BULLETIN DE LA S. M. F.

PERRIN

Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 47-69
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__47_1>

Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries; par M. PERRIN.

(Séance du 27 décembre 1876.)

Soit $z^n f(n)$ le terme général d'une suite S composée d'un nombre fini de termes ordonnés suivant les puissances entières et croissantes de z. Soient m et M la plus petite et la plus grande puissance de z qui figurent dans la suite considérée, et $F(z)$ la valeur de cette suite. Nous pouvons écrire l'identité

$$F(z) = \sum_{n=m}^{n=M} z^n f(n). \tag{1}$$

Proposons-nous de déduire de cette identité une identité analogue pour une suite S' qui serait déduite de la suite primitive S, en multipliant les termes successifs par des coefficients arbitraires $\varphi(m)$, $\varphi(m+1)$, ..., $\varphi(M)$ finis ou nuls, assujettis seulement à se reproduire périodiquement de p en p, en sorte que l'on ait d'une manière générale

$$\varphi(h+kp)=\varphi(h),$$

h et k étant deux entiers quelconques.

Pour cela, remarquons d'abord que, en vertu des propriétés connues des racines de l'équation binôme, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les p racines de l'équation

$$x^p - 1 = 0, \tag{2}$$

et, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des coefficients indéterminés, la suite S″ ayant pour terme général

$$[\lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n + \ldots + \lambda_p\alpha_p^n]\, z^n f(n),$$

et par conséquent pour valeur

$$\lambda_1 F(\alpha_1 z) + \lambda_2 F(\alpha_2 z) + \ldots + \lambda_p F(\alpha_p z)$$

jouira précisément de la même propriété que la suite S′, savoir de pouvoir se déduire de S en multipliant les termes successifs par des coefficients qui se reproduisent périodiquement de p en p; de plus, elle contient dans sa formation le même nombre d'arbitraires. Nous pouvons donc essayer de l'identifier à S′ par un choix convenable des arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Pour y arriver, il suffit évidemment d'identifier respectivement p termes consécutifs de S′ et de S″, à partir de celui que l'on voudra, par exemple de celui qui renferme la puissance μ de la variable, c'est-à-dire de déterminer les arbitraires λ par le système des équations que voici :

$$\begin{array}{l}
\lambda_1\alpha_1^{\mu} \quad + \lambda_2\alpha_2^{\mu} \quad + \ldots + \lambda_p\alpha_p^{\mu} \quad = \varphi(\mu),\\
\lambda_1\alpha_1^{\mu+1} \ + \lambda_2\alpha_2^{\mu+1} \ + \ldots + \lambda_p\alpha_p^{\mu+1} \ = \varphi(\mu+1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_1\alpha_1^{\mu+p-1} + \lambda_2\alpha_2^{\mu+p-1} + \ldots + \lambda_p\alpha_p^{\mu+p-1} = \varphi(\mu+p-1).
\end{array}$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous remarquerons que les p racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de l'équation (2), rangées dans un ordre convenable, sont respectivement égales aux puissances 1, 2, 3, ..., p de l'une quelconque β des racines primitives de la même équation. En effectuant cette transformation, le système à résoudre devient

$$
\begin{array}{l}
\lambda_1\beta^{\mu} + \lambda_2\beta^{2\mu} + \ldots + \lambda_q\beta^{q\mu} + \ldots + \lambda_p\beta^{p\mu} = \varphi(\mu),\\
\lambda_1\beta^{\mu+1} + \lambda_2\beta^{2(\mu+1)} + \ldots + \lambda_q\beta^{q(\mu+1)} + \ldots + \lambda_p\beta^{p(\mu+1)} = \varphi(\mu+1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_1\beta^{\mu+p-1} + \lambda_2\beta^{2(\mu+p-1)} + \ldots + \lambda_q\beta^{q(\mu+p-1)} + \ldots + \lambda_p\beta^{(\mu+p-1)} = \varphi(\mu+p-1),
\end{array}
$$

et il suffit, pour en tirer la valeur de l'une des indéterminées, λ_q par exemple, d'ajouter membre à membre les équations dont il se compose, après les avoir respectivement multipliées par 1, β^{p-q}, $\beta^{2(p-q)}$, ..., $\beta^{(p-1)(p-q)}$. Il vient, en effet,

$$
(3) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \lambda_\nu \beta^{\nu\mu}\left[1 + \beta^{p-q+\nu} + \beta^{2(p-q+\nu)} + \ldots + \beta^{(p-1)(p-q+\nu)}\right]\\
\displaystyle\qquad = \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \varphi(\mu+\nu)\,\beta^{\nu(p-q)}.
\end{array}
\right.
$$

Or, dans le premier membre de cette équation, le coefficient de $\lambda_\nu\beta^{\nu\mu}$ n'est autre chose que la somme des puissances $p-q+\nu$ des p racines 1, β, ..., β^{p-1} de l'équation binôme, somme que l'on sait être égale à p ou à zéro, suivant que l'indice de la puissance est ou non un multiple de p; mais, parmi les p nombres entiers consécutifs,

$$p-q+1, \quad p-q+2, \quad \ldots, \quad p-q+p,$$

il y en a évidemment *un* et *un seul* qui est un multiple de p, et ce nombre est p lui-même qui correspond à $\nu = q$; donc, pour toute valeur de ν autre que q, le coefficient de $\lambda_\nu\beta^{\nu\mu}$ dans le premier membre de l'équation (3) s'évanouit, et pour $\nu = q$, il prend la valeur p. Ce premier membre se réduit donc à $p\lambda_q\beta^{q\mu}$, et l'on tire immédiatement de l'équation (3) la valeur de λ_q, savoir

$$\lambda_q = \frac{\beta^{-q\mu}}{p} \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \varphi(\mu+\nu)\,\beta^{\nu(p-q)},$$

ou encore, puisque $\beta^{\nu p} = 1$, quel que soit ν,

$$(4) \qquad \lambda_q = \frac{1}{p} \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(\nu)\beta^{-q\nu}.$$

Cette formule donnant toujours pour λ_q une valeur finie et déterminée, il en résulte que l'identification des suites S′ et S″ est toujours possible.

