DUBOIS-VIOLETTE

Étude des réseaux de courbes tracés sur une surface close et en général localement homéomorphes à un faisceau de droites par parallèles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 68 (1951), p. 267-325
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__267_0>

ÉTUDE DES RÉSEAUX DE COURBES
TRACÉS SUR UNE SURFACE CLOSE
ET EN GÉNÉRAL
LOCALEMENT HOMÉOMORPHES A UN FAISCEAU DE DROITES PARALLÈLES

PAR M^me DUBOIS-VIOLETTE.

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est l'étude des réseaux R de courbes situés sur une surface close. Ces réseaux sont supposés, en tout point de la surface à l'exception d'un nombre fini de points, localement homéomorphes à un faisceau plan de droites parallèles. Plus particulièrement, cette étude porte sur l'ensemble d'accumulation d'une courbe quelconque d'un tel réseau.

Avant d'aborder les réseaux R proprement dits, nous établirons dans une première Partie quelques résultats généraux relatifs aux surfaces et aux courbes fermées simples de Jordan situées sur les surfaces.

Nous établirons dans la deuxième Partie quelques résultats préliminaires relatifs aux réseaux R. Nous ferons ensuite l'étude locale de R au voisinage d'un point ordinaire, puis d'un point singulier. Enfin, nous déduirons de cette étude une forme particulière de la formule des points fixes.

Dans la troisième Partie, nous considérerons quelques exemples de réseaux R. Nous établirons l'existence de réseaux R admettant un système arbitraire de courbes fermées disjointes, à l'exclusion de toute autre courbe fermée. Nous étudierons, d'autre part, un réseau R, tracé sur une surface de genre 1, et admettant nécessairement une ou plusieurs courbes fermées.

Les deux dernières Parties abordent dans le cas général l'étude de l'ensemble d'accumulation des courbes de R. La quatrième Partie est développée dans le cadre des restrictions suivantes : 1° à tout point singulier aboutit un nombre fini de courbes de R; 2° R n'admet pas de courbes fermées; 3° R satisfait à l'hypothèse (h) suivante : tout point de S est point d'accumulation pour au moins une courbe de R (Remarquons que cette hypothèse se trouve vérifiée lorsque les courbes de R sont des trajectoires récurrentes de la dynamique). Dans la cinquième Partie, nous étudions d'abord les réseaux R satisfaisant aux conditions précédentes 1° et 2° mais non plus à l'hypothèse (h), et nous montrons que toutes les courbes de R ont le même ensemble d'accumulation. Il est alors possible de déduire des résultats précédemment établis, l'étude complète de l'ensemble d'accumulation des courbes de R dans le cas le plus général. Cette étude souligne le rôle particulièrement important des réseaux R qui satisfont à l'hypothèse (h).

Je veux exprimer ici ma profonde gratitude à MM. Denjoy et Garnier dont les conseils et les encouragements m'ont été précieux. J'adresse tous mes remerciements à M. Valiron pour la bienveillance qu'il m'a toujours montrée, et je tiens à dire combien je suis reconnaissante à M. Favard : ce Mémoire doit beaucoup à l'attention particulière qu'il lui a accordée.

Dans ce tableau se trouve précisé le sens exact des termes utilisés :

surface, variété à deux dimensions;

surface close, surface qui n'a pas de frontière;

orbe, courbe de Jordan fermée simple tracée sur une surface;

bord d'une surface, orbe appartenant à la frontière de la surface;

nombre ou orbe de connexion d'une surface S, le nombre $N = I - \alpha$, où α est le nombre maximum de courbes fermées que l'on peut tracer sur S sans que la surface cesse d'être connexe; nous ne considérerons que des surfaces dont l'ordre de connexion est fini;

genre d'une surface orientable, le nombre $p = \frac{N-I}{2}$.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Théorème. — *Soit un orbe* Γ, *non homologue à* o, *tracé sur une surface* S *de nombre de connexion* q. *Il existe une représentation de cette surface sur un polygone* π *à un seul sommet, dans laquelle à l'orbe* Γ *correspond un couple de côtés associés du polygone*. La représentation symbolique du polygone π n'est pas nécessairement de forme normale, mais elle est exclusivement constituée par des suites de côtés adjacents du type a^+a^+ ou $a^+b^+a^-b^-$.

1° *Supposons qu'il existe sur* S *un voisinage de* Γ *qui soit orientable*. Une coupure suivant Γ remplace S par une surface S′ présentant deux bords et de nombre de connexion $q-1$. Il existe sur S′ un arc continu $\widehat{P_1P_2}$, joignant deux points situés respectivement sur chacun des bords de S′ et provenant d'un même point de Γ. A cet arc correspond sur S un orbe Γ'. Une nouvelle coupure, effectuée suivant P_1P_2, remplace à son tour la surface S' par une surface S_1, de nombre de connexion $q-2$, présentant un seul bord de représentation symbolique $\Gamma^+\Gamma'^+\Gamma^-\Gamma'^-$.

Si la surface S_1 n'est pas simplement connexe, il est possible de trouver un ensemble d'orbes, passant par le point commum à Γ^+ et Γ'^-, et rendant S_1 simplement connexe. Il existe donc une représentation de S_1 sur un polygone π' à un seul sommet et $2(q-2)+1$ côtés, dont un côté correspond au bord de S_1 et dont les autres côtés sont identifiés deux à deux. Il en résulte une représentation de S sur un polygone à un seul sommet et $2q$ côtés, dont la représentation symbolique commence par $\Gamma^+\Gamma'^+\Gamma^-\Gamma'^-$ et comporte exclusivement des suites de termes de la forme a^+a^+ ou $a^+b^+a^-b^-$. *Si la surface* S *est orientable, et seulement dans ce cas,* la représentation obtenue est de forme normale et ne contient pas de suite du types a^+a^+.

2° S'il n'existe sur S aucun voisinage orientable de Γ, une coupure suivant Γ remplace S par une surface S'_1, à un seul bord de représentation symbolique $\Gamma^+\Gamma^+$. En raisonnant sur S'_1 comme sur S_1 on obtient une représentation de S sur un polygone à un seul sommet dont le schéma commence par $\Gamma^+\Gamma^+$ et ne comporte que des suites de termes de la forme a^+a^+ ou $a^+b^+a^-b^-$. C'est seulement dans le cas où la coupure suivant Γ remplace S par une surface S'_1 non orientable que cette représentation peut être de forme normale.

2. *Définition et propriétés de l'étranglement d'un orbe* Γ *tracé sur une surface* S'. *Étant donné un orbe* Γ *tracé sur la surface* S, *nous appellerons étranglement de* Γ *l'ensemble des opérations suivantes :*

1° *coupure de* S *le long de* Γ*;*

2° *identification de tous les points appartenant à un même bord de la surface* S_1 *obtenue par la coupure précédente.*

S est ainsi remplacée par une surface S'. La courbe Γ correspond sur S', soit à un point γ, soit à un couple de points γ_1 et γ_2 suivant l'orientabilité des voisinages de Γ sur S. Les points de S n'appartenant pas à Γ sont en correspondance biunivoque et réciproque avec les points de S' autres que γ (ou γ_1 et γ_2).

A. *Si l'orbe* Γ *n'est pas homologue à* o, nous pouvons, en vertu du théorème précédent, considérer une représentation de S sur un polygone π à un seul sommet, dans laquelle Γ correspond à un couple de côtés associés du polygone.

1^er^ *cas.* — Γ *a un voisinage orientable sur* S. — Le polygone π a donc pour schéma $\Gamma^+\Gamma'^+\Gamma^-\Gamma'^-\dots$

L'étranglement remplace π par un polygone π_1 de schéma $\Gamma'^{+}\Gamma'^{-}\ldots$. On peut alors faire disparaître le couple $\Gamma'^{+}\Gamma'^{-}$ et obtenir le polygone π' associé à S'. Si le nombre de connexion de S est q et si S est une surface close, le nombre de côtés de π' est $(2q-4)$. Par suite, S' est une surface close d'ordre de connexion $(q-2)$. Remarquons que la suppression des deux couples ne modifie en rien l'existence éventuelle d'un couple $\Gamma_i^{+}\Gamma_i^{+}$ dans le schéma de π, donc : *l'étranglement d'un orbe, admettant un voisinage orientable sur une surface* S *de nombre de connexion* q, *remplace* S *par une surface* S' *de nombre de connexion* $(q-2)$, *orientable ou non en même temps que* S.

2e *cas.* — Γ *n'a pas de voisinage orientable sur* S. — La coupure suivant Γ transforme S en une surface S'_1 à un seul bord et l'orbe Γ correspond, après étranglement, à un point unique de S'.

Le schéma du polygone π commence par $\Gamma^{+}\Gamma^{+}\ldots$. L'identification de tous les points de Γ remplace π par un polygone π' à un seul sommet et $2q-2$ côtés. La surface S, non orientable, de nombre de connexion q est alors remplacée par une surface S' close, de nombre de connexion $q-1$, qui peut être ou ne pas être orientable.

B. *Si l'orbe* Γ *est homologue à* o, la coupure le long de Γ remplace S par deux surfaces ouvertes S'_1 et S'_2 ayant chacune un bord. Dans l'étranglement, S est remplacé par deux surfaces closes S_1 et S_2, la courbe Γ correspondant à un point γ_1 de S_1 et à un point γ_2 de S_2.

Nous pouvons représenter chacune des surfaces S'_1 et S'_2, sur des polygones π_1 et π_2 à un seul sommet, admettant $(2h_1+1)$ et $(2h_2+1)$ côtés qui sont identifiés deux à deux à l'exception du côté de chaque polygone qui correspond à Γ. Par identification des côtés de π_1 et π_2 correspondant à Γ_1 nous obtenons une représentation de S sur un polygone à un seul sommet et $(2h_1+2h_2)$ côtés. Par suite, $h_1+h_2=q$.

Comme la surface S_1 (ou S_2) se déduit de S'_1 (ou S'_2) par identification des points de S'_1 (ou S'_2) situés sur Γ, elle peut être représentée sur un polygone à un seul sommet et $2h_1$ (ou $2h_2$) côtés. *Le nombre de connexion de la surface* S *est donc égal à la somme des nombres de connexion de chacune des surfaces* S_1 *et* S_2.

Remarque. — Si, au lieu de réaliser l'étranglement d'un orbe Γ non homologue à o sur une surface S, on se contente de réaliser une coupure suivant Γ, on remplace S par une surface S_1 homéomorphe à une surface close, d'ordre de connexion $q-2$ ou $q-1$ (selon la nature des voisinages de Γ sur S), privée de deux ou une aires homéomorphes à l'intérieur d'un cercle.

Plus généralement, en effectuant sur S, α coupures le long d'orbes à voisinage orientable et β coupures le long d'orbes sans voisinage orientable, (α et β vérifiant $2\alpha+\beta=q$), on remplace S par une surface $S_{\alpha+\beta}$, si les orbes considérés sont homologiquement indépendants. Celle-ci est homéomorphe à une sphère privée de $(2\alpha + \beta)$ aires simplement connexes.

