

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI CABANNES

**Contribution à l'étude théorique des fluides compressibles.  
Écoulements transsoniques. Ondes de choc**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 69 (1952), p. 1-63

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1952\\_3\\_69\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ANNALES**  
SCIENTIFIQUES  
DE  
**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

---

**CONTRIBUTION**  
A  
**L'ÉTUDE THÉORIQUE**  
**DES FLUIDES COMPRESSIBLES**

ÉCOULEMENTS TRANSSONIQUES. ONDES DE CHOC <sup>(1)</sup>

PAR M. HENRI CABANNES



INTRODUCTION.

Les équations de la Mécanique des fluides ont été établies par Euler et Lagrange, et l'étude de la Mécanique des fluides prit de bonne heure un grand développement. Le cas d'un fluide dont la densité demeure constante a été particulièrement étudié. Il correspond à l'Hydraulique, et aussi à l'Aérodynamique des vitesses relativement faibles; aussi les premiers développements de l'Aérotechnique ont-ils pu s'appuyer sur des théories qui négligent la compres-

---

(<sup>1</sup>) Ce Mémoire, présenté le 7 février 1950 comme Thèse de Doctorat devant la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, fut rédigé à la fin de l'année 1949, et sur certains points paraîtra aujourd'hui un peu dépassé. Afin de remédier à cet inconvénient, j'ai indiqué au moment de l'impression les résultats que j'ai obtenus depuis, j'ai en particulier rédigé une brève Note additive à la suite du chapitre IV.

sibilité de l'air. Cette approximation cesse d'être valable pour les engins actuels, dont la vitesse atteint et même dépasse la célérité du son. Les premiers travaux sur les fluides compressibles datent du siècle dernier. Riemann étudia les mouvements non stationnaires à une dimension; il établit à cette occasion sa méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique. Rankine et Hugoniot envisagèrent la propagation des discontinuités dans les gaz et donnèrent pour la première fois les équations du choc. Molenbrock et Tchapligne publièrent deux Mémoires célèbres sur les mouvements gazeux à deux dimensions, le premier en 1890, le second en 1904. A l'heure actuelle, l'étude de la Dynamique des gaz est indispensable si l'on désire résoudre théoriquement les problèmes que pose la technique. Plusieurs centaines de Mémoires lui ont déjà été consacrés; nous nous bornerons à indiquer dans la bibliographie ceux qui présentent un rapport direct avec le travail suivant. L'objet de ce travail est une étude des écoulements plans permanents continus transsoniques et des écoulements permanents comportant une onde de choc.

1. Le premier chapitre est consacré à l'étude des écoulements continus. Nous indiquons d'abord une famille de solutions exactes des équations de l'écoulement plan permanent d'un fluide parfait compressible. Ces solutions, très générales, dépendent d'une fonction et d'une double infinité de constantes arbitraires; elles contiennent, comme cas particuliers, les solutions étudiées par Tchapligne, Tollmien et Ringleb. Dans les mouvements correspondants, la vitesse du fluide peut atteindre et dépasser la célérité du son sans subir de discontinuité.

Envisageant ensuite plus spécialement les vitesses voisines de la célérité du son, nous déterminons la loi de compressibilité à laquelle devrait obéir un fluide fictif pour que l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction de courant dans le plan de l'hodographe se réduise à la forme canonique étudiée par Tricomi. Nous construisons, pour un tel fluide, des écoulements correspondant à des solutions multivalentes de l'équation de Tricomi. Dans le diagramme pression-inverse de la densité, la loi de compressibilité précédente et la loi de compressibilité adiabatique sont osculatrices au point sonique. On peut admettre que, pour les vitesses voisines de la célérité du son, les résultats obtenus représentent les phénomènes réels avec une bonne approximation.

2. Nous envisageons, dans les chapitres suivants, les écoulements qui comportent une onde de choc. L'écoulement avant l'onde de choc étant irrotationnel, on sait que l'écoulement postérieur ne possède pas en général cette propriété. Dans le second chapitre, nous caractérisons les ondes de choc stationnaires le long desquelles chaque élément gazeux subit la même variation d'entropie; ainsi, lorsque l'écoulement initial est irrotationnel, l'écoulement

après le choc est un écoulement isentropique. Dans le cas des mouvements à deux dimensions, ce nouvel écoulement est encore irrotationnel. Nous prouvons, en particulier, que chacun des écoulements spiraliformes étudiés par Tollmien peut être engendré par choc dans un écoulement analogue.

3. Nous abordons ensuite le problème du mouvement permanent autour d'un obstacle d'un fluide parfait compressible animé à l'infini d'une vitesse supersonique. Lorsque le corps solide ne présente pas de pointe, ou bien lorsque la vitesse à l'infini est faiblement supersonique, la première des ondes de choc ou onde de tête est une onde de choc détachée. En aval d'une onde de choc détachée, se trouve une région subsonique. Nous présentons diverses solutions approchées de ce problème de l'onde choc détachée. Supposant d'abord connues la forme de l'onde et la vitesse du courant uniforme amont, nous établissons, en utilisant des développements limités, des équations qui déterminent la position et la forme de la surface de courant décomposée. La solution de ces équations, en considérant cette dernière surface comme donnée, permet de résoudre le problème posé. En appliquant cette méthode, nous avons établi des tables donnant la solution du problème de l'onde de choc détachée dans le cas général des écoulements à trois dimensions. Dans cet ordre d'idées, on pourrait traiter le problème de l'onde de choc détachée avec une approximation indéfinie, sous réserve de questions de convergence que nous avons laissées de côté. Nous avons envisagé un exemple (écoulement de révolution comportant une onde de choc détachée) en utilisant des constructions graphiques qui interprètent les équations intrinsèques du mouvement établies au début de notre travail.

Une autre méthode pour traiter le problème de l'onde de choc détachée, basée sur une représentation approchée du courant aval, est également appliquée. L'écoulement aval, étant subsonique sur l'axe de révolution ainsi qu'au voisinage de cet axe, est supposé irrotationnel et incompressible; il est alors déterminé, à certains paramètres arbitraires près, par la condition de contourner l'obstacle. Nous déterminons ensuite la position et la forme qu'il convient de donner à l'onde de choc, afin que l'écoulement engendré par le choc et l'écoulement aval précédent, coïncident avec la meilleure approximation possible.

4. Lorsque l'obstacle présente en son sommet un point singulier, l'onde de tête peut être attachée à la pointe. Nous avons étudié ce cas, lorsque l'écoulement est un écoulement plan symétrique. Quand la vitesse amont est légèrement supérieure à la vitesse pour laquelle se produit le phénomène d'attachement, l'écoulement aval comporte une région subsonique et présente au sommet de l'obstacle une singularité dont l'existence a été signalée par Crocco. Nous avons établi des formules qui lient les dérivées d'ordre quel-

conque de la courbure en un point de l'onde de choc et de la courbure de la ligne de courant issue de ce point. Suivant une idée de M. J. Fabri, nous avons prouvé que, dans le cas d'un obstacle terminé par un segment rectiligne, cette singularité subsiste aussi longtemps que la vitesse le long de la paroi rectiligne demeure subsonique; elle affecte les diverses dérivées de la courbure au sommet de l'onde de choc; pour des valeurs croissantes de la vitesse amont, l'ordre de la première de ces dérivées affectée par la singularité augmente; toutes les dérivées sont nulles lorsque la vitesse le long de la paroi rectiligne est sonique. Lorsque cette vitesse est supersonique, l'onde de choc comporte elle aussi un segment rectiligne à l'extrémité duquel la courbure subit une discontinuité que nous avons déterminée. Nos résultats complètent, de façon tout à fait indépendante, ceux qu'a obtenus M. T. Y. Thomas par des méthodes plus compliquées.

5. Dans le dernier chapitre, nous étudions les branches infinies de la première onde de choc. Nous avons admis que la forme prise par cette onde est telle que l'écoulement engendré tende, le plus rapidement possible, vers un écoulement uniforme. A partir de cette hypothèse, nous avons démontré que l'onde pouvait, à l'infini, être assimilée à une parabole.

Au terme de cette introduction, je tiens à témoigner ma reconnaissance envers M. le Professeur Joseph Pérès, pour les conseils et les encouragements qu'il m'a toujours prodigués, ainsi que pour les nombreuses suggestions dont je lui suis redevable. Je suis heureux de pouvoir aussi remercier M. le Professeur Jean Leray pour sa bienveillance et pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail. Je remercie également MM. les Professeurs Henri Villat et Georges Valiron de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.

## PRÉLIMINAIRES.

### ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DES GAZ.

0. I. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT. — Le mouvement d'un fluide est déterminé lorsqu'on connaît la vitesse en chaque point et à chaque instant. Nous utiliserons les variables d'Euler. Les fonctions inconnues, au nombre de cinq, sont les trois composantes cartésiennes de la vitesse  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , la densité  $\rho$  et la pression  $p$ . Les variables indépendantes sont les coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et le temps. Nous étudierons seulement les mouvements stationnaires.

*Équations cartésiennes du mouvement.* — Les axes de coordonnées sont rectangulaires. Nous supposons que le fluide n'est soumis à aucune force extérieure,

et nous écrivons d'une part l'équation fondamentale de la Dynamique, d'autre part la conservation de la masse. On obtient ainsi

$$(0.1) \quad \begin{cases} uu_x + v u_y + w u_z + p_x : \rho = 0, \\ uv_x + v v_y + w v_z + p_y : \rho = 0, \\ uw_x + v w_y + w w_z + p_z : \rho = 0; \end{cases}$$

$$(0.2) \quad (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0.$$

Le symbole  $f_x$  désigne la dérivée partielle  $\frac{df}{dx}$ . Nous faisons en outre l'hypothèse suivante : les divers éléments fluides n'échangent entre eux aucune quantité de chaleur; de plus, ils n'échangent aucune quantité de chaleur avec le milieu extérieur. Cette hypothèse est vérifiée de façon satisfaisante lorsque la conductibilité calorifique du fluide est faible, ce que nous supposons. On dit que l'écoulement envisagé est un phénomène adiabatique, et l'on établit que, en l'absence de choc, l'entropie gazeuse  $S$  de chaque élément fluide demeure constante. Afin de simplifier l'exposé, nous nous limiterons au cas des gaz parfaits, mais certains des résultats obtenus sont valables dans des cas plus généraux; pour un gaz parfait, on a la relation suivante :

$$S = \frac{R^*}{(k-1)J} \text{Log} \frac{p}{\rho^k} + S_0.$$

$R^*$  est la constante des gaz parfaits,  $J$  l'équivalent mécanique de la calorie,  $k$  le rapport des chaleurs spécifiques du fluide; on convient de choisir la même valeur de la constante  $S_0$  pour tous les éléments du gaz dont nous étudions le mouvement. Le mouvement étant stationnaire, le caractère adiabatique de l'écoulement se traduit par l'équation suivante :

$$(0.3) \quad u \left( \frac{p}{\rho^k} \right)_x + v \left( \frac{p}{\rho^k} \right)_y + w \left( \frac{p}{\rho^k} \right)_z = 0.$$

Cette équation exprime que le produit  $p\rho^{-k}$  et par conséquent l'entropie conservent une valeur constante sur chaque ligne de courant; lorsque cette valeur constante est la même pour toutes les lignes de courant, on dit que l'écoulement est isentropique. Dans un écoulement isentropique, le produit  $p\rho^{-k}$  possède une valeur constante dans tout l'espace occupé par le fluide. Tous les écoulements que nous étudierons seront des phénomènes adiabatiques, mais tous ces écoulements ne seront pas isentropiques.

Dans le cas général, les équations (0.1), (0.2) et (0.3) doivent permettre, à l'aide de conditions aux limites convenablement choisies, de déterminer les cinq fonctions inconnues. Elles admettent une intégrale première obtenue par Bernoulli. Sur chaque ligne de courant, la pression est fonction de la seule densité, et l'on peut écrire

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 = \text{const.},$$

c'est-à-dire, compte tenu du fait que le produit  $p\rho^{-k}$  demeure constant sur chaque ligne de courant,

$$\frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} + q^2 = q_m^2, \quad \text{avec} \quad \frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = q_m^2,$$

$q_m$  étant la vitesse limite, tandis que  $p_0$  et  $\rho_0$  désignent les valeurs au repos de la densité et de la pression. On en déduit

$$(0.4) \quad \rho = \rho_0 \left\{ 1 - \frac{q^2}{q_m^2} \right\}^{\frac{1}{k-1}},$$

$$(0.5) \quad p = p_0 \left\{ 1 - \frac{q^2}{q_m^2} \right\}^{\frac{k}{k-1}}.$$

Les équations (0.4) et (0.5) peuvent remplacer deux des équations du mouvement : l'équation (0.3) et l'une quelconque des équations (0.1). L'équation (0.2) doit être conservée, puisqu'elle ne fut pas utilisée pour former l'intégrale de Bernoulli.

*A priori*, les valeurs des constantes  $p_0$  et  $\rho_0$ , donc aussi la valeur de  $q_m$ , dépendent de la ligne de courant envisagée. Dans le cas d'un écoulement irrotationnel, l'intégrale de Bernoulli est valable pour un déplacement arbitraire, donc la vitesse limite possède une valeur constante dans tout espace occupé par le fluide; comme nous le verrons plus loin, l'entropie est alors constante dans tout le fluide, donc aussi  $p_0$  et  $\rho_0$ . Nous étudierons dans la suite, non seulement les écoulements irrotationnels, mais ceux qui s'en déduisent par choc; dans de tels écoulements,  $q_m$  reste constant quelle que soit la ligne de courant, mais non  $p_0$  et  $\rho_0$ . En résumé, dans tous les écoulements, isentropiques ou non, que nous étudierons,  $q_m$  est une constante dans tout le fluide.

Une grandeur fondamentale est la célérité du son. Les phénomènes sonores, constitués par des perturbations infiniment petites, se propagent à la vitesse

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \left\{ \frac{k-1}{2} (q_m^2 - q^2) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Suivant que la vitesse du fluide est inférieure, égale ou supérieure à la célérité du son, l'écoulement est subsonique, sonique ou supersonique. La vitesse  $q^*$  d'un écoulement sonique, appelée vitesse critique, a pour valeur

$$q^* = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} q_m.$$

Les valeurs correspondantes de la densité et de la pression,  $\rho^*$  et  $p^*$ , sont la densité critique et la pression critique.

*Équations vectorielles du mouvement.* — On peut donner aux équations du mouvement une forme vectorielle en introduisant le vecteur vitesse  $W$  :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{2} \text{grad } q^2 + \text{rot } W \wedge W = 0, \quad \text{div } \rho W = 0.$$

Compte tenu des équations (0.4) et (0.5), dans lesquelles  $q_m$  possède une valeur constante, la première de ces deux équations s'écrit

$$\frac{p}{\rho} \text{grad } \text{Log } p_0 + \text{rot } W \wedge W = 0.$$

Lorsque le tourbillon est partout nul, la pression au repos est une constante, donc le mouvement est isentropique. La réciproque n'est pas vraie. Dans un mouvement isentropique, le tourbillon et la vitesse sont colinéaires; dans le cas particulier d'un mouvement plan ou d'un mouvement de révolution, on en déduit que le tourbillon est nul. Par contre, dans l'espace, il existe des écoulements tourbillonnaires isentropiques. Ces écoulements sont déterminés par les équations

$$\text{rot } W \wedge W = 0, \quad \text{div} (q_m^2 - q^2)^{\frac{1}{k-1}} W = 0.$$

On construit une solution élémentaire de ce système en prenant

$$u = u(z), \quad v = v(z), \quad w = 0.$$

La seconde équation est toujours vérifiée; la première exige que la grandeur de la vitesse soit constante.

D'une façon plus générale, il suffit, pour obtenir de tels écoulements, de résoudre l'équation vectorielle

$$\text{rot } W = \lambda \rho W,$$

dans laquelle  $\lambda$  est une constante.

*Équations intrinsèques du mouvement.* — Nous écrivons les équations du mouvement en coordonnées intrinsèques, en nous plaçant d'abord dans le cas des écoulements de révolution. Nous envisageons un demi-plan méridien rapporté aux axes rectangulaires constitués par l'axe de révolution  $Ox$  et l'axe directement perpendiculaire  $Or$ ;  $\theta$  désignant l'angle de la vitesse avec  $Ox$ , nous posons  $u = q \cos \theta$ ,  $v = q \sin \theta$ . Les trois équations cartésiennes (0.1) se réduisent aux deux suivantes :

$$(0.1') \quad \begin{cases} uu_x + vu_r + p_x : \rho = 0, \\ uv_x + vv_r + p_r : \rho = 0. \end{cases}$$

Les équations (0.2) et (0.3) deviennent

$$(0.2') \quad (r\rho u)_x + (r\rho v)_r = 0,$$

$$(0.3') \quad u \left( \frac{p}{\rho^k} \right)_x + v \left( \frac{p}{\rho^k} \right)_r = 0.$$



Nous utiliserons encore l'intégrale de Bernoulli, en écrivant les équations (0.4) et (0.5), qui déterminent la densité et la pression en fonction de la vitesse. Il sera alors suffisant de conserver, parmi les quatre équations précédentes, une quelconque des deux équations (0.1') et l'équation (0.2').

Nous envisageons, dans un demi-plan méridien, le réseau des courbes formé par les lignes de courant et par les trajectoires orthogonales aux lignes de courant;  $s$  et  $n$  désignent l'abscisse curviligne comptée respectivement sur une ligne de courant et sur une des trajectoires orthogonales, les directions positives sur ces courbes étant choisies de telle sorte que leur angle soit égal à  $+\frac{\pi}{2}$ . Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées intrinsèques sont liées par les relations différentielles suivantes :

$$(0.6) \quad \begin{cases} ds = dx \cos \theta + dr \sin \theta, \\ dn = -dx \sin \theta + dr \cos \theta. \end{cases}$$

Compte tenu des équations (0.4) et (0.5), nous effectuons le changement de variables dans l'une des équations (0.1') et dans l'équation (0.2'); on obtient respectivement

$$(0.7) \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial n} - \frac{p}{\rho q^2} \frac{d \text{Log } p_0}{dn},$$

$$(0.8) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{1}{q} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{\partial q}{\partial s} - \frac{\sin \theta}{r}.$$

Les symboles  $\frac{\partial \theta}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial n}$ , que nous notons comme des dérivées partielles, ne représentent pas en fait de véritables dérivées partielles, puisqu'on ne peut songer à repérer le plan avec des coordonnées  $s$  et  $n$ ; ce sont des coefficients différentiels relatifs aux pseudo-variables  $ds$  et  $dn$  définies en chaque point du plan.

En faisant croître  $r$  au delà de toute limite, nous obtiendrons les équations du mouvement plan. On peut donner aux équations intrinsèques la forme suivante :

Mouvements de révolution :

$$(0.9) \quad \begin{cases} \rho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial n}, \\ \rho q^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{\sin \theta}{r} \right) = \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{\partial p}{\partial s}. \end{cases}$$

Mouvements plans :

$$(0.10) \quad \begin{cases} \rho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial n}, \\ \rho q^2 \frac{\partial \theta}{\partial n} = \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{\partial p}{\partial s}. \end{cases}$$

Dans chacun des deux cas, il convient de joindre aux deux équations écrites les relations (0.4) et (0.5).

Du moment que les symboles introduits ne représentent pas des dérivées partielles au sens propre, il conviendra de prendre les précautions nécessaires quand on dérivera ces équations. Si l'on désire conserver les coordonnées intrinsèques, on sera amené à introduire les coefficients différentiels  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)$ ,  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2}$ , relatifs aux différentielles du second ordre; nous les noterons encore comme des dérivées partielles. Il faut alors remarquer que les coefficients différentiels  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial n} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)$  ne sont pas égaux; en coordonnées intrinsèques, on doit tenir compte de l'ordre des dérivations. Envisageons en effet deux lignes de courant voisines et deux trajectoires orthogonales voisines;

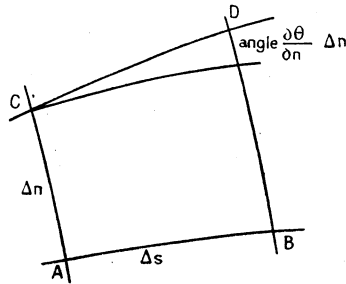


Fig. 1.

ces quatre courbes se coupent en quatre points A, B, C, D, en lesquels nous considérons les valeurs d'une certaine fonction  $f$ ;  $AB = \Delta s$ ,  $AC = \Delta n$ . Le segment BD a pour longueur  $\Delta n + \Delta s \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \Delta n \right)$ . D'une façon analogue,

$$CD = \Delta s \left( 1 - \frac{\partial \theta}{\partial s} \Delta n \right).$$

La différence

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial n} \right)$$

est égale à la valeur limite, lorsque  $\Delta s$  et  $\Delta n$  tendent simultanément vers zéro, de la quantité suivante :

$$\frac{\frac{f_D - f_C}{CD} - \frac{f_B - f_A}{AB}}{AC} - \frac{\frac{f_D - f_B}{BD} - \frac{f_C - f_A}{AC}}{AB}.$$

En remplaçant les divers segments par leur valeur, on obtient à la limite la relation cherchée :

$$(0.11) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial f}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial f}{\partial n},$$

qui généralise le théorème de Schwartz relatif aux dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

Dans les équations du mouvement, interviennent les dérivées de la pression et de la vitesse; lorsqu'on se déplace le long d'une ligne de courant, on peut écrire le théorème de Bernoulli  $dp + \rho q dq = 0$ ; lorsqu'on se déplace le long d'une direction différente, on établit la relation plus générale

$$(0.12) \quad dp + \rho q dq = p d \text{Log } p_0.$$

0.2. ÉQUATIONS DU CHOC. — Les équations du mouvement établies dans le paragraphe précédent demeurent valables aussi longtemps que les fonctions inconnues restent continues. Or il est nécessaire d'envisager l'apparition de discontinuités dans le champ des vitesses du fluide. On dit que le fluide subit un choc en un point, lorsque la vitesse en ce point est discontinue; en un tel point, la densité, la pression et la température sont aussi discontinues. Le lieu des points en lesquels se produit ce phénomène forme une surface que l'on appelle onde de choc.