Si, dans la valeur de S″, on remplace λ_q par sa valeur tirée de l'expression (4), on obtient l'identité cherchée, savoir :

$$(5) \quad S' = \sum_{n=m}^{n=M} z^n f(n)\varphi(n) = \frac{1}{p}\sum_{q=1}^{q=p}\left[F(\beta^q z) \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(\nu)\beta^{-q\nu}\right],$$

laquelle peut encore s'écrire, en renversant l'ordre des sommations dans le second membre,

$$S' = \frac{1}{p}\sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1}\left[\varphi(\nu)\sum_{q=1}^{q=p}\beta^{-q\nu}F(\beta^q z)\right],$$

ou enfin, en remplaçant β^q par α,

$$(6) \qquad \sum_{n=m}^{n=M} z^n f(n)\varphi(n) = \frac{1}{p}\sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1}\left[\varphi(\nu)\sum\frac{F(\alpha z)}{\alpha^\nu}\right].$$

Dans cette dernière identité, la seconde sommation indiquée dans le second membre doit être entendue comme s'étendant à toutes les racines α de l'équation binôme (2).

Parmi toutes les suites S′ que l'on peut déduire d'une suite donnée S en multipliant les termes successifs par des coefficients arbitraires qui se reproduisent périodiquement de p en p, la plus simple est évidemment celle qu'on obtient en supposant tous ces coefficients nuls, excepté un, qui est égal à l'unité, ce qui revient à ne conserver de la suite primitive qu'un terme de p en p. La formule (6) donne immédiatement, sous une forme très-simple, la valeur d'une telle suite. Si μ est l'indice de la puissance de z dans l'un quelconque des termes conservés, il vient en effet

$$S' = \frac{1}{p}\sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^{\mu}},$$

ce que l'on peut écrire, en appelant m' et M' la plus petite et la plus grande valeur de n qui rendent $\mu + np$ compris entre m et M inclus,

$$(7) \qquad \sum_{n=m'}^{n=M'} z^{\mu+np} f(\mu + np) = \frac{1}{p}\sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^{\mu}}.$$

Si enfin on suppose que S' ne renferme qu'*un seul* terme de S, celui qui contient z^{μ}, ce qui revient à dire que p est pris au moins égal à la plus grande des deux quantités $M - \mu + 1$, $\mu - m + 1$, la formule (7) se réduit à

$$(8) \qquad z^{\mu} f(\mu) = \frac{1}{p}\sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^{\mu}},$$

et il est à remarquer que cette dernière formule est encore exacte lorsque μ cesse d'être compris entre m et M, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$(9) \qquad \sum \frac{F(\alpha z)}{\alpha^{\mu}} = 0,$$

pour μ plus grand que M ou plus petit que m, pourvu que p ait été pris au moins égal à $\mu - m + 1$ dans le premier cas, à $M - \mu + 1$ dans le second.

Les relations (8) et (9) conduisent à une propriété géométrique assez remarquable de toute fonction $F(z)$, développable en suite *finie* suivant les puissances entières de z (positives ou négatives). Lorsque la variable complexe z parcourt un cercle C de rayon r, ayant l'origine pour centre, la fonction $\frac{F(z)}{z^{\mu}}$, où μ est un entier quelconque, décrit une certaine courbe C'. Si l'on inscrit dans le cercle C un polygone régulier de p côtés, aux p sommets de ce polygone correspondront p points de la courbe C'. Les relations (8) et (9) expriment que l'on peut prendre p assez grand pour que le centre de gravité des p points dont il s'agit soit invariable :

1° quel que soit le rayon du cercle C; 2° quelque orientation que l'on donne au polygone régulier inscrit dans le cercle C; 3° quel que soit le nombre p des côtés de ce polygone; et aussi que ce centre de gravité coïncide avec l'origine si μ est en dehors de deux limites déterminées, qui sont le plus petit et le plus grand indice de puissance de z qui figurent dans le développement de $F(z)$.

Extension aux suites infinies. — Les formules (5) et (6) n'expriment qu'une identité, puisque nous avons appelé $F(z)$ la fonction de z qui est représentée par la somme des termes de la suite S ou

$$\sum_{n=m}^{n=M} z^n f(n);$$

mais, pour obtenir ces formules comme applicables à une valeur donnée z_0 de la variable, nous n'avons eu à prendre en considération que p valeurs de z, savoir $\alpha_1 z_0, \alpha_2 z_0, \ldots, \alpha_p z_0$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant, comme ci-dessus, les p racines de l'équation binôme (2), en sorte que les formules (5) et (6) resteraient encore vraies pour la valeur donnée z_0 de la variable, si nous avions désigné par $F(z)$ non plus la fonction de z qui est définie par la somme des termes de la suite S, mais une autre fonction quelconque de z, continue ou non, assujettie seulement à prendre les mêmes valeurs que la précédente pour les p valeurs de z, $\alpha_1 z_0, \alpha_2 z_0, \ldots, \alpha_p z_0$. D'autre part, les raisonnements par lesquels nous avons passé pour obtenir les formules en question sont indépendants des valeurs assignées à m et M, et subsistent par conséquent si l'on suppose que m ou M augmente sans limites, c'est-à-dire que la suite finie se change en une série infinie. Il est donc permis de considérer les formules (5) et (6) comme applicables à toute série ordonnée suivant les puissances entières de la variable, pourvu que $F(z)$ soit une fonction que l'on sache être égale à la valeur de la série pour les p valeurs $\alpha_1 z_0, \alpha_2 z_0, \ldots, \alpha_p z_0$ de la variable, z_0 étant la valeur de la variable à laquelle les formules doivent être appliquées. Et, plus généralement, pour que ces formules donnent, sous forme finie et pour une valeur donnée z_0 de z, la valeur d'une série

$$S' = \Sigma z^n f(n)\varphi(n),$$

déduite, suivant une période quelconque, d'une autre série donnée

$$S = \Sigma z^n f(n),$$

il faut et il suffit que l'on connaisse une fonction finie $F(z)$ continue ou non, dont la valeur soit constamment égale à celle de S pour toute valeur de z ayant même module que z_0; et dès lors les formules donneront également la valeur de S' pour toute valeur de z ayant même module que z_0.