De même, une coupure suivant un orbe homologue à o, remplace S par l'ensemble de deux surfaces ouvertes, homéomorphes à deux surfaces closes d'ordre de connexion q_1 et q_2 (avec $q_1 + q_2 = q$) privées chacune d'une aire simplement connexe.

3. Théorème. — *Deux orbes Γ_1 et Γ_2 tracés sur S, non homologues à o, homotopes et disjoints sont isotopes.*

1[er] *cas.* — *Γ_1 a un voisinage V orientable.* — Nous pouvons supposer que Γ_2 n'a aucun point intérieur à V. Il existe alors deux orbes C′ et C″, disjoints de Γ_2 et de Γ_1, isotopes à Γ_1 et situés dans V de part et d'autre de Γ_1.

Réalisons l'étranglement de Γ_1. A Γ_1 correspond sur S′ deux points γ' et γ''. Aux orbes C′ et C″ correspondent deux orbes Γ' et Γ'' limitant des aires (A′) et (A″) simplement connexes et contenant l'une γ', l'autre γ''. A Γ_2 correspond un orbe Γ'_2 homotope à o donc limitant, sur S′, une aire (A_2) simplement connexe. L'orbe Γ'_2 est extérieur aux aires (A′) et (A″) puisque Γ_2 n'a par hypothèse aucun point intérieur à V.

(A_2) contient un point et un seul du couple $\gamma'\gamma''$, sinon une aire de S simplement connexe correspondrait à (A_2), et Γ_2 serait homologue à o.

Soit γ' le point intérieur à (A_2). L'aire (A′) est alors intérieure à (A_2) et l'aire $[(A_2) - (A')]$ est homéomorphe à une couronne circulaire. Il existe donc une déformation isotope de Γ_2 en C′, et, puisque C′ est lui-même isotope à Γ_1, Γ_2 et Γ_1 sont isotopes.

2[e] *cas.* — *Γ_1 n'a pas de voisinage orientable.* — Dans ce cas, il n'existe pas d'ordre homotope à Γ_1, et disjoint de Γ_1.

En effet, réalisons l'étranglement de Γ_1. A Γ_1 correspond sur S′ un point γ'. S'il existait sur S un orbe Γ_2 homotope à Γ, et disjoint de Γ_1, il lui correspondrait sur S′ un orbe Γ'_2, homotope à o, limitant une aire simplement connexe (A_2). Si (A_2) ne contenait pas γ', Γ_2 serait homotope à o sur S, ce qui est contraire aux hypothèses. Mais si (A_2) contenait γ', Γ_2 limiterait sur S une aire de nombre de connexion 1, et serait ainsi homotope à $(2\Gamma_1)$ et non à Γ_1.

4. *Étude du nombre maximum d'orbes disjoints et homotopiquement distincts que l'on peut tracer simultanément sur une surface close d'ordre de connexion q.*

Considérons sur une surface S d'ordre de connexion q, un système U d'orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les orbes de U sont deux à deux disjoints;

2° Les orbes de U sont tous homotopiquement distincts;

3° Il est impossible de tracer sur S un orbe Γ_{i+1} sans point commun avec aucun des orbes de V et homotopiquement distinct de chacun d'entre eux.

Nous allons montrer qu'un tel système comprend un nombre borné d'orbes.

A. *Il existe dans* U *un orbe non homologue à* o *pourvu que* S *soit d'ordre de connexion* q *non nul.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi l'étranglement des orbes Γ_i remplacerait S par un ensemble de surfaces dont la somme des ordres de connexion serait q. Par suite, sur l'une au moins des surfaces on pourrait tracer un orbe non homologue à o ne passant par aucun des points correspondant à un orbe étranglé. Cet orbe correspondrait à un orbe Γ_{i+1} sur S, non homologue à o, disjoint et homotopiquement distinct des orbes de U qui ne vérifierait pas la condition 3°.

De façon plus générale, il existera dans U *un ensemble* U_1 *d'orbes ne morcelant pas* S, *et constitué par* α *orbes admettant un voisinage orientable sur* S, *et* β *orbes sans voisinage orientable et l'on a* $2\alpha+\beta=q$.

En effet, on ne peut avoir $2\alpha+\beta>q$, car l'étranglement de l'ensemble des orbes de U_1 remplacerait S par une surface d'ordre de connexion négatif, ce qui est absurde.

D'autre part, si $2\alpha+\beta<q$, l'étranglement des orbes de U n'appartenant pas à U_1 remplacerait S par un ensemble de surfaces dont la somme des ordres de connexion serait différente de o. L'existence d'orbes non homologues à o sur l'une, au moins, de ces surfaces, entraînerait l'existence d'un orbe Γ_{i+1} sur S, non homologue à o, disjoint et homotopiquement distinct des orbes de U qui ne vérifierait pas la condition 3°.

B. Soit Γ_1 un orbe non homologue à o. Une coupure suivant Γ_1, remplace S par une surface S_1 admettant deux ou un bords, selon que Γ_1 admet ou non un voisinage orientable.

Deux orbes, autres que Γ_1, homotopiquement distincts sur S resteront homotopiquement distincts sur S_1. Si, par ailleurs, le système U_1 des orbes Γ_2^1, Γ_3^1, ..., Γ_i^1 correspondant sur S_1 aux orbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_i$ de U, ne satisfait pas à la condition 3° énoncée au début de ce Chapitre, nous pourrons ajouter à U, un certain nombre d'orbes Γ'_{i+1} ....

1$^{\text{er}}$ *cas.* — Γ_1 *a un voisinage orientable.* — La surface S_1 a deux bords Γ'_1 et Γ''_1.

Il existe, sur S, des orbes isotopes et disjoints de Γ_1. A chacun d'eux correspond sur S_1 un orbe isotope de Γ'_1 ou Γ''_1. Le système d'orbes $\Gamma_2^1, \Gamma_3^1, \ldots, \Gamma_i^1, \Gamma'_1, \Gamma''_1$, satisfait sur S_1 aux trois conditions 1°, 2°, 3°. Par suite, si μ est le nombre maximum d'orbes d'un système U sur S, μ_1 le nombre analogue sur S_1, il vient : $\mu_1 \geqq \mu+1$.

2^e^ *cas.* — Γ_1 *n'a pas de voisinage orientable.* — La surface S_1 à un bord Γ'_1. Un orbe isotope à Γ'_1 sur S_1 correspond sur S à un orbe homotope à $2\Gamma_1$.

D'autre part, le système U sur S comprend certainement un orbe homotope à $2\Gamma_1$; sinon le système U pourrait être complété par un orbe Γ_{i+1} situé tout entier dans un voisinage de Γ_1 ne contenant aucun point des orbes $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$, et Γ_{i+1} serait homotope à $2\Gamma_1$. L'ensemble des orbes $\Gamma_1^1, \Gamma_2^1, \ldots, \Gamma_i^1$ contient donc deux orbes homotopes sur S_1, et par suite : $\mu_1 \geqq \mu - 1$.

C. Nous pouvons opérer sur la surface S_1 comme nous avons opéré sur S. Après avoir effectué α coupures le long d'orbes $\Gamma_1, \Gamma_2^1, \Gamma_3^2, \ldots, \Gamma_\alpha^{\alpha-1}$, admettant des voisinages orientables, et β coupures le long d'orbes $\Gamma_{\alpha+1}^\alpha, \ldots, \Gamma_{\alpha+\beta}^{\alpha+\beta-1}$ sans voisinage orientable, nous obtenons une surface $S_{\alpha+\beta}$, admettant $(2\alpha+\beta)$ bords sur laquelle se trouve tracé un système d'orbes disjoints et homotopiquement distincts. Si $(2\alpha+\beta)=q$, $S_{\alpha+\beta}$ est homéomorphe à une sphère privée de $(2\alpha+\beta)$ aires simplement connexes. Le nombre maximum $\mu_{\alpha+\beta}$ d'orbes d'un système satisfaisant sur $S_{\alpha+\beta}$ aux conditions 1°, 2°, 3°, vérifie l'inégalité : $\mu \leqq \mu_{\alpha+\beta} - \alpha + \beta$.

Nous nous proposons de déterminer μ. Nous déterminerons d'abord $\mu_{\alpha+\beta}$, puis nous montrerons que $\mu = \mu_{\alpha+\beta} - \alpha + \beta$.

D. *Nombre maximum d'orbes d'un système* U_r *satisfaisant aux conditions* 1°, 2°, 3° *tracés sur une surface* Σ *de genre nul, présentant r bords* $C_1, C_2, \ldots, C_r$.

U_r admet toujours un orbe et un seul homotope à o, et h_r orbes non homotopes à o. Parmi ceux-ci, figure un orbe homotope à un bord C_1 de Σ ou homotope à C_1; car, s'il n'en était pas ainsi, U_r pourrait être complété par l'adjonction de C_1, et ne satisferait pas à la condition 3°. Mais si U_r admet un orbe Γ_1 homotope à C_1 et distinct de C_1, il existe une aire de Σ dont les bords sont Γ_1 et C_1.

Cette aire ne peut contenir d'orbes qui ne soient ni homotopes à o, ni homotopes à C_1. Par suite on peut remplacer, dans U_r, Γ_1 par C sans modifier le nombre h_r et sans qu'aucune des conditions 1°, 2°, 3° cesse d'être satisfaite. Nous supposons donc que U_r admet les r bord de Σ.

Un ensemble de coupures, suivant Σ, sur les $(h_r - r)$ orbes de U_r non homotopes à o et distincts des bords de Σ, remplace Σ par $(h_r - r + 1)$ surfaces σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_{h_r-r+1}$ de genre nul, présentant un certain nombre de bords. Une surface σ_i ne peut avoir moins de trois bords, puisque les orbes suivant lesquels sont effectuées les coupures ne sont ni homotopes à o, ni homotopes deux à deux. D'autre part, si une surface σ_i présentait plus de trois bords, nous pourrions adjoindre à U_r un orbe séparant σ_i en deux surfaces ayant chacune au moins trois bords. Par suite, U_r ne satisferait pas à la condition 3°. Les surfaces σ_i ont donc chacune trois bords. L'un quelconque des r bords de Σ est bord d'une surface σ_i. Les $(h_r - r)$ orbes du système de coupures sont bords chacun de deux surfaces σ_i. En exprimant de deux façons le nombre total des bords des surfaces σ_i il vient $h_r = 2r - 2$.

Le nombre total d'orbes de U_r est par suite : $h_r + 1 = 2r - 2$.

E. Il résulte de l'étude précédente que l'on peut construire sur $S_{\alpha+\beta}$ un système $U_{2\alpha+\beta}$ satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, et constitué par $[2(2\alpha+\beta)-2]$ orbes dont les $(2\alpha+\beta)$ bords de $S_{\alpha+\beta}$.