Les discontinuités qui apparaissent à la traversée d'une onde de choc ne peuvent être arbitraires. La masse et l'énergie totale de chaque élément fluide conservent une valeur constante; la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des percussions subies. Il en résulte des relations qui permettent de déterminer l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde de choc, lorsque l'état du fluide sur la face antérieure est connu ainsi que l'onde de choc elle-même. Ces relations portent le nom d'équations du choc. Nous désignons par  $w_n$  la composante de la vitesse normalement à l'onde de choc; par  $w_t$  et  $w_\tau$ , les composantes suivant deux directions situées dans le plan tangent à l'onde de choc. Nous introduirons les indices 1 et 2; l'indice 1 est relatif à l'état du fluide avant le choc; l'indice 2, à l'état du fluide après le choc. Les équations du choc, au nombre de cinq, sont les suivantes :

$$(0.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 w_{n_1} = \rho_2 w_{n_2}, \\ \rho_1 w_{n_1}^2 + p_1 = \rho_2 w_{n_2}^2 + p_2, \\ \rho_1 w_{n_1} w_{t_1} = \rho_2 w_{n_2} w_{t_2}, \\ \rho_1 w_{n_1} w_{\tau_1} = \rho_2 w_{n_2} w_{\tau_2}, \\ \frac{2k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + w_{n_1}^2 + w_{t_1}^2 + w_{\tau_1}^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + w_{n_2}^2 + w_{t_2}^2 + w_{\tau_2}^2. \end{array} \right.$$

On en déduit l'égalité des composantes tangentielles de la vitesse; en outre, le rapport des densités et des pressions est fonction du seul rapport des composantes normales

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{w_{n_1} - \mu^2 w_{n_2}}{w_{n_2} - \mu^2 w_{n_1}}, \quad \text{où } \mu^2 = \frac{k-1}{k+1}.$$

On obtient aussi

$$w_{n_1} w_{n_2} = q^{*2} - \mu^2 (w_{t_1}^2 + w_{\tau_1}^2).$$

En vertu de la conservation de l'énergie, la vitesse critique possède la même valeur de part et d'autre de l'onde de choc; il en est de même de la vitesse maximum.

*Cas d'un écoulement initial uniforme.* — Un cas particulier est celui dans lequel le mouvement du fluide avant le choc est un écoulement uniforme de vitesse  $\vec{q}_1$ . Les composantes cartésiennes  $u, v, w$  de la vitesse après le choc s'expriment alors simplement à l'aide des paramètres directeurs de la normale à l'onde de choc : —  $\tau, \sigma_1, \sigma_2$ . L'axe des abscisses étant parallèle à la vitesse initiale, on calcule

$$(0.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = q_1(1 - \mu^2) \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{q^{*2}}{q_1}, \\ v = (q_1 - u)\sigma_1, \\ w = (q_1 - u)\sigma_2, \\ \rho = \rho_1 \frac{q_1^2}{q^{*2}(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \mu^2 q_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, \\ p = p_1 \frac{q_1^2 \{1 + \mu^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\} - \mu^2 q^{*2}(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(q^{*2} - \mu^2 q_1^2)(1 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}. \end{array} \right.$$

$\rho$  et  $p$  représentent ici la densité et la pression sur la face postérieure de l'onde de choc, que nous avons désignées par  $\rho_2$  et  $p_2$  dans les formules (0.13) pour donner aux notations une forme symétrique.

*Second principe de la Thermodynamique.* — Aux équations précédentes, il convient de joindre une condition supplémentaire, imposée par le second principe de la Thermodynamique. En vertu de ce principe, l'entropie de chaque élément fluide peut seulement rester constante ou augmenter. Donc, à la traversée d'une onde de choc, la variation d'entropie est positive.

On déduit aisément de ce résultat les propositions suivantes : la vitesse avant le choc est supersonique; à la traversée de l'onde de choc, la densité et la pression augmentent, tandis que la vitesse diminue.

## CHAPITRE I.

### ÉCOULEMENTS TRANSSONIQUES CONTINUS.

1.1. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE SOLUTIONS EXACTES. — Lorsque le fluide est animé d'un mouvement plan isentropique, les coordonnées polaires de la vitesse sont déterminées par les deux équations (0.10). Nous introduisons les deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  telles que

$$d\varphi = q ds, \quad d\psi = \frac{\rho q}{\rho_0} dn.$$

Elles représentent le potentiel des vitesses et la fonction de courant; elles sont liées aux coordonnées cartésiennes par les formules

$$(1.1) \quad \begin{cases} q dx = \cos \theta d\varphi - \sin \theta \frac{\rho_0}{\rho} d\psi, \\ q dy = \sin \theta d\varphi + \cos \theta \frac{\rho_0}{\rho} d\psi. \end{cases}$$

Lorsque le déterminant fonctionnel des fonctions  $q$  et  $\theta$  par rapport aux variables  $\varphi$  et  $\psi$  n'est pas nul, nous permutons, dans les équations du mouvement, le rôle des fonctions et des variables. On retrouve ainsi les équations du mouvement dans le plan de l'hodographe sous la forme indiquée par Tchaplignine [12] :

$$(1.2) \quad \varphi'_\theta = \frac{\rho_0}{\rho} \psi'_q, \quad \varphi'_q = -\frac{\rho_0}{\rho q} \left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right) \psi'_\theta.$$

Un certain nombre de solutions exactes de ces équations ont été construites et étudiées par Tchaplignine [12], Taylor, Tollmien [17], Ringleb [19]. Dans ces solutions, la fonction de courant est le produit d'une fonction  $\alpha(q)$  par une fonction  $\beta(\theta)$ , ou encore une somme de tels produits. La fonction  $\beta(\theta)$  est nécessairement, soit une fonction linéaire, soit une fonction trigonométrique, soit une fonction exponentielle. Il est possible de satisfaire le système (1.2) d'une façon beaucoup plus générale, en prenant pour fonction de courant une série de la forme suivante :

$$\psi(q, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta^{(2r)}(\theta) \alpha_r(q).$$

La fonction  $\beta(\theta)$ , supposée indéfiniment dérivable, peut être choisie arbitrairement. Chaque terme de la série ne constitue pas une solution du système (1.2), mais la somme vérifie ce système, si les fonctions  $\alpha_r(q)$  sont choisies de façon convenable. Elles doivent vérifier le système suivant, qui permet de les déterminer de proche en proche :

$$\alpha_{-1} \equiv 0, \\ \frac{d}{dq} \left( \frac{q}{\rho} \alpha'_r \right) + \frac{1}{\rho q} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \alpha_{r-1} \equiv 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

En désignant par  $\bar{\alpha}_0$ ,  $\frac{1}{\rho_0}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{\alpha}_r$  et  $\frac{1}{\rho_r}$  des constantes arbitraires, on peut écrire

$$\alpha_r(q) = \bar{\alpha}_r + \frac{1}{\rho_r} \int_{\bar{q}}^q \frac{\rho}{q} dq + \int_{\bar{q}}^q \frac{\rho}{q} \left\{ \int_{\bar{q}}^q \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2} \right) \frac{q}{\rho} \alpha_{r-1} dq \right\} dq \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Sous réserve de la convergence des séries obtenues, nous avons formé une famille de solutions comportant une fonction et une double infinité de

constantes arbitraires. On peut retrouver ainsi les solutions de Tchapligne, Tollmien et Ringleb comme cas particuliers.

Lorsque la fonction  $\beta(\theta)$  est une fonction impaire, l'écoulement admet un axe de symétrie, et la ligne de courant  $\psi = 0$  comprend une partie rectiligne.

Si nous choisissons en outre les constantes arbitraires de sorte que toutes les fonctions  $\alpha_r(q)$  s'annulent pour la même valeur de la vitesse, le reste de cette ligne de courant est constitué par une courbe sur laquelle la vitesse demeure constante; c'est une ligne de jet. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre, pour chaque valeur de  $r$ ,  $\bar{\alpha}_r = 0$ . Afin de préciser la forme de cette ligne de jet, nous écrirons son équation intrinsèque; comme  $q$  et  $\psi$  demeurent constants, on obtient, pour tout déplacement tangent à cette courbe,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{\rho_0}{\rho} \psi'_r(\bar{q}, \theta), \quad \mathcal{R} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_r} \frac{\bar{\rho}}{q} \beta^{(2r)}(\theta).$$

Le rayon de courbure  $\mathcal{R}$  est exprimé en fonction de l'angle  $\theta$  que fait la courbe avec une direction fixe. Il est possible de choisir la fonction  $\beta(\theta)$  pour que la ligne de jet soit une courbe donnée à l'avance. Si nous nous plaçons dans le cas où les coefficients  $\frac{1}{\rho_r}$  sont nuls à partir d'un certain rang, la fonction  $\beta(\theta)$  est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

1.2. DÉTERMINATION D'UNE LOI DE COMPRESSIBILITÉ TRANSSONIQUE. — Les solutions exactes que l'on a pu déterminer pour le système (1.2) présentent un intérêt essentiellement théorique. Les écoulements correspondants diffèrent des écoulements que l'on rencontre dans la pratique : écoulement autour d'un obstacle donné, écoulement dans une tuyère. Pour satisfaire aux conditions que pose la technique, on a été amené à remplacer ce système par un système plus simple, équivalant, soit à l'équation de Laplace, soit à une équation aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants du type hyperbolique. Dans ces deux cas, les écoulements obtenus sont entièrement subsoniques ou entièrement supersoniques. Si l'on désire construire des écoulements dans lesquels la vitesse du fluide puisse atteindre et dépasser la célérité du son, il est nécessaire de remplacer le système (1.2), non par une équation de type elliptique ou hyperbolique, mais par une équation de type mixte. La plus simple de ces équations est l'équation qui se présente sous la forme canonique étudiée par Tricomi [14]. Plusieurs auteurs ont ramené l'étude des écoulements transsoniques à l'étude d'une équation de Tricomi, en effectuant des approximations sur les coefficients des diverses équations aux dérivées partielles que l'on rencontre. La justification de cette méthode exige la continuité des solutions par rapport aux coefficients. On peut présenter cette étude d'une façon différente. Nous allons chercher à déterminer une loi de compressibilité telle que,

pour un fluide obéissant à cette loi, le système (1.2) soit équivalent à l'équation de Tricomi.

Si nous permutons le rôle des fonctions et des variables, les équations (1.2) prennent la forme suivante :

$$\frac{\rho q}{\rho^*} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right) \frac{\partial q}{\partial \varphi} = 0, \quad q \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\rho}{\rho^*} \frac{\partial q}{\partial \psi} = 0.$$

Nous avons écrit  $\rho^*$ , densité critique, au lieu de  $\rho_0$ , densité au repos; cela revient à multiplier la fonction de courant par un facteur constant; au voisinage de la célérité du son, il est plus commode de rapporter les diverses grandeurs à leur valeur critique. En introduisant les deux nouvelles fonctions

$$u = \int_{q^*}^q \frac{\rho}{\rho^*} \frac{dq}{q} \quad \text{et} \quad \Lambda(u) = - \frac{\rho^{*2}}{\rho^2} \left(1 - \frac{q^2}{a^2}\right),$$

les équations prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - \Lambda(u) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

La fonction  $\Lambda(u)$  est déterminée par la loi de compressibilité, et réciproquement la donnée de la fonction  $\Lambda(u)$  établit une relation entre la densité et la pression, c'est-à-dire détermine la loi de compressibilité. Lorsque le fluide obéit à la loi adiabatique, on peut écrire le développement en série de la fonction  $\Lambda(u)$  au voisinage de la valeur  $u = 0$  :

$$\Lambda(u) = (k+1)u + \dots$$

Nous convenons désormais de négliger au second membre les termes non écrits; cela revient à envisager un fluide fictif qui obéira à la loi de compressibilité définie par cette convention. Il est normal d'admettre que le comportement de ce fluide, pour les vitesses voisines de la célérité du son, indique, en première approximation, les phénomènes que l'on doit observer dans les écoulements gazeux réels. Nous faisons ici une nouvelle hypothèse de continuité : nous admettons qu'une légère variation dans la loi de compressibilité entraîne une variation faible pour la solution des équations du mouvement.

*Loi de compressibilité.* — A partir des relations qui définissent les quantités  $u$  et  $\Lambda(u)$ , on peut écrire, quelle que soit la fonction  $\Lambda(u)$ ,

$$(1.3) \quad \frac{d}{du} \left( \frac{q^*}{q} \right) = - \frac{\rho^* q^*}{\rho q}, \quad \frac{d}{du} \left( \frac{\rho^* q^*}{\rho q} \right) = \Lambda(u) \frac{q^*}{q}.$$

La fonction  $\frac{q^*}{q}$  de la variable  $u$  est donc la solution de l'équation différentielle

$$\alpha''(u) + A(u)\alpha(u) = 0,$$

telle que

$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha'(0) = -1.$$

On calcule ensuite la pression à l'aide de la relation de Bernoulli. On obtient ainsi

$$(1.4) \quad \frac{q^*}{q} = \alpha(u), \quad \frac{\rho^*}{\rho} = -\frac{\alpha'(u)}{\alpha(u)}, \quad \frac{p}{p^*} = 1 - k \int_0^u \frac{du}{\alpha^2(u)}.$$

Ces dernières formules définissent parfaitement la loi de compressibilité.

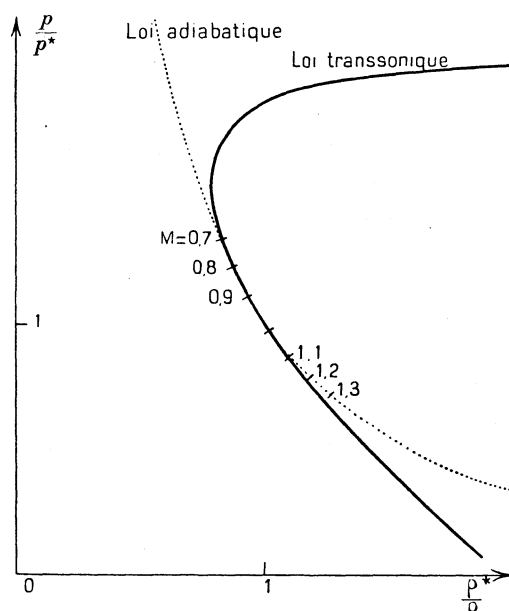


Fig. 2. — Loi de compressibilité transsonique.

En adoptant la valeur  $A(u) = (k+1)u$ , on obtient

$$(1.5) \quad \alpha(u) = \frac{(k+1)^{\frac{1}{6}} \sqrt{u}}{3^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{3}\right)!} J_{-\frac{1}{3}} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{k+1} u^{\frac{3}{2}} \right\} + \frac{(k+1)^{-\frac{1}{6}} \sqrt{u}}{3^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{2}{3}\right)!} J_{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{k+1} u^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

La fonction  $\alpha(u)$  s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel d'indice  $\frac{1}{3}$  et  $-\frac{1}{3}$ . La relation entre la densité et la pression est représentée sur la figure 2. Sur la figure, cette relation, que nous appellerons loi de compressibilité transsonique,



est comparée à la loi adiabatique. Au voisinage de la valeur  $u = 0$ , les formules (1.4) et (1.5) nous permettent d'écrire

$$\frac{p}{p^*} = 1 - k \left( \frac{\rho^*}{\rho} - 1 \right) + \frac{k(k+1)}{2!} \left( \frac{\rho^*}{\rho} - 1 \right)^2 + \dots$$

Il en résulte que, dans le diagramme  $\left( p, \frac{1}{\rho} \right)$ , les courbes qui représentent la loi de compressibilité adiabatique et la loi de compressibilité transsonique sont osculatrices au point sonique. Par conséquent, si nous adoptons désormais cette dernière loi, les phénomènes réels seront représentés avec une bonne approximation au voisinage de la célérité du son.

1.3. ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS GAZEUX AU VOISINAGE DE LA CÉLÉRITÉ DU SON. — La nouvelle loi de compressibilité est particulièrement commode pour étudier les écoulements gazeux dans les tuyères. Pour de tels écoulements, la fonction de courant n'est pas une fonction uniforme des variables hodographiques; à chaque couple de valeurs de  $q$  et  $\theta$ , correspond une ou trois valeurs réelles de  $\psi$ . Il est donc intéressant de former, pour l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction de courant, des solutions exactes multivalentes. Dans le cas d'une compression adiabatique, on ne connaît pas, à l'heure actuelle, de telles solutions; mais il est possible d'en obtenir en adoptant, pour le fluide, la loi de compressibilité transsonique définie précédemment. En effet, les équations du mouvement ont la forme simple suivante :

$$(1.6) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial q_1}{\partial \psi_1}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi_1} = q_1 \frac{\partial q_1}{\partial \varphi},$$

où  $\psi_1 = \tau \psi$  et  $q_1 = \tau u$ , avec  $\tau^2 = k + 1$ . Revenant à la forme initiale dans laquelle le potentiel des vitesses et la fonction de courant jouent le rôle de fonctions inconnues, nous formons la nouvelle équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction de courant

$$(1.7) \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial q_1^2} - q_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} = 0.$$

Cette équation est équivalente au système (1.6), tant que le déterminant fonctionnel des fonctions  $\varphi$  et  $\psi_1$  par rapport aux variables  $q$  et  $\theta$  reste différent de zéro; elle a été étudiée par Tricomi [14]. A toute solution particulière, correspond un mouvement possible pour le fluide.

Nous nous proposons de former des solutions particulières pour lesquelles la fonction  $\psi_1$  admette plusieurs déterminations. Dans ce but, nous cherchons à vérifier le système (1.6) à l'aide d'une série

$$q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_1^n a_n(\varphi).$$

Les fonctions  $a_n(\varphi)$  doivent satisfaire une suite infinie d'équations différentielles

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \frac{d^2}{d\varphi^2} \sum_{r=0}^n \frac{a_r a_{n-r}}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

La valeur correspondante de la fonction  $\theta(\psi_1, \varphi)$  est la suivante :

$$\theta = \int a_1 d\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \psi_1 \frac{a_0^2}{2} + \frac{\psi_1^2}{2} a_0 a_1 + \dots \right\}.$$

La solution ainsi formée comporte deux fonctions arbitraires :  $a_0(\varphi)$  et  $a_1(\varphi)$ . Ces fonctions sont supposées indéfiniment dérivables; en outre, nous nous plaçons dans le cas où les séries envisagées sont convergentes. Considérons, pour fixer les idées, un cas particulier simple :  $a_0 = \varphi$ ,  $a_1 = 0$ . On obtient

$$q_1 = \varphi + \frac{\psi_1^2}{2}, \quad \theta = \psi_1 \varphi + \frac{\psi_1^3}{6}.$$

L'élimination du potentiel des vitesses permet d'expliciter la fonction de courant

$$(1.8) \quad \psi_1^3 - 3q_1\psi_1 + 3\theta = 0.$$

Il est aisé de vérifier que cette fonction est bien une solution pour l'équation de Tricomi. Elle possède trois déterminations réelles lorsque la quantité  $4q_1^3 - 9\theta^2$  est positive, et une seule détermination réelle lorsque cette même quantité est négative. Dans le plan de coordonnées rectangulaires  $(\theta, q_1)$ , l'équation (1.8) représente les droites tangentes à la cubique  $4q_1^3 - 9\theta^2 = 0$ . Cette cubique partage le plan en deux régions; par les points de l'une de ces régions, on peut mener une seule tangente à la courbe; par les points de l'autre région, on peut mener trois tangentes.