De là la possibilité d'obtenir, au moyen des formules (5) et (6), souvent plus simplement que par d'autres méthodes, la sommation des séries qui peuvent se déduire, par des coefficients à retour périodique, de séries connues.

Soit, par exemple, proposé de sommer la série

$$S' = \frac{z}{1} + \frac{z^5}{1.2\ldots5} + \frac{z^9}{1.2\ldots9} + \ldots.$$

Cette série peut être considérée comme déduite, par coefficients à retour périodique, de la série

$$S = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots,$$

dont la valeur est e^z quel que soit z.

Faisant donc, dans la formule (6),

$$F(z) = e^z,\quad p = 4,\quad \mu = 0,\quad \varphi(0) = 0,$$
$$\varphi(1) = 1,\quad \varphi(2) = 0,\quad \varphi(3) = 0,$$

il vient immédiatement

$$S' = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} + \frac{e^{-z}}{-1} + \frac{e^{-z\sqrt{-1}}}{-\sqrt{-1}} + \frac{e^z}{1}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{4} + \frac{\sin z}{2},$$

formule également applicable à toute valeur de z.

La considération de la formule (5) fournit encore un théorème relatif à la convergence des séries que l'on peut déduire, par coefficients à retour périodique, d'une série donnée S dont on sait que la valeur est représentée constamment par $F(z)$, lorsque z décrit le cercle de rayon r.

Si $F(z)$ ne passe pas par l'infini, c'est-à-dire si S est convergente pour toute valeur de z ayant pour module r, la formule (5) montre qu'il en est de même de toute série S′ déduite de S avec une période quelconque. Si S est convergente pour toute valeur de z ayant pour module r, excepté pour la valeur particulière unique $z_1 = re^{i\theta_1}$, la même formule prouve qu'une déduite donnée S′, suivant une période p, ne pourra être convergente pour une valeur donnée $z^0 = re^{i\theta_0}$, que dans l'un des deux cas suivants : 1° si $F(z_1)$ n'entre pas dans l'expression de sa valeur, c'est-à-dire si θ_0 n'est pas compris dans l'une des valeurs de $\theta_1 + \frac{2k\pi}{p}$, k étant un entier quelconque; 2° si, θ_0 étant égal à l'une des valeurs de l'expression ci-dessus, par exemple à $\theta_1 + \frac{2k'\pi}{p}$, $F\left(z_0 e^{-i\frac{2k'\pi}{p}}\right)$ a pour coefficient zéro dans la formule (5). Or ce coefficient est

$$\sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(\nu) e^{i\frac{2k'\pi}{p}\nu}$$

De là le théorème suivant :

Théorème. — *Si une série ordonnée* S *est convergente pour toutes les valeurs de z ayant un même module r, il en est de même de toute série qu'on peut en déduire par coefficients à retour périodique.*

Si S *est convergente pour toutes les valeurs de z ayant même module r, excepté pour une valeur unique z_1, toute série* S′, *déduite de* S *suivant une période p, sera divergente pour $z = z_1 e^{i\frac{2k\pi}{p}}$, k étant un entier quelconque, et convergente pour toute autre valeur de z ayant r pour module, à moins que les coefficients φ ne satisfassent à une ou plusieurs relations, telles que*

$$\sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu+p-1} \varphi(\nu) e^{i\frac{2k'\pi}{p}\nu} = 0, \tag{10}$$

où k' est un certain entier, auquel cas cette série S′ *reste convergente, par exception, pour $z = z_1 e^{i\frac{2k'\pi}{p}}$.*

Soit donnée, par exemple, la série

$$S_1 = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \ldots,$$

qui se déduit, par une période de trois termes, de la série logarithmique, laquelle est divergente pour $z = 1$, et convergente pour toute autre valeur de z ayant pour module l'unité. En vertu du théorème précédent, S_1 sera convergente pour toute valenr de z ayant pour module l'unité, excepté pour les trois valeurs particulières

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

car les valeurs de φ sont ici

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = -1, \quad \varphi(3) = 1,$$

et ne peuvent satisfaire à la relation (10) pour aucune des trois valeurs consécutives $k' = 0, 1, 2$.

Au contraire, la série

$$S_2 = \frac{z}{1} - 2\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} - 2\frac{z^5}{5} + \frac{z^6}{6} + \ldots$$

serait encore divergente pour $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, mais resterait convergente pour $z = 1$, les coefficients φ satisfaisant à la relation (10) pour $k' = 0$.

On trouve d'ailleurs aisément par la formule (6), pour les valeurs de ces deux séries,

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z\sqrt{3}}{2 + z} - \frac{1}{3}\log(1 - z^3),$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{2z(z+2)\sqrt{3}}{(2+z)^2 - 3z^2} - \frac{1}{2}\log(1 + z + z^2).$$

Il est intéressant de rechercher ce que devient la propriété géométrique exprimée par les relations (8) et (9) lorsqu'il s'agit d'une série et non plus d'une suite finie. La formule (7) ne cesse pas d'être exacte, c'est-à-dire que, si l'on désigne par S_p^μ la série partielle déduite d'une série donnée S, en conservant seulement un terme de p en p de part et d'autre du terme fixe $z^\mu f(\mu)$, on aura, $F(z)$ étant une fonction égale à S pour toutes les valeurs de z, de même module r que la valeur considérée $z_0 = re^{i\theta_0}$ de la variable,

$$(11)\qquad (S_p^\mu)_{z_0} = \frac{1}{p}\sum \frac{F(\alpha z_0)}{\alpha^\mu}.$$

Le second membre de cette relation représente le centre des moyennes distances des p points

$$\frac{F(\alpha_1 z_0)}{\alpha_1^\mu},\quad \frac{F(\alpha_2 z_0)}{\alpha_2^\mu},\quad \ldots,\quad \frac{F(\alpha_p z_0)}{\alpha_p^\mu},$$

qui ont pour coordonnées respectives les p valeurs que prend la fonction

$$\Phi_\mu = e^{i\mu(\theta_0-\theta)} F(re^{i\theta}),$$

lorsqu'on donne à θ les p valeurs successives

$$\theta_0 + \frac{2\pi}{p},\quad \theta_0 + 2\frac{2\pi}{p},\quad \ldots,\quad \theta_0 + 2\pi.$$

En d'autres termes, lorsque la variable z parcourt, comme précédemment, le cercle C de rayon r ayant pour centre l'origine, en s'arrêtant successivement aux p sommets du polygone régulier de p côtés, inscrit dans ce cercle de telle sorte que le dernier de ces sommets soit z_0, la fonction Φ_μ parcourt une certaine courbe C_μ, et les p points d'arrêt de Φ_μ, correspondant sur cette courbe à ceux de z sur le cercle C, ont pour centre de moyenne distance le point représenté par la valeur que prend S_p^μ pour $z = z_0$.