En passant de $S_{\alpha+\beta}$ à S par les opérations inverses de celle qui ont conduit de S à $S_{\alpha+\beta}$, nous faisons correspondre à $U_{2\alpha+\beta}$ un système U d'orbes sur S. Le nombre d'orbes de U est donc

$$\mu = \mu_{\alpha+\beta} - \alpha + \beta = 3(\alpha+\beta) - 2.$$

Il est égal au nombre maximum d'orbes d'un système satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° sur S, à condition toutefois que deux orbes quelconques de U soient homotopiquement distincts sur S. Démontrons cette propriété par l'absurde :

Soient deux orbes C_1, C_2 de $U_{2\alpha+\beta}$, correspondant sur S à deux orbes homotopes Γ_1, Γ_2. Ceux-ci sont isotopes et limitent une aire (A) homéomorphe à une couronne circulaire. Tout orbe, situé dans (A), est homotope à o ou à Γ_1. (A) contient nécessairement un orbe Γ_i qui correspond à deux (ou à un) bords de $S_{\alpha+\beta}$, sinon C_1 et C_2 seraient homotopes sur $S_{\alpha+\beta}$. Comme Γ_i ne peut être homotope à o, il est homotope à Γ_1, et par suite C_1 est homotope à un bord de $S_{\alpha+\beta}$. Ce résultat est en contradiction avec les hypothèses auxquelles doit satisfaire $U_{2\alpha+\beta}$.

Le nombre d'orbes d'un système U répondant aux conditions 1°, 2°, 3° est donc

$$\boxed{\mu = 3(\alpha+\beta) - 2.}$$

Lorsque S est orientable, le nombre d'orbes de U ne dépend que du genre p de la surface. En effet, β est ici égal à o, et d'autre part :

$$\mu = \frac{3q}{2} - 2 = 3p - 2.$$

Lorsque la surface S *n'est pas orientable,* le nombre β des orbes sans voisinage orientable appartenant à U peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et q. Selon la valeur de β, le nombre d'orbes de U sera plus au moins élevé. Il sera maximum en même temps que β. Par suite :

$$\beta = q, \qquad \alpha = 0, \qquad \boxed{\mu_q = 3q - 2.}$$

Ce nombre peut être effectivement atteint, puisqu'il est possible de trouver, sur S, q orbes disjoints, homotopiquement distincts, sans voisinage orientable.

DEUXIÈME PARTIE.

Définition des réseaux R. Résultats préliminaires. Étude locale.

1. *Définition des réseaux* R. — Nous nous proposons d'étudier des réseaux R de courbes, couvrant une surface S connexe, close, orientable ou non, d'ordre de connexion q fini.

Les réseaux R sont assujettis aux deux conditions suivantes :

1° *Par tout point* M *de* S, *il passe en général une courbe unique de* R *et il existe un voisinage* V_M *de* M *dans lequel* R *est homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles;*

2° *Les points de* S *pour lesquels il n'en est pas ainsi, appelés points singuliers de* R, *sont en nombre fini.*

Nous désignerons une courbe continue appartenant à R et dont aucun point ne coïncide avec un point singulier de R par le terme de *caractéristique* de R.

Un point M sur une caractéristique, la partage en deux courbes continues ou *demi-caractéristiques d'origine* M.

Dans un homéomorphisme qui fait correspondre point par point à la surface S une surface S′, à un réseau R tracé sur S, correspond courbe par courbe un réseau R′, satisfaisant sur S′ aux conditions 1° et 2°. Toutes les propriétés de R que nous étudierons seront des propriétés se conservant dans un homéomorphisme quelconque.

A. Un arc de caractéristique est localement homéomorphe à un segment de droite. L'application du théorème de Borel-Lebesgue permet d'en conclure qu'un arc de caractéristique quelconque est l'image biunivoque et bicontinue du segment (0, 1).

Considérons une demi-caractéristique L, d'origine M_0. Nous pouvons définir une correspondance monotone et continue entre les points M de L et les valeurs de t telles que $0 \leqq t < \infty$, la valeur $t = 0$ correspondant au point M_0.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1° $M(t)$ coïncide avec M_0 pour une valeur $t_0 \neq$ de t. L est une courbe fermée. Inversement, si L est une courbe fermée, il existe toujours une fonction $M(t)$ périodique de période t_0 faisant correspondre L à la demi-droite $t \geqq 0$, un point de L correspondant à une infinité de valeurs de t.

2° Si, dans la correspondance, les valeurs positives de t ne sont pas toutes atteintes, soit t_1 la borne supérieure précise des valeurs atteintes, t_1 ne correspond à aucun point M_1 de L, sinon, la correspondance pouvant être prolongée au delà de M_1, on se heurterait à une contradiction. Par suite L est l'image continue de l'intervalle $0 \leqq t < t_1$, intervalle homéomorphe à une demi-droite.

3° Lorsque L n'est pas une courbe fermée, on peut choisir la correspondance de telle sorte que tout point de L corresponde à une valeur finie de t. En effet, nous pouvons trouver sur L une suite infinie bien ordonnée de points $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ telle que : a. l'arc $M_0 M_n$ de L est entièrement couvert par des voisinages $V_{M_0}, \ldots, V_{M_n}$ des points de la suite, dans chacun desquels R est localement homéomorphe à une famille de droites parallèles et b, la suite n'admet pas de point limite sur L. En effet, s'il n'en était pas ainsi toute suite satisfaisant à a admettrait un point limite M' contenu dans un voisinage $V_{M'}$ dans lequel se trouve tous les points M_n pour lesquels $n > p$. On pourrait alors remplacer la suite $M_0, \ldots, M_n, \ldots$ par la suite finie $M_0, \ldots, M_p M'$, suite que l'on peut prolonger au delà de M_1.

D'autre part, étant donné une telle suite, un point quelconque de L est situé sur un arc $M_n M_{n+1}$ car s'il n'en était pas ainsi l'ensemble des points de L couverts par les V_{M_n} et l'ensemble des points extérieurs à tous les V_{M_n} définiraient une coupure et par suite un point M_1 de L limite des M_n contrairement aux hypothèses. Nous pouvons alors définir une correspondance biunivoque et bicontinue entre L et la demi-droite $t \geqq 0$ en associant les point M_i aux entiers i et les arcs $M_i M_{i+1}$ aux segments $(i, i+1)$. *Une caractéristique de* R *sera donc, soit une courbe fermée image bicontinue de la droite* $(-\infty, +\infty)$, *soit une courbe non fermée image biunivoque et bicontinue de la droite.*

Lorsque $t \to +\infty$, le point $M(t)$ de L peut ou non avoir une limite sur S, mais si cette limite existe, ce ne peut être qu'un point singulier de R. En adjoignant ce point aux points de la demi-caractéristique L, celle-ci devient l'image biunivoque et bicontinue du segment $0 \leqq t \leqq 1$. Nous dirons alors que L *aboutit* au point singulier. Une caractéristique aboutissant à un point singulier est dite *séparatrice*. Une caractéristique n'aboutissant que dans un sens à un point singulier est l'image d'une demi-droite. Nous conviendrons de considérer comme formant une caractéristique l'ensemble de deux séparatrices aboutissant à un même point singulier P si, et seulement si, l'ensemble de ces deux séparatrices limite dans un voisinage de P sur S une région où ne se trouve aucune demi-caractéristique aboutissant à P. Dans ce cas encore, la caractéristique définie est l'image biunivoque et bicontinue d'une droite.

Nous appellerons *Col* un point singulier auquel aboutit un nombre fini, non nul, de séparatrices. Toute séparatrice aboutissant à un col peut être associée à l'une ou l'autre de deux séparatrices aboutissant au même col pour former une caractéristique.

B. Nous disons qu'une courbe L présente un contact en un de ses points M avec le réseau R si la courbe de R qui passe en M ne traverse pas L au point M.

Étant donné un arc $\alpha\beta$ *de Jordan sur* S, $\alpha\beta$ *peut être déformé en un arc infiniment voisin ne présentant qu'un nombre au plus fini de contact avec* R.

En effet, nous pouvons supposer que l'arc $\alpha\beta$ ne passe par aucun point singulier de R en remplaçant éventuellement $\alpha\beta$ par un arc infiniment voisin de mêmes extrémités. Tout point M de $\alpha\beta$, admet un voisinage V_M dans lequel le réseau R est localement homéomorphe à un faisceau de droites parallèles; V_M contient un arc $\alpha_1\beta_1$ de $\alpha\beta$. On peut couvrir (théorème de Borel-Lebesgue) l'arc $\alpha\beta$ par un nombre fini d'arcs contigus tel que $\alpha_1\beta_1$. On peut alors remplacer chacun de ces arcs par un arc infiniment voisin de mêmes extrémités et n'ayant qu'un nombre fini de contacts avec R. Il en sera de même pour l'arc $\alpha\beta$.

En particulier, tout orbe tracé sur S est déformable en un orbe infiniment voisin présentant un nombre fini ou nul de points de contact avec R.

C. *Voisinage d'un orbe* Γ *sur une surface* S *couverte par un réseau* R. — Soit Γ un orbe ne passant par aucun point singulier de R et présentant un nombre fini de contacts avec R. Il existe sur S une aire (A_0), de nombre de connexion 1, contenant Γ et formée par la réunion d'un nombre fini de voisinages sur lesquels R est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles.

Étant donné sur Γ un point P autre qu'un point de contact de Γ avec R, nous considérons deux points pp' situés de part et d'autre de P sur l'arc de caractéristique passant en P et intérieur à (A_0). Il existe une aire (A_1) intérieure à (A_0), contenant Γ et l'arc de caractéristique pp', aire dont la frontière passe par p et p'. Une coupure le long de l'arc de caractéristique pp' remplace (A_1) par une aire (A) simplement connexe.

Établissons entre (A) et une aire plane (A') un homéomorphisme transformant les arcs de caractéristique situés sur (A) en segments appartenant à un faisceau R' de droites parallèles, sur A'.

A Γ correspond alors un arc P_1P_2 partageant (A') en deux aires simplement connexes (A'_1) et (A'_2). A deux points a, a' situés sur les arcs de caractéristiques P_p et $P_{p'}$ correspondent deux couples a_1a_2, $a'_1a'_2$ de points sur les droites de R passant en P_1 et P_2.

1° Supposons tout d'abord que l'aire (A'_1) contienne les points a_1 et a_2.

Considérons des segments normaux à R' contenus dans (A'), et passant par chacun des points de contacts de l'arc P_1P_2 avec R'. Sur chacun de ces segments prenons un point M_i. Il existe alors une ligne polygonale a_1a_2, intérieure à (A'_1), admettant comme sommets particuliers les points M_i et ne présentant de contact avec R qu'en ces points M_i.

Il existe une ligne polygonale $a'_1a'_2$ analogue dans l'aire (A'_2).

Ces deux lignes polygonales sont l'image de deux courbes $\Gamma'\Gamma''$ situées sur S dans (A_0), isotopes de Γ et telles qu'à un contact M de Γ avec R correspondront deux contacts M′ et M″ de Γ′ et Γ″ avec R. La disposition des courbes de R, par rapport aux courbes Γ, Γ′, Γ″, au voisinage de M, M′, M″ est la même.

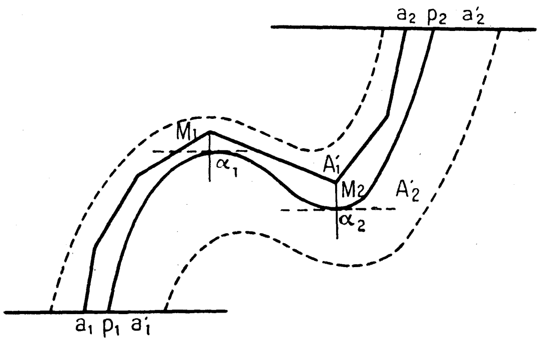

Fig. 1.

2° Si, au contraire, l'aire A_1 contient les points a_1 et a'_2, il existera deux lignes polygonales $a_1a'_2$ et a'_1a_2 situées dans (A_1) et (A_2), analogues aux précédentes. Mais ici l'ensemble de ces deux lignes sera l'image d'un orbe Γ′ situé sur (A_0) homotopes à 2Γ et tel qu'à un contact M de Γ avec R correspondent deux contacts M′ et M″ de Γ′ avec R′ ; la disposition des courbes de R par rapport à Γ ou Γ′ est la même au voisinage de M, M′ et M″.

La première hypothèse est vérifiée lorsque Γ admet sur S un voisinage orientable, la seconde dans le cas contraire.

2. *Étude locale du réseau* R. — Soit Γ un orbe limitant sur S une aire (A) homéomorphe à un cercle. (A) constitue l'intérieur de Γ. Nous supposons

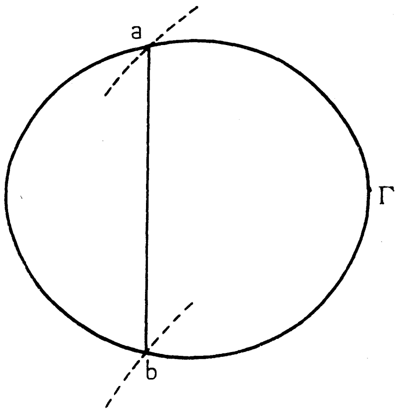

Fig. 2.

que Γ ne présente qu'un nombre fini de points de contacts avec R et ne passe par aucun point singulier de R. Un point de contact P de Γ avec R est un contact extérieur si la courbe de R passant en P ne pénètre pas dans (A) en P, un contact intérieur dans le cas contraire. Nous désignons par λ_r l'excès du nombre des contacts extérieurs sur celui des contacts intérieurs. Soit ab un arc de Jordan simple joignant deux points de Γ et situé en totalité dans (A). Cet arc partage (A) en deux aires (A_1) et (A_2) de frontières Γ_1 et Γ_2. On voit immédiatement que l'on a

$$\lambda_\Gamma = \lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma_2} - 2. \tag{1}$$

Les deux courbes Γ_1 et Γ_2 sont, en effet, constituées chacune par la réunion d'un arc de Γ et de l'arc ab commun à Γ_1 et Γ_2. Les contacts le long de ab sont de nature différente pour Γ_1 et Γ_2 et, par suite, ont une contribution nulle dans $(\lambda_{\Gamma_1}+\lambda_{\Gamma_2})$. D'autre part, en a (et en b) il y a apparition d'un contact extérieur supplémentaire pour Γ_1 ou Γ_2, d'où la formule (1).

Plus généralement supposons (A) partagée en n aires $(A_1), (A_2), \ldots, (A_n)$, homéomorphes à un cercle, deux à deux sans point intérieur commun, et de frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. L'une des courbes frontières Γ_1, par exemple, admet un arc de Γ. Γ_1 partage (A) en deux aires (A_1) et (A'_2), cette dernière constituée par l'ensemble des aires $(A_2, \ldots, (A_n)$. Si Γ'_2 est la frontière de (A'_2) on a $\lambda_\Gamma = \lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma'_2} - 2$.

On peut répéter sur l'aire (A'_2) partagée en $(n-1)$ aires un raisonnement analogue; au bout de $(n-1)$ opérations, on aboutit à

$$\lambda_\Gamma = \lambda_{\Gamma_1} + \lambda_{\Gamma_2} + \ldots + \lambda_{\Gamma_n} - 2(n-1).$$

Si nous appelons indice de l'orbe Γ le nombre $i_\Gamma = 1 - \frac{\lambda_\Gamma}{2}$, on voit que la formule précédente devient :

$$i_\Gamma = i_{\Gamma_1} + i_{\Gamma_2} + \ldots + i_{\Gamma_n}.$$

A. *Étude de* R *au voisinage d'un point ordinaire.* — Si l'aire (A) est à l'intérieur d'un domaine (D) dans lequel R est homéomorphe à une famille de droites parallèles, on a

$$\lambda_\Gamma = 2 \quad \text{et} \quad i_\Gamma = 0.$$

En effet, représentons la partie de R intérieure à D sur un faisceau plan F de droites parallèles. Soit alors C l'image de Γ.

On peut toujours trouver un polygone π dont les sommets sont sur C, qui admet comme sommets particuliers les contacts de C avec F et qui limite une aire homéomorphe à un cercle.

Les contacts de π avec F coïncident avec ceux de C avec F et sont de même nature, on aura donc

$$\lambda_\pi = \lambda_C = \lambda_\Gamma.$$

Or, l'intérieur de π peut être décomposé en ν aires triangulaires. Pour chacun des triangles, on a $\lambda = 2$. Alors $\lambda_\pi = \nu \times 2 - 2(\nu - 1) = 2$.

On a donc $\lambda_\Gamma = 2$ et $i = 0$. C. Q. F. D.

Plus généralement, si l'aire (A) ne contient aucun point singulier de R, on peut couvrir (A) par un nombre fini de domaines ouverts dans chacun desquels R est homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles. Par suite, on pourra partager (A) en un nombre fini d'aires contiguës (A_1), (A_2), ..., (A_n) de frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ telles que l'on ait

$$\lambda_{\Gamma_j} = 2 \quad \text{et} \quad i_{\Gamma_j} = 0,$$

alors

$$i_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} i_{\Gamma_j} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_\Gamma = 2.$$

B. *Étude de* R *au voisinage d'un point singulier. Indice d'un point singulier.* — Supposons maintenant que l'aire (A) contient un point singulier unique, P, de R. Les nombres λ et i précédemment définis pour l'orbe Γ sont caractéristiques du point P, c'est-à-dire sont les mêmes pour deux orbes Γ_1 et Γ_2 limitant deux aires (A_1) et (A_2) contenant chacune le seul point singulier P de R.

En effet, supposons tout d'abord que Γ_1 et Γ_2 sont sans point commun et

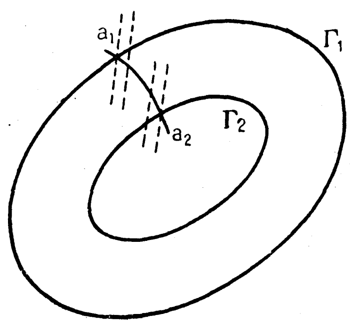

Fig. 3.

que, par exemple, l'aire (A_1) contienne l'aire (A_2). Nous pouvons rendre simplement connexe l'aire $(A_1 - A_2)$ en effectuant une coupure le long d'un arc simple de Jordan joignant deux points a_1 et a_2 de Γ_1 et Γ_2 qui ne sont pas des contacts de Γ_1 et Γ_2 avec R. Soit Γ la frontière de l'aire obtenue, on a $\lambda_\Gamma = \Gamma_{\Gamma_1} - \lambda_{\Gamma_2} + 2$, car Γ présente deux contacts extérieurs avec R en a_1 et a_2. Mais, puisque $(A_1 - A_2)$ ne contient pas de point singulier de R, on a $\lambda_\Gamma = 2$, d'où $\lambda_{\Gamma_1} = \lambda_{\Gamma_2}$.

Si nous supposons maintenant que Γ_1 et Γ_2 ne sont pas disjoints, il existera toujours un orbe Γ_3 situé tout entier à l'intérieur de $(A_1).(A_2)$ et contenant P à son intérieur et l'on a encore

$$\lambda_{\Gamma_1} = \lambda_{\Gamma_3} = \lambda_{\Gamma_2}.$$

L'égalité $\lambda_{\Gamma_1} = \lambda_{\Gamma_2}$ entraîne $i_{\Gamma_1} = i_{\Gamma_2}$.

Nous appellerons *indice d'un point singulier* P *de* R l'indice d'un orbe limitant sur S une aire homéomorphe à un cercle contenant P à l'exclusion de tout autre point singulier de R.

Plus généralement, si un orbe Γ limite une aire (A) homéomorphe à un cercle, nous pouvons partager (A) en un nombre fini d'aires contenant chacune au plus un seul point singulier de R et l'indice de Γ est égal à la somme des indices des points singuliers contenus dans (A).

Remarque fondamentale. — Nous avons considéré des orbes ne présentant qu'un nombre fini de contact avec R. Nous avons montré, d'autre part, que tout orbe est déformable en un orbe infiniment voisin ne présentant qu'un nombre fini de contacts avec R. C'est-à-dire qu'il existera effectivement des orbes présentant un nombre fini de contacts avec R et limitant sur S une aire simplement connexe contenant un point singulier donné de R à l'exclusion de tout autre point singulier. On pourra donc définir un *indice fini pour tout point singulier de* R.

En particulier, si un point singulier P est un col, le nombre λ associé à un orbe entourant ce col est égal au nombre de séparatrices de R qui aboutissent à P. Ce nombre de séparatrices sera donc *toujours fini*.

3. *Formule des points fixes.* — 1° Nous donnons ici la démonstration dans le cas particulier qui nous intéresse de la formule des points fixes.

Supposons que la surface S *soit de genre* 0. Tout orbe Γ limite sur S deux aires simplement connexes. Soit Γ un orbe ne passant par aucun point singulier de R et limitant sur S une aire (A) ne contenant aucun point singulier de R. Si l'on considère cette aire comme l'intérieur de Γ son indice est nul et le nombre λ attaché à Γ est égal à $+2$.

Mais si l'on considère que (A) constitue l'extérieur de Γ, le nombre λ est égal à (-2) et l'indice de Γ est alors $i=\left(1-\frac{-2}{2}\right)=2$. Cet indice est aussi égal à la somme des indices des points singuliers de R intérieurs à Γ, c'est-à-dire à la somme des indices de tous les points singuliers de R et l'on a alors $\Sigma i=2$.

Dans le cas le plus général d'une surface S *d'ordre de connexion* q, la surface S peut être représentée sur l'intérieur d'un polygone plan π à un seul sommet et $2q$ côtés identifiés deux à deux. Nous pouvons supposer qu'aucun point singulier de R ne se trouve sur les courbes de R qui correspondent aux côtés du polygone π.