*Seconde méthode.* — Une autre méthode permet d'obtenir, pour l'équation de Tricomi, des solutions multivalentes. La fonction  $\psi_1(q_1, \theta)$  vérifiant l'équation (1.7), ses dérivées partielles  $\lambda$  et  $\mu$  par rapport aux variables  $\theta$  et  $q_1$  vérifient le système

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_1} = \frac{\partial \mu}{\partial \theta}, \quad q_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{\partial \mu}{\partial q_1}.$$

Intervertissant encore le rôle des fonctions et des variables, nous obtenons le nouveau système

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} = \frac{\partial q_1}{\partial \lambda}, \quad q_1 \frac{\partial q_1}{\partial \mu} = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}, \quad d\psi_1 = \lambda d\theta + \mu dq_1.$$

Ce système est équivalent à l'équation de Tricomi. Il diffère du système (1.6) par le choix des variables. Dans le système (1.6), les variables sont constituées par la fonction  $\psi_1$  et une seconde fonction convenablement associée; dans le

cas présent, les variables sont les dérivées partielles de la fonction inconnue. Nous construisons d'une façon analogue des solutions dépendant de deux fonctions arbitraires. La plus simple est la suivante :

$$q_1 = \mu + \frac{\lambda^2}{2}, \quad \theta = \lambda\mu + \frac{\lambda^3}{6}, \quad \psi_1 = \frac{\mu^2}{2} + \mu\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{8}.$$

La surface représentée a pour équation implicite

$$\psi_1^3 + P(q_1, \theta)\psi_1 + Q(q_1, \theta) = 0,$$

avec

$$16P = -3q_1(q_1^2 + 18\theta^2) \quad \text{et} \quad 64Q = -2q_1^3 + 9\theta^2 q_1^2 + 81\theta^4.$$

La fonction  $\psi_1(q_1, \theta)$  possède encore une ou trois déterminations réelles, suivant que la quantité  $4q_1^3 - 9\theta^2$  est négative ou positive. La courbe d'équation  $4q_1^3 - 9\theta^2 = 0$  constitue une arête de rebroussement sur la surface  $\psi_1 = \psi_1(q_1, \theta)$ .

Dans les deux exemples indiqués, la courbe qui sépare les régions dans lesquelles la fonction  $\psi_1$  possède une ou trois déterminations réelles est une caractéristique pour l'équation de Tricomi. Ce résultat est général; si la surface solution d'une équation aux dérivées partielles possède une arête de rebroussement, cette ligne est une caractéristique pour l'équation proposée, car, sur l'arête de rebroussement, la donnée du plan tangent ne détermine pas la surface de façon-unique.

*Écoulement dans une tuyère.* — Nous nous proposons de construire l'écoulement défini par la solution élémentaire

$$q_1 = \varphi + \frac{\psi_1^2}{2}, \quad \theta = \psi_1\varphi + \frac{\psi_1^3}{6}.$$

Cet écoulement étant intéressant pour les nombres de Mach voisins de l'unité, nous construisons en premier lieu la ligne sonique. La correspondance entre le plan de l'hodographe et le plan de l'écoulement est la suivante :

$$\frac{dx}{L} = \frac{q^*}{q} \left\{ \cos \theta d\varphi - \frac{\rho^*}{\rho} \sin \theta d\psi \right\}, \quad \frac{dy}{L} = \frac{q^*}{q} \left\{ \sin \theta d\varphi + \frac{\rho^*}{\rho} \cos \theta d\psi \right\}.$$

Elle permet de déterminer les équations paramétriques de la ligne sonique :

$$\frac{dx}{L} = \left\{ -\psi_1 \cos \frac{\psi_1^2}{3} + \frac{1}{\tau} \sin \frac{\psi_1^2}{3} \right\} d\psi_1, \quad \frac{dy}{L} = \left\{ \psi_1 \sin \frac{\psi_1^2}{3} + \frac{1}{\tau} \cos \frac{\psi_1^2}{3} \right\} d\psi_1.$$

$L$  est un paramètre arbitraire ayant les dimensions d'une longueur. Nous construisons ensuite les lignes de courant  $\psi_1 = \text{const.}$  Sur ces lignes, l'abscisse curviligne  $s$  et l'angle  $\theta$  que fait la tangente avec l'axe des abscisses s'expriment en fonction du paramètre  $q_1$  par les relations suivantes :

$$\frac{s}{L} = \tau \int_0^{\psi_1} \alpha(u) du, \\ \theta = q_1 \psi_1 - \frac{\psi_1^3}{3}.$$

La première relation est indépendante de la ligne de courant envisagée. Sur une ligne de courant donnée, les variations de  $\theta$  et de  $q_1$  sont proportionnelles. On peut énoncer les deux théorèmes suivants :

1. Les courbes d'égale vitesse découpent sur les diverses lignes de courant des arcs égaux.
2. Le rayon de courbure d'une ligne de courant a pour valeur

$$\mathcal{R} = \frac{f(s)}{\psi_1},$$

la fonction  $f(s)$  ne dépendant pas du paramètre  $\psi_1$ .

Il est intéressant d'étudier la variation de l'angle  $\theta$  sur les lignes d'égale

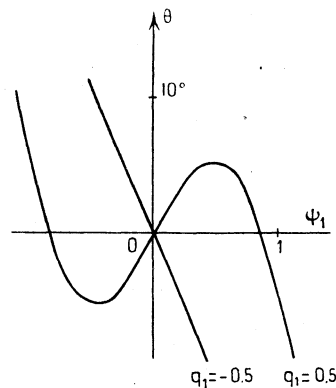


Fig. 3.

vitesse. Dans le domaine subsonique, cette variation est monotone; dans le domaine supersonique, il peut exister trois points en lesquels  $\theta$  possède la même valeur. Le réseau des courbes

$$\theta = q_1 \psi_1 - \frac{\psi_1^3}{3}$$

est indiqué sur la figure 3.

Lorsque  $q_1$  est positif (domaine supersonique), il peut exister trois points ayant même vecteur-vitesse; il suffit que  $\theta$  soit compris entre les extremums de la courbe correspondante. Ces extremums, atteints pour  $\psi_1 = \pm \sqrt{q_1}$ , ont pour valeur  $\theta = \pm \frac{2}{3} q_1^{\frac{3}{2}}$ . Le lieu des points correspondants dans le plan de l'écoulement s'appelle la ligne de branchement; si l'on convient d'uniformiser la fonction de courant dans le plan de l'hodographe, les divers feuillets de la surface de Riemann introduite se raccordent le long de cette ligne. Les équations paramétriques de la ligne de branchement sont définies par les relations

$$\frac{dx}{L} = \frac{1}{2\sqrt{q_1}} d\left(\frac{q^*}{q} \sin \theta\right), \quad \frac{dy}{L} = \frac{1}{2\sqrt{q_1}} d\left(\frac{q^*}{q} \cos \theta\right).$$

Sur deux lignes voisines de la ligne sonique, par exemple les lignes d'égale vitesse sur lesquelles le nombre de Mach a pour valeur 0,8 et 1,2, l'état du fluide est connu. Dans la région supersonique, on peut poursuivre la détermination de l'écoulement par la méthode des caractéristiques, en adoptant la loi de compressibilité adiabatique. Dans la région subsonique, on peut aussi déterminer l'écoulement au voisinage de la ligne  $M = 0,8$ ; cependant la fonction de courant que l'on détermine ainsi doit satisfaire, sur une courbe, à des données de Cauchy, et vérifier une équation de type elliptique. Les conditions aux limites étant surabondantes, on doit s'attendre, dès que l'on quittera le voisinage de la ligne  $M = 0,8$ , à rencontrer des singularités dans la solution. Pour

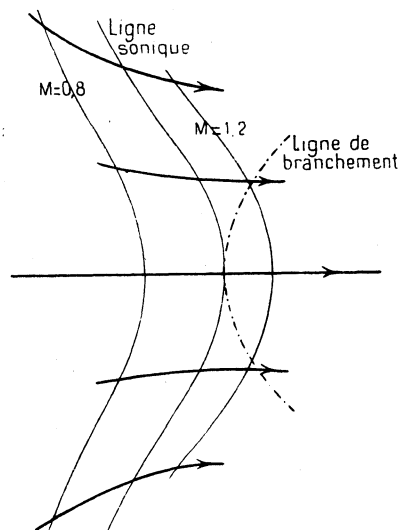


Fig. 4. -- Écoulement transsonique dans une tuyère.

les nombres de Mach compris entre 0,8 et 1,2, l'écoulement est représenté sur la figure 4.

*Généralisation.* — Le succès de la méthode utilisée pour obtenir des solutions multivalentes de l'équation de Tricomi est dû à la forme simple de cette équation. Or la fonction de courant  $\psi(u, \theta)$  doit satisfaire l'équation plus générale

$$(1.9) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - A(u) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

La fonction  $A(u)$  a été explicitée au début de ce chapitre. Dans le cas d'une compression adiabatique, la courbe représentative offre l'aspect d'une hyperbole; les asymptotes sont les droites

$$A = \Lambda_m = -0,4019, \quad u = u_M = 0,4046.$$

L'adoption de la loi de compressibilité transsonique revenait à confondre à l'origine, la courbe et sa tangente. Il est préférable de remplacer la fonction  $A(u)$  par une fonction homographe

$$A^*(u) = (k + 1) \frac{u}{1 - \lambda u}.$$

Les deux courbes représentatives sont tangentes à l'origine et, en outre, possèdent la même allure générale. On dispose du paramètre  $\lambda$  pour faire coïncider l'une des asymptotes de l'hyperbole avec l'une ou l'autre des asymptotes de la courbe  $A(u)$ .

1° Si l'on désire une loi qui soit bonne pour les vitesses subsoniques, on prendra

$$\lambda = -\frac{k + 1}{A_m} = 5,97.$$

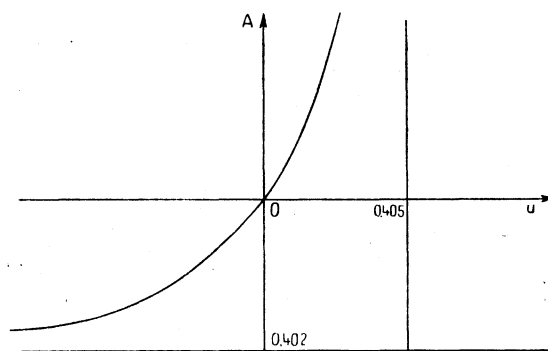


Fig. 5.

2° Si l'on désire une loi satisfaisante pour les vitesses supersoniques, on adoptera

$$\lambda = \frac{1}{u_M} = 2,47.$$

Dans les deux cas, les phénomènes critiques seront représentés avec une approximation convenable.

Le problème qui se pose est celui de la formation de solutions multivalentes pour l'équation (1.9). La méthode utilisée dans le cas de l'équation de Tricomi étant en défaut, nous aborderons cette question par une méthode différente. Les solutions explicitées au cours des paragraphes précédents sont de la forme

$$(1.10) \quad \psi^3 + Y(u, \theta)\psi + X(u, \theta) = 0.$$

Il est naturel de chercher si, à l'aide de fonctions  $\psi(u, \theta)$  ainsi définies, il est possible de vérifier l'équation (1.9).

La réponse est affirmative. En dérivant, on obtient en effet

$$(3\psi^2 + Y)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = (3\psi^2 - Y) \left\{ 3X \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} Y \right\} \\ + \psi \left\{ 9X \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 6 \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 - 4Y^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} + 2Y \left( \frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 \right\}.$$

On obtient un résultat analogue avec la seconde variable. Ainsi, pour que la fonction  $\psi(u, \theta)$ , définie implicitement par l'équation (1.10), vérifie l'équation (1.9), il suffit que les deux fonctions  $X(u, \theta)$  et  $Y(u, \theta)$  vérifient le système suivant :

$$(1.11) \quad \begin{cases} 9X \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 6 \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 - 4Y^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} + 2Y \left( \frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 \\ - A(u) \left\{ 9X \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} - 6 \left( \frac{\partial X}{\partial \theta} \right)^2 - 4Y^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + 2Y \left( \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = 0, \\ 3X \frac{\partial^2 Y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} Y - A(u) \left\{ 3X \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} Y \right\} = 0. \end{cases}$$

C'est un système de deux équations aux dérivées partielles, comportant deux fonctions inconnues. A toute solution particulière de ce système, correspondra une solution particulière de l'équation (1.9). Cette solution sera une fonction multivalente des variables  $u$  et  $\theta$ , si les fonctions  $X$  et  $Y$  sont des fonctions uniformes.

La méthode peut encore être généralisée. Si nous définissons une fonction  $\psi(u, \theta)$  par l'équation

$$\psi^n + X_1(u, \theta) \psi^{n-1} + \dots + X_n(u, \theta) = 0,$$

les dérivées partielles de la fonction  $\psi$  s'expriment sous la forme  $\frac{P}{Q}$  dans laquelle  $P$  et  $Q$  désignent deux polynômes en  $\psi$  de degré  $n - 1$ ; le polynôme  $Q$  est le même pour toutes les dérivées que l'on peut envisager. Il suffira donc, pour que la fonction  $\psi$  ainsi définie satisfasse l'équation (1.9), que les  $n$  fonctions inconnues  $X_1, X_2, \dots, X_n$  satisfassent un système de  $n$  équations aux dérivées partielles obtenues en annulant dans cette équation les coefficients des diverses puissances de  $\psi$ , après que les dérivées secondes auront été remplacées par leurs expressions  $\frac{P}{Q}$ . L'équation (1.9) peut être remplacée par l'équation plus générale

$$a \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2b \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial \theta} + c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + d \frac{\partial \psi}{\partial u} + e \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \Pi(\psi, u, \theta).$$

$a, b, c, \dots$  sont des fonctions des seules variables  $u$  et  $\theta$ , tandis que le second membre est un polynôme en  $\psi$  (1).

(1) Une solution multivalente a été obtenue par P. Germain lorsque  $A(u) = -u : (1 + u)$ . La solution de Germain est la suivante :  $\psi = \theta + (1 + u) \operatorname{tg} \psi$  (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1811-1813).

## CHAPITRE II.

ÉTUDE DES ONDES DE CHOC  
CONSERVANT L'EXISTENCE D'UN POTENTIEL DES VITESSES.

Nous avons étudié, au cours du chapitre précédent, les propriétés des écoulements transsoniques pour lesquels le champ des vitesses ne subit pas de discontinuité. Cependant l'existence de points de rebroussement sur certaines trajectoires des molécules fluides ne permet pas leur réalisation. Dans des cas analogues, l'expérience indique que des phénomènes de choc apparaissent dans le fluide. Comme nous l'avons déjà signalé, la vitesse avant un choc est toujours supersonique; la vitesse postérieure peut être soit subsonique, soit supersonique.

Dans un choc, l'entropie subit une discontinuité, et, en vertu du second principe de la Thermodynamique, la variation d'entropie est positive. Lorsque l'écoulement avant le choc est isentropique, l'écoulement postérieur ne possède pas cette propriété, à moins que l'on ne se trouve dans le cas particulier pour lequel tous les éléments fluides subissent la même variation d'entropie. Il en est ainsi lorsque la position de l'onde de choc satisfait à certaines conditions que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous dirons dans ce cas que nous nous trouvons en présence d'un écoulement isentropique discontinu.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES. — Lorsqu'un courant rectiligne uniforme de vitesse supersonique subit un choc suivant une onde plane, l'écoulement postérieur est encore un courant rectiligne uniforme. Nous trouvons ainsi un premier exemple d'écoulement isentropique discontinu. Dans le cas d'un courant initial uniforme, seule une onde de choc plane transforme cet écoulement en un écoulement isentropique. Dans le cas général d'un écoulement isentropique discontinu, l'onde de choc est déterminée par la condition que la variation d'entropie  $\Delta S$  ait la même valeur positive en tous les points de discontinuité. Pour un gaz parfait, nous avons rappelé la relation

$$S = \frac{R^*}{(k-1)J} \text{Log} \frac{P}{\rho^k} + S_0.$$

Il en résulte que la variation d'entropie  $\Delta S$  dépend seulement du rapport  $\frac{P_2}{P_1}$  des pressions après et avant le choc, ainsi que du rapport  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  des densités. En vertu des équations du choc, ces deux rapports sont fonction eux-mêmes du seul quotient des vitesses normales. En conséquence, le caractère isentropique d'un écoulement se trouvera conservé à la traversée d'une onde de choc, si le rap-



port des vitesses normales après et avant le choc conserve la même valeur en tous les points de cette onde. Il est commode de transformer ce résultat, afin de donner une condition dans laquelle intervienne seulement l'état initial du fluide. Nous avons écrit dans les préliminaires la relation

$$\omega_{n_1} \omega_{n_2} = q^{*2} - \mu^2 (\omega_{t_1}^2 + \omega_{\tau_1}^2).$$

Nous en déduisons, en écrivant que le rapport des vitesses normales  $\frac{\omega_{n_2}}{\omega_{n_1}}$  possède la valeur constante  $\lambda^2$ ,

$$(2.1) \quad \frac{\omega_{n_1}^2}{\bar{q}^2} + \frac{\omega_{t_1}^2 + \omega_{\tau_1}^2}{q_m^2} = 1,$$

$$(2.2) \quad \frac{\omega_{n_2}^2}{q^{*2}} + \frac{\omega_{t_2}^2 + \omega_{\tau_2}^2}{q_m^2} = 1$$

$\bar{q}$  désigne la vitesse constante  $\frac{q^*}{\lambda}$ , et  $q_m$  la vitesse maximum;  $q^* < \bar{q} \leq q_m$ . La connaissance des ellipsoïdes de révolution représentés par la première de ces équations et des ellipsoïdes correspondants représentés par la seconde permet de construire graphiquement la vitesse après le choc, connaissant la vitesse avant le choc. L'équation (2.1) détermine la position de l'onde de choc lorsque l'écoulement antérieur est connu. En introduisant la célérité locale du son, nous pouvons écrire

$$\omega_{n_1}^2 = a_1^2 \frac{2\bar{q}^2}{(k+1)q^{*2} - (k-1)\bar{q}^2},$$

$$\omega_{n_2}^2 = a_2^2 \frac{2q^{*2}}{(k+1)\bar{q}^2 - (k-1)q^{*2}}.$$

$a_1$  et  $a_2$  désignent la célérité du son sur chacune des deux faces de l'onde de choc. Comme  $\bar{q}$  est une constante comprise entre la vitesse critique et la vitesse limite, les coefficients écrits au second membre sont l'un supérieur à l'unité, l'autre inférieur. On peut donc énoncer le théorème suivant :

*En tous les points d'une onde de choc conservant le caractère isentropique d'un écoulement, le rapport de la vitesse normale à la célérité locale du son est une constante de chaque côté de la surface d'onde. Ce rapport est supérieur à l'unité avant le choc, inférieur à l'unité après le choc.*

TRACÉ DES ONDES DE CHOC DANS LES ÉCOULEMENTS CONSIDÉRÉS. — Nous supposons le mouvement plan. Dans ce cas, tout écoulement isentropique est un écoulement irrotationnel, donc les écoulements isentropiques discontinus que nous allons maintenant envisager seront irrotationnels de part et d'autre de l'onde de choc.

Nous déterminerons la position de l'onde de choc.

*Plan de l'écoulement.* — L'écoulement antérieur est supposé connu; la fonction de courant  $\psi$ , le potentiel des vitesses  $\varphi$ , les coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  sont des fonctions des composantes polaires de la vitesse telles que

$$dx + i dy = \frac{e^{i\theta}}{q} \left( d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi \right).$$

Représentant l'onde de choc par son équation cartésienne  $y = y(x)$ , nous désignons par  $dy = y' dx$  et  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$  les accroissements d'ordonnée et d'arc correspondant à un accroissement  $dx$  de l'abscisse lorsqu'on se déplace sur l'onde de choc. Le théorème énoncé au paragraphe précédent se traduit par l'équation

$$(2.3) \quad \lambda^2 \frac{a^2}{q^2} d\varphi^2 = \left( 1 - \lambda^2 \frac{a^2}{q^2} \right) \frac{\rho_0^2}{\rho^2} d\psi^2 \quad (\lambda > 1).$$

Cette équation différentielle détermine les ondes de choc correspondant à la valeur  $\lambda$  du rapport  $\frac{w_{n1}}{a}$ . Comme  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions connues, c'est une équation différentielle entre  $q$  et  $\theta$ . Traitons l'exemple simple d'un écoulement par source

$$\begin{aligned} \psi &= A_1 \theta, \\ x &= \frac{A_1 \rho_0}{\rho q} \cos \theta, \quad y = \frac{A_1 \rho_0}{\rho q} \sin \theta. \end{aligned}$$

L'équation différentielle (2.3) prend la forme

$$d\theta = \frac{\pm \lambda a}{\sqrt{q^2 - \lambda^2 a^2}} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{dq}{q}.$$

$q$  augmente à partir d'une certaine valeur  $\bar{q}$  pour laquelle le nombre de Mach est égal à  $\lambda$ , jusqu'à la valeur maximum. L'intégrale du second membre est convergente pour ces limites; on peut donc écrire

$$\theta = \int_{\bar{q}}^q \frac{\pm \lambda a}{\sqrt{q^2 - \lambda^2 a^2}} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{dq}{q}.$$

Lorsque  $q$  tend vers la vitesse limite,  $x$  et  $y$  augmentent indéfiniment, tandis que  $\theta$  possède une valeur limite; l'onde de choc est asymptote au rayon vecteur correspondant. Afin de préciser l'écoulement postérieur, nous calculons l'accélération du fluide au sommet A de l'onde de choc. La seconde des équations intrinsèques du mouvement résout le problème :

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = - \frac{q'(s)}{q} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) = - \frac{\partial \text{Log } \rho q}{\partial s}.$$

Au sommet A de l'onde de choc, l'angle polaire, dans l'écoulement initial, est nul :  $\theta_1 = 0$ . En un point B de l'onde de choc, voisin de A, nous détermi-

nous l'angle  $\theta_2$  de la vitesse postérieure avec l'axe des abscisses;  $AB = \delta n$ . L'angle  $\beta$  que fait l'onde de choc avec le rayon vecteur est tel que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r d\theta_1}{dr}, \quad r = \frac{A_1 \rho_0}{\rho q}.$$

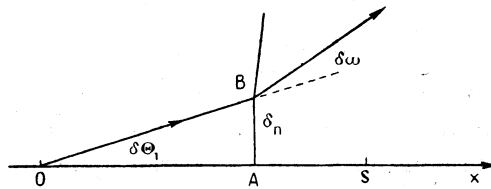


Fig. 6.

Ainsi

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda a}{\sqrt{q^2 - \lambda^2 a^2}}.$$

Lorsqu'on passe de A à B, on calcule, au premier ordre près,

$$\delta q_1 = 0, \quad \delta \beta = \frac{q^{*2}}{q^{*2} - q_1^2} \delta \theta_1.$$

Donc, en vertu des équations du choc, la déviation de la vitesse au point B a pour valeur  $\delta \omega = \delta \theta$ , d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{1}{\rho q} \frac{\partial(\rho q)}{\partial s} = \frac{2}{OA}.$$

L'accélération au point A après le choc est négative. Si nous admettons que

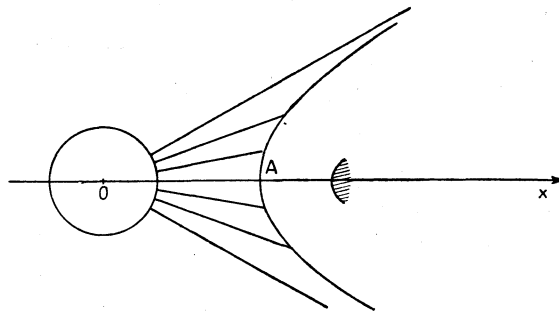


Fig. 7.

cette accélération demeure négative sur l'axe de symétrie OA, il existe dans le fluide un point de stagnation S. En supposant que, sur le segment AS, le débit est une fonction linéaire de l'abscisse curviligne, on obtient

$$AS = \frac{OA}{2}.$$

Le fluide contournera donc un obstacle; nous nous trouvons en présence d'un problème d'onde de choc détachée, dont l'étude fera l'objet du prochain chapitre. L'onde de choc possède la forme indiquée sur la figure 7.

L'écoulement postérieur admet un potentiel des vitesses, mais n'est pas un écoulement par source.

*Plan de l'hodographe.* — Dans le plan de l'hodographe, la connaissance de l'une des faces de l'onde de choc détermine parfaitement l'autre face, lorsque

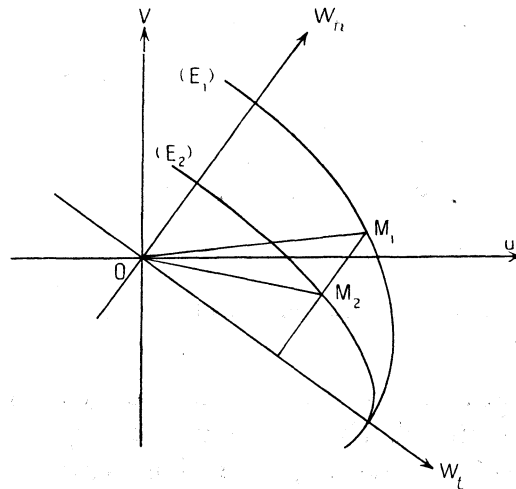


Fig. 8.

la variation d'entropie est connue. Dans le plan  $(Ou, Ov)$ , nous traçons deux axes perpendiculaires  $Ow_t, Ow_n$  et les demi-ellipses  $(E_1)$  et  $(E_2)$  :

$$(E_1) \quad \frac{w_n^2}{q^2} + \frac{w_t^2}{q_m^2} = 1 \quad (w_n > 0),$$

$$(E_2) \quad \frac{w_n^2}{\frac{q^{*2}}{q^2}} + \frac{w_t^2}{q_m^2} = 1 \quad (w_n > 0).$$

La variation d'entropie est liée à la constante  $\bar{q}$  par la relation

$$\Delta S = \frac{R^*}{k-1} \text{Log} \frac{\bar{q}^2 - \mu^2 q^{*2} \left(\frac{q^{*2}}{q^2}\right)^k}{q^{*2} - \mu^2 q^2 \left(\frac{q^{*2}}{q^2}\right)^k}.$$

Un point  $M_1$  de la première face de l'onde de choc doit être sur la demi-ellipse  $(E_1)$ ; on fera donc tourner les axes  $(Ow_t, Ow_n)$  de façon qu'il en soit ainsi; dans ces conditions, le point  $M_2$  correspondant sur la seconde face de l'onde de choc appartient d'une part à la demi-ellipse  $(E_2)$ , d'autre part à la parallèle à  $Ow_n$  issue de  $M_1$ . Ce point est donc connu.

Dans le cas particulier d'un écoulement initial par ondes simples, l'image de la face antérieure de l'onde de choc est une caractéristique; l'image de la face postérieure est alors la courbe représentée sur la figure 9 (on a pris  $\lambda = 2$ ). Les deux courbes sont en correspondance ponctuelle; l'écoulement postérieur peut être subsonique. Dans le cas particulier d'une onde de choc rectiligne, les composantes normale et tangentielle de la vitesse coïncident avec les composantes cartésiennes; donc les images de l'onde de choc dans le plan de l'hodographe sont deux ellipses,

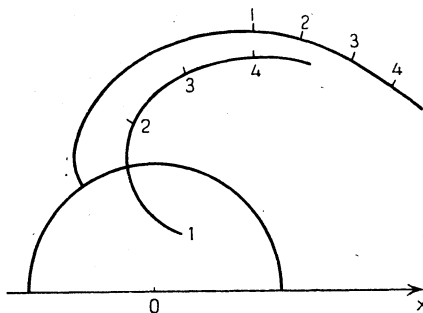


Fig. 9. — Cas d'un écoulement initial par ondes simples.

ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS SPIRALIFORMES. — La théorie précédente permet d'obtenir des résultats intéressants relatifs aux écoulements spiraliformes étudiés par Tollmien [17]. Dans ces écoulements, la fonction de courant est de la forme

$$\psi_1(q, \theta) = e^{n\theta} A_1(q).$$

La fonction  $A_1(q)$  est solution d'une équation différentielle du second ordre, linéaire et homogène; en négligeant les similitudes, nous pouvons poser

$$\frac{n}{q} \frac{A_1(q)}{A_1'(q)} = \operatorname{tg} \alpha_1(q).$$

La nouvelle fonction  $\alpha_1(q)$  est alors déterminée par une équation de Riccati

$$(2.4) \quad q \frac{d}{dq} \cotg \alpha + n \cotg^2 \alpha + \frac{q^2}{a^2} \cotg \alpha + n \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) = 0.$$

Nous avons représenté deux solutions de cette équation sur la figure 10 (pour  $n = -1$ ); toutes les courbes représentatives des solutions de l'équation (2.4) concourent au point  $q = q_m$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ .

Le champ des vitesses, dans le plan de l'écoulement, est défini par la relation

$$x + iy = \frac{e^{(n+i)\theta}}{n+i} \frac{\rho_1}{\rho} \frac{A_1'}{\cos \alpha_1} e^{i2\alpha_1(q)}.$$

On en déduit, en rapportant ce plan aux coordonnées polaires  $r, \omega$  telles que

$x = r \cos \omega$ ,  $y = r \sin \omega$ , que les lignes d'égale vitesse sont les spirales logarithmiques

$$r = f_1(q) e^{n\omega}, \quad f_1(q) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \frac{\rho_1}{\rho} \frac{A_1'}{\cos \alpha_1} e^{n \arctg \frac{1}{n} - n \alpha_1}.$$

L'angle polaire  $\omega$  a pour valeur  $\theta + \alpha_1(q) - \arctg \frac{1}{n}$ . En conséquence, chacune de ces spirales coupe toutes les lignes de courant sous le même angle  $\alpha_1(q)$ . La connaissance des fonctions  $\alpha_1(q)$  et  $f_1(q)$  permet une construction simple des

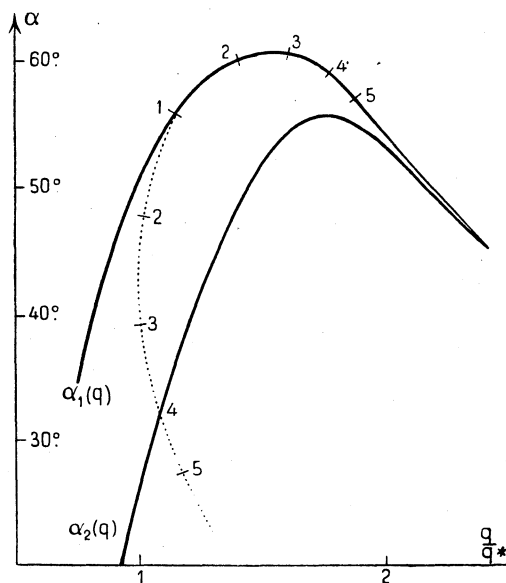


Fig. 10. — Courbes représentatives des fonctions  $\alpha_1(q)$ .

écoulements. L'un d'entre eux est représenté sur la figure 11<sub>A</sub>. La fonction  $f_1(q)$  présente un minimum pour une valeur supersonique  $q_1^0$  de la vitesse. A chaque valeur possible de la fonction  $f_1$ , correspondent deux valeurs de la vitesse, l'une supérieure à  $q_1^0$ , l'autre inférieure à  $q_1^0$ . Dans le plan de l'écoulement, les deux régions  $q > q_1^0$  et  $q < q_1^0$  sont superposées. La spirale logarithmique correspondant à la valeur  $q_1^0$  de la vitesse limite les régions recouvertes par le fluide; elle constitue une ligne limite,  $L_1$ ; sur cette courbe, les lignes de courant admettent des points de rebroussement. Il existe deux types d'écoulements possibles : les écoulements de première espèce pour lesquels  $q > q_1^0$ , et les écoulements de seconde espèce pour lesquels  $q < q_1^0$ . Naturellement, à chaque solution  $\alpha_1(q)$  de l'équation de Riccati (2.4), correspond une valeur différente de  $q_1^0$ .

Lorsqu'on remplace la fonction  $\alpha_1(q)$  par la fonction  $\pi + \alpha_1(q)$ , l'équation (2.4) est toujours vérifiée; si nous effectuons simultanément, dans le plan de l'écoulement, l'homothétie de centre O et de rapport  $-e^{-n\pi}$ , les lignes

d'égale vitesse ne sont pas modifiées, mais elles coupent les lignes de courant sous le nouvel angle  $\alpha_1(q) + \pi$ . Les deux écoulements correspondants possèdent donc les mêmes lignes de courant et les mêmes lignes d'égale vitesse; ils diffèrent seulement par le sens de déplacement des molécules gazeuses. Dans un cas, la vitesse du fluide est croissante; dans l'autre, cette vitesse est décroissante.

Nous convenons maintenant de placer une onde de choc sur une des spirales logarithmiques précédentes; nous appelons  $q_1$  la valeur correspondante de la vitesse. Sur cette onde de choc, la vitesse normale et la célérité du son demeurent constantes, donc la variation d'entropie possède une valeur fixe; cette valeur sera positive si la vitesse normale est supersonique, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{q_1 \sin \alpha_1}{a_1} > 1.$$

Le premier membre étant une fonction croissante de la vitesse, égale à l'unité sur la ligne limite, il est nécessaire de prendre  $q_1$  supérieur à  $q_1^0$ . Donc, seul un écoulement de première espèce peut subir un choc du type envisagé. Nous supposons qu'il en est ainsi. L'écoulement postérieur sera un écoulement isentropique; ce sera un nouvel écoulement spiraliforme. En effet, sur la face postérieure de l'onde de choc, la vitesse possède une grandeur constante  $q_2$  et fait avec cette onde un angle constant  $\alpha_2$ . Dans ces conditions, il existe un nouvel écoulement spiraliforme

$$\psi_2(q, \theta) = e^{n\theta} A_2(q)$$

qui admettra, sur cette onde de choc, les mêmes vecteurs vitesse, si les valeurs  $A_2(q_2)$  et  $A_2'(q_2)$  sont convenablement choisies. La fonction  $A_2(q)$  se trouve ainsi déterminée à l'aide de deux des équations du choc; les deux autres équations du choc déterminent la densité et la pression dans l'écoulement postérieur.

Étudions le phénomène dans le plan  $(\alpha, q)$ ; nous envisageons l'écoulement défini par la fonction  $\alpha_1(q)$ ; lorsque le fluide subit un choc le long d'une courbe d'égale vitesse, nous connaissons, sur la face postérieure de l'onde de choc, les valeurs de l'angle  $\alpha$  et de la vitesse  $q$ , soit  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{q}$ . La courbe  $\alpha = \bar{\alpha}$ ,  $q = \bar{q}$  indique les états possibles du fluide après que l'écoulement précédent a subi un choc le long d'une courbe d'égale vitesse. Cette courbe est figurée en pointillé sur la figure 10. Par l'un quelconque des points  $(\bar{\alpha}, \bar{q})$ , passe une nouvelle courbe  $\alpha_2(q)$ , solution de l'équation de Riccati (2.4). Cette fonction  $\alpha_2(q)$  définit le nouvel écoulement postérieur au choc.

*Étant donné deux écoulements spiraliformes correspondant à la même valeur*

du paramètre  $n$ , on peut toujours passer de l'un à l'autre par choc le long d'une courbe d'égale vitesse.

Après le choc, la vitesse normale est subsonique, donc l'écoulement engendré est un écoulement de seconde espèce;  $q_2 < q_2^0$ . Sur l'onde de choc, la concavité change de sens, et l'accélération tangentielle change de signe. Dans le cas représenté sur la figure 11<sub>B</sub>, la vitesse avant le choc est décroissante, donc la vitesse après le choc est croissante, et l'écoulement possède une nouvelle ligne limite :  $L_2$ . Cette ligne se trouve en deçà de la ligne limite  $L_1$

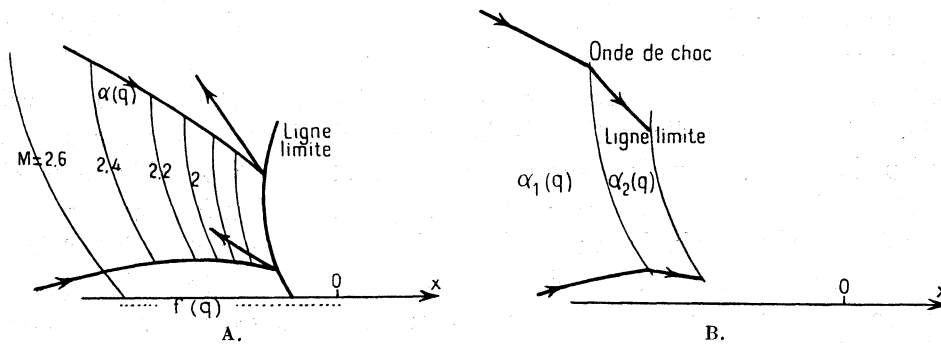


Fig. 11. — Choc dans un écoulement spiraliforme.

du premier écoulement, donc l'introduction d'un tel choc ne permet pas de prolonger un écoulement spiraliforme au delà de sa ligne limite.

### CHAPITRE III.

#### ÉTUDE DE L'ONDE DE CHOC DÉTACHÉE AU VOISINAGE DE SON SOMMET.

Nous nous proposons d'aborder le problème général du mouvement d'un solide dans un fluide compressible. Nous nous plaçons dans l'espace. Lorsque la vitesse est supersonique, il se forme en avant du solide une onde de choc qui limite la région dans laquelle le fluide est au repos. Nous envisageons ici de déterminer la position et la forme de cette onde, connaissant la vitesse et la forme du solide. Le problème mathématique pris dans toute sa généralité n'a pas encore reçu de solution. Si l'on suppose connue la surface de l'onde de choc, il est possible de construire numériquement l'écoulement au delà de celle-ci; c'est là un problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles. Les calculs sont valables aussi longtemps que l'on peut



assurer la convergence des développements effectués. Cependant cette méthode présente un inconvénient fondamental : on obtient l'obstacle en dernière analyse. Il serait théoriquement possible de modifier progressivement la forme de l'onde de choc de façon à obtenir, pour l'obstacle, une forme fixée à l'avance. La longueur des calculs ne permet pas de considérer une telle méthode comme satisfaisante. Mais il est possible de l'adapter pour obtenir rapidement une solution approchée du problème posé.

Nous considérons d'abord la forme de l'onde de choc comme connue; nous limitons cette connaissance à celle des rayons de courbure principaux  $R_1$  et  $R_2$ , au point où le plan tangent est perpendiculaire à la vitesse de l'obstacle, que nous supposons animé d'une translation uniforme. A l'aide des équations du choc, nous déterminons l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde de choc; puis, à l'aide des équations du mouvement, l'état du fluide derrière l'onde. Nous formons l'équation de la surface de courant décomposée; elle constitue l'obstacle. Tous les calculs précédents étant faits à l'aide de développements limités, nous obtenons dans cette approximation les expressions des rayons de courbure principaux de l'obstacle en son sommet (point où le plan tangent est perpendiculaire à la vitesse)  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ . Dans les formules obtenues, nous considérons alors ces quantités comme des données, et les courbures de l'onde de choc comme des inconnues. Nous déterminons d'une façon analogue la distance qui sépare le sommet de l'obstacle du sommet de l'onde de choc.

Afin de simplifier le langage, nous supposons le solide fixe, et le fluide animé, avant l'onde de choc, de la vitesse  $\vec{q}_1$ . Nous prenons la direction  $\vec{q}_1$  pour direction des abscisses, et les directions principales de l'obstacle en son sommet N pour directions des ordonnées et des cotes. Au voisinage du sommet, l'équation cartésienne de l'obstacle est la suivante :

$$x = \frac{y^2}{2\mathcal{R}_1} + \frac{z^2}{2\mathcal{R}_2} + \dots$$

En première approximation, nous remplacerons le second membre par ses deux premiers termes. Dès lors, la symétrie des données engendre la symétrie de l'écoulement, le point O en lequel l'onde de choc coupe l'axe des abscisses Nx constitue le sommet de cette onde et, l'origine étant placée en ce point, l'onde de choc a pour équation

$$x = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2} + \dots$$

3. I. DÉTERMINATION DE L'ÉCOULEMENT A PARTIR DE L'ONDE DE CHOC. — Dans l'approximation que nous avons adoptée, l'axe des abscisses est un axe de symétrie pour l'écoulement; chacun des deux plans de coordonnées  $xOy$  et  $xOz$

est un plan de symétrie. Il s'agit de déterminer les cinq fonctions inconnues  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\rho$ ,  $p$  des trois variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ces fonctions sont les composantes cartésiennes de la vitesse, la densité et la pression. Au voisinage de l'axe de symétrie, nous effectuons un développement en série double suivant les puissances croissantes de  $y$  et  $z$ ; les coefficients sont des fonctions de  $x$ . Nous nous limitons aux termes du second ordre. En vertu de la symétrie, nous posons

$$(3.1) \quad \begin{cases} u = u_0(x) + y^2 u_1(x) + z^2 u_2(x) + \dots, \\ v = y \lambda_1(x) + \dots, \\ w = z \lambda_2(x) + \dots, \\ \rho = \rho_1 \{ \alpha(x) + y^2 \alpha_1(x) + z^2 \alpha_2(x) + \dots \}, \\ p = p_1 \{ A(x) + y^2 A_1(x) + z^2 A_2(x) + \dots \}. \end{cases}$$

La connaissance des onze fonctions inconnues de  $x$  introduites par ces formules détermine, au voisinage de l'axe des abscisses, l'état du fluide au troisième ordre près. Nous écrivons que les équations du choc sont vérifiées; comme l'écoulement initial est un courant uniforme de vitesse  $q_1 = q^* \xi$ , de densité et de pression  $\rho_1$  et  $p_1$ , nous écrivons les équations du choc sous la forme (0.14), où

$$\sigma_1 = \frac{y}{R_1} + \dots, \quad \sigma_2 = \frac{z}{R_2} + \dots$$

On obtient ainsi, pour  $x = 0$ , les onze équations algébriques suivantes :

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_0 = \frac{q^*}{\xi}, \\ u_i = \frac{q^* \xi^2 (1 - \mu^2)}{R_i} - \frac{u'_0}{2 R_i}, \\ \lambda_i = \frac{q^* \xi^2 - 1}{R_i}, \\ \alpha = \xi^2, \\ \alpha_i = -\frac{\xi^2}{R_i} (1 - \mu^2 \xi^2) - \frac{\alpha'}{2 R_i}, \\ A = \frac{\xi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2 \xi^2}, \\ A_i = -\frac{\xi^2}{R_i^2} \frac{1 - \mu^4}{1 - \mu^2 \xi^2} - \frac{A'}{2 R_i}. \end{cases}$$

L'indice  $i$  possède les valeurs 1 et 2; on a  $\mu^2 = \frac{(k-1)}{(k+1)}$ ,  $k$  étant le rapport des chaleurs spécifiques du fluide.

Nous écrivons ensuite les équations du mouvement : équation fondamentale de la dynamique, conservation de la masse, équation des transformations adiabatiques. Ces équations étant vérifiées au troisième ordre près, nous obtenons

un système de neuf équations différentielles vérifiées par les onze fonctions inconnues de  $x$  :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 u_0' + \frac{p_1}{\rho_1} \frac{A'}{\alpha} = 0, \\ (u_0 u_i)' + 2 u_i \lambda_i + \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{A_i'}{\alpha} - \frac{A_i' \alpha_i}{\alpha^2} \right) = 0, \\ u_0 \lambda_i' + \lambda_i^2 + \frac{p_1}{\rho_1} 2 \frac{A_i}{\alpha} = 0, \\ (u_0 \alpha)' + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha = 0, \\ (A \alpha^{-k})' = 0, \\ u_0 \left\{ \frac{A_i}{A} - k \frac{\alpha_i}{\alpha} \right\}' + 2 \lambda_i \left\{ \frac{A_i}{A} - k \frac{\alpha_i}{\alpha} \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Les équations différentielles (3.3), auxquelles nous joignons les conditions initiales (3.2), résolvent le problème de l'onde de choc détachée. Il suffit d'expliciter les résultats. Ces équations déterminent en effet, pour  $x = 0$ , les valeurs des onze fonctions inconnues, les valeurs de la dérivée première des fonctions  $u_0$ ,  $\lambda_i$ ,  $\alpha$  et  $A$ , et enfin les valeurs de la dérivée seconde des fonctions  $u_0$ ,  $\alpha$  et  $A$ . Le tableau suivant contient les résultats relatifs au champ des vitesses :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0' = -\frac{q^*}{\xi} (\xi^2 - \mu^2) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ u_0'' = \frac{q^*}{\xi} \frac{\xi^2 - \mu^2}{\xi^2 - 1} \{ (\xi^2 - 1)^2 - 2(1 - \mu^2)\xi^2 \} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \\ \quad - \frac{q^*}{\xi} \frac{\xi^2 - \mu^2}{\xi^2 - 1} \{ \xi^2 - \mu^2 - 2(1 - \mu^2)\xi^2 \} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2, \\ u_i = \frac{q^*}{\xi} \frac{\xi^2(1 - \mu^2)}{R_i^2} + \frac{q^*}{\xi} \frac{\xi^2 - \mu^2}{2R_i} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ \lambda_i' = -\frac{q^*}{\xi} \frac{(\xi^2 - 1)^2 - 2(1 - \mu^2)\xi^2}{R_i^2} + \frac{q^*}{\xi} (\xi^2 - \mu^2) \frac{1}{R_i} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{array} \right.$$

L'onde de choc étant connue, les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  sont des données; l'écoulement se trouve déterminé au troisième ordre près, au voisinage du sommet de l'onde de choc. La poursuite de notre étude exige que l'on se trouve toujours au voisinage de ce sommet, c'est-à-dire en particulier que la distance de l'obstacle à l'onde de choc soit faible vis-à-vis des rayons de courbure. Cela se produit pour les vitesses élevées. Nous supposons qu'il en est ainsi.

3.2 DÉTERMINATION DE L'OBSTACLE A PARTIR DE L'ÉCOULEMENT. — *Position de l'obstacle.* — La position de l'obstacle est déterminée par l'abscisse  $h$  de son sommet. En ce point, la vitesse et le débit sont nuls. En toute rigueur, il est équivalent d'écrire que l'une ou l'autre de ces quantités est nulle; comme nous effectuons des développements limités aux trois premiers termes, les valeurs de  $h$  obtenues par l'une et l'autre méthode diffèrent. Dans l'hypothèse de la

convergence des calculs, cette différence sera faible, et nous pouvons indifféremment employer l'une ou l'autre méthode, puisqu'il s'agit de calculs approchés. Sur l'axe des abscisses, le débit a pour valeur

$$\rho q = \rho_1 q_1 (1 + ax + bx^2 + \dots).$$

Le second membre est le développement en série, au voisinage du sommet de l'onde de choc, de la fonction  $\rho_1 \alpha(x) u_0(x)$ , et les calculs du paragraphe précédent déterminent la valeur des coefficients  $a$  et  $b$ .

$$(3.5) \quad \begin{cases} a = -(\xi^2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ 2b = \{ (\xi^2 - 1)^2 - 2(1 - \mu^2)\xi^2 \} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) \\ \quad - \{ \xi^2 - 1 + (1 - \mu^2)\xi^2 \} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2. \end{cases}$$

Dans l'approximation linéaire, nous remplaçons la fonction  $\rho q$  par les deux premiers termes de son développement en série;  $h$  est alors racine de l'équation du premier degré

$$0 = 1 + ax.$$

Dans l'approximation parabolique, nous remplaçons cette même fonction par les trois premiers termes de son développement en série; dans cette nouvelle approximation,  $h$  est la première racine positive de l'équation du second degré

$$0 = 1 + ax + bx^2.$$

Nous adopterons l'approximation parabolique, afin d'utiliser toutes les quantités connues à partir des courbures principales de l'onde de choc en son sommet.

*Forme de l'obstacle.* — La forme de l'obstacle est déterminée, dans l'approximation que nous avons adoptée, par la connaissance des rayons de courbure principaux de sa surface en son sommet N. L'obstacle est constitué par une nappe de la surface de courant décomposée; l'autre nappe est dégénérée, elle est constituée par l'axe des abscisses. En raison de la symétrie de l'écoulement chacun des plans de coordonnées  $xOy$  et  $xOz$  contient des lignes de courant. L'équation différentielle des lignes de courant situées dans le premier de ces plans est la suivante :

$$\frac{dx}{u(x, y, 0)} = \frac{dy}{v(x, y, 0)}.$$

Cette équation permet de calculer, en chaque point du plan, la courbure de la ligne de courant qui passe par ce point. Pour la ligne de courant appartenant à l'obstacle, on a

$$(3.6) \quad x = h + \frac{y^2}{2R_1} + \dots$$

Comme la fonction  $u_0(x)$  doit être nulle au point  $x = h$ , nous pouvons écrire, sur l'obstacle, au voisinage de son sommet,

$$u = y^2 \left\{ \frac{u'_0(h)}{2\mathcal{R}_1} + u_1(h) \right\} + \dots, \quad v = y\lambda_1(h) + \dots$$

Remplaçant  $u$  et  $v$  par leurs valeurs dans l'équation différentielle des lignes de courant du plan  $xOy$ , on obtient

$$(3.7) \quad \mathcal{R}_1 = \frac{2\lambda_1(h) - u'_0(h)}{2u_1(h)}.$$

Une formule analogue donne la valeur du second rayon de courbure principal de l'obstacle en son sommet, soit  $\mathcal{R}_2$

$$(3.8) \quad \mathcal{R}_2 = \frac{2\lambda_2(h) - u'_0(h)}{2u_2(h)}.$$

Afin d'évaluer le numérateur et le dénominateur, nous effectuons les développements limités possibles. Les fonctions du numérateur s'écrivent

$$\lambda_i(h) = \lambda_i(o) + h\lambda'_i(o), \quad u'_0(h) = u'_0(o) + hu''_0(o).$$

Pour le dénominateur, on écrira

$$u_i(h) = u_i(o).$$

Si l'obstacle admettait en son sommet un point singulier, il conviendrait de remplacer l'équation (3.6) par la suivante :

$$(3.9) \quad x = h + my + \dots$$

On en déduit la relation nécessaire  $\lambda_1(h) = u'_0(h)$ . D'une façon analogue, les fonctions  $\lambda_2$  et  $u'_0$  possèdent la même valeur au point  $x = h$ . En vertu de la quatrième des équations différentielles du mouvement écrites sous la forme (3.3), les quantités  $u'_0(h)$ ,  $\lambda_1(h)$  et  $\lambda_2(h)$  ont une somme nulle; donc chacune d'elles est égale à zéro. Il en résulte que, lorsque l'obstacle est terminé par une pointe, la dérivée première de la fonction  $u_0(x)$  qui représente la répartition des vitesses sur l'axe de symétrie, s'annule au sommet de l'obstacle; on a  $u'_0(h) = 0$ . Nous laisserons ce cas de côté et nous envisagerons seulement des obstacles qui ne présentent pas en leur sommet de point singulier.

**3.3. DÉTERMINATION DE L'ONDE DE CHOC A PARTIR DE L'OBSTACLE.** — Dans la pratique, l'obstacle seul est connu; il convient donc, afin de déterminer l'onde de choc, de résoudre les équations précédentes (3.7) et (3.8) en considérant  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  comme inconnues. La méthode la plus rapide consiste à construire des graphiques. Pour diverses valeurs du nombre de Mach  $M$  de l'écoulement initial, nous avons calculé, en fonction des courbures principales de l'onde de choc, les quantités  $h$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ . Les courbes représentatives correspondantes permettent alors, par simple lecture, de connaître la forme (courbures principales au sommet) et la position de l'onde de choc, lorsque la vitesse et la forme de l'obstacle sont connues. Les résultats numériques sont indiqués dans les tables suivantes :

*Solution du problème de l'onde de choc détachée : résultats numériques (1).*

M, nombre de Mach initial;

 $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , rayons de courbure principaux de l'obstacle; $h$ , distance qui sépare les sommets de l'obstacle et de l'onde de choc; $R_1$  et  $R_2$ , rayons de courbure principaux de l'onde de choc.

$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{h}{\mathcal{R}_1}$	$\frac{R_1}{\mathcal{R}_1}$	$\frac{R_2}{\mathcal{R}_2}$	$\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1}$
M = 4.				
1.....	0,1476	1,2258	1,2258	1,000
1,5.....	0,1777	1,2261	1,2497	1,472
2.....	0,2001	1,2369	1,2847	1,925
2,5.....	0,2175	1,2489	1,3233	2,359
3.....	0,2316	1,2610	1,3622	2,777
3,5.....	0,2433	1,2718	1,4004	3,178
4.....	0,2531	1,2813	1,4374	3,566
$\infty$ .....	0,3661	1,4140	2,5335	$\infty$
M = 5.				
1.....	0,1417	1,2711	1,2711	1,000
1,5.....	0,1722	1,2819	1,2923	1,489
2.....	0,1958	1,3034	1,3284	1,962
2,5.....	0,2146	1,3254	1,3716	2,416
3.....	0,2301	1,3457	1,4168	2,849
3,5.....	0,2434	1,3643	1,4624	3,265
4.....	0,2545	1,3808	1,5073	3,664
$\infty$ .....	0,3994	1,6220	3,1979	$\infty$
M = 6.				
1.....	0,1384	1,2982	1,2982	1,000
1,5.....	0,1691	1,3158	1,3160	1,499
2.....	0,1933	1,3443	1,3543	1,985
2,5.....	0,2131	1,3724	1,4006	2,468
3.....	0,2297	1,3996	1,4503	2,895
3,5.....	0,2437	1,4233	1,5006	3,319
4.....	0,2559	1,4448	1,5508	3,726
$\infty$ .....	0,4262	1,7787	3,7921	$\infty$
M = $\infty$ .				
1.....	0,1305	1,3681	1,3681	1,000
1,5.....	0,1618	1,4048	1,3797	1,527
2.....	0,1876	1,4534	1,4211	2,045
2,5.....	0,2101	1,5031	1,4767	2,544
3.....	0,2296	1,5494	1,5382	3,022
3,5.....	0,2464	1,5908	1,6021	3,475
4.....	0,2617	1,6297	1,6680	3,908
$\infty$ .....	0,5075	2,2519	7,3529	$\infty$

(1) Ces tables ainsi que les résultats numériques donnés dans le chapitre IV ont été calculés par M. Michel.

Lorsque  $\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1} = 1$ , l'écoulement est un écoulement de révolution; lorsque ce rapport est infini, l'écoulement est un écoulement plan. Nous ne devons pas oublier l'hypothèse fondamentale que nous avons faite au début de ce chapitre, à savoir que  $\frac{h}{R}$  reste petit. Nous nous sommes limités aux nombres de Mach supérieurs à 4; dans ces conditions, l'hypothèse de départ paraît sensiblement vérifiée. Lorsque le nombre de Mach  $M$  de l'écoulement initial est voisin de l'unité, l'onde de choc doit se trouver à l'infini amont et posséder un rayon de courbure infini. Les calculs que nous avons faits ne permettent pas de retrouver ces résultats; donc, pour les vitesses faiblement supersoniques, l'approximation du second ordre est insuffisante. Il convient de remarquer la différence qui apparaît entre les écoulements de révolution et les écoulements plans. Dans les premiers, l'onde de choc s'approche de l'obstacle lorsque la

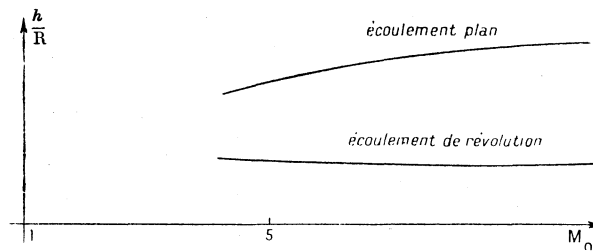


Fig. 12.

vitesse amont augmente; dans les seconds, au contraire, l'onde de choc s'éloigne de l'obstacle dans les mêmes conditions. Ces résultats supposent naturellement que le nombre de Mach amont soit suffisamment élevé.

*Exemple.* — Un solide constitué par un ellipsoïde dont les axes ont pour longueur 3, 4 et 5 cm est animé d'un mouvement de translation uniforme parallèlement à son grand axe. Ce solide se déplace dans un fluide compressible, à une vitesse égale à quatre fois la célérité du son. On demande de déterminer l'onde de choc, le mouvement du fluide, la densité et la pression.

Les données sont les suivantes :

$$M = 4, \quad \mathcal{R}_1 = 1,80 \text{ cm}, \quad \mathcal{R}_2 = 3,20 \text{ cm}.$$

Le rapport  $\frac{\mathcal{R}_2}{\mathcal{R}_1}$  a pour valeur 1,77; les tables précédentes donnent les résultats demandés concernant l'onde de choc. La distance  $h$  du sommet de l'obstacle au sommet de l'onde de choc a pour valeur 0,34 cm. Les rayons de courbure principaux de l'onde de choc en son sommet ont pour valeur :

$$R_1 = 2,22 \text{ cm}, \quad R_2 = 4,03 \text{ cm}.$$

L'onde de choc étant connue, nous pouvons déterminer l'état du fluide :

$$\begin{aligned} u &= q^*(0,467 - 1,49x + 0,85x^2 + 0,69y^2 + 0,30z^2 + \dots), \\ v &= q^*(0,75y + 0,15xy + \dots), \\ w &= q^*(0,41z + 0,21xz + \dots), \\ \rho &= \rho_1(4,57 + 2,66x - 4,85x^2 - 0,82y^2 - 0,40z^2 + \dots), \\ p &= p_1(18,3 + 15,0x - 26,1x^2 - 7,12y^2 - 2,06z^2 + \dots). \end{aligned}$$

$x, y, z$  sont exprimées en centimètres. Dans l'approximation adoptée, le domaine subsonique se trouve limité, dans le fluide, par une quadrique d'équation

$$3,16(x - 0,23)^2 + 1,25y^2 + 0,48z^2 = 1 \quad (1).$$

3.4. CONSTRUCTION NUMÉRIQUE D'UNE SOLUTION EXACTE. — Dans les paragraphes précédents, nous avons résolu le problème de l'onde de choc détachée en utilisant l'approximation du second ordre. Il est possible d'obtenir une précision supérieure; le calcul numérique nous permet de déterminer, à partir de l'onde de choc, l'écoulement et l'obstacle avec autant de précision que l'on veut. Nous allons, à titre d'exemple, traiter un cas particulier.

L'écoulement avant le choc est un courant uniforme ayant pour nombre de Mach  $M = 2$ , pour pression  $p_1$ . L'onde de choc est une surface de révolution dont l'axe  $Ox$  est parallèle à la vitesse amont; sa méridienne est une parabole d'axe  $Ox$ ; elle est déterminée par le rayon de courbure  $R$  en son sommet. A l'infini, le choc s'annule, donc la direction de l'onde de choc se confond avec l'une des directions de Mach de l'écoulement initial. La parabole précédente ne possède pas cette propriété; cependant, comme nous nous limitons au voisinage du sommet, ce fait ne présente pas d'inconvénient. Nous déterminons d'abord l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde de choc; nous déterminons ensuite l'écoulement, puis l'obstacle, en utilisant les équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques. Nous effectuons simultanément des calculs numériques et des constructions graphiques dans un demi-plan méridien.

1° Dans la région  $\frac{r}{R} > 0,2$ , nous avons déterminé le champ des vitesses en effectuant des déplacements élémentaires le long des lignes de courant et de leurs trajectoires orthogonales.

2° Dans la région  $\frac{r}{R} < 0,2$ , nous avons construit les lignes de courant en considérant que le débit demeure constant entre deux telles lignes.

---

(1) Nous avons repris au cours de l'année 1951 l'étude du problème de l'onde de choc détachée dans le cas des écoulements de révolution en adoptant l'approximation du quatrième ordre : O. N. E. R. A., Note technique n° 5 et *C. R. Acad. Sc.*, 232, 1951, p. 686-687. Il est ainsi possible d'atteindre le cas d'un obstacle constitué par une surface creuse : une entrée de réacteur par exemple.



3° Sur l'axe de révolution, nous avons effectué un développement limité au voisinage du sommet de l'onde.

Nous avons adopté  $k = 1,40$ .

Les équations du mouvement (0.7) et (0.8) permettent, à partir des données sur l'onde de choc, de construire l'écoulement au delà de celle-ci. En deux

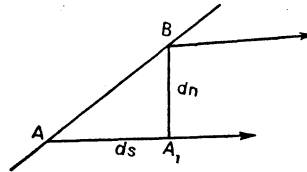


Fig. 13.

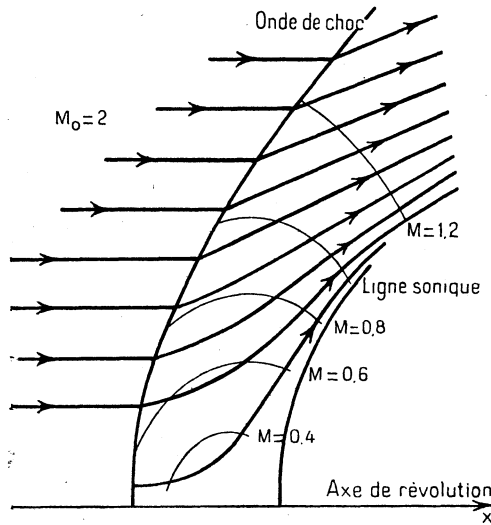


Fig. 14. — Écoulement de révolution avec onde de choc détachée.

points voisins A et B situés sur l'onde de choc, on connaît la vitesse et la pression au repos, c'est-à-dire  $q$ ,  $\theta$ ,  $p_0$ . On connaît aussi les composantes intrinsèques  $ds$  et  $dn$  du déplacement élémentaire qui permet de passer de A à B. Cela permet d'écrire deux nouvelles équations

$$dq = \frac{\partial q}{\partial s} ds + \frac{\partial q}{\partial n} dn, \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial s} ds + \frac{\partial \theta}{\partial n} dn.$$

Les quatre inconnues  $\frac{\partial q}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial q}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial n}$  se trouvent déterminées. On en déduit la valeur de la vitesse au point  $A_1$  voisin de A. L'état du fluide est donc connu sur une nouvelle courbe voisine de l'onde de choc. On recommence les mêmes calculs à partir de cette courbe. L'écoulement est représenté sur la figure 14;

nous avons tracé les lignes sur lesquelles la grandeur de la vitesse est constante.

Pour préciser la répartition des vitesses sur l'axe de symétrie, nous avons calculé les coefficients des premiers termes du développement en série de la vitesse et du débit au voisinage du sommet de l'onde de choc :

$$q = q^*_{0,613} \left\{ 1 - 5 \frac{s}{R} + \frac{10}{3} \frac{s^2}{R^2} + \dots \right\},$$

$$\rho q = \rho_1 q_1 \left\{ 1 - \frac{10}{3} \frac{s}{R} - \frac{85}{9} \frac{s^2}{R^2} + \dots \right\}.$$

L'examen des résultats semble indiquer que l'écoulement ne présente pas de singularité dans la région que nous avons envisagée; en outre, nous obtenons un tracé d'obstacle satisfaisant.

3.5. INDICATIONS RELATIVES A UNE MÉTHODE DIFFÉRENTE. — Nous nous plaçons de nouveau dans le cas général des écoulements à trois dimensions, et nous admettrons, pour simplifier, que l'écoulement possède un axe de symétrie  $Ox$ . On peut établir une nouvelle solution approchée du problème de l'onde de choc détachée en raisonnant de la façon suivante. Entre les sommets  $O$  et  $N$  de l'obstacle et de l'onde de choc, la vitesse du fluide est subsonique (le nombre de Mach est inférieur à 0,5, si  $M_0 > 2,64$ ); en outre, sur la ligne de courant constituée par l'axe  $ONx$ , l'entropie est maximum, donc, lorsqu'on se déplace au voisinage du segment  $ON$ , la variation d'entropie est faible. Il est par suite possible d'assimiler, dans ce voisinage, l'écoulement à un écoulement irrotationnel incompressible. L'obstacle étant donné, cet écoulement peut être considéré comme connu; il comporte certains paramètres arbitraires dont nous pourrions disposer par la suite; pour des obstacles de forme simple, le potentiel des vitesses a pu être explicité à l'aide de fonctions élémentaires.

Nous nous proposons alors de déterminer dans l'espace une certaine surface ( $\Sigma$ ) ayant la propriété suivante: sur la face aval de cette surface, le champ des vitesses dans l'écoulement incompressible précédent et le champ des vitesses dans l'écoulement issu du choc coïncident avec la meilleure approximation possible. Nous développerons les calculs dans le cas où l'obstacle est l'ellipsoïde d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{b_2^2} - 1 = 0.$$

L'écoulement irrotationnel, incompressible, régulier à l'infini qui contourne un tel obstacle admet pour potentiel des vitesses la fonction  $\Phi(x, y, z)$  :

$$\Phi(x, y, z) = A x \left\{ 1 - \frac{ab_1 b_2}{2 - \alpha_0} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \Delta(\lambda)} \right\},$$

avec

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b_1^2 + \lambda} + \frac{z^2}{b_2^2 + \lambda} - 1 = 0,$$

$$\Delta(\lambda) = \{(a^2 + \lambda)(b_1^2 + \lambda)(b_2^2 + \lambda)\}^{\frac{1}{2}}.$$

$\alpha_0$  désigne la constante  $ab_1b_2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta(\lambda)}$ ; le facteur A est arbitraire.

On se reportera à l'ouvrage de Lamb [3] pour la démonstration de ces résultats. Au voisinage de l'axe des abscisses, on peut donc effectuer un développement suivant les puissances croissantes des variables  $y$  et  $z$

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_0(x) + y^2\Phi_1(x) + z^2\Phi_2(x) + \dots$$

On calcule

$$\Phi_0(x) = Ax \left\{ 1 - \frac{ab_1b_2}{2 - \alpha_0} \int_{x^2 - a^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta(\lambda)} \right\},$$

$$\Phi_i(x) = \frac{A}{x} \frac{ab_1b_2}{2 - \alpha_0} \frac{1}{(x^2 - a^2 + b_i^2)\Delta(x^2 - a^2)} \quad (i = 1, 2).$$

Nous envisageons la surface ( $\Sigma$ ) sur laquelle nous placerons une onde de choc;  $h$  désignant toujours la distance qui sépare les sommets de l'onde de choc et de l'obstacle, on peut représenter, au voisinage de l'axe des abscisses, l'onde de choc par l'équation suivante :

$$x = -a - h + \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2} + \dots$$

1° Dans l'écoulement incompressible, le champ des vitesses est défini au troisième ordre près, au voisinage de l'axe des abscisses, par les formules

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \Phi'_0(x) + y^2\Phi'_1(x) + z^2\Phi'_2(x) + \dots,$$

$$v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y\Phi_1(x) + \dots,$$

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 2z\Phi_2(x) + \dots$$

On en déduit, avec la même approximation, les valeurs de la vitesse sur la surface ( $\Sigma$ ).

2° Dans l'écoulement engendré par choc sur la surface ( $\Sigma$ ) à partir d'un courant uniforme de vitesse supersonique  $q_1$  parallèle à  $Ox$ , les valeurs de la vitesse sur la face postérieure de la surface ( $\Sigma$ ) sont données par les formules (0.14). On obtient

$$u = \frac{q_1^{*2}}{q_1} + (1 - \mu^2) q_1 \frac{y^2}{R_1^2} + (1 - \mu^2) q_1 \frac{z^2}{R_2^2} + \dots,$$

$$v = \left( q_1 - \frac{q_1^{*2}}{q_1} \right) \frac{y}{R_1} + \dots,$$

$$w = \left( q_1 - \frac{q_1^{*2}}{q_1} \right) \frac{z}{R_2} + \dots$$

Nous faisons coïncider, sur la surface ( $\Sigma$ ), les champs des vitesses dans chacun de ces deux écoulements. Au premier ordre près, on obtient une seule équation

$$(3.13) \quad \Phi'_0(-a-h) = \frac{q^{*2}}{q_1}.$$

Cette équation est une relation entre les quantités  $A$  et  $h$ . Dans l'approximation du second ordre, il convient de joindre à l'équation (3.13) les deux équations suivantes

$$(3.14) \quad {}_2\Phi_i(-a-h) = \left(q_1 - \frac{q^{*2}}{q_1}\right) \frac{1}{R_i} \quad (i=1, 2).$$

Enfin, dans l'approximation du troisième ordre, on devra encore écrire deux nouvelles équations

$$(3.15) \quad \Phi''_0(-a-h) \frac{1}{2R_i} + \Phi'_i(-a-h) = \frac{q_1(1-\mu^2)}{R_i^2}.$$

Nous avons donc été amenés à écrire cinq équations; les inconnues sont au nombre de quatre :  $A$ ,  $a$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Il sera donc en général impossible de faire coïncider les deux champs de vitesses au troisième ordre près. Il y a exception pour les écoulements de révolution et pour les écoulements plans, car le nombre des équations se réduit à trois et, dans ces deux cas, le nombre des inconnues est égal au nombre des équations. Ces deux cas étant mis à part, nous écrirons seulement les équations (3.13) et (3.14); nous disposons alors d'un paramètre arbitraire,  $A$  par exemple; nous déterminerons cette quantité par la condition que l'équation (3.16), obtenue par addition membre à membre des deux équations (3.15), soit vérifiée. Ainsi l'on essaie de satisfaire autant que possible aux conditions de l'approximation du troisième ordre.

Afin d'achever la solution du problème, il convient de construire des tables numériques donnant, pour diverses valeurs des rapports  $\frac{b_1}{a}$  et  $\frac{b_2}{a}$ , les variations en fonction du nombre de Mach initial des trois quantités suivantes :

$$\frac{h}{a}, \quad \frac{R_1}{a}, \quad \frac{R_2}{a}.$$

On calculera ces valeurs en résolvant les quatre équations (3.13), (3.14), et (3.16).

*Mouvements de révolution.* — L'écoulement étant un écoulement de révolution autour de  $Ox$ , nous considérons le cas d'un obstacle constitué par une sphère. La fonction  $\Phi(x, y, z)$  est la suivante :

$$\Phi = A x \left\{ 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Il nous est possible de faire coïncider au troisième ordre près les champs des vitesses dans l'écoulement incompressible et dans l'écoulement issu du choc. On doit résoudre les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} (3.13') \quad & A \left\{ 1 - \frac{a^3}{(a+h)^3} \right\} = \frac{q^{*2}}{q_1}, \\ (3.14') \quad & \frac{3A}{2} \frac{a^3}{(a+h)^4} = \left( q_1 - \frac{q^{*2}}{q_1} \right) \frac{1}{R}, \\ (3.15') \quad & \frac{3Aa^3}{(a+h)^5} - \frac{3A}{R} \frac{a^3}{(a+h)^4} = \frac{(1-\mu^2)q_1}{R^2}. \end{aligned}$$

On en déduit les deux équations qui résolvent explicitement, avec les hypothèses faites, le problème de l'onde de choc détachée :

$$(3.17) \quad \begin{cases} \left( \frac{(a+h)^3}{a^3} - 1 \right) = \frac{3q^{*2}}{4} \frac{(3-\mu^2)q_1^2 - 2q^{*2}}{(q_1^2 - q^{*2})^2}, \\ \frac{R}{a+h} = \frac{(3-\mu^2)q_1^2 - 2q^{*2}}{2(q_1^2 - q^{*2})}. \end{cases}$$

Les deux quotients  $\frac{h}{a}$  et  $\frac{R}{a}$  sont des fonctions du seul nombre de Mach amont M

$$h = af_1(M), \quad R = af_2(M).$$

*Mouvements plans.* — L'écoulement étant un écoulement plan, nous considérons le cas d'un obstacle constitué par un cercle. La fonction  $\Phi(x, y)$  est la suivante :

$$\Phi = Ax \left\{ 1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right\}.$$

Nous formons les trois équations du problème :

$$\begin{aligned} (3.13'') \quad & A \left\{ 1 - \frac{a^2}{(a+h)^2} \right\} = \frac{q^{*2}}{q_1}, \\ (3.14'') \quad & 2A \frac{a^2}{(a+h)^3} = \frac{q_1 - \frac{q^{*2}}{q_1}}{R}, \\ (3.15'') \quad & \frac{3Aa^2}{(a+h)^4} - \frac{Aa^2}{R(a+h)^3} = \frac{(1-\mu^2)q_1}{R^2}. \end{aligned}$$

On en déduit encore les deux équations qui résolvent explicitement, avec les hypothèses faites, le problème de l'onde de choc détachée :

$$(3.18) \quad \begin{cases} \left( \left( \frac{a+h}{a} \right)^2 - 1 \right) = \frac{2q^{*2}}{3} \frac{(3-2\mu^2)q_1^2 - q^{*2}}{(q_1^2 - q^{*2})^2}, \\ \frac{R}{a+h} = \frac{(3-2\mu^2)q_1^2 - q^{*2}}{3(q_1^2 - q^{*2})}. \end{cases}$$

Les deux quotients  $\frac{h}{a}$  et  $\frac{R}{a}$  sont des fonctions du seul nombre de Mach amont M

$$h = a g_1(M), \quad R = a g_2(M).$$

M.	$f_1$	$g_1$	$f_2$	$g_2$
1.....	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2.....	0,358	0,57	2,26	1,92
3.....	0,220	0,32	1,90	1,43
4.....	0,180	0,26	1,81	1,31
5.....	0,163	0,23	1,77	1,25
6.....	0,152	0,22	1,74	1,23
10.....	0,139	0,20	1,71	1,20
$\infty$ .....	0,132	0,18	1,70	1,18

*Comparaison des deux méthodes.* — Nous avons donné deux solutions approchées du problème de l'onde de choc détachée. Dans la première méthode, nous avons effectué un développement limité au voisinage du sommet de l'onde de choc; dans la seconde méthode, nous avons négligé la compressibilité du fluide dans l'écoulement aval.

La concordance n'est pas bonne. Certaines valeurs numériques diffèrent du simple au double; en outre, les sens de variation de trois des quatre fonctions  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  sont différents suivant la méthode utilisée. Les résultats obtenus en négligeant la compressibilité dans l'écoulement aval semblent plus conformes à l'idée intuitive que l'on peut avoir du problème de l'onde de choc détachée; en effet, avec cette approximation, on trouve que l'onde de choc se rapproche de l'obstacle et que son rayon de courbure au sommet diminue à mesure que la vitesse amont augmente, pour les écoulements plans comme pour les écoulements de révolution. Il y a une série de résultats pour lesquels la concordance est satisfaisante; ce sont les valeurs numériques du quotient  $\frac{h}{a}$  dans le cas des écoulements de révolution. Ces valeurs numériques, calculées par l'une ou l'autre des deux méthodes, diffèrent peu; en outre, les deux courbes représentant la variation de ce rapport en fonction du nombre de Mach M de l'écoulement initial présentent la même allure générale. Il est naturel que ces résultats relatifs au cas des écoulements de révolution soient meilleurs que ceux qu'on obtient dans le cas des écoulements plans; dans les écoulements plans, le quotient  $\frac{h}{a}$  possède, pour chaque valeur de M, une valeur supérieure à celle qu'il possède dans un écoulement de révolution; les développements limités donnent donc des résultats moins précis. Il serait prématuré de conclure que la méthode des développements limités n'est pas satisfaisante en dehors du calcul de  $\frac{h}{a}$  dans les écoulements de révolution. Nous nous sommes bornés en effet à l'approximation du second

ordre; d'autre part, l'intuition peut être trompeuse. Pour essayer de trancher la question, il sera nécessaire d'envisager les résultats que l'on obtiendrait en utilisant des développements limités au troisième ou au quatrième ordre près. Cela ne présente aucune difficulté théorique, la seule difficulté réside dans la longueur des calculs. Enfin, quels que soient les résultats que l'on pourra obtenir par la suite, il sera en dernier ressort nécessaire de faire appel à l'expérience qui, seule, peut donner une consécration définitive à une théorie qui se propose précisément d'en prévoir les résultats. Les vitesses que nous avons envisagées sont très grandes, et il ne peut être question, à l'heure actuelle, d'obtenir des vérifications expérimentales.

#### CHAPITRE IV.

##### ÉTUDE DE L'ONDE DE CHOC ATTACHÉE AU VOISINAGE DE SON SOMMET. (1)

Nous envisageons le mouvement d'un fluide compressible autour d'un obstacle présentant une pointe; nous considérerons seulement le cas des écoulements plans symétriques. La vitesse à l'infini étant supersonique, il se forme une onde de choc; celle-ci est détachée pour des vitesses faiblement supersoniques. Si l'angle que font les deux tangentes au sommet de la pointe n'est pas trop grand, ce que nous supposons, l'onde de choc s'attache à la pointe quand la vitesse amont devient supérieure à un certain minimum. La vitesse d'attachement est déterminée par les équations du choc; pour des vitesses légèrement supérieures à la vitesse d'attachement, l'écoulement aval comporte une zone subsonique; en outre, l'écoulement présente, au sommet de l'obstacle, une singularité qui affecte les diverses dérivées du vecteur vitesse. Lorsque l'écoulement aval est entièrement supersonique, la singularité a disparu; dans le cas d'un obstacle terminé par un segment rectiligne, la disparition a lieu au moment où la vitesse aval à la pointe devient supersonique. Ces conclusions complètent les résultats obtenus par Crocco [16] et par Guderley [27]. Les écoulements que nous considérons sont des écoulements stationnaires dans lesquels nous ferons varier la valeur  $M$  du nombre de Mach amont.

4. I. ÉTUDE DE LA SINGULARITÉ. — *Tangente à l'onde de choc en son sommet.* — L'écoulement avant le choc est un courant supersonique uniforme de vitesses  $q$ ,

---

(1) Les résultats obtenus dans ce chapitre sont relatifs au cas des mouvements plans. Depuis la rédaction de ce mémoire, j'ai complété les résultats relatifs aux écoulements plans (cf. [34] et [35]), et les ai étendus récemment aux écoulements de révolution [39] et [42].

(parallèle à  $Ox$ ); la densité et la pression du fluide ont pour valeur  $\rho_1$  et  $p_1$ . Nous désignons par  $\beta$  l'angle de l'onde de choc avec l'axe des abscisses. Les équations du choc nous permettent de déterminer en fonction du nombre de Mach  $M$  <sup>(1)</sup> de l'écoulement initial et de l'angle  $\beta$  les valeurs des quantités  $\theta$ ,  $q$ ,  $\rho$  et  $p$ ; on obtient

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\beta - \theta) = \frac{q^{*2} - \mu^2 q_1^2 \cos^2 \beta}{q_1^2 \sin \beta \cos \beta}, \\ q = q_1 \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \theta)}, \\ \rho = \rho_1 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}, \\ p = p_1 \frac{\operatorname{tg} \beta - \mu^2 \operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg}(\beta - \theta) - \mu^2 \operatorname{tg} \beta}. \end{array} \right.$$

Nous désignons par  $\psi$  l'angle que fait, au sommet  $O$  de l'obstacle, la tangente à l'obstacle avec l'axe de symétrie  $Ox$ . Au point  $O$ , on a  $\theta = \psi$ ; la première équation (4.1) détermine donc la valeur de l'angle  $\beta$ . Comme il est bien connu, cette équation se résout graphiquement à l'aide du diagramme des polaires de choc.

Les formules (4.1) nous permettent d'écrire, pour tout déplacement le long de l'onde de choc, les relations suivantes :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta}{d\beta} = 1 - 2\mu^2 \cos^2(\beta - \theta) - \sin(\beta - \theta) \cos(\beta - \theta) \{ \operatorname{tg} \beta - \operatorname{cotg} \beta \}, \\ \frac{dp}{d\beta} = 2(1 - \mu^2) \rho q^2 \sin(\beta - \theta) \cos(\beta - \theta). \end{array} \right.$$

Les seconds membres sont des fonctions des seules variables indépendantes  $M$  et  $\theta$ . Nous poserons

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0(M, \theta) = \frac{d\theta}{d\beta}, \\ g_0(M, \theta) = \frac{1}{\rho q^2} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{dp}{d\beta}. \end{array} \right.$$

Il est convenu que nous nous plaçons toujours sur la face aval de l'onde de choc. Les fonctions  $f_0$  et  $g_0$  sont continues. Au point  $O$ , on a  $\theta = \psi$ ; la valeur  $M_0(\psi)$  du nombre de Mach pour laquelle l'onde de choc est détachée est telle que, pour  $M = M_0(\psi)$ , l'angle  $\theta$  soit maximum; on peut donc écrire

$$f_0(M_0, \psi) = 0.$$

Comme il est connu, pour  $M = M_0(\psi)$ , la vitesse après le choc au point  $O$  est subsonique; cette vitesse devient supersonique pour une valeur  $M = M^*(\psi)$ .  $M^*(\psi)$  est supérieur à  $M_0(\psi)$ .

(1) On a naturellement  $M^2 = (1 - \mu^2) q_1^2 : (q^{*2} - \mu^2 q_1^2)$ .



*Courbure de l'onde de choc en son sommet.* — Le calcul de la courbure de l'onde de choc en son sommet fut effectué par Crocco [16]. Nous reprenons cette question en utilisant d'une part les équations (4.2), d'autre part les équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques, équations (0.10). Les déplacements élémentaires  $ds$  et  $dn$  que l'on effectue à partir d'un point A de l'onde de choc sur une ligne de courant et sur une des trajectoires orthogonales aux lignes de courant ont pour valeur

$$ds = d\sigma \cos(\beta - \theta) \quad \text{et} \quad dn = d\sigma \sin(\beta - \theta),$$

$d\sigma$  désignant l'abscisse curviligne sur l'onde de choc. Si, dans les équations (4.2), on fait

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial s} \cos(\beta - \theta) d\sigma + \frac{\partial\theta}{\partial n} \sin(\beta - \theta) d\sigma, \\ dp &= \frac{\partial p}{\partial s} \cos(\beta - \theta) d\sigma + \frac{\partial p}{\partial n} \sin(\beta - \theta) d\sigma, \end{aligned}$$

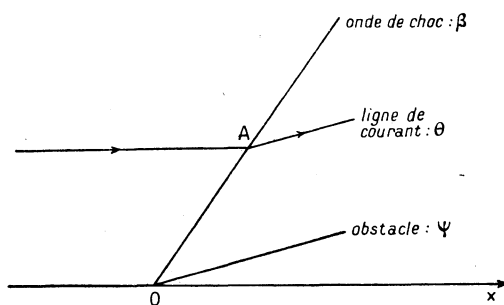


Fig. 15.

on obtient

$$(4.4) \quad \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\} \frac{\partial\theta}{\partial s} = f_1(M, \theta) \frac{d\beta}{d\sigma}, \\ \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\} \frac{\partial\theta}{\partial n} = g_1(M, \theta) \frac{d\beta}{d\sigma}; \end{cases}$$

$$(4.5) \quad \begin{cases} f_1 = \cos(\beta - \theta) f_0 - \sin(\beta - \theta) g_0, \\ g_1 = \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \sin(\beta - \theta) f_0 + \cos(\beta - \theta) g_0. \end{cases}$$

Les fonctions  $f_1(M, \theta)$  et  $g_1(M, \theta)$  sont des fonctions continues. La première des équations (4.4) détermine en particulier le rapport des rayons de courbure  $R$  et  $\mathcal{R}$  de l'onde de choc et de l'obstacle au point O

$$\frac{R}{\mathcal{R}} = \left( \frac{\partial\theta}{\partial s} \right)_{\theta=\psi} : \left( \frac{d\beta}{d\sigma} \right)_{\theta=\psi}.$$

Les valeurs numériques du rapport  $\frac{R}{\mathcal{R}}$  sont représentées sur la figure 16 ( $k = 1, 4$ ). Les diverses courbes correspondent à diverses valeurs de l'angle  $\psi$ . Le nombre

de Mach  $M$  a été porté en abscisse; sur l'axe des ordonnées,  $M = 1$ . Les courbes  $M = M_0(\psi)$  et  $M = M^*(\psi)$  ont été indiquées.

Le rapport  $\frac{R}{\mathcal{R}}$  possède le même signe que la fonction  $f_1(M, \psi)$ .

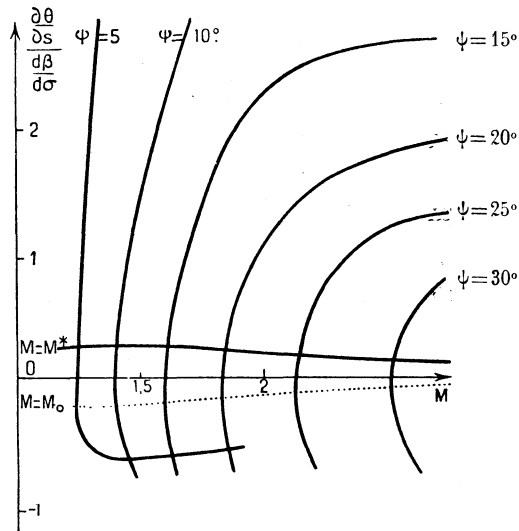


Fig. 16. — Courbure au sommet de l'onde de choc attachée.

Lorsque  $M = M_0(\psi)$ , cette fonction est négative; elle est positive pour  $M = M^*(\psi)$ ; elle s'annule pour une certaine valeur  $M = M_1(\psi)$  définie par l'équation

$$f_1(M_1, \psi) = 0.$$

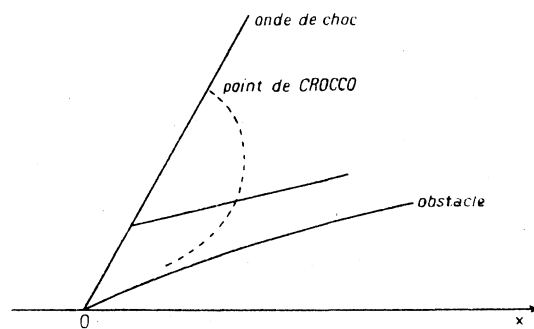


Fig. 17.

Pour les valeurs de  $M$  comprises entre  $M_0(\psi)$  et  $M_1(\psi)$ , les sens de concavité de l'obstacle et de l'onde de choc devraient, au point  $O$ , être différents. Nous donnerons à ce phénomène qui semble contredire par l'expérience le nom de paradoxe de Crocco. Pour lever cette contradiction, Guderley [27] fut amené à

considérer que l'onde de choc possédait en son sommet un rayon de courbure nul aussi longtemps que l'on a  $M < M_1(\psi)$  (1).

L'obstacle étant convexe vers l'amont, il en résulte que l'écoulement après le choc comprend une région dans laquelle les lignes de courant tournent leur concavité vers l'aval; cette région est limitée par le lieu des points d'inflexion des lignes de courant, qui rencontre l'onde de choc en un point appelé point de Crocco. Lorsque  $M > M_1(\psi)$ , la région précédente a disparu, et la courbure de l'onde de choc au point O est déterminée par la première des équations (4.4). Lorsque le nombre de Mach M est infini, les formules précédentes se simplifient et l'on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\beta - \psi) &= \mu^2 \operatorname{tg} \beta, \\ \frac{R}{\mathcal{R}} &= (1 - \mu^2)(1 + 3\mu^2) \cos^2(\beta - \psi)(1 - \mu^2 \operatorname{tg}^2 \beta). \end{aligned}$$

*Dérivées successives de la courbure de l'onde de choc en son sommet.* — Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent être étendus à toutes les dérivées partielles de la fonction  $\theta$ . On peut différentier les formules (4.4) le long de l'onde de choc. En conservant seulement les termes dans lesquels interviennent des dérivées du second ordre, on obtient

$$(4.6) \quad \begin{cases} f_1 \frac{d^2 \beta}{d\sigma^2} = \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \frac{ds}{d\sigma} + \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \frac{dn}{d\sigma} \right\} + \dots, \\ g_1 \frac{d^2 \beta}{d\sigma^2} = \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \frac{ds}{d\sigma} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \frac{dn}{d\sigma} \right\} + \dots \end{cases}$$

On dérive ensuite les équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques, en négligeant toujours les dérivées du premier ordre

$$\begin{aligned} \rho q^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} &= - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right) + \dots, \\ \rho q^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} &= \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \dots \end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)^2, \\ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right) &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right). \end{aligned}$$

---

(1) En nous inspirant des idées de Guderley, nous avons montré que le paradoxe de Crocco n'existait pas. L'équation de l'onde de choc contient des termes analytiques et des termes non analytiques; ces derniers sont prépondérants précisément pour  $M < M_1(\psi)$ ; si l'on en tient compte, on trouve que, dans tous les cas, les sens de concavité de l'onde de choc et de l'obstacle au point O sont les mêmes. Voir références [34] et [35].

Ces six relations déterminent deux des dérivées partielles du second ordre de la fonction  $\theta$

$$(4.7) \quad \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\}^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = f_2(M, \theta) \frac{d^2 \beta}{d\sigma^2} + P_2(M, \theta), \\ \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\}^2 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) = g_2(M, \theta) \frac{d^2 \beta}{d\sigma^2} + Q_2(M, \theta); \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \begin{cases} f_2 = \cos(\beta - \theta) f_1 - \sin(\beta - \theta) g_1, \\ g_2 = \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \sin(\beta - \theta) f_1 + \cos(\beta - \theta) g_1. \end{cases}$$

Les fonctions  $P_2(M, \theta)$  et  $Q_2(M, \theta)$  sont connues à partir des dérivées partielles du premier ordre de la fonction  $\theta$ . En particulier, ces quantités sont nulles au point O si l'obstacle admet en O un point d'inflexion, c'est-à-dire si  $\left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)_0 = 0$ . Les fonctions  $f_2(M, \theta)$  et  $g_2(M, \theta)$  sont des fonctions continues.

En poursuivant les dérivations, on obtient les formules générales suivantes :

$$(4.9) \quad \begin{cases} \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\}^r \frac{\partial^r \theta}{\partial s^r} = f_r(M, \theta) \frac{d^r \beta}{d\sigma^r} + P_r(M, \theta), \\ \left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta - \theta) \right\}^r \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^{r-1} \theta}{\partial s^{r-1}} \right) = g_r(M, \theta) \frac{d^r \beta}{d\sigma^r} + Q_r(M, \theta); \end{cases}$$

$$(4.10) \quad \begin{cases} f_r = \cos(\beta - \theta) f_{r-1} - \sin(\beta - \theta) g_{r-1}, \\ g_r = \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \sin(\beta - \theta) f_{r-1} + \cos(\beta - \theta) g_{r-1}. \end{cases}$$

Les fonctions  $P_r(M, \theta)$  et  $Q_r(M, \theta)$  sont connues à partir des dérivées partielles d'ordre inférieur à  $r$  de la fonction  $\theta$ . En particulier, ces quantités sont nulles au point O si, en ce point,  $\frac{\partial^i \theta}{\partial s^i} = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, r-1$ . Les fonctions  $f_r(M, \theta)$  et  $g_r(M, \theta)$  sont des fonctions continues. En introduisant l'angle de Mach  $\alpha$ , il est possible d'expliciter les fonctions  $f_r$  et  $g_r$ (<sup>1</sup>); on obtient en effet

$$(4.11) \quad \frac{f_r \cos \alpha - g_r \sin \alpha}{f_0 \cos \alpha - g_0 \sin \alpha} = \left\{ \frac{\sin(\beta - \theta - \alpha)}{\sin \alpha} \right\}^r.$$

Lorsqu'on a  $M > M^*(\psi)$ , la fonction  $f_0$  est positive, tandis que la fonction  $g_0$  est négative; on en déduit par récurrence que toutes les fonctions  $f_r$  sont positives, tandis que toutes les fonctions  $g_r$  sont négatives. Lorsque  $M = M^*(\psi)$ , on obtient

$$(4.12) \quad \begin{cases} f_r(M^*, \psi) = \cos^r(\beta - \psi) f_0(M^*, \psi), \\ g_r(M^*, \psi) = 0. \end{cases}$$

(<sup>1</sup>) Le cas d'une vitesse subsonique, pour lequel  $\alpha$  n'existe pas, a été traité depuis dans la référence [34].

L'étude du cas où  $M < M^*(\psi)$  est plus délicate. Pour  $M = M_0(\psi)$ , on a  $f_0 < 0$  et  $g_0 > 0$ ; on en déduit

$$f_1(M_0, \psi) < 0, \quad g_1(M_0, \psi) > 0.$$

La racine  $M_1(\psi)$  de l'équation  $f_1(M_1, \psi) = 0$  est donc comprise entre les valeurs  $M_0(\psi)$  et  $M^*(\psi)$ . Les calculs numériques nous ont montré que cette racine était unique. En reprenant le raisonnement précédent, on prouve que l'équation  $f_2(M_2, \psi) = 0$  possède une racine comprise entre les valeurs  $M_1(\psi)$  et  $M^*(\psi)$ ; nous admettons que cette racine est unique (<sup>1</sup>). En raisonnant de proche en proche, on établit que l'équation  $f_r(M, \psi) = 0$  possède une racine comprise entre les valeurs  $M_{r-1}(\psi)$  et  $M^*(\psi)$ ; nous admettons encore que cette racine est unique. Ainsi l'étude des fonctions  $f_r(M, \psi)$  permet de mettre en évidence une suite de nombres de Mach  $M_r(\psi)$  qui possèdent les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} 1^\circ \quad M_0(\psi) < M_1(\psi) < \dots < M_r(\psi) < \dots < M^*(\psi), \\ 2^\circ \quad \lim_{r \rightarrow \infty} M_r(\psi) = M^*(\psi). \end{array}$$

La seconde propriété est une conséquence de la relation (4.12) qui exprime la valeur de  $f_r(M^*, \psi)$  et de l'hypothèse d'unicité que nous avons faite.

Ces résultats nous permettent de montrer que le paradoxe de Crocco possède un caractère très général. Considérons en effet un obstacle terminé par une pointe O telle qu'en ce point on ait  $\frac{\partial^i \theta}{\partial s^i} = 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, r-1$ . Les calculs précédents déterminent la valeur du quotient

$$\left( \frac{\partial^r \theta}{\partial s^r} \right) : \left( \frac{d^r \beta}{d\sigma^r} \right).$$

Ce quotient possède le même signe que la fonction  $f_r(M, \psi)$ ; il est positif pour  $M > M_r(\psi)$ , tandis que son signe peut varier lorsque  $M < M_r(\psi)$ . En particulier, lorsque M est légèrement inférieur à  $M_r(\psi)$ ,  $f_r(M, \psi)$  est négatif, donc les concavités, au point O, de l'obstacle et de l'onde de choc sont différentes. On peut donc encore refaire l'hypothèse de Guderley :  $\frac{d^r \beta}{d\sigma^r}$  est infini au point O aussi longtemps que  $M < M_r(\psi)$ . Pour  $M > M_r(\psi)$ , la première formule (4.10) est applicable. Pour un tel obstacle, on obtient donc les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} \left( \frac{d^i \beta}{d\sigma^i} \right) = \infty & \text{pour } M < M_i(\psi), \\ = 0 & \text{» } M > M_i(\psi) \quad (i < r). \\ \left( \frac{d^r \beta}{d\sigma^r} \right) = \infty & \text{» } M \leq M_r(\psi). \end{array}$$

(<sup>1</sup>) Cette hypothèse d'unicité relative au nombre  $M_2(\psi)$  et aux nombres analogues  $M_r(\psi)$  a été démontrée depuis dans une communication au Congrès de Poitiers [34].

Dans le cas particulier d'un obstacle terminé par un segment rectiligne, on obtient le phénomène suivant : chacune des dérivées de la courbure de l'onde de choc au point O passe de la valeur infinie à la valeur zéro lorsque la valeur du nombre de Mach de l'écoulement amont passe par les valeurs  $M_1(\psi)$ ,  $M_2(\psi)$ , .... Cette suite de valeurs singulières est croissante et sa limite est  $M^*(\psi)$ , donc l'onde de choc possède un segment rectiligne dès que la vitesse après le choc est sonique. Lorsque cette vitesse est supersonique, il n'y a plus de singularité à la pointe.

4. 2. CAS DES OBSTACLES TERMINÉS PAR UN TRIÈDRE, LORSQUE LA VITESSE AVAL AU SOMMET DE L'OBSTACLE EST SUPERSONIQUE <sup>(1)</sup>. — Les résultats du paragraphe précédent permettent de calculer la courbure de l'onde de choc en son sommet, lorsque l'obstacle présente en son sommet un rayon de courbure fini, non nul. Dans le

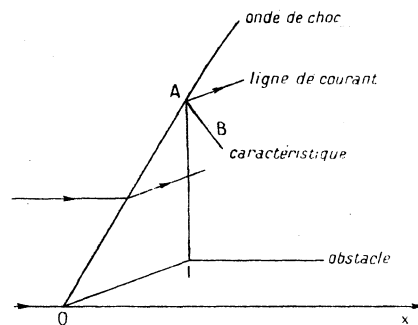


Fig. 18.

cas d'un obstacle terminé par un bord rectiligne OI, l'onde de choc présente une singularité en O aussi longtemps que  $M < M^*(\psi)$ . Nous allons maintenant étudier l'onde de choc attachée à la pointe d'un tel obstacle, lorsque la vitesse aval au point O est supersonique. L'écoulement aval est un courant uniforme le long du segment de droite OI. Mais, en I, le fluide subit une détente de Meyer; le courant uniforme est limité par la caractéristique issue du point I; celle-ci rencontre l'onde de choc en un point A qui limite, sur cette onde, la partie rectiligne OA.

Au point A, la courbure de l'onde de choc est discontinue; elle passe de la valeur zéro à une valeur non nulle. L'écoulement engendré par la partie rectiligne de l'onde de choc et la détente de Meyer autour du point I doivent se raccorder suivant une certaine courbe; d'après la théorie générale, cette courbe est une caractéristique dans chacun des deux écoulements. Sur cette caractéristique, les vitesses sont continues. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit qu'elles aient la même valeur en un point donné, au point A par exemple. En effet la loi

(1) Pour le cas où la vitesse aval est subsonique, traité depuis, on pourra se reporter aux références [34] et [35]; pour le cas des écoulements de révolution, voir référence [42].

de variation de  $q$  en fonction de  $\theta$  le long d'une caractéristique est indépendante de l'écoulement envisagé; il en résulte que, dans les deux écoulements, le vecteur vitesse sur la caractéristique commune est représenté par la même fonction de l'abscisse curviligne. La coïncidence en un point entraîne donc la coïncidence sur toute la courbe. Pour que la vitesse soit continue en A, il faut et il suffit que la partie curviligne de l'onde de choc parte tangentiellement à OA. Les caractéristiques issues de A dans la détente de Meyer et dans l'écoulement issu du choc sont tangentes en ce point. Comme elles doivent coïncider, elles ont en particulier même courbure en A. Cette condition suffit à déterminer la courbure de l'onde de choc. Nous allons calculer cette courbure en fonction du nombre de Mach de l'écoulement amont et de la direction  $\psi$  du segment rectiligne OI.

*Courbure de la caractéristique dans la détente de Meyer.* — Nous utilisons les coordonnées polaires  $r, \omega$ ; le pôle est placé au point I, l'axe polaire est choisi perpendiculaire à la direction de la vitesse ayant la valeur critique. L'angle de Mach possède la valeur suivante :

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu \operatorname{cotg} \mu \omega.$$

L'une des lignes de Mach fait avec le rayon vecteur un angle nul; l'autre ligne de Mach, l'angle  $2\alpha$ . Son équation polaire est donc

$$r^2 = \bar{r}^2 (\sin \mu \omega)^{-1} (\cos \mu \omega)^{-\frac{1}{\mu^2}}.$$

$\bar{r}$  est une longueur constante. Le rayon de courbure au point A possède la valeur

$$R_A = IA \frac{1}{\sin 2\alpha \{ (1 - \mu^2) \cos 2\alpha - \mu^2 \}}.$$

*Courbure de la caractéristique dans l'écoulement après le choc.* — Soit, sur la caractéristique issue de A, un point B voisin de A;  $AB = \delta$ . L'angle que fait la caractéristique avec l'axe des abscisses est  $\varphi = \theta - \alpha$ ; lorsqu'on passe du point A au point B, on a

$$d\varphi = d\theta - d\alpha, \quad \frac{dq}{q} = -\operatorname{tg} \alpha d\theta.$$

L'angle de Mach  $\alpha$  est défini par la relation  $a = q \sin \alpha$ ; ce qui permet de calculer

$$(1 - \mu^2) \sin^2 \alpha = \sin(\beta - \theta) \cos(\beta - \theta) \{ \operatorname{tg} \beta - \mu^2 \operatorname{tg}(\beta - \theta) \},$$

$$d\alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha}{(1 - \mu^2) \cos^2 \alpha} d\theta.$$

Dans le déplacement entre A et B, on a

$$d\theta = \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial \theta}{\partial n} \sin \alpha \right) \delta.$$

En utilisant les équations du mouvement, on en déduit

$$\frac{1}{\mathcal{R}_A} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial \theta}{\partial n} \sin \alpha \right) \frac{(1 - \mu^2) \cos 2\alpha - \mu^2}{(1 - \mu^2) \cos^2 \alpha}.$$

Afin de déterminer le rayon de courbure  $R$  de l'onde de choc, nous égalons les deux valeurs de  $\mathcal{R}_A$ ; on trouve ainsi

$$(4.13) \quad \frac{OI}{R} = - \frac{2(1 - \mu^2) \cos^3 \alpha \sin^2(\beta - \theta - \alpha)}{(f_0 \cos \alpha - g_0 \sin \alpha) \sin(\beta - \theta)}.$$

La valeur de l'angle  $\theta$  est celle de l'angle  $\psi$  que fait avec l'axe des abscisses le segment de droite  $OI$ . La figure 19 représente, pour diverses valeurs de  $\psi$ , les variations du rapport  $\frac{OI}{R}$  en fonction du nombre de Mach  $M$ .

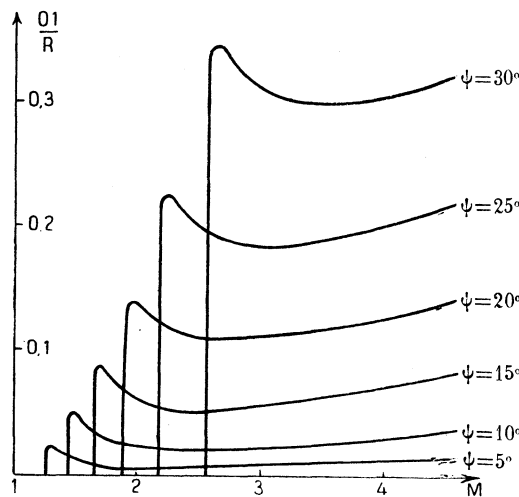


Fig. 19. — Discontinuité de la courbure de l'onde de choc attachée.  
Valeur de la discontinuité.

L'onde de choc devient rectiligne lorsqu'on a  $M = M^*(\psi)$ ; pour cette valeur, la courbure est continue au point A. Lorsque le nombre de Mach initial augmente, le rayon de courbure de l'onde de choc au point A diminue, passe par un minimum, augmente, passe par un maximum et diminue ensuite en tendant vers une valeur limite.

**Note additive (rédigée au moment de l'impression).**

Le chapitre que nous venons de terminer est loin d'avoir épuisé les questions traitées; comme nous l'avons indiqué dans de nombreuses notes, les résultats ont été complétés depuis la rédaction de cette thèse qui remonte à 1949. Nous allons résumer ici les résultats obtenus depuis.



1. Lorsque l'obstacle est déterminé par un segment rectiligne  $OI$ , il n'existe pas d'onde analytique au point  $O$  lorsque la vitesse après le choc au point  $O$  est subsonique. Il est donc naturel de chercher à représenter l'onde de choc par une équation de la forme suivante :

$$(1) \quad x = y \cotg \beta + Ay^\lambda + \dots$$

En écrivant les équations du mouvement ainsi que les conditions sur l'onde de choc et sur l'obstacle, nous avons déterminé la valeur de l'exposant  $\lambda$ ; cette valeur est fonction des valeurs  $M$  et  $\psi$ . Pour un obstacle donné,  $\psi$  est constant; la fonction  $\lambda(M)$  est croissante, elle est égale à l'unité pour  $M = M_0(\psi)$ ; elle devient infinie pour  $M = M^*(\psi)$ ; elle prend une valeur entière quelconque  $r + 1$ , précisément lorsque  $M = M_r(\psi)$ . Le calcul exact du coefficient  $A$  exigerait la connaissance de tous les termes non écrits au second membre de l'équation (1), puisque nous devrions écrire que, au point  $I$ , la vitesse est sonique; un calcul approché, fait en négligeant ces termes, montre que  $A$  est positif, donc l'onde de choc est convexe vers l'amont. (Cf. [34] et [35].)

2. Lorsque l'obstacle possède en son sommet un rayon de courbure fini, non nul, l'onde de choc est représentée par une équation de la forme suivante :

$$(2) \quad x = y \cotg \beta + Ay^\lambda + \frac{1}{\sin^3 \beta} \frac{y^2}{2R} + \dots$$

Si  $M < M_1(\psi)$ , on a  $\lambda < 2$ ; le troisième terme est négligeable et l'onde possède en son sommet un rayon de courbure nul. Si  $M > M_2(\psi)$ , on a  $\lambda > 2$ , et le second terme est négligeable, donc l'onde de choc possède en son sommet un rayon de courbure  $R$  donné par la théorie précédente. Comme  $A$  est positif, l'onde de choc est toujours convexe vers l'amont pour  $M_0(\psi) < M < M_1(\psi)$ . Le paradoxe de Crocco n'existe pas, son apparition résultait de l'hypothèse d'analyticité que nous avons faite pour l'équation de l'onde de choc. (Cf. [34] et [35].)

3. L'étude des écoulements de révolution permet de retrouver tous ces résultats. Les démonstrations sont beaucoup plus délicates, car l'écoulement supersonique le long d'un cône n'est pas uniforme. Toutes les relations algébriques que nous avons rencontrées dans ce chapitre sont remplacées par des équations différentielles dont l'intégration est fort laborieuse. Cependant nous avons calculé le rapport des courbures de l'onde de choc et de l'obstacle lorsque  $\psi = 20^\circ$ . On trouve

$$\frac{R}{\mathcal{R}} = -0,23 \quad 0,82 \quad 1,71 \quad 2,87 \quad 1,76 \quad 1,05.$$

pour

$$M = 1,2175 \quad 1,2553 \quad 1,3144 \quad 1,6531 \quad 2,8387 \quad 9,5928.$$

Il est tout à fait remarquable que le rapport  $\frac{R}{\mathcal{R}}$  soit encore négatif pour  $M = M_0(\psi)$ . Le paradoxe de Crocco subsiste. Ce paradoxe n'est encore qu'apparent; la

recherche d'une onde de choc non analytique permet de montrer que l'onde de choc est toujours convexe vers l'amont. Le cas d'un obstacle terminé par un segment rectiligne peut s'étudier; lorsque la vitesse après le choc au point O est supersonique, on calcule la discontinuité de courbure au point A. Mais la formule (4.13) doit être remplacée par une équation de Riccati. Ces questions sont exposées dans un nouveau Mémoire qui doit être publié au début de l'année 1952 par l'Office National d'Études et Recherches Aéronautiques. (Voir aussi référence [39].)

## CHAPITRE V.

### ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES DES ONDES DE CHOC.

Lorsqu'un fluide subit un choc suivant une certaine surface dite onde de choc, les plans tangents à l'infini sont parallèles en chaque point à l'une des directions de Mach de l'écoulement initial. S'il n'en était pas ainsi, la dépense d'énergie nécessaire pour engendrer le mouvement devrait être infinie; cela n'est pas réalisable. L'écoulement initial étant uniforme, l'onde de choc possède un cône asymptotique; il est intéressant de savoir si elle admet un cône asymptote ou bien une nappe infinie parabolique.

*Écoulements de révolution.* — Nous supposons que l'on peut représenter, au voisinage de l'infini, l'onde de choc par un développement en série de la forme suivante :

$$x = r \cotg \beta_1 + \alpha r^n + \dots$$

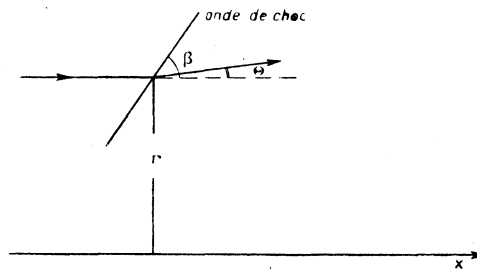


Fig. 20.

$\beta_1$  est l'angle de Mach de l'écoulement initial;  $\alpha$  et  $n$  désignent deux constantes;  $n$  est inférieur à l'unité.

A l'aide des équations du choc écrites au voisinage de l'infini, nous déterminons l'état du fluide sur la face postérieure de l'onde :

$$\begin{aligned} \frac{q}{q_1} &= 1 + 2n\alpha r^{n-1}(1 - \mu^2) \sin^3 \beta_1 \cos \beta_1 + \dots, \\ 0 &= -2n\alpha r^{n-1}(1 - \mu^2) \sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 + \dots, \\ \frac{p}{p_1} &= 1 - 2n\alpha r^{n-1}(1 + \mu^2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 + \dots \end{aligned}$$

Lorsqu'on effectue un déplacement élémentaire  $d\sigma$  sur l'onde de choc, la direction de la vitesse et la pression subissent les variations infiniment petites suivantes :

$$\begin{aligned} d\theta &= -2n(n-1)\alpha r^{n-2}(1-\mu^2)\sin^3\beta_1\cos^2\beta_1 d\sigma + \dots, \\ \frac{dp}{\rho_1} &= -2n(n-1)\alpha r^{n-2}(1+\mu^2)\sin^2\beta_1\cos\beta_1 d\sigma + \dots \end{aligned}$$

On obtient ainsi deux relations entre les dérivées partielles écrites en coordonnées intrinsèques des fonctions  $\theta$  et  $p$ . En effet

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial s}\cos(\beta-\theta) d\sigma + \frac{\partial\theta}{\partial n}\sin(\beta-\theta) d\sigma, \\ dp &= \frac{\partial p}{\partial s}\cos(\beta-\theta) d\sigma + \frac{\partial p}{\partial n}\sin(\beta-\theta) d\sigma. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement constituent deux autres relations vérifiées par ces dérivées

$$\begin{aligned} \rho q^2 \frac{\partial\theta}{\partial s} &= -\frac{\partial p}{\partial n}, \\ \rho q^2 \left\{ \frac{\partial\theta}{\partial n} + \frac{\sin\theta}{r} \right\} &= \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{\partial p}{\partial s}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 - \frac{q^2}{a^2} \sin^2(\beta-\theta) \right\} \frac{\partial\theta}{\partial s} \\ &= \cos(\beta-\theta) \frac{d\theta}{d\sigma} - \sin(\beta-\theta) \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{1}{\rho q^2} \frac{dp}{d\sigma} + \frac{\sin\theta}{r} \sin(\beta-\theta) \cos(\beta-\theta). \end{aligned}$$

Au voisinage de l'infini, le coefficient de  $\frac{\partial\theta}{\partial s}$  a pour valeur

$$-2n\alpha r^{n-1} \sin\beta_1 \cos\beta_1 + \dots,$$

tandis que le second membre s'écrit

$$-2n\alpha r^{n-2} \sin^3\beta_1 \cos^3\beta_1 (1-\mu^2)(2n-1) + \dots$$

Le développement en série de l'accélération du fluide en fonction des puissances décroissantes de  $r$  est donc le suivant :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial s} = \frac{1-\mu^2}{r} \sin^2\beta_1 \cos^2\beta_1 (2n-1) + \dots, \\ \frac{\partial q}{\partial s} = -q \frac{1-\mu^2}{r} \sin^3\beta_1 \cos\beta_1 (2n-1) + \dots \end{cases}$$

Lorsque  $2n-1$  est différent de zéro, l'accélération décroît comme  $\frac{1}{r}$ ; lorsque  $2n-1$  est nul, la décroissance est plus rapide. Il est naturel d'admettre que la forme prise par l'onde de choc est telle que l'écoulement engendré tende le plus rapidement possible vers un écoulement dans lequel l'accélération est

nulle; il en résulte que l'on doit choisir pour  $n$  la valeur  $\frac{1}{2}$ . L'onde de choc admet donc une branche parabolique. Si l'on néglige les puissances de  $r$  d'exposant inférieur à  $n$ , l'onde de choc a pour équation

$$x = r \cotg \beta_1 + \alpha r^{\frac{1}{2}} \quad (\alpha < 0).$$

Cette courbe est une parabole de direction asymptotique  $\beta_1$ . Dans le cas où l'onde de choc est détachée, nous savons déterminer le cercle osculateur au sommet de l'onde; si alors nous assimilons l'onde de choc à une parabole, cette parabole est déterminée par la connaissance de la direction asymptotique et du cercle osculateur en un point.

*Écoulements plans.* — Dans un écoulement plan symétrique rapporté aux axes de coordonnées cartésiennes  $Ox$  parallèle à l'axe de symétrie et  $Oy$  perpendiculaire, on calcule de façon analogue :

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial s} = 2(n-1) \frac{1-\mu^2}{y} \sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 + \dots, \\ \frac{1}{\rho q^2} \frac{\partial p}{\partial s} = 2(n-1) \frac{1-\mu^2}{y} \sin^3 \beta_1 \cos \beta_1 + \dots, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = -2(n-1) \frac{1-\mu^2}{y} \sin \beta_1 \cos^3 \beta_1 + \dots, \\ \frac{1}{\rho q^2} \frac{\partial p}{\partial n} = -2(n-1) \frac{1-\mu^2}{y} \sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 + \dots \end{array} \right.$$

Il n'est plus possible de disposer de l'exposant  $n$  afin d'annuler le coefficient du terme en  $\frac{1}{y}$ ; nous allons donc calculer les dérivées suivantes.

Nous différencions deux des relations écrites :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \cos(\beta - \theta) + \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \sin(\beta - \theta), \\ \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \cos(\beta - \theta) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \sin(\beta - \theta). \end{aligned}$$

L'application du théorème de Schwartz étendu aux coordonnées intrinsèques

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) = \left( \frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right)^2$$

fournit la première relation

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \cos^2(\beta - \theta) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \sin^2(\beta - \theta) \\ &= -4(n-1) \frac{1-\mu^2}{y^2} \sin^3 \beta_1 \cos^3 \beta_1 - 4(n-1)^2 \frac{(1-\mu^2)^2}{y^2} \sin^3 \beta_1 \cos^5 \beta_1 + \dots \end{aligned}$$

Nous dérivons ensuite deux des équations du mouvement écrites en coordonnées intrinsèques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial \rho q^2}{\partial s} + \rho q^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} &= - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial \rho q^2}{\partial n} + \rho q^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} &= \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) + \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right). \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de la vitesse se calculent à l'aide du théorème de Bernoulli généralisé  $dp + \rho q dq = p d \text{Log} p_0$ .  $\text{Log} p_0$  est fonction de la seule pseudo-variable  $n$ ; on calcule sa dérivée en utilisant les relations

$$\frac{\dot{p}}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^k \quad \text{et} \quad \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k+1}{2k} q^{*2}.$$

Cette dérivée décroît plus vite que  $r^{n-2} dr$ , tandis que  $dq$  décroît comme  $r^{n-2} dr$ .

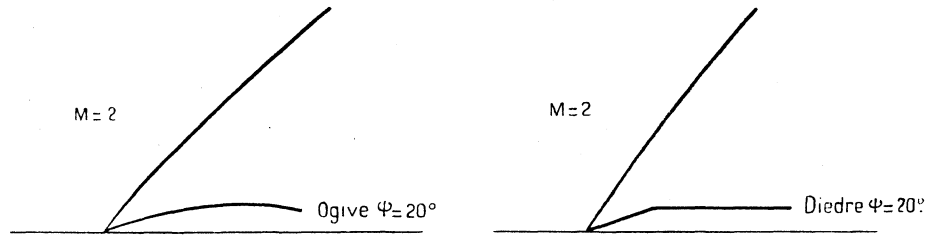


Fig. 21. — Écoulements plans avec onde de choc attachée.

Il en résulte que, dans l'approximation adoptée, l'écoulement aval est encore un écoulement isentropique. On obtient ainsi la seconde relation

$$\left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} = - 4(n-1)^2 \frac{(1-\mu^2)^2}{y^2} \sin \beta_1 \cos^3 \beta_1 (\sin^2 \beta_1 + k) + \dots$$

La dérivée de l'accélération a pour valeur

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{n\alpha} \frac{1-\mu^2}{y^{n+1}} \sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 + \dots, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = -q_1 \frac{(2n-1)(2n-2)}{n\alpha} \frac{1-\mu^2}{y^{n+1}} \sin^2 \beta_1 \cos \beta_1 + \dots \end{cases}$$

Nous admettons toujours que la forme prise par l'onde de choc est telle que l'écoulement engendré tende le plus rapidement possible vers un écoulement uniforme; comme nous ne pouvons annuler le premier terme du développement en série de l'accélération, nous annulerons le premier terme du développement en série de la dérivée de l'accélération. Cela nous oblige encore à prendre pour  $n$  la valeur  $\frac{1}{2}$ . En première approximation, la courbe qui représente l'onde de choc se confond à l'infini avec une parabole. Nous avons appris au cours des chapitres précédents à déterminer la courbure en un point de l'onde de choc; nous remplaçons donc, en première approximation, cette onde de choc par une parabole dont on connaît un cercle osculateur et la direction asymptotique.

## BIBLIOGRAPHIE.

## OUVRAGES CONSULTÉS.

- [1] J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, 1903.
- [2] H. VILLAT, *Mécanique des fluides*, 1930.
- [3] H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6th edition, 1932.
- [4] J. PÉRÈS, *Cours de Mécanique des fluides*, 1936.
- [5] R. SAUER, *Theoretische Einführung in die Gasdynamik*, 1943.
- [6] J. LERAY, *Les écoulements continus sans frottement*, 1947.
- [7] H. W. LIEPMANN and A. E. PUCKETT, *Aerodynamics of a compressible fluid*, 1947.
- [8] R. COURANT and K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves*, 1948.
- [9] S. GOLDSTEIN, *Modern developments in fluid dynamics*, third volume, 1950.

Parmi les articles se rapportant aux divers problèmes abordés, on peut citer :

- [10] H. HUGONOT, *Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits* (*J. Éc. Polytech.*, t. 58, 1889, p. 1-125).
- [11] P. MOLENBROCK, *Über einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials* (*Archiv. der Mathematik und Physik*, t. 9, 1890, p. 157-195).
- [12] S. A. TCHAPLIGUINE, *Sur les jets gazeux* (*Ann. Scient. Univ. Imp. Moscou, Section Physique-Mathématique*, t. 21, 1904).
- [13] TH. MEYER, *Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt* (*Forschungsheft des Vereins Ingenieure*, vol. 62, 1908, p. 31-67).
- [14] F. TRICOMI, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto* (*Mém. reale Accad. Lincei, classe di scienze fisiche*, t. 14, 1922, p. 133-247).
- [15] L. CROCCO, *Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas* (*Atti reale Accad. Lincei*, t. 23, 1936, p. 115-124); *Eine neue Stromungsfunktion für die Erforschung der Gase mit Rotation* (*Z. angew. Mathematik und Mechanik*, t. 17, 1937, p. 1-7).
- [16] L. CROCCO, *Singularità della corrente gassosa iperacustica nell'interno di una prora a diedro* (*Atti del 1° Congresso del Unione Matematica Italiana*, 1937, p. 597-615).
- [17] W. TOLLMIEN, *Zum Ubergang von Unterschall in Überschallströmung* (*Z. angew. Mathematik und Mechanik*, t. 17, 1937, p. 117-136).
- [18] M. ROY, *Sur les hypothèses de l'écoulement permanent d'un fluide parfait et l'hypothèse des courants* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 187-189).
- [19] F. RINGLEB, *Exakte Lösungen des Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung*, (*Z. angew. Mathematik und Mechanik*, t. 20, 1940, p. 185-198).
- [20] TH. VON KARMANN, *Compressibility effects in aerodynamics* (*J. Aeronaut.*, vol. 8, 1951, p. 337-356).

- [21] J. PÉRÈS, *Quelques transformations des équations du mouvement d'un fluide compressible* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 219, 1944, p. 501-504).
- [22] J. C. P. MILLER, *Tables of solution of the differential equation  $y'' = xy$* , Cambridge University Press, 1946.
- [23] P. GERMAIN, *Sur le problème de l'onde détachée* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 221, 1947, p. 1051-1053).
- [24] TH. VON KARMAN, *The similarity law of transsonic flow* (*J. Aeronaut. Sc.*, vol. 14, 1947, p. 182-190).
- [25] TH. VON KARMANN, *Supersonic aerodynamics. Principles and applications* (*J. Aeronaut. Sc.*, vol. 14, 1947, p. 373-412).
- [26] M. J. LIGHTHILL, *The hodograph transformation in transsonic flow. I. Symmetrical channels* (*Proc. Roy. Soc., London, A*, vol. 191, 1947).
- [27] K. G. GUDERLEY, *Considérations of the structure of mixed subsonic-supersonic flow patterns* (*Technical report, Project H. A. 219*, 1947).
- [28] M. ROY, *Problèmes divers de dynamique des fluides aux grandes vitesses* (*Publ. scient. et techn. Minist. Air*, n° 203, 1947).
- [29] R. E. MEYER, *The method of characteristics for problems of supersonic flow involving two independent variables* (*Quat. J. Mechan, Appl. Math.*, vol. 1, partie 2, juin 1948).
- [30] M. M. MUNK and R. C. PRIM, *Surface-pressure gradient and shock-front curvature at the edge of a plane ogive with attached shock front* (*J. Aeronaut.*, vol. 15, 1948, p. 691-695).
- [31] J. DUNGUNJJI, *An investigation of the detached shock in front of a body of revolution* (*J. Aeronaut. Sc.* vol. 15, 1948, p. 699-705).
- [32] T. Y. THOMAS, *Calculation of the curvatures of attached shock waves* (*J. Math. Phys.*, vol. 27, n° 4, 1949, p. 279-297).
- [33] T. Y. THOMAS, *The consistency relations for shock waves* (*J. Math. Phys.*, vol. 28, n° 1, 1949, p. 62-90).

Le présent travail a été résumé en quatre Notes parues aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* :

1. *Étude des écoulements gazeux au voisinage de la vitesse du son* (t. 229, 1949, p. 102-104).
2. *Détermination approchée de l'onde de choc détachée* (t. 229, 1949, p. 492-493).
3. *Écoulement potentiel discontinu d'un fluide parfait compressible* (t. 229, p. 510-511).
4. *Étude de la singularité au sommet d'une onde de choc attachée, dans un écoulement à deux dimensions* (t. 229, 1949, p. 923-925).

#### BIBLIOGRAPHIE COMPLÉMENTAIRE.

- [34] H. CABANNES, *Détermination de l'onde de choc attachée lorsque la vitesse aval à la pointe est subsonique* (*Congrès international de Mécanique de Poitiers*, 1950; *Publ. scient. et techn. Minist. Air*, n° 250, p. 181-195).

- [35] H. CABANNES, *Sur l'onde de choc attachée lorsque la vitesse aval à la pointe de l'obstacle est subsonique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1830-1832).
- [36] KO TAMADA, *Studies of two dimensional flow of gas with special reference to the flow through various nozzles* (*Studies in mathematical Physics Iwanami Shoten Pub. Tokyo*, t. 1, 1950, p. 56-92).
- [37] G. B. WITHAM, *The behaviour of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis* (*Proc. Roy. Soc. London*, série A, vol. 201, 1950, p. 89-109).
- [38] TH. VON KARMAN et J. FABRI, *Écoulement transsonique à deux dimensions le long d'une paroi ondulée* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1271-1274).
- [39] H. CABANNES, *Étude de la courbure au sommet de l'onde de choc attachée dans un écoulement de révolution* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 481-483).
- [40] H. CABANNES, *Détermination théorique des écoulements d'un fluide derrière une onde de choc détachée de révolution* (*ONERA.*, Note technique n° 5, 1951).
- [41] P. GERMAIN, *Application de l'approximation homographique à l'étude des écoulements transsoniques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1811-1813).
- [42] H. CABANNES, *Étude de l'onde de choc attachée dans les écoulements de révolution* (*La Recherche Aéronautique*, n° 24, p. 17-23 et n° 27, p. 3-12).