Supposons maintenant que p augmente indéfiniment, μ restant fixe. Il est clair qu'à la limite $(S_p^\mu)_{z_0}$ se réduira à $z_0^\mu f(\mu)$, du moins pour toute valeur z_0 de z qui ne rend pas S divergente. D'autre part, les sommets du polygone régulier inscrit dans le cercle C vont se rapprocher indéfiniment en restant équidistants, en même temps que leur nombre augmentera sans limite; de même les points d'arrêt de Φ_μ sur la courbe C_μ vont se rapprocher indéfiniment sur toutes les parties continues de cette courbe, en sorte qu'à la limite $\frac{1}{p}\sum \frac{F(\alpha z_0)}{\alpha^\mu}$ ne sera autre chose que le centre de gravité de la courbe C_μ dont chaque élément infinitésimal serait considéré comme ayant un poids proportionnel à la longueur de l'élément infinitésimal correspondant du cercle C, c'est-à-dire que cette expression se transforme dans l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^{i\mu(\theta_0-\theta)}\,\mathrm{F}(re^{i\theta})\,d\theta,$$

laquelle reste d'ailleurs invariable si l'on prend deux autres limites quelconques dont la différence soit 2π; car il importe peu que la variable z parcoure le cercle C en partant de tel point ou de tel autre, pourvu qu'elle décrive une circonférence entière et une seule, puisqu'à chaque point de cette circonférence correspond une valeur unique et déterminée de Φ_μ (sauf aux points de discontinuité, en nombre limité), et que, par suite, on retrouvera toujours les mêmes éléments différentiels de la courbe C_μ, chacun avec son même poids relatif, pour déterminer le centre de gravité.

Nous pouvons donc écrire, comme étant ce que devient la relation (11) pour $p=\infty$ et pour toute valeur z_0 de z qui ne rend pas S divergente, l'équation suivante :

$$z_0^\mu f(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} e^{i\mu(\theta_0-\theta)}\,\mathrm{F}(re^{i\theta})\,d\theta,$$

λ étant un angle quelconque.

On en tire

$$f(\mu) = \frac{1}{2\pi r^\mu}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \mathrm{F}(re^{i\theta})\,e^{-i\mu\theta}\,d\theta, \tag{12}$$

ce qui n'est autre chose que la formule bien connue qui lie le coefficient de z^μ, dans le développement d'une fonction $\mathrm{F}(z)$ suivant les puissances entières de z, aux valeurs que prend cette fonction pour toutes les valeurs de z ayant même module que celle z_0 pour laquelle le développement a lieu.

La relation (12) comporte évidemment une interprétation géométrique analogue à celle que nous avons donnée pour les relations (8) et (9), et qui n'en est d'ailleurs que l'extension au cas limite de $p=\infty$. En réunissant ce qui se rapporte aux deux cas, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si* F(z) *est une fonction développable en suite finie ou infinie suivant les puissances entières de* z, *pour toutes les valeurs de* z *ayant un même module* r, *soit* C_μ *la courbe que décrit la fonction* $\frac{F(z)}{z^\mu}$, *où* μ *est un entier quelconque, lorsque* z *décrit le cercle* C *de rayon* r :

1° *Le centre de gravité de la courbe* C_μ, *dont chaque élément infinitésimal est considéré comme doué d'un poids proportionnel à la longueur de l'élément infinitésimal correspondant du cercle* C, *représente le coefficient de* z^μ *dans le développement.*

2° *Si, de plus, le développement est* fini, *ce centre de gravité coïncide avec le centre des moyennes distances des* p *points de* C_μ *qui correspondent aux* p *sommets d'un polygone régulier inscrit dans* C *suivant une orientation quelconque, pourvu que* p *soit assez grand* (*au moins égal à la plus grande des deux quantités* $M-\mu+1$, $\mu-m+1$, M *et* m *étant respectivement le plus grand et le plus petit indice de puissance de* z, *qui figurent dans le développement*).

Formules de sommation d'une classe de séries. — Pour terminer, nous allons appliquer les formules (5) et (6) à la sommation d'une classe de séries trigonométriques, savoir celles dont le terme général a pour expression

$$\frac{n^{p-q}\sin nx}{n^p \pm y^p},$$

p étant un entier positif pair, q un entier positif impair moindre que p, x un arc réel compris entre zéro et 2π, et y une quantité quelconque dont le module doit seulement être inférieur à l'unité.

Pour cela, nous partirons de la relation connue

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

qui est vraie pour x compris entre zéro et 2π, ces deux limites exclues, et que nous écrirons, en posant $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$\sum \frac{\sin nx}{n} = a_0 x + a_1 \pi. \tag{13}$$

On en déduit, par intégrations successives,

$$\left\{\begin{aligned}
-\sum \frac{\cos nx}{n^2} &= a_0 \frac{x^2}{1.2} + a_1\pi \frac{x}{1} + a_2\pi^2,\\
-\sum \frac{\sin nx}{n^3} &= a_0 \frac{x^3}{1.2.3} + a_1\pi \frac{x^2}{1.2} + a_2\pi^2 \frac{x}{1} + a_3\pi^3,\\
\sum \frac{\cos nx}{n^4} &= a_0 \frac{x^4}{1.2\ldots4} + a_1\pi \frac{x^3}{1.2.3}\\
&\quad + a_2\pi^2 \frac{x^2}{1.2} + a_3\pi^3 \frac{x}{1} + a_4\pi^4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Toutes ces équations seront vraies pour x compris entre zéro et 2π, et aussi aux deux limites, si l'on détermine les constantes a_2, a_3, ... par les relations suivantes :

$$\frac{a_0}{1.2.3} + \frac{a_1}{1.2} + \frac{a_2}{1} = 0,$$

$$a_3 = 0,$$

$$\frac{a_0}{1\ldots5} + \frac{a_1}{1\ldots4} + \frac{a_2}{1.2.3} + \frac{a_4}{1} = 0,$$

$$a_5 = 0,$$

$$\ldots\ldots,$$

lesquelles expriment que celles des équations (14) où figurent des sommes de sinus sont satisfaites pour $x = 0$ et $x = \pi$, ce qui entraîne le même fait pour les équations intermédiaires où figurent des sommes de cosinus, et qu'on peut déduire des premières par dérivation. Supprimons donc les quantités a_3, a_5, a_7, ..., et, ne conservant que celles des équations (14) où figurent des sinus, écrivons le système d'équations que voici, supposé prolongé indéfiniment :

$$
(15)\quad\left\{
\begin{aligned}
&+\sum \frac{\sin nx}{n} = a_0 x + a_1 \pi,\\
&-\sum \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{a_0 x^3}{1.2.3} + \frac{a_1 \pi x^2}{1.2} + \frac{a_2 \pi^2 x}{1},\\
&+\sum \frac{\sin nx}{n^5} = \frac{a_0 x^5}{1\ldots5} + \frac{a_1 \pi x^4}{1\ldots4} + \frac{a_2 \pi^2 x^3}{1.2.3} + \frac{a_4 \pi^4 x}{1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\pm\sum \frac{\sin nx}{n^q} = \frac{a_0 x^q}{1\ldots q} + \frac{a_1 \pi x^{q-1}}{1\ldots(q-1)} + \frac{a_2 \pi^2 x^{q-2}}{1\ldots(q-2)}\\
&\qquad\qquad + \frac{a_4 \pi^4 x^{q-4}}{1\ldots(q-4)} + \ldots + \frac{a_{q-1} \pi^{q-1} x}{1},\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

et le système correspondant de relations entre les constantes

$$
(16)\quad\left\{
\begin{aligned}
&a_0 + a_1 = 0,\\
&\frac{a_0}{1.2.3} + \frac{a_1}{1.2} + a_2 = 0,\\
&\frac{a_0}{1\ldots5} + \frac{a_1}{1\ldots4} + \frac{a_2}{1.2.3} + a_4 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{a_0}{1\ldots q} + \frac{a_1}{1\ldots(q-1)} + \frac{a_2}{1\ldots(q-2)} + \frac{a_4}{1\ldots(q-4)} + \ldots\\
&\qquad\qquad + \frac{a_{q-3}}{1.2.3} + a_{q-1} = 0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Considérons, en particulier, dans le système (15), les équations où les exposants les plus élevés de x sont respectivement q, $q+p$, $q+2p$, $q+3p$, ..., q étant un entier impair, et p un entier pair $> q$, et ajoutons membre à membre ces équations respectivement multipliées par $y^q, y^{q+p}, y^{q+2p}, \ldots$: il vient

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\pm\sum\left[\left(\frac{y}{n}\right)^q \pm \left(\frac{y}{n}\right)^{q+p} + \left(\frac{y}{n}\right)^{q+2p} \pm \left(\frac{y}{n}\right)^{q+3p} + \ldots\right]\sin nx \\
&= a_0\left[\frac{(xy)^q}{1\ldots q} + \frac{(xy)^{q+p}}{1\ldots(q+p)} + \frac{(xy)^{q+2p}}{1\ldots(q+2p)} + \ldots\right] \\
&\quad + a_1\pi y\left[\frac{(xy)^{q-1}}{1\ldots(q-1)} + \frac{(xy)^{q+p-1}}{1\ldots(q+p-1)} + \ldots\right] \\
&\quad + a_2\pi^2 y^2\left[\frac{(xy)^{q-2}}{1\ldots(q-2)} + \frac{(xy)^{q+p-2}}{1\ldots(q+p-2)} + \ldots\right] \\
&\quad + a_4\pi^4 y^4\left[\frac{(xy)^{q-4}}{1\ldots(q-4)} + \frac{(xy)^{q+p-4}}{1\ldots(q+p-4)} + \ldots\right] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + a_p\pi^p y^p\left[\frac{(xy)^q}{1\ldots q} + \frac{(xy)^{q+p}}{1\ldots(q+p)} + \ldots\right] \\
&\quad + a_{p+2}\pi^{p+2} y^{p+2}\left[\frac{(xy)^{q-2}}{1\ldots(q-2)} + \frac{(xy)^{q+p-2}}{1\ldots(q+p-2)} + \ldots\right] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le premier membre de cette équation, on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$ devant Σ, suivant que q est de la forme $4r+1$ ou $4r-1$, et, sous le signe Σ, les termes sont tous positifs ou alternativement positifs et négatifs, suivant que p est ou non un multiple de 4.

Si l'on suppose que y ait un module inférieur à l'unité, l'équation (17) peut s'écrire

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\pm\sum\frac{y^q n^{p-q}\sin nx}{n^p \pm y^p} \\
&= [a_0 + a_p(\pi y)^p + a_{2p}(\pi y)^{2p} + \ldots]\left[\frac{(xy)^q}{1\ldots q} + \frac{(xy)^{q+p}}{1\ldots(q+p)} + \ldots\right] \\
&\quad + a_1\pi y\left[\frac{(xy)^{q-1}}{1\ldots(q-1)} + \frac{(xy)^{q+p-1}}{1\ldots(q+p-1)} + \ldots\right] \\
&\quad + [a_2(\pi y)^2 + a_{p+2}(\pi y)^{p+2} + \ldots]\left[\frac{(xy)^{q-2}}{1\ldots(q-2)} + \frac{(xy)^{q+p-2}}{1\ldots(q+p-2)} + \ldots\right] \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + [a_{p-2}(\pi y)^{p-3} + a_{2p-2}(\pi y)^{2p-2} + \ldots]\left[\frac{(xy)^{q-p+2}}{1\ldots(q-p+2)} + \frac{(xy)^{q+2}}{1\ldots(q+2)} + \ldots\right],
\end{aligned}
\right.
$$

en observant toutefois qu'il y a lieu de ne pas tenir compte, dans le second membre, des termes où l'exposant de xy serait négatif, d'après les valeurs données de p et de q. De plus, dans le premier membre, on doit prendre au dénominateur le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que p n'est pas ou est divisible par 4.

