BULLETIN DE LA S. M. F.

A. ANGELESCO

Sur les polynômes orthogonaux et des extensions d'une formule de Rodrigues

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 111-118

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__111_0>

SUR LES POLYNOMES ORTHOGONAUX ET DES EXTENSIONS D'UNE FORMULE DE RODRIGUES ;

PAR M. A. ANGELESCO.

Dans ce qui va suivre, nous indiquerons deux propriétés générales des polynomes orthogonaux auxquelles nous rattacherons des formules qui sont des extensions de la formule de O. Rodrigues :

$$(1)\qquad \frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{3.5\ldots(2n+1)}{n+1} \sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x].$$

On sait que, $\varphi(x)$ étant une fonction intégrable et gardant un signe constant pour x dans un intervalle a, b, les n conditions

$$(2)\qquad \int_a^b \varphi(x)\, x^i\, P_n(x)\, dx = 0,$$

où l'on donne à i toutes les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, déterminent, à un facteur constant près, le polynome $P_n(x)$ de degré n en x. La relation

$$\int_a^b \varphi(x)\, P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0,$$

pour m différent de n, est une conséquence des conditions (2).

Soit $K_m(x)$ un polynome de degré m en x gardant un signe constant pour x dans l'intervalle a, b.

1. Nous allons établir premièrement une relation entre le polynome $Q_r(x)$, de degré r en x, satisfaisant aux r conditions

$$(3)\qquad \int_a^b \varphi(x)\, K_m\, Q_r x^i\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-1)$$

et les polynomes de la suite P_0, P_1, ... Posons pour cela

$$K_m(x)\, Q_r = A_{m+r}\, P_{m+r} + A_{m+r-1}\, P_{m+r-1} + \ldots + A_0 P_0.$$

Il résulte immédiatement des conditions (2) et (3) que

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{r-1} = 0;$$

il nous restera donc

$$(4) \qquad K_m Q_r = A_{m+r} P_{m+r} + A_{m+r-1} P_{m+r-1} + \ldots + A_r P_r.$$

Ceci nous montre que, si l'on connaît les polynomes P_r, P_{r+1}, ..., P_{r+m}, on pourra déterminer, en écrivant qu'un polynome de degré $m+r$ est identiquement nul, les constantes A_r, A_{r+1}, ..., A_{r+m} et le polynome Q_r. Ou bien, si l'on suppose connues les racines de $K_m(x) = 0$ et en les désignant par α_1, α_2, ..., α_m, on a, en éliminant A_r, A_{r+1}, ..., A_{r+m} entre la relation (4) et les m autres qui en résultent en faisant successivement x égal à α_1, α_2, ..., α_m dans cette relation :

$$(5) \qquad Q_r(x) = \frac{1}{K_m(x)} \begin{vmatrix} P_r(x) & P_{r+1}(x) & \ldots & P_{r+m}(x) \\ P_r(\alpha_1) & P_{r+1}(\alpha_1) & \ldots & P_{r+m}(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_r(\alpha_m) & P_{r+1}(\alpha_m) & \ldots & P_{r+m}(\alpha_m) \end{vmatrix}.$$

S'il y a des racines multiples, on trouve immédiatement le déterminant qui doit remplacer le déterminant du second membre de (5). Par exemple, si $\alpha_1 = \alpha_2$, on fera alors $x = \alpha_1$ dans la relation (4) et dans la dérivée de cette relation par rapport à x.

Cas particuliers. — 1° Considérons le cas

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad K_m(x) = (1-x^2)^p.$$

Les polynomes P_n et Q_n sont, dans ce cas, des cas particuliers des polynomes de Jacobi :

$$P_n = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^n (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} \quad \text{et} \quad Q_n = (1-x^2)^{-p-\frac{1}{2}} \frac{d^n (1-x^2)^{n+p+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

La relation (4) deviendra

$$(6) \qquad \frac{d^r (1-x^2)^{r+p+\frac{1}{2}}}{dx^r} = \sum_{i=0}^{i=2p} A_{r+i} \frac{d^{r+i} (1-x^2)^{r+i+\frac{1}{2}}}{dx^{r+i}}.$$