Au réseau R correspond, à l'intérieur de π, un réseau R′ que nous pouvons toujours supposer prolongé dans le plan de π au voisinage du polygone. L'indice de π, par rapport à R′, est égal à la somme des indices des points singuliers de R′ situés à l'intérieur de π, c'est-à-dire à la somme des indices de tous les points singuliers de R. Calculons directement le nombre λ_π relatif au polygone π par rapport à R'. Les contacts de π avec R' peuvent se trouver sur un côté ou en un sommet de π. Les côtés se correspondent deux à deux. Chaque contact situé sur un côté correspond à un contact de nature opposée sur le côté correspondant. Par suite, les contacts extérieurs et intérieurs se trouvent en nombres égaux sur les côtés de π. Restent les contacts aux sommets du polygone. Les sommets de π correspondent à un même point de S par lequel passe une caractéristique unique de R. Par suite, deux arcs de caractéristiques R' aboutissent dans les $2q$ angles au sommet de π. Si ces deux arcs aboutissent dans le même angle au sommet, π présentera un contact intérieur avec R' dans cet angle $(2q-1)$ contacts extérieurs aux autres angles. Si les deux branches aboutissent dans deux angles distincts, le polygone π présente $(2q-2)$ contacts extérieurs aux autres angles. Finalement, le nombre λ_π est dans tous les cas $\lambda_\pi = 2q-2$. Et l'on a en désignant par Σi la somme des indices des points singuliers de R.

$$\Sigma i = 1 - \frac{\lambda_\pi}{2} = 1 - \frac{2q-2}{2} = 2-q.$$

2° Nous pouvons trouver ce résultat *en réalisant l'étranglement d'un certain nombre d'orbes homologues à* o, *tracés sur* S. Nous avons vu, en effet, que l'étranglement d'un orbe Γ non homologue à o et admettant un voisinage orientable sur S remplace une surface S d'ordre de connexion q par une surface S_1 d'ordre de connexion $(q-2)$. L'orbe Γ donne alors naissance à deux points γ' et γ'' situés sur S_1. Ces deux points sont des points singuliers du réseau R_1 transformé du réseau R dans l'étranglement. Si Γ ne passe par aucun point singulier de R et présente respectivement α et β contacts avec R, sur chacun de ses côtés, les indices des deux points γ' et γ'' seront respectivement

$$i' = 1 - \frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \text{et} \qquad i'' = 1 - \frac{\beta-\alpha}{2},$$

l'on aura $i' + i'' = 2$. Si (Σi) est la somme des indices des points singuliers de R et $(\Sigma i)_1$ la somme des indices des points singuliers de R_1, on a

$$(\Sigma i)_1 = \Sigma i + i' + i'' = \Sigma i + 2.$$

L'étranglement d'un orbe Γ sans voisinage orientable conduit à un réseau R_1, présentant, outre les points singuliers correspondant à ceux de R_1, un point singulier γ. Une courbe qui limite autour de ce point une aire simplement connexe, a un nombre égal de contacts extérieurs et intérieurs avec R' un contact de Γ avec R correspond à un contact extérieur et un contact intérieur d'une courbe entourant γ avec R'. Par suite, γ a pour indice 1. Nous avons vu, d'autre part, que la surface S est remplacée par une surface S' dont le nombre de connexion est inférieur de 1.

Nous pouvons donc toujours, au moyen d'une suite d'étranglements, remplacer la surface S d'ordre de connexion q par une surface S de genre nul, le réseau R étant remplacé par un réseau R_q tel que l'on ait

$$(\Sigma i)_{R_q} = (\Sigma i)_R + q,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma i = (\Sigma i)_{R_q} - q = 2 - q.$$

TROISIÈME PARTIE.

ÉTUDE DE RÉSEAUX R PARTICULIERS.

EXISTENCE D'UN RÉSEAU R ADMETTANT UN ENSEMBLE DE COURBES FERMÉES DONNÉES *a priori* A L'EXCLUSION DE TOUTE AUTRE COURBE FERMÉE.

1. Nous allons maintenant donner quelques exemples de réseaux R. Nous verrons plus loin que l'étude d'un réseau R se ramène à l'étude de réseaux n'admettant que des points singuliers du type col; c'est pourquoi les réseaux R particuliers que nous déterminons ici sont assujettis à n'avoir pas de points singuliers autres que des cols.

Le nombre de courbes fermées homotopiquement distinctes appartenant à un réseau R est au plus égal au nombre maximum de ces courbes que l'on peut tracer simultanément sur S. Nous allons montrer que ce nombre peut être effectivement atteint et, plus généralement, qu'il existe des réseaux R admettant un ensemble restrictif qnelconque d'orbes disjoints et homotopiquement distincts tracés sur S.

Nous donnons tout d'abord des exemples de réseaux R sans courbe fermée tracée sur une surface orientable. Nous définissons un mode de construction de R sur S à partir de deux réseaux R_1 et R_2 couvrant des surfaces S_1 et S_2. Nous montrons ensuite que l'on peut ainsi obtenir sur une surface quelconque un réseau sans courbe fermée. Enfin nous montrons que, sur une surface quelconque, il existe des réseaux admettant un ensemble de courbes fermées arbitraires.

A. *Réseau sans caractéristique fermée sur une surface de genre nul.* — Pour que R n'ait que des points singuliers du type col, il est nécessaire que, parmi ces cols, figurent des points à l'un desquels aboutit une séparatrice unique, sinon la somme des indices des points singuliers de R serait négative, alors qu'elle doit être égale à $(+2)$. Nous construisons un réseau R sans caractéristique fermée de la façon suivante : considérons un disque circulaire et couvrons chacune des faces de ce disque par une famille de cordes parallèles. Les deux familles formant entre elles un angle α incommensurable avec π. Si l'on choisit sur la circonférence Γ du disque une origine des arcs, les points de Γ appartenant à une même caractéristique de R auront pour argument

$$x, \quad -x, \quad x+2\alpha, \quad \ldots, \quad \pm(x+2k\alpha),$$

où k prend toutes les valeurs entières. Une caractéristique de R rencontre donc Γ en un ensemble de points partout dense sur Γ. Elle traversera un voisinage quelconque de tout point de S.

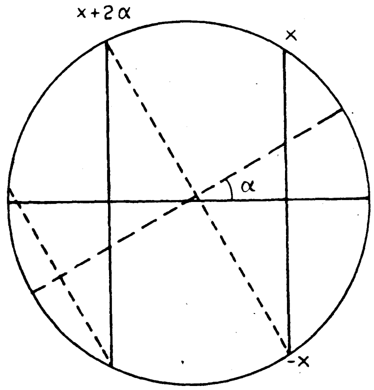

Fig. 4.

B. *On connaît, d'autre part, sur une surface de genre* 1, *des réseaux* R *sans point singulier.* Il en est ainsi du réseau R représenté, sur un quadrillage doublement infini où l'intérieur d'un carré élémentaire représente la surface S,

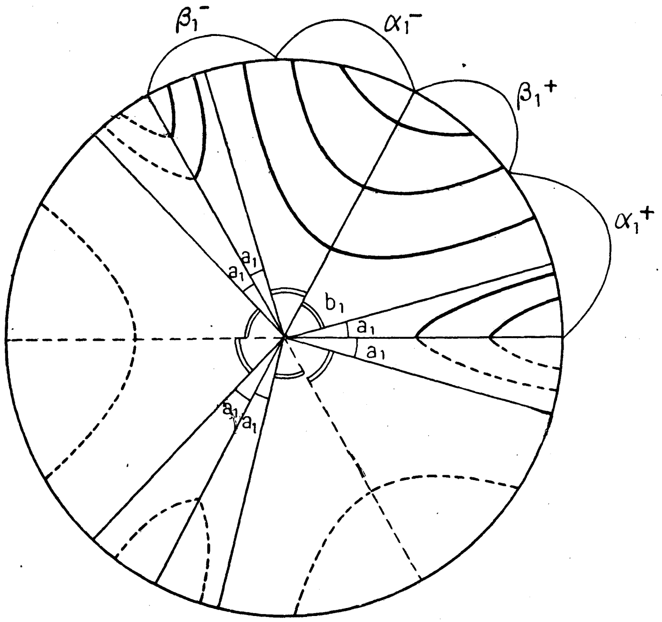

Fig. 5.

par une famille de droites parallèles formant avec les droites du quadrillage des angles de tangente irrationnelle.

Nous pouvons alors considérer une surface S de genre p constituée par l'ensemble de p-surfaces de genre 1 superposées et réunies entre elles par des coupures qui font passer de l'un des feuillets aux feuillets immédiatement au-dessus et au-dessous. Nous supposons que le réseau R coïncide sur chacun des feuillets avec un réseau R_1 sans point singulier satisfaisant à l'hypothèse (h) et qui est identique sur les différents feuillets. A un arc de courbe de R_1 correspond alors p arcs de courbes de R et une caractéristique de R est formée d'arcs successifs correspondant à des arcs successifs d'une même courbe de R_1. Par suite R, comme R_1, n'a pas de caractéristique fermée. D'autre part, tout point de l'un des feuillets supposé couvert par R_1 est point d'accumulation d'une caractéristique quelconque de R_1 et, par suite, tout point de S est point d'accumulation pour au moins une des p caractéristiques de R qui correspondent à une même caractéristique S de R_1.

Nous représentons un tel réseau R *dans le cas d'une surface de genre* 3, sur un cercle dont le périmètre est partagé en 12 arcs égaux deux à deux identifiés suivant le schéma (*fig.* 5)

$$\alpha_1^+\beta_1^+\alpha_1^-\beta_1^-\alpha_2^+\beta_2^+\alpha_2^-\beta_2^-\alpha_3^+\beta_3^+\alpha_3^-\beta_3^-.$$

Les arcs correspondants à a_1 sont égaux, ceux correspondants à b_1 son égaux. Le rapport $\frac{a_1}{b_1}$ est irrationnel. Le réseau R admet les axes de symétrie d'argument $\lambda\frac{\pi}{3}$ avec λ entier.

Remarque. — Dans les exemples précédents une caractéristique L de R, dans la représentation polygonale de S, correspond à une infinité d'arcs joignant deux points du périmètre Γ du polygone, les points de L sur Γ forment un ensemble dénombrable partout dense. Remplaçons L par un pinceau de caractéristiques couvrant sur Γ une infinité d'arcs dénombrables et deux à deux disjoints et identifions deux à deux les arcs provenant de deux points de Γ préalablement identifiés. R est alors remplacé par un réseau R′ sans courbes fermées; un arc sans contact intérieur au pinceau de caractéristiques αR′ remplaçant L est traversé une fois au plus par une caractéristique quelconque de R′. Le pinceau de caractéristiques qui remplace L couvre une aire de S qui est un ruban ne se ramifiant pas.

C. *Mode de construction de réseaux* R. — Considérons deux surfaces : S_1, couverte par un réseau R_1, et S_2, couverte par un réseau R_2. Nous effectuons sur S_1 et S_2 deux coupures, l'une suivant un arc A_1B_1 sans contact avec R_1, l'autre suivant un arc A_2B_2 sans contact avec R_2. Nous identifions point par point les deux lèvres de la coupure sur S_1 le long de A_1B_1 aux deux lèvres de la coupure sur S_2 le long de A_2B_2. L'ensemble de S_1 et S_2 devient une surface S dont le nombre de connexion est la somme des nombres de connexion de S_1 et S_2. S est couverte par un réseau R qui admet, outre les points singuliers de R_1 et R_2. deux cols à quatre séparatrices aux points résultant de la fusion de A_1 et A_2 et de B_1 et B_2. Si, en outre, les caractéristiques de R_1 rencontrent au plus une fois l'arc A_1B_1 sur S_1, les seules caractéristiques fermées de R sont celles de R_1 et de R_2 qui ne rencontrent, ni A_1B_1, ni A_2B_2.

Supposons en particulier que S_1 est une surface orientable de genre p couverte par un réseau R_1 sans caractéristique fermée et que A_1B_1 est tout entier intérieur à un ruban ne se ramifiant pas et ne se recouvrant pas particulièrement. Supposons, d'autre part, que S_2 est une surface non orientable et que R_2 admet une caractéristique fermée Γ_2 qui constitue l'ensemble d'accumulation de toutes les caractéristiques de R_2. Nous prenons pour A_2B_2 un arc sans contact avec R_2 traversant Γ_2. La surface S résultant de la réunion de S_1 et S_2 est alors couverte par un réseau R n'admettant pas de courbe fermée. Nous donnerons plus loin des exemples de réseaux tracés sur des surfaces non orientables et admettant une courbe fermée unique, *ce qui permet de conclure à l'existence sur une surface quelconque de réseaux sans courbe fermée;* toutefois pour un tel réseau aucun point de l'arc AB de S résultant de la fusion de A_1B_1 et A_2B_2 n'est point d'accumulation pour aucune caractéristique de R.

Il n'est donc pas établi qu'il existe sur une surface non orientable un réseau sans courbe fermée et tel que tout point de S soit point d'accumulation d'une caractéristique au moins de R.

D. Considérons, sur une surface S quelconque, un ensemble de courbes fermées disjointes données à l'avance. Il existe toujours des réseaux R *admettant ces courbes à l'exclusion de toute autre courbe fermée*. En effet, l'ensemble des courbes données partage la surface S en un certain nombre de surfaces ouvertes $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Sur chacune de ces surfaces S_i nous pouvons tracer un orbe Γ_i partageant S_i en deux surfaces dont l'une, S'_i, a pour bord unique Γ_i et dont l'autre, S''_i, a pour bord, d'une part Γ_i, d'autre part l'ensemble des courbes frontières de S_i. Nous pouvons choisir Γ_i de telle sorte que S''_i soit de genre o ou, lorsque le nombre de connexion de S_i est supérieur à 2, soit orientable et de genre 1.

Partageons Γ_i en deux arcs par deux points A_i et B_i. Nous identifions point par point les deux arcs A_iB_i de Γ_i. Nous pouvons couvrir la surface S'_i par un réseau R' sans courbe fermée et la surface S''_i par un réseau R'' admettant les bords de S''_i comme seules caractéristiques fermées. L'ensemble de S'_i et S''_i forme une surface S_i couverte par un réseau qui n'admet pas d'autre caractéristique fermée que les bords de la surface S_i pourvu que les caractéristiques de R'' aient pour ensemble d'accumulation une partie des caractéristiques fermées.

Nous donnerons plus loin des exemples de surfaces de genre o couverte par des réseaux admettant un ensemble arbitraire de caractéristiques fermées. Nous pourrons donc toujours couvrir une surface S_i par un réseau satisfaisant aux conditions proposées.

En opérant de même sur chacune des surfaces S_i, on obtient sur la surface S un réseau R qui admet un ensemble arbitraire de caractéristiques fermées disjointes à l'exclusion de toute autre courbe fermée.

E. *Réseau admettant un cycle limite unique dans un plan projectif.* — Le plan projectif est représenté sur l'intérieur d'un cercle dont les points diamétralement opposés sont identifiés. Le réseau R est représenté sur le cercle par l'ensemble ρ des cordes portées par des droites concourantes en un point I extérieur au cercle.

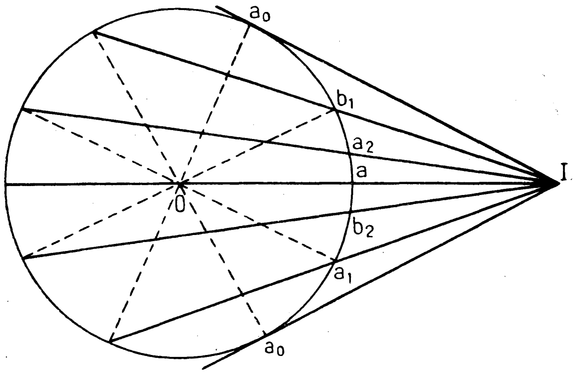

Fig. 6.

L'ensemble des caractéristiques de ρ couvre successivement les arcs $a_0 b_0$, $b_1 a_1$, $a_2 b_2$, $\ldots$, $a_{2p} b_{2p}$, b_{2p+1}, a_{2p+1}, $\ldots$, tels que chacun d'eux contient tous ceux qui le suivent et que les points a_i et b_i admettent un point limite unique en a sur le diamètre du cercle passant par I. Le diamètre passant en a correspond à une courbe fermée de R qui est l'ensemble d'accumulation de toutes les caractéristiques de R. Le réseau R admet deux points singuliers à chacun desquels aboutit une séparatrice unique, ces deux points correspondant sur le cercle aux points de contact des tangentes issues de I.

F. *Réseau admettant un cycle limite situé sur une surface non orientable de nombre de connexion égal à* 3. — Nous représentons la surface sur un cercle dont la circonférence est partagée en six arcs égaux deux à deux identifiés. On suppose que le réseau R est représenté par la famille ρ des cordes dont les extrémités partagent dans le même rapport les deux arcs du cercle d'extrémité AB, les points A et B étant les extrémités de l'un des six arcs précédents. Le réseau R admet un cycle limite représenté sur le cercle par une seule corde : les courbes de ρ traversant AB une infinité de fois en couvrant successivement une suite d'arcs $a_n b_n$ tels que chacun d'eux est porté par le précédent et que sur la circonférence on ait $a_n b_n = \frac{1}{5} a_{n-1} b_{n-1}$; par suite, les points a_n et b_n admettent un point limite unique, la corde de la famille ρ passant par ce point représente la caractéristique fermée de R.

Le réseau R admet un point singulier unique, qui est un col à quatre séparatrices, au sommet du contour formé par les six arcs de cercle.

La construction se généralise pour une surface non orientable d'ordre de connexion quelconque

$$a_1 b_1 = ab,$$

$$a_2 b_2 = ab'_2 = \frac{ab}{5},$$

$$a_3 b_3 = a'_3 b'_2 = \frac{ab'_2}{5}.$$

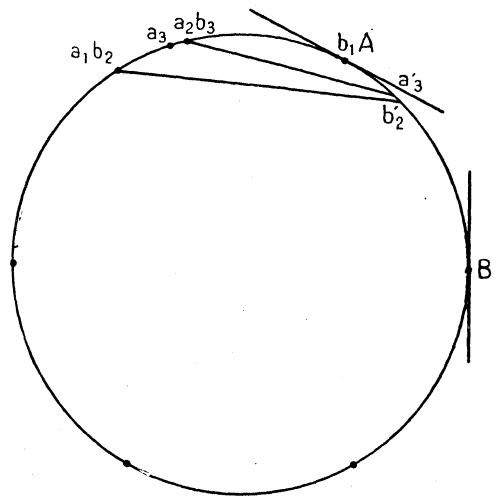

Fig. 7.

G. *Réseau tracé sur une surface de genre* o *admettant* α *bords*. — 1° $\alpha > 1$. Cas de figure $\alpha = 4$; le réseau n'admet que des cols à quatre séparatrices.

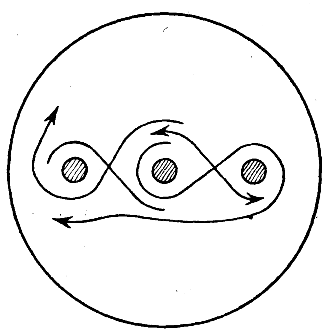

Fig. 8.

2° $\alpha = 1$. Il ne peut y avoir de réseau n'admettant pas de cols à une seule séparatrice.

Dans le cas de la figure le résau admet deux cols à une seule séparatrice.

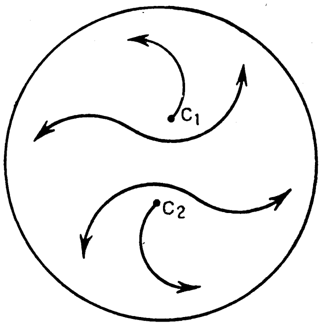

Fig. 9.

2. *Étude d'un réseau* R *particulier sur une surface* S *de genre* 1.

A. *Représentation de* S *et d'un orbe* Γ *tracé sur* S *sur un quadrillage doublement périodique.* — Si nous considérons deux orbes Γ_1 Γ_2 formant rétrosection sur S, on peut représenter la surface S à l'intérieur d'un carré ABCD dans lequel les côtés AB et DC correspondent à l'orbe Γ_1 et les côtés AD et BC à l'orbe Γ_2. On peut aussi représenter S sur un quadrillage plan infini doublement périodique d'élément le carré ABCD, un point quelconque de S n'appartenant ni à Γ_1, ni à Γ_2, ayant un correspondant et un seul à l'intérieur de chaque carré élémentaire.

Une courbe quelconque tracée sur S est alors représentée à l'intérieur de ABCD par un nombre fini ou infini d'arcs joignant deux points situés sur la frontière de ABCD, ou par une courbe toute entière intérieure au carré. Si la courbe n'a pas de point double, tous les arcs seront deux à deux disjoints. D'autre part, la courbe est aussi représentée sur l'ensemble du quadrillage par une famille de courbes continues déduites les unes des autres par les translations $\left(\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}\right)$, où α et β sont des nombres entiers quelconques. Si la courbe est un cycle non homotope à un point, l'une quelconque des courbes de la famille précédente définie sur l'ensemble du quadrillage sera périodique de période minimum $\left(\alpha_1\overrightarrow{AB} + \alpha_2\overrightarrow{AD}\right)$, si le cycle est homotope à $(\alpha_1\Gamma_1 + \alpha_1\Gamma_2)$.

Nous nous proposons d'étudier plus attentivement la *représentation d'un orbe* Γ.

1° Une courbe continue γ correspondant à Γ sur le quadrillage ne peut rencontrer une même droite correspondant à Γ_1 (ou à Γ_2) en deux points m et n tels que $\overrightarrow{mn} = (1+k)\,\overrightarrow{AB}$, $\left(\text{ou } \overrightarrow{AD}\right)$ où $k > 0$. En effet, la translation $\overrightarrow{AB}$ remplacerait γ par une courbe γ' et l'arc mn de γ par un arc $m'n'$ de γ; arc qui rencontrerait l'arc mn de γ en un point qui correspondrait à un point multiple de Γ, ce qui est impossible puisque Γ est un orbe.

2° Si γ rencontre une droite correspondant à Γ_1 (ou à Γ_2), en deux points mn, ou bien l'arc mn de γ ne traverse aucune droite du quadrillage correspondant à Γ_1 (ou à Γ_2), ou bien il traverse certaines de ces droites un nombre pair ou

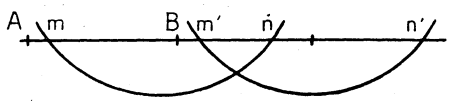

Fig. 10.

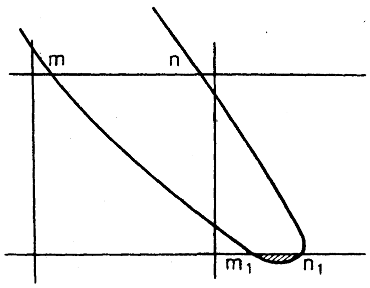

Fig. 11.

infini de fois; il existera alors un arc $m_1 n_1$ porté par l'arc mn de γ ayant ses deux extrémités sur une droite du quadrillage et ne rencontrant aucune autre droite du quadrillage. Cet arc $m_1 n_1$ sera situé tout entier à l'intérieur d'un même carré élémentaire, et limitera avec le segment $m_1\, n_1$ une aire correspondant à une aire simplement connexe de S.

Il existe, par suite, sur S un orbe Γ' isotope de Γ rencontrant Γ_1 et Γ_2 aux mêmes points que Γ, exception faite des points correspondants sur Γ_1 (ou Γ_2) aux points m_1 et n_1.

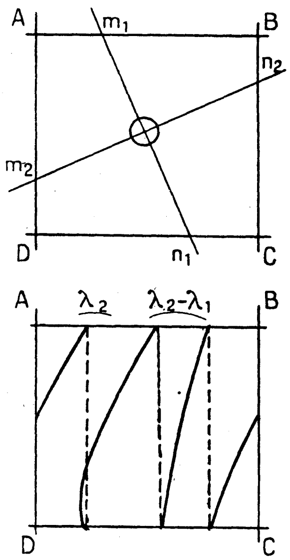

Fig. 12.

En recommençant la même opération, Γ *est remplacé par un orbe isotope* Γ_0 *tel qu'une courbe* γ_0 *correspondant à* Γ_0 *rencontre une droite du quadrillage en un point au plus.*

3° Nous considérons dans la suite un orbe Γ_0 associé à Γ par la transformation isotope définie au paragraphe 2.

Il n'existe pas sur Γ_0 de couple d'arcs $m_1 n_1$ et $m_2 n_2$ joignant respectivement deux points de Γ_1 sans rencontrer Γ_2 et deux points de Γ_2 sans rencontrer Γ_1. En effet, si un tel couple existait, il lui correspondrait à l'intérieur d'un carré élémentaire deux arcs se coupant, ce qui est impossible.

4° Nous supposons que Γ_0 rencontre Γ_1 en λ_2 points et Γ_2 en λ_1 points avec $\lambda_2 \geqq \lambda_1$, par exemple. Γ_0 est alors constitué par l'ensemble de $(\lambda_2 - \lambda_1)$ arcs joignant deux points de Γ_1, sans traverser Γ_1 ni Γ_2, et de $2\lambda_1$ arcs joignant un point de Γ_1 à un point de Γ_2 sans traverser Γ_1 ni Γ_2.

Sur le carré ABCD, Γ_0 sera représenté par $(\lambda_2 - \lambda_1)$ arcs joignant un point de AB à un point de DC. Puisque les arcs représentant Γ_0 sont disjoints il y aura alors λ_1 arcs joignant un point de AD à un point de AB (ou de DC) et λ_1 arcs joignant un point de BC à un point de DC (ou de AB). En outre, le $n^{\text{ième}}$ point rencontré à partir de A sur le contour polygonal ABC (ou BCD) sera nécessairement joint au $n^{\text{ième}}$ point rencontré sur le contour polygonal ADC (ou BAD).

Par suite, l'ordre dans lequel Γ_0 traverse Γ_1 et Γ_2 est déterminé lorqu'on connaît les valeurs λ_1 et λ_2.

Or si deux orbes Γ' *et* Γ'' *sont* homotopes, il en est de même des deux orbes Γ'_0 et Γ''_0 qu'on leur associe dans l'isotopie introduite au paragraphe 2. Ces deux orbes Γ'_0 et Γ''_0 peuvent être déformés isotopiquement en deux orbes passant par le point commun à Γ_1 et Γ_2 et auxquels correspondent deux courbes γ'_0 et γ''_0 joignant les mêmes sommets du quadrillage. Par suite, ces deux orbes sont isotopes *et les deux orbes* Γ' *et* Γ'' *sont isotopes*. D'où le théorème que l'on a déjà établi dans le cas général : *Deux orbes homotopes sur une surface de genre* 1 *sont isotopes*.

Corollaire. — *Pour qu'il existe un orbe* Γ *homotope à* $\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2$ *où* λ_1 *et* λ_2 *sont des nombres entiers, il faut et il suffit que* λ_1 *et* λ_2 *soient premiers entre eux.*

En effet, quels que soient λ_1 et λ_2 il existe toujours un cycle homotope à $\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2$ et sans point double, représenté sur le quadrillage par la diagonale du rectangle de côtés $\lambda_1\overrightarrow{AD}$ et $\lambda_2\overrightarrow{AB}$:

1° Si λ_1 et λ_2 sont premiers entre eux cette diagonale ne passe par aucun sommet du quadrillage et elle correspond à un orbe de S.

2° Si λ_1 et λ_2 ne sont pas premiers entre eux, la diagonale traverse $(\alpha - 1)$ sommets du quadrillage (si α est le p. g. c. d. de λ_1 et λ_2). Elle correspond alors, non à un orbe $\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2$, mais au produit de α fois un orbe $\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\Gamma_1 + \frac{\lambda^2}{\alpha}\Gamma_2\right)$ et tout cycle sans point double homotope à $(\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2)$ sera constitué par α orbes distincts homotopes à $\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\Gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha}\Gamma_2\right)$.

B. *Nous nous proposons d'étudier un réseau* R *sans point singulier couvrant une surface* S *de genre* 1.

Nous utilisons la représentation de S sur un quadrillage doublement périodique. Le réseau R est alors représenté par un réseau ρ doublement périodique. Nous prenons pour base du quadrillage deux orbes formant rétrosection dont l'un Γ_1 est un orbe sans contact avec R. Nous verrons plus loin qu'un tel orbe existe toujours.

1° Aucune caractéristique de ρ ne traverse en deux points une droite quelconque correspondant à Γ_1.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors dans le plan, une aire (A) simplement connexe, limitée par un arc mn de ρ et un segment mn correspondant à un arc de Γ_1. Considérons un orbe tracé dans le plan et constitué :

a. par un segment mn_0 contenant mn;

b. par un arc mn_0 sans contact avec ρ. Cet orbe a un indice nul par rapport à ρ puisqu'il limite une aire ne contenant aucun point singulier. Or le seul contact de cet orbe avec ρ est un contact extérieur avec ρ en n_0, puisque le segment mn_0 est sans contact avec ρ. C'est-à-dire que l'indice de cet orbe par rapport à ρ est $\left(+\frac{1}{2}\right)$. Comme d'autre part cet indice doit être o, nous aboutissons à une contradiction.

2° S'il existe un arc de ρ qui traverse successivement en trois points m, n, p une même droite D correspondant à Γ_2, nous allons montrer qu'il existe un orbe Γ'_2 homotope à Γ_2 formant rétrosection avec Γ_1 et présentant avec R deux contacts de moins que Γ_2.

a. Supposons que n soit entre m et p sur D, considérons un segment m_0p_0 contenant mnp et tel que $m_0p_0 \leqq$ AD. Il existe une déformation isotope du

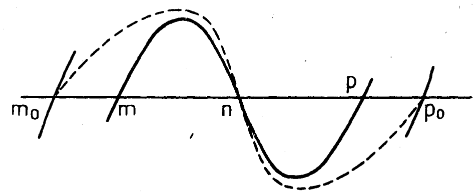

Fig. 13.

segment m_0np_0 sans contact avec ρ et voisin de l'arc mnp de caractéristique. Cet arc m_0np_0 comme l'arc de caractéristique mnp, rencontre en un point au plus une droite correspondant à Γ_1.

Cette déformation correspond à une déformation de l'orbe Γ_2 en un orbe Γ'_2 formant rétrosection avec Γ_1 et présentant avec R les mêmes contacts que Γ_2, exception faite des contacts de Γ_2 avec R représentés par les contacts du segment mp avec ρ et ces contacts sont en nombre au moins égal à deux puisque aucun des deux segments mn et np ne peut être sans contact avec ρ.

b. Si le point p se trouve au contraire entre m et n (ou m entre p et n), l'arc mnp de ρ et le segment mp limite alors dans le plan une aire simplement connexe (A). Au delà du point p la caractéristique des points mnp pénètre dans cette aire (A). Cette caractéristique ne peut rester constamment à l'intérieur de (A) (1). Elle traverse nécessairement le segment mp en q et l'on peut faire jouer aux points npq le rôle des points npq au paragraphe précédent.

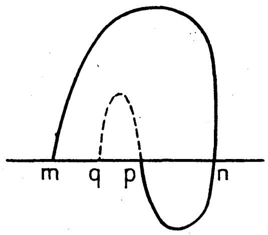

Fig. 14.

Nous supposerons donc dans la suite que les orbes Γ_1 et Γ_2 sont choisis de telle sorte que :

1° Γ_1 sans contact avec R et par suite aucune caractéristique de ρ ne traverse deux fois une droite correspondant à Γ_1 ;

2° Il n'existe pas de caractéristique de ρ traversant trois fois une même droite correspondant à Γ_2. En particulier une caractéristique tangente à une droite D correspondant à Γ_2 ne traverse pas D. Sinon une caractéristique voisine rencontrerait D en trois points.

C. *Nous allons montrer que lorsque* Γ_2 *n'est pas un orbe sans contact avec* R, *il existe au moins une caractéristique fermée.*

Les côtés AB et DC qui correspondent à Γ_1 sont sans contact avec ρ. Nous supposons pour fixer les idées, que la caractéristique de R qui passe par le point commun à Γ_1 et Γ_2 correspond à des arcs de courbes pénétrant dans le carré en B et D et extérieures au carré en A et C.

Soient m et m' les points de contact avec ρ de AD et BC qui sont respectivement le plus près de A et de B ; en m et n les contacts de la frontière du carré avec ρ sont, l'un extérieur et l'autre intérieur au carré. Si en m, par exemple, le contact est intérieur et en m' extérieur, les caractéristiques de ρ pénétrant dans ABCD sur le segment Am sortiront du carré sur un segment An porté par AB (ou un contour polygonal ABn), la caractéristique du point n étant

(1) Nous établirons cette propriété dans un cas plus général à la quatrième Partie (p. 303).

tangente en m à AD. Si le contact intérieur se trouve en m', l'ensemble des caractéristiques pénétrant dans le carré sur le contour polygonal ABm', sort du carré en couvrant un segment An' porté par AD.

Dans l'un et l'autre cas, il existe sur S un orbe Γ'_1 homotope à Γ_1, sans contact avec R et représenté dans le plan par un arc de courbe joignant mm' et voisin dans le premier cas de figure de l'ensemble des arcs : 1° arc mn de caratéristique; 2° contour polygonal ou segment nBm' ou nm';

dans le second cas de l'ensemble des arcs : 1° arc $m'n'$ de caractéristique; 2° segment $n'm$. Cet orbe Γ'_1 forme rétrosection avec Γ_2. Nous pouvons lui faire jouer le rôle de Γ_1. Nous sommes alors ramenés à étudier le réseau ρ

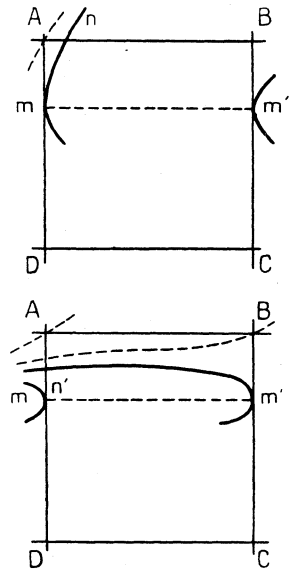

Fig. 15.

dans un carré ABCD tel que les côtés AB et DC soient sans contact avec ρ et les côtés AD et BC présentent un contact avec ρ en A, B, C et D. Nous supposons, pour fixer les idées, que les contacts en A et D sont intérieurs au carré et en B et C extérieurs.

La courbe de ρ tangente en A sort nécessairement du carré en un point n_0.

Ce point ne peut se trouver sur AB, puisque aucune caractéristique ne traverse AB en deux points. Il ne peut se trouver sur AD, puisque la caractéristique étant tangente à AD ne peut traverser la droite-support de AD. n_0 ne peut être, d'autre part, situé sur DC car la caractéristique tangente en D devrait traverser alors, soit AD, soit DC, ce qui est impossible. n_0 est donc sur BC.

Le segment Bn_0 est sans contact avec ρ. En effet, s'il n'en était pas ainsi ce segment présenterait avec ρ un nombre de contacts extérieurs autre que B égal au nombre des contacts intérieurs, c'est-à-dire qu'il existerait une caractéristique de ρ tangente intérieurement à BC, les deux branches de cette caractéristique ne peuvent traverser AB, donc l'une d'elles au moins traverserait BC, mais alors il existerait une caractéristique de ρ traversant en trois points la droite portant BC, ce qui est impossible.

Considérons alors la courbe L de R qui admet un arc ON_0 représentée par l'arc An_0 de ρ; cette courbe se prolonge au delà de N_0 par un arc N_0N_1 qui est représenté sur le carré par un arc $n'_0 n_1$, le point n'_0 se trouvant sur le segment AD, le segment An'_0 étant comme Bn_0 sans contact avec ρ ailleurs qu'en A. Le point n_1 comme n_0 se trouve nécessairement sur BC et n_1 est situé entre n_0 et C. On montre comme précédemment que le segment Bn_1 est sans contact avec ρ.

Au delà de N_0, L est représentée sur le carré par une suite d'arcs $n'_{i-1} n_i$

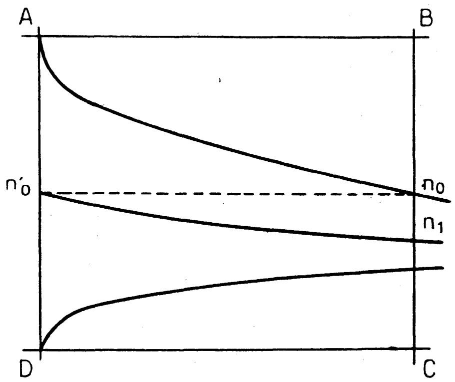

Fig. 16.

joignant un point de AD à un point de BC ; les segments Bn_1 sont tous sans contact avec ρ et d'autre part on a

$$Bn_0 \subset Bn_1 \subset \ldots \subset Bn_i \subset \ldots.$$

Les points n_i forment donc une suite monotone sur BC. Cette suite est bornée par le premier contact de BC avec ρ. Elle admet donc un point limite ν et la caractéristique de ρ passant en ν traverse AD au point ν' correspondant au même point de Γ_2 que ν, donc correspond à une caractéristique de R fermée et homotope à Γ_1.

Nous voyons alors qu'entre deux contacts consécutifs de Γ_2 avec R, il passe au moins une caractéristique fermée de R homotope à Γ_1 et qui forme l'ensemble d'accumulation des caractéristiques voisines. En particulier, s'il existe sur S un orbe de pseudo-indice (1) non nul, on est assuré que tout orbe formant rétrosection avec un orbe sans contact présente un nombre fini de contacts avec ρ et, par suite, que R admet des caractéristiques fermées.

(1) DUBOIS-VIOLETTE, *C. R. Acad. Sc.*, **224**, 1947, p. 782-784.

QUATRIÈME PARTIE.

1. A. *Point d'accumulation d'une courbe* L *tracée sur* S *lorsque la courbe* L *n'est pas une courbe fermée et n'admet pas de point d'arrêt.*

Un point M *de* S *sera dit point d'accumulation d'une courbe* L *lorsque :* à l'intérieur de tout voisinage V de M, il existe un voisinage V_M de M qui contient un point N de L, n'appartenant pas à un arc MN porté par L et intérieur à V_M.

Si un point M n'est pas un point d'accumulation de L, on peut toujours trouver un voisinage V_M de M tel que si l'on suit la courbe L dans un sens donné, il existe un point m de L au delà duquel la courbe L est tout entière extérieure à V_M.

1° *Toute demi-courbe infinie* L *admet au moins un point d'accumulation.* En effet, s'il n'en était pas ainsi, étant donné un point M de S, il existerait un voisinage V de ce point, tel que la courbe L, au delà d'un point m, n'ait aucun point intérieur à V.

Comme S forme un ensemble compact, on peut la couvrir par un nombre fini de tels voisinages, soient $V_1, V_2, \ldots, V_n$, correspondant à des points M_1, $M_2, \ldots, M_n$ de S; il existera une suite $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de points de L au delà desquels la courbe L reste extérieure à chacun des voisinages $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Si m_i est le dernier point rencontré sur L à partir de l'origine, au delà de m_i, L est extérieure à l'ensemble des voisinages $V_1, V_2, \ldots, V_n$ et, ceux-ci couvrant la totalité de S, nous arrivons à une contradiction.

2° *Supposons maintenant que la courbe* L *appartienne à un réseau* R *de courbes.* Pour qu'un point M, non singulier pour R, soit un point d'accumulation de L, il faut et il suffit que tout arc $\alpha\beta$ contenant M et sans contact avec R soit traversé par L en un point autre que M.

En effet, les caractéristiques de R qui traversent un arc $\alpha\beta$ sans contact avec R passant par M couvrent en totalité un voisinage de M qui contient l'arc $\alpha\beta$. Si tout voisinage de M contient un point de L, tout arc $\alpha\beta$ contiendra donc un point de L. Réciproquement, tout voisinage de M contient un arc $\alpha\beta$ passant par M et sans contact avec R. Si tout arc $\alpha\beta$ contient un point de L, tout voisinage de M, contenant un arc $\alpha\beta$ contiendra un point de L.

3° Soit MM′ un arc de caractéristique ne passant par aucun point singulier de R.

Considérons deux arcs sans contact avec R, l'un $\alpha M\beta$ passant par M, l'autre $\alpha' M' \beta'$ passant par M′, puisque R est localement homéomorphe au voisinage de l'arc de caractéristique MM′ à un faisceau de droites parallèles.

Il existera deux arcs $\alpha_1 M \beta_1$ et $\alpha'_1 M' \beta'_1$ portés respectivement par $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, tels que toute caractéristique traversant l'un des arcs $\alpha_1 M$, $M\beta_1$, $\alpha'_1 M'$ ou $M'\beta'_1$ traverse $\alpha' M'$, $M'\beta'$, αM ou $M\beta$. Par suite, si M est un point d'accumulation pour une caractéristique L, M' sera aussi un point d'accumulation pour L. Tout point de la caractéristique de M sera, alors, un point d'accumulation de L, si M n'est pas un point singulier de R.

Si la caractéristique de M est une séparatrice Λ aboutissant à un col C de R, soient Λ_1 et Λ_2 les deux séparatrices aboutissant à C, l'une immédiatement à droite, l'autre immédiatement à gauche de Λ supposée orientée vers C. Soit $\alpha M \beta$ un arc sans contact avec R tel que α soit à droite de Λ et β à gauche

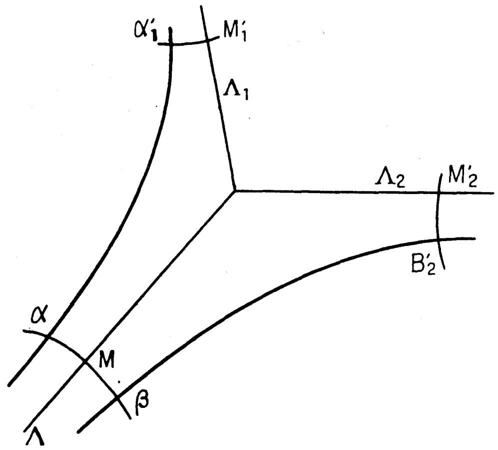

Fig. 17.

de Λ. Nous dirons que M est un point d'accumulation droit de L si une caractéristique L traverse tout arc tel que αM_1 à droite de L ; si L traverse tout arc tel que $M\beta$, nous dirons que M est un point d'accumulation gauche de L. Un point d'accumulation de L, peut être droit, gauche, ou les deux à la fois. Si M est un point d'accumulation droit de L, il en est de même pour tous les points de Λ et pour tous les points de Λ_1, le réseau R étant, à droite de l'ensemble Λ, Λ_1, localement homéomorphe à une famille de droites parallèles. Par suite, si M est un point d'accumulation pour une caractéristique L, l'ensemble des points d'accumulation de L contient l'une ou l'autre des caractéristiques constituées par la réunion de Λ et de l'une des séparatrices Λ_1 et Λ_2.

Nous supposons dans la suite que le réseau R n'admet pas d'autres points singuliers que des cols. Nous convenons, en outre, de considérer comme formant une seule caractéristique l'ensemble de deux séparatrices aboutissant au même col C et séparant le voisinage de C en deux régions dont l'une ne contient pas d'arc de séparatrice aboutissant à C. Toute caractéristique L de R est alors sans point d'arrêt. Si R n'est pas formé par un ensemble de courbes fermé, *toute caractéristique* L *non fermée admet au moins* un point d'accumulation, donc au moins une caractéristique lieu de points d'accumulation, et par suite au moins *un point d'accumulation autre qu'un col.*

B. *Existence d'orbes sans contact pour un réseau n'admettant que des points singuliers qