentielle seconde des coordonnées sur une telle courbe.

L'équation habituelle

$$(27) \quad \frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq}$$

définit en chaque point deux directions, puisque

$$p = -\frac{c + c_1}{c'' + c_1''}, \quad q = -\frac{c' + c_1'}{c'' + c_1''},$$

ces deux directions que nous pouvons appeler « directions principales » sont conjuguées par rapport aux directions asymptotiques et de plus rectangulaires (conjuguées par rapport aux lignes de longueur nulle). Pour définir les lignes de courbure elles-mêmes, comme enveloppe de directions principales, mais non par développables de normales, il faut résoudre l'équation du second degré en  $\frac{dt_1}{dt}$ ; on a ainsi l'une ou l'autre de deux équations

$$(28) \quad \frac{dt_1}{dt} = F_1(t, t_1), \quad \frac{dt_1}{dt} = F_2(t, t_1),$$

où les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont continues en  $t$  et  $t_1$ , sans admettre de dérivées partielles du premier ordre. Je ferai remarquer que, avec la fonction de Weierstrass introduite plus haut, la condition de Cauchy-Lipschitz n'est pas vérifiée pour les équations (28), de sorte qu'il faut une discussion plus détaillée pour résoudre si l'existence de lignes de courbure est ou non réalisée : la réponse est fournie par la thèse de M. Montel : les équations (28) peuvent être intégrées, mais il existe une *infinité* de lignes de courbure passant par chaque point et tangentes à l'une des deux directions



principales : M. Montel a défini ce qu'il faut entendre par l'*estuaire* de courbes intégrales en chaque point.

Il ne peut être question sur la surface  $s$  de définir des rayons de courbure principaux individuellement. Mais on peut évaluer une aire infiniment petite sur  $s$  et l'aire correspondante sur la représentation sphérique; le rapport tend vers une limite calculée plus haut.

$$(29) \quad \frac{-4}{\rho^2(1+H)^2},$$

qui représente la courbure totale.

La surface  $s$  se trouve être applicable sur le parabolôïde imaginaire  $\mathcal{U}'$  ou, si l'on préfère, sur l'une quelconque des nombreuses surfaces réelles qui ont été indiquées. Pour l'applicabilité, il est strictement suffisant que les longueurs d'arcs se conservent, mais ici de plus aux points correspondants, comme la courbure totale a pu être définie, il y a conservation de la courbure totale aux points correspondants.

D'autres exemples de cette nature peuvent être réalisés avec les formules de Lelievre donnant une surface rapportée à ses lignes asymptotiques; ici c'était bien par les formules de Lelievre que nos surfaces étaient définies.

Sur la surface  $s$  ou  $s'$  de ce paragraphe nous connaissons un réseau formé de géodésiques et de leurs courbes conjuguées : sur  $s$ , les courbes  $\nu = \text{const.}$  obtenues par une quadrature sont géodésiques, au titre de chemin minimum sur la surface entre deux points d'une région suffisamment petites, mais non pour une raison déduite du plan osculateur; les courbes  $\nu'$  sont conjuguées des précédentes, parce que les tangentes à deux courbes  $\nu$  et  $\nu'$  qui se coupent en un point sont conjuguées par rapport aux deux directions asymptotiques au même point.

Enfin la surface  $s$  de ce paragraphe permet de trouver une surface  $W$  bien définie, admettant en chaque point un plan tangent, deux directions asymptotiques, deux directions principales, deux rayons de courbure principaux; sur cette surface  $W$  on peut même tracer deux séries de lignes de courbure. En effet, d'après les formules (2) de ce Chapitre, la tangente en  $M$  à la géodésique  $\nu = \text{const.}$  de  $s$  a pour cosinus directeurs dans le sens des  $u$

croissants

$$(30) \quad -\frac{c'c_1'' - c''c_1'}{\sqrt{1-H^2}}, \quad -\frac{c''c_1 - c'c_1''}{\sqrt{1-H^2}}, \quad -\frac{cc_1' - c'c_1}{\sqrt{1-H^2}},$$

et l'on porte sur cette direction positive une longueur égale à  $-u$ , puisque  $u$  est l'arc de la géodésique : le point de coordonnées

$$(31) \quad \frac{\tau}{2} \int c'' dc' - c' dc'' - \frac{\tau}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'' + \frac{\tau}{2} (c'c_1'' - c''c_1') \\ + \frac{c'c_1'' - c''c_1'}{\sqrt{1-H^2}} u \dots$$

décrit la surface  $W$  annoncée : la normale s'obtient par les formules (30) qui ne font pas non plus intervenir les éléments différentiels; donc les directions asymptotiques et principales existent en chaque point, exactement comme pour  $s$ . L'équation différentielle des lignes de courbure s'intègre, car elle se réduit à  $dv dv' = 0$ ; on peut donc définir pour rayons de courbure principaux les distances de ce point à  $M$  et  $M'$ ; le long des lignes de courbure, la normale à  $W$  a une enveloppe. Mais cette fois l'équation différentielle des lignes asymptotiques définit en chaque point un estuaire de lignes asymptotiques tangentes à chaque direction asymptotique.

Nous avons donc bien établi la différence qui existe entre les deux équations aux dérivées partielles signalées plus haut :

$$2 \left( \frac{R - R'}{p} \right) = \text{sh} \left( \frac{2R + 2R'}{p} \right)$$

et

$$\frac{2(R - R')}{p} = \sin \left( \frac{2R + 2R'}{p} \right).$$

---

#### APPENDICE.

L'étude que j'ai entreprise dans ces deux Mémoires répond en somme à la question mise au concours par Darboux pour la fin de

l'année 1904; il proposait d'étudier, surtout au point de vue algébrique, les surfaces applicables sur le parabolôïde.

M. Servant, dans son Mémoire couronné, a traité la question dans un esprit tout différent.

La conception de Darboux exigeait en réalité l'étude préalable des courbes algébriques à torsion constante; cette question nouvelle fut mise au concours pour la fin de l'année 1914; je l'ai traitée dans un Mémoire récompensé par l'Académie.

Le 13 mars 1905, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 104, 1905, Darboux a développé succinctivement quelques points de la théorie du parabolôïde et ce n'est qu'après impression des deux Mémoires de ce Bulletin que j'ai pris connaissance de cette Note de Darboux. Darboux signale, sans commentaire, que chaque surface  $S$  recouvre physiquement  $\mathcal{Q}$ , mais que chaque surface  $S'$  et  $\mathcal{Q}$  se correspondent uniquement point réel pour point imaginaire. Malgré la Note de Darboux, cette circonstance curieuse n'a donné lieu à aucun travail avant les deux Mémoires que j'ai donnés sur ce sujet en 1920 et 1921 au *Bulletin des Sciences mathématiques*. Je me trouve avoir du même coup répondu à un désir exprimé au sujet des systèmes cycliques réels par Darboux (*Théorie des Surfaces*, t. 4, p. 162).

Dans cette Note de 1905, Darboux signale la cubique de M. Lyon comme la courbe à torsion constante la plus simple et indique les surfaces  $S$  et  $S'$  qui en dérivent : il n'y a qu'un changement insignifiant entre les notations de Darboux et les miennes. Sous la direction de Darboux, M. Estanave a construit des modèles en plâtre de ces deux surfaces particulières; ces deux modèles sont déposés à la Sorbonne et photographiés dans l'article de M. Estanave (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. 29, 1905). M. Estanave se contentant de construire diverses sections planes parallèles de ces surfaces, son étude ne fait pas double emploi avec la mienne.

Darboux termine sa Note en proposant de construire toutes les courbes unicursales à torsion constante, imaginaires déduites de l'identité de Bezout à quatre polynômes

$$AD - BC \equiv 1.$$

J'ai résolu cette question complètement dans une Note présentée

par Darboux à l'Académie le 22 janvier 1917, quelques jours avant sa mort.

La question du parabolöide était restée chère à Darboux : il en avait exposé le prélude dans le Tome III de la *Théorie des Surfaces*; je regrette que la mort ait empêché Darboux de lire et de juger l'étude insérée dans ce Bulletin.

---