Remarquons que le développement de $(1-x^2)^p$, suivant les polynomes

$$(1-x^2)^{-r-\frac{1}{2}} \frac{d^n (1-x^2)^{n+r+\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

fait intervenir les mêmes coefficients A_{r+i}. En effet, en multipliant par $(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}$ les deux membres du développement

$$(7)\qquad (1-x^2)^p = \sum_{i=0}^{i=2p} A_{r+i}(1-x^2)^{-r-\frac{1}{2}} \frac{d^i(1-x^2)^{i+r+\frac{1}{2}}}{dx^i}$$

et en prenant ensuite la dérivée d'ordre r des deux membres, nous retrouvons la relation (6). Nous allons nous servir du développement (7) pour le calcul des coefficients A_{r+i}. Les coefficients A_{r+i}, où i est impair, sont nuls, on le voit en changeant x en $-x$ dans (7). Posons, pour pouvoir utiliser des résultats connus,

$$P_n(x, r) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2r+2)(2r+3)\ldots(2r+n+1)}{(2r+3)(2r+5)\ldots(2r+2n+1)} \times (1-x^2)^{-r-\frac{1}{2}} \frac{d^n(1-x^2)^{n+r+\frac{1}{2}}}{dx^n};$$

le polynome $P_n(x, r)$ est [1] le coefficient de α^n dans le développement suivant les puissances de α de $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-r-1}$. Alors, en posant

$$(8)\qquad A_{r+2k} = \frac{1}{(2k)!} \frac{(2r+2)(2r+3)\ldots(2r+2k+1)}{(2r+3)(2r+5)\ldots(2r+4k+1)} a_k,$$

le développement (7) deviendra

$$(1-x^2)^p = \sum_{k=0}^{k=p} a_k P_{2k}(x, r),$$

et l'on déduit, en vertu de l'orthogonalité des polynomes $P_n(x, r)$,

$$(9)\qquad a_k \int_{+1}^{+1} (1-x^2)^{r+\frac{1}{2}} P_{2k}^2(x, r)\, dx = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{p+r+\frac{1}{2}} P_{2k}(x, r)\, dx.$$

L'intégrale du premier membre se calcule [2] facilement, et

(1) *Voir*, par exemple, notre Thèse *Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples*, où, dans la première Partie, nous étudions les polynomes plus généraux $P_n(x, \lambda)$, λ un paramètre quelconque.

(2) *Loc. cit.*, p. 17.

l'on trouve

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}\mathrm{P}_{2k}^2(x,\, r)\,dx$$

$$=\frac{r+1}{r+2k+1}\,\frac{(2r+2)(2r+3)\ldots(2r+2k+1)}{(2k)!}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(r+2)}.$$

Désignons par I_k l'intégrale du second membre de (9). Alors de la relation récurrente ([1])

$$k\,\mathrm{P}_{2k}(x,\, r)-x(r+2k)\mathrm{P}_{2k-1}(x,\, r)+(r+k)\mathrm{P}_{2k-2}(x,\, r)=0,$$

on déduit

$$(10)\quad k\mathrm{I}_k+(r+k)\mathrm{I}_{k-1}=\int_{-1}^{+1}(r+2k)x\,\mathrm{P}_{2k-1}(x,\, r)\,(1-x^2)^{p+r+\frac{1}{2}}\,dx.$$

Mais, de la relation ([2])

$$(1-x^2)\mathrm{P}'_{2k-1}(x,\, r)+(2k-1)x\mathrm{P}_{2k-1}(x,\, r)-2(k+r)\mathrm{P}_{2k-2}(x,\, r)=0,$$

on déduit facilement

$$\int_{-1}^{+1}x(1-x^2)^{p+r+\frac{1}{2}}\,\mathrm{P}_{2k-1}(x,\, r)\,dx=\frac{k+r}{p+r+k+1}\,\mathrm{I}_{k-1}.$$

La relation (10) nous donne donc

$$\mathrm{I}_k=-\frac{(r+k)(p+1-k)}{k(r+p+k+1)}\,\mathrm{I}_{k-1};$$

d'où, de proche en proche,

$$\mathrm{I}_k=(-1)^k\,\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+k)}{k!}$$
$$\times\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(r+p+2)(r+p+3)\ldots(r+p+k+1)}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(p+r+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(p+r+2)}.$$

Par suite, de (9), la valeur de a_k,

$$a_k=(-1)^k\,\frac{r+2k+1}{4^k}\,\frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+1)}$$
$$\times\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-k+1)}\,\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+k+p+2)}\,\frac{\Gamma\left(r+p+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(r+k+\frac{3}{2}\right)}.$$

([1]) *Loc. cit.*, p. 18.
([2]) *Loc. cit.*, p. 20.

En remplaçant finalement, dans la relation (6), les A_{r+2k} par leurs valeurs (8) et les différentielles du second membre par leurs expressions trigonométriques données par la formule de Rodrigues (1), nous trouvons la formule

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^r\Gamma\left(r+p+\frac{3}{2}\right)}\frac{d^r(1-x^2)^{r+p+\frac{1}{2}}}{dx^r}$$
$$=\sum_{k=0}^{k=p}\frac{(-1)^{r+k}}{k!}\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(r+k+1)(r+k+2)\ldots(r+k+p+1)}$$
$$\times\sin[(r+2k+1)\arc\cos x].$$

2° Considérons encore le cas

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\qquad\text{et}\qquad K_m(x)=(1+x)^p(1-x)^q.$$

Les polynomes P_n seront les mêmes que précédemment et les polynomes Q_n seront encore des cas particuliers des polynomes de Jacobi :

$$Q_n=(1+x)^{-p-\frac{1}{2}}(1-x)^{-q-\frac{1}{2}}\frac{d^n(1+x)^{n+p+\frac{1}{2}}(1-x)^{n+q+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

La relation (4) deviendra

$$(11)\qquad\frac{d^r(1+x)^{r+p+\frac{1}{2}}(1-x)^{r+q+\frac{1}{2}}}{dx^r}=\sum_{i=0}^{i=p+q}A_{r+i}\frac{d^{r+i}(1-x^2)^{r+i+\frac{1}{2}}}{dx^{r+i}},$$

relation qui peut être envisagée comme une conséquence du développement

$$(12)\qquad(1+x)^p(1-x)^q=\sum_{i=0}^{i=p+q}A_{r+i}(1-x^2)^{-r-\frac{1}{2}}\frac{d^i(1-x^2)^{i+r+\frac{1}{2}}}{dx^i}.$$

La relation (11) comparée à la formule de Rodrigues nous montre que l'on a aussi

$$(13)\qquad\frac{d^r(1+x)^{r+p+\frac{1}{2}}(1-x)^{r+q+\frac{1}{2}}}{dx^r}=\sum_{i=0}^{i=p+q}B_i\sin[(i+r+1)\arc\cos x].$$

Dans des cas simples, les coefficients B_i se calculent facilement à l'aide du développement (12). Par exemple, si $p=1$ et $q=0$, le développement (12) se réduira à

$$(1+x) = 1 - \frac{1}{2r+3}(1-x^2)^{-r-\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)^{r+\frac{3}{2}}}{dx}.$$

En écrivant la relation (11) correspondante, et en tenant compte de la formule de Rodrigues, on arrive, après avoir changé r en $r-1$, à la relation

$$\frac{(-1)^{r-1}}{3.5\ldots(2r-1)} \frac{d^{r-1}(1+x)^{r+\frac{1}{2}}(1-x)^{r-\frac{1}{2}}}{dx^{r-1}} = \frac{\sin[(r+1)\operatorname{arc}\cos x]}{r+1} + \frac{\sin(r \operatorname{arc}\cos x)}{r}.$$

2. Considérons le polynome $R_r(x)$, de degré r en x, satisfaisant aux r conditions

$$(14) \qquad \int_a^b \frac{\varphi(x)}{K_m(x)} x^i R_r \, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Supposons $r > m$ et posons $r = m+n$. En multipliant les $m+n$ relations (14) par les coefficients du polynome $K_m(x)$ et en les associant convenablement, on déduit que le polynome R_{m+n} satisfait aux n conditions

$$(15) \qquad \int_a^b \varphi(x) x^i R_{m+n} \, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

On aura donc une égalité de la forme

$$(16) \qquad R_{m+n} = b_0 P_n + b_1 P_{n+1} + \ldots + b_m P_{n+m}.$$

Les n conditions (15) et les m conditions

$$(17) \qquad \int_a^b \frac{\varphi(x)}{K_m(x)} x^i R_{m+n} \, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

sont équivalentes aux $m+n$ conditions (14). Si l'on pose alors

$$I_{u,v} = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{K_m(x)} x^u P_v \, dx,$$

on tire de (16) et (17)

$$R_{m+n}(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & \ldots & P_{m+n}(x) \\ I_{0,n} & I_{0,n+1} & \ldots & I_{0,m+n} \\ I_{1,n} & I_{1,n+1} & \ldots & I_{1,m+n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{m-1,n} & I_{m-1,n+1} & \ldots & I_{m-1,m+n} \end{vmatrix}.$$

On a ainsi une expression du polynome $R_{m+n}(x)$ à l'aide des polynomes $P_n(x)$, $P_{n+1}(x)$, ..., $P_{m+n}(x)$.

Cas particuliers. — Soient

$$\varphi(x) = (1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu} \qquad \text{et} \qquad K_m(x) = (1+x)^p(1-x)^q.$$

Alors les polynomes P_n et R_n seront les polynomes suivants de Jacobi :

$$P_n = (1+x)^{-\lambda}(1-x)^{-\mu}\frac{d^n(1+x)^{n+\lambda}(1-x)^{n+\mu}}{dx^n},$$

$$R_n = (1+x)^{-\lambda+p}(1-x)^{-\mu+q}\frac{d^n(1+x)^{n+\lambda-p}(1-x)^{n+\mu-q}}{dx^n}.$$

Pour que les conditions (2) et (14) puissent exister, il faut que $\lambda > p-1$ et $\mu > q-1$. Dans ces conditions, la relation (16) deviendra

$$(18) \qquad (1+x)^p(1-x)^q\frac{d^{n+p+q}(1+x)^{n+q+\lambda}(1-x)^{n+p+\mu}}{dx^{n+p+q}} = \sum_{i=0}^{i=p+q} b_i\frac{d^{n+i}(1+x)^{n+i+\lambda}(1-x)^{n+i+\mu}}{dx^{n+i}}.$$

On voit immédiatement que cette relation doit subsister quels que soient λ et μ. Supposons $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$; la relation précédente nous montre alors que l'on a une égalité de la forme

$$(19) \qquad (1+x)^p(1-x)^q\frac{d^{n+p+q}(1+x)^{n+q+\frac{1}{2}}(1-x)^{n+p+\frac{1}{2}}}{dx^{n+p+q}} = \sum_{i=0}^{i=p+q} c_i \sin[(n+i+1)\arccos x].$$

Indiquons deux cas particuliers de cette formule :

1° $p = q = 1$. — Alors de la relation

$$\frac{2}{2n-1}(1-x^2)\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n} = \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} - (n-1)\frac{d^{n-2}(1-x^2)^{n-2+\frac{1}{2}}}{dx^{n-2}}$$

qui résulte de la relation [1]

$$P_n(x, \lambda+1) = \frac{\lambda+1}{\lambda+1-n}[P_n(x,\lambda) - P_{n-2}(x,\lambda)],$$

où $P_n(x, \lambda)$ est le coefficient de α^n dans le développement suivant les puissances de α de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\lambda$, on tire

$$(-1)^n \frac{2}{3.5\ldots(2n-1)}(1-x^2)\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}$$
$$= \sin[(n+1)\arc\cos x] - \sin[(n-1)\arc\cos x].$$

En faisant la différence de deux sinus et des simplifications on trouve une formule qui n'est autre chose que la dérivée par rapport à x de la formule (1).

2° $p = 1$ et $q = 0$. — A la relation (18) correspond, dans ce cas, la relation connue [2]

$$(1+x)\frac{d^n(1+x)^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}$$
$$= \frac{1+n}{1+2n}\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} - n\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-1+\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{(-1)^n}{3.5\ldots(2n-1)}(1+x)\frac{d^n(1+x)^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}$$
$$= \sin[(n+1)\arc\cos x] + \sin(n \arc\cos x)$$

ou bien

$$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\arc\cos x\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1)^n}{3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{1+x}\,\frac{d^n(1+x)^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

formule que nous avons déjà rencontrée [3] et qui a été le point de départ des recherches que nous venons d'exposer.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 19, relation (40).
(2) *Loc. cit.*, p. 10
(3) *Loc. cit.*, p. 11.