Posons, pour abréger,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} A_0 &= a_0 + a_p(\pi y)^p + a_{2p}(\pi y)^{2p} + \dots, \\ A_2 &= a_2(\pi y)^2 + a_{p+2}(\pi y)^{p+2} + \dots, \\ A_4 &= a_4(\pi y)^4 + a_{p+4}(\pi y)^{p+4} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_{p-2} &= a_{p-2}(\pi y)^{p-2} + a_{2p-2}(\pi y)^{2p-4} + \dots, \end{aligned}\right.$$

et remarquons que, d'après la formule (6), on a, d'une manière générale,

$$\frac{(xy)^r}{1.2\dots r} + \frac{(xy)^{p+r}}{1\dots(p+r)} + \dots = \frac{1}{p}\Sigma e^{\alpha xy}\alpha^{p-r},$$

α étant une racine de l'équation $z^p - 1 = 0$, et le signe Σ s'étendant aux p racines de cette équation. Si l'on tient compte de cette relation et des formules (19), l'équation (18) peut s'écrire

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \pm\sum\frac{n^{p-q}\sin nx}{n^p \pm y^p} = \frac{1}{py^q}\big[&A_0\Sigma\alpha^{p-q}e^{\alpha xy} + A_2\Sigma\alpha^{p-q+2}e^{\alpha xy} + \dots \\ &+ A_{p-2}\Sigma\alpha^{p-q-2}e^{\alpha xy} + a_1\pi y\Sigma\alpha^{p-q+1}e^{\alpha xy}\big]. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit maintenant de déterminer les valeurs des $\frac{p}{2}$ quantités A au moyen des relations (19) et du système (16).

Pour cela, considérons en particulier, dans le système (16), les équations où les indices les plus élevés de a sont respectivement $r-1$, $r+p-1$, $r+2p-1$, ..., r étant un certain entier *impair* moindre que p, et ajoutons membre à membre toutes ces équations, après les avoir respectivement multipliées par $(\pi y)^r$, $(\pi y)^{r+p}$, $(\pi y)^{r+2p}$, ... Pour écrire le résultat, il suffit évidemment d'égaler à zéro le second membre de l'équation (18), dans lequel on aura remplacé q par r, x et π par l'unité, et y par πy, ce qui donne

$$\begin{aligned}
o = &[a_0 + a_p(\pi y)^p + a_{2p}(\pi y)^{2p} + \ldots]\left[\frac{(\pi y)^r}{1\ldots r} + \frac{(\pi y)^{r+p}}{1\ldots(r+p)} + \ldots\right] \\
&+ a_1 \pi y\left[\frac{(\pi y)^{r-1}}{1\ldots(r-1)} + \frac{(\pi y)^{r+p-1}}{1\ldots(r+p-1)} + \ldots\right] \\
&+ [a_2(\pi y)^2 + a_{p+2}(\pi y)^{p+2} + \ldots]\left[\frac{(\pi y)^{r-2}}{1\ldots(r-2)} + \frac{(\pi y)^{r+p-2}}{1\ldots(r+p-2)} + \ldots\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ [a_{p-2}(\pi y)^{p-2} + a_{2p-2}(\pi y)^{2p-2} + \ldots]\left[\frac{(\pi y)^{r-p+2}}{1\ldots(r-p+2)} + \frac{(\pi y)^{r+2}}{1\ldots(r+2)} + \ldots\right],
\end{aligned}$$

avec la même observation que ci-dessus, relative aux puissances négatives de πy. Si maintenant on tient compte des relations (19) et de la relation générale fournie par la formule (6), savoir :

$$\frac{(\pi y)^r}{1\ldots r} + \frac{(\pi y)^{r+p}}{1\ldots(r+p)} + \frac{(\pi y)^{r+2p}}{1\ldots(r+2p)} + \ldots = \frac{1}{p}\Sigma e^{\alpha\pi y}\alpha^{p-r},$$

l'équation résultante devient

$$\begin{aligned}
o = {} & A_0\Sigma\alpha^{p-r}e^{\alpha\pi y} + A_2\Sigma\alpha^{p-r+2}e^{\alpha\pi y} + \ldots \\
& + A_{p-2}\Sigma\alpha^{p-r-2}e^{\alpha\pi y} + a_1\pi y\Sigma\alpha^{p-r+1}e^{\alpha\pi y}.
\end{aligned}$$

Si, dans cette équation, on donne successivement à r les $\frac{p}{2}$ valeurs $1, 3, 5, \ldots, p-1$, on obtient, pour déterminer les $\frac{p}{2}$ quantités A, le système ci-dessous de $\frac{p}{2}$ équations :

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}
o &= A_0\Sigma\alpha e^{\alpha\pi y} + A_2\Sigma\alpha^3 e^{\alpha\pi y} + \ldots + A_{p-2}\Sigma\alpha^{p-1}e^{\alpha\pi y} + \frac{\pi y}{2}\Sigma\alpha^2 e^{\alpha\pi y}, \\
o &= A_0\Sigma\alpha^3 e^{\alpha\pi y} + A_2\Sigma\alpha^5 e^{\alpha\pi y} + \ldots + A_{p-2}\Sigma\alpha e^{\alpha\pi y} + \frac{\pi y}{2}\Sigma\alpha^4 e^{\alpha\pi y}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
o &= A_0\Sigma\alpha^{p-1}e^{\alpha\pi y} + A_2\Sigma\alpha e^{\alpha\pi y} + \ldots + A_{p-2}\Sigma\alpha^{p-3}e^{\alpha\pi y} + \frac{\pi y}{2}\Sigma\alpha^p e^{\alpha\pi y}.
\end{aligned}\right.$$

Dans celle de ces équations qui occupe le rang s, on voit sans peine que le coefficient de $A_{2t}e^{\alpha\pi y}$ est $\alpha^{2t+2s-1}$ ou $\beta^{(2t+2s-1)r}$, si l'on considère α comme étant la $r^{\text{ième}}$ puissance de l'une β des racines primitives de l'équation binôme. Cela posé, ajoutons les équations (21) membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par

$$\beta^{-\rho},\quad \beta^{-3\rho},\quad \beta^{-5\rho},\quad \ldots,\quad \beta^{-(p-1)\rho},$$

le coefficient de $A_{2t}e^{\alpha\pi y}$ dans l'équation résultante sera, d'après ce qui précède,

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{(2t+2s-1)r-(2s-1)\rho},$$

ce qui peut s'écrire

$$\beta^{(2t-1)r+\rho}\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{2s(r-\rho)};$$

mais, β étant une racine primitive de l'équation

$$z^p - 1 = 0,$$

β^2 sera une racine primitive de l'équation

$$z^{\frac{p}{2}} - 1 = 0;$$

par conséquent, $\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{2s(r-\rho)}$ n'est autre chose que la somme des puissances $r-\rho$ des $\frac{p}{2}$ racines de l'équation

$$z^{\frac{p}{2}} - 1 = 0,$$

somme que l'on sait être égale à $\frac{p}{2}$ ou à zéro, suivant que $r-\rho$ est ou non un multiple de $\frac{p}{2}$. Or, pour une valeur donnée de ρ comprise entre 1 et $\frac{p}{2}$, il y a deux et seulement deux valeurs de r comprises entre 1 et p, qui puissent rendre $r-\rho$ un multiple de $\frac{p}{2}$; ces deux valeurs sont $r=\rho$, $r=\rho\pm\frac{p}{2}$. Toutes les exponentielles autres que $e^{\beta^\rho\pi y}$ et $e^{-\beta^\rho\pi y}$ $\left(\text{puisque } \beta^{\rho\pm\frac{p}{2}} = -\beta^\rho\right)$ disparaissent donc de l'équation résultante. Le coefficient de $e^{\beta^\rho \pi y}$ sera d'ailleurs

$$\sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\beta^{(2t-1)\rho+\rho}\times\frac{p}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{2}\sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\,\beta^{2t\rho},$$

et celui de $e^{-\beta^\rho \pi y}$ sera

$$\sum_{t=1}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\,\beta^{(2t-1)\left(\rho\pm\frac{p}{2}\right)+\rho}\times\frac{p}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{p}{2}\sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\,\beta^{2t\rho}.$$

Pour pouvoir écrire complétement l'équation résultante, il reste à calculer le coefficient de $\frac{\pi y}{2}$. Dans ce coefficient doit figurer chacune des exponentielles telles que $e^{\alpha\pi y}$ ou $e^{\beta^r \pi y}$, multipliée évidemment par

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{2sr-(2s-1)\rho} \quad \text{ou} \quad \beta^\rho\sum_{s=1}^{s=\frac{p}{2}} \beta^{2s(r-\rho)}.$$

Par le même raisonnement que ci-dessus, on voit qu'il ne subsistera que les deux exponentielles

$$e^{\beta^\rho \pi y} \quad \text{et} \quad e^{-\beta^\rho \pi y},$$

multipliées l'une et l'autre par $\frac{p\beta^\rho}{2}$, en sorte que le coefficient de $\frac{\pi y}{2}$ se réduit à

$$\frac{p\beta^\rho}{2}\left(e^{\beta^\rho \pi y}+e^{-\beta^\rho \pi y}\right).$$

Dès lors l'équation résultante sera

$$0=\frac{p}{2}\,e^{\beta^\rho \pi y}\sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\,\beta^{2t\rho}-\frac{p}{2}\,e^{-\beta^\rho \pi y}\sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\,\beta^{2t\rho}+\frac{\pi y}{2}\,\frac{p}{2}\,\beta^\rho\left(e^{\beta^\rho \pi y}+e^{-\beta^\rho \pi y}\right);$$

d'où, en réduisant,

$$(22)\qquad \sum_{t=1}^{=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\beta^{(2t-1)\rho} = \frac{\pi y}{2}\,\frac{e^{\beta^\rho \pi y}+e^{-\beta^\rho \pi y}}{e^{-\beta^\rho \pi y}-e^{\beta^\rho \pi y}}.$$

Si maintenant, dans le second membre de l'équation (20), nous mettons en évidence le coefficient de l'une des exponentielles $e^{\alpha x y}$, il est clair que ce coefficient sera

$$\begin{aligned} B_\alpha &= A_0\alpha^{p-q} + A_2\alpha^{p-q+2} + \ldots + A_{p-2}\alpha^{p-q+2} + \frac{\pi y}{2}\alpha^{p-q+1} \\ &= \alpha^{p-q+1}\left(A_0\alpha^{-1} + A_2\alpha + \ldots + A_{p-2}\alpha^{-3} + \frac{\pi y}{2}\right), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant α par β^ρ,

$$B_\alpha = \beta^{\rho(p-q+1)}\left[\sum_{t=0}^{t=\frac{p}{2}-1} A_{2t}\beta^{(2t-1)\rho} + \frac{\pi y}{2}\right],$$

expression qui devient immédiatement, en vertu de l'équation (22),

$$B_\alpha = \beta^{\rho(p-q+1)}\frac{\pi y}{2}\left(1 + \frac{e^{\beta^\rho \pi y}+e^{-\beta^\rho \pi y}}{e^{-\beta^\rho \pi y}-e^{\beta^\rho \pi y}}\right),$$

ou, réduisant et revenant à la racine quelconque α,

$$B_\alpha = \pi y\,\alpha^{p-q+1}\frac{e^{-\alpha\pi y}}{e^{-\alpha\pi y}-e^{\alpha\pi y}}.$$

Dès lors la formule (20) prend la forme très-simple

$$(23)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^{p-q}\sin nx}{n^p \pm y^p} = \pm\frac{\pi}{p y^{q-1}}\sum_\alpha \frac{\alpha^{p-q+1}e^{\alpha(x-\pi)y}}{e^{-\alpha\pi y}-e^{\alpha\pi y}},$$

et le problème se trouve résolu.

Il convient de rappeler que, dans la formule (23), on doit prendre dans le premier membre le signe + ou le signe —, suivant que p n'est pas ou est divisible par 4; devant le second membre le signe + ou le signe —, suivant que q est de la forme $4r+1$ ou $4r-1$; enfin, que la sommation indiquée dans ce second membre s'étend à toutes les racines α de l'équation binôme

$$z^p - 1 = 0.$$

Si, dans la formule (23), on fait $p = 2$, $q = 1$, on obtient

$$(24)\qquad \sum \frac{n \sin nx}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}},$$

formule donnée par Euler.

La formule (23) donne le résultat sous une forme compliquée d'imaginaires pour y réel. Il est facile de faire disparaître les imaginaires en groupant ceux des termes, sous le signe Σ du second membre, qui se rapportent aux quatre racines de l'unité comprises dans la formule

$$\pm \gamma \pm \delta\sqrt{-1}.$$

Le calcul ne présente aucune difficulté, et l'on obtient en définitive la formule ci-dessous :

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p \pm y^p} &= \frac{\pi}{p y^{q-1}}\,\frac{\sin(\pi - x)y}{\sin \pi y} \\ &\pm \frac{\pi}{p y^{q-1}}\left[\frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} + \sum \zeta(m)\right], \end{aligned}\right.$$

dans laquelle on a

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta(m) = {} & \frac{\left(e^{xy\cos\frac{2m\pi}{p}} + e^{-xy\cos\frac{2m\pi}{p}}\right)\cos\left[(2\pi - x)y\sin\frac{2m\pi}{p} + \frac{2m(q-1)\pi}{p}\right]}{\cos\left(2\pi y \sin\frac{2m\pi}{p}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{2\pi y\cos\frac{2m\pi}{p}} + e^{-2\pi y\cos\frac{2m\pi}{p}}\right)} \\ & - \frac{\left[e^{(2\pi - x)y\cos\frac{2m\pi}{p}} + e^{(x-2\pi)y\cos\frac{2m\pi}{p}}\right]\cos\left[xy\sin\frac{2m\pi}{p} + \frac{2m(q-1)\pi}{p}\right]}{\cos\left(2\pi y \sin\frac{2m\pi}{p}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{2\pi y\cos\frac{2m\pi}{p}} + e^{-2\pi y\cos\frac{2m\pi}{p}}\right)}, \end{aligned}\right.$$

et avec ces remarques essentielles :

1° Que le premier terme du second membre n'existe que si p est divisible par 4 ;

2° Que, devant le second terme, il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que q est de la forme $4r + 1$ ou $4r + 3$;

3° Enfin qu'il entre sous le signe Σ de ce second terme autant de termes $\zeta(m)$ que l'on peut donner à m de valeurs entières, depuis 1 compris jusqu'à $\frac{p}{4}$ non compris.

En particulier, pour $p = 4$, il n'existe pas de terme ζ, et l'on obtient

$$\sum \frac{n \sin nx}{n^4 - y^4} = \frac{\pi}{4y^2}\left[\frac{\sin(\pi - x)y}{\sin \pi y} - \frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}\right],$$

$$\sum \frac{n^3 \sin nx}{n^4 - y^4} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\sin(\pi - x)y}{\sin \pi y} + \frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}\right];$$

on en déduit immédiatement

$$\sum \frac{n \sin nx}{n^2 - y^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin(\pi - x)y}{\sin \pi y},$$

comme cela devait être.

Pour $p = 6$, la formule (25) ne contient qu'un seul terme ζ, e l'on obtient le résultat suivant, relativement assez simple :

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \sum \frac{n^{6-q} \sin nx}{n^6 + y^6} = \pm \frac{\pi}{6y^{q-1}} \Bigg\{ & \frac{e^{(\pi-x)y} - e^{(x-\pi)y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \\ & + \frac{\left(e^{\frac{xy}{2}} + e^{-\frac{xy}{2}}\right)\cos\left[\left(\pi - \frac{x}{2}\right)y\sqrt{3} + \frac{(q-1)\pi}{3}\right]}{\cos \pi y\sqrt{3} - \frac{1}{2}(e^{\pi y} - e^{-\pi y})} \\ & \mp \frac{\left[e^{\left(\pi - \frac{x}{2}\right)y} + e^{\left(\frac{x}{2} - \pi\right)y}\right]\cos\left[\frac{xy\sqrt{3}}{2} + \frac{(q-1)\pi}{3}\right]}{\cos \pi y\sqrt{3} - \frac{1}{2}(e^{\pi y} - e^{-\pi y})} \Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Lorsque p n'est pas un multiple de (4), la formule (25) fournit l'expression de

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p + y^p}.$$

Pour obtenir

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p - y^p},$$

il suffirait de remplacer y par $y\sqrt{-1}$ dans la formule, mais on réintroduirait des imaginaires. Il est plus simple de remarquer que l'on a identiquement

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p + y^p} + \sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p - y^p} = 2 \sum \frac{n^{2p-q} \sin nx}{n^{2p} - y^{2p}},$$

$2p$ étant divisible par 4 ; la dernière de ces trois séries est donnée par la formule (25) ; il en est de même de la première, ce qui fournit immédiatement la valeur de la seconde. On obtiendrait de la même manière

$$\sum \frac{n^{p-q} \sin nx}{n^p + y^p},$$

lorsque p est un multiple de 4.

Si enfin, dans la formule (23), on fait croître p indéfiniment, et qu'on passe à la limite, le premier membre se réduit à $\sum \frac{\sin nx}{n^q}$, dont la valeur est connue sous forme finie, et le second se change en une intégrale définie. Si dans cette dernière on suppose y réel, et qu'on sépare le réel de l'imaginaire, on obtient, toutes réductions faites, les formules suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{(x-2\pi)y\cos\theta} \cos[xy\sin\theta - (q-1)\theta] - e^{xy\cos\theta} \cos[(2\pi - x)y\sin\theta + (q-1)\theta]}{e^{2\pi y\cos\theta} + e^{-2\pi y\cos\theta} - 2\cos(2\pi y\sin\theta)}\, d\theta$$

$$= 2y^{q-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n^q},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{(x-2\pi)y\cos\theta} \sin[xy\sin\theta - (q-1)\theta] + e^{xy\cos\theta} \sin[(2\pi - x)y\sin\theta + (q-1)\theta]}{e^{2\pi y\cos\theta} + e^{-2\pi y\cos\theta} - 2\cos(2\pi y\sin\theta)}\, d\theta = 0.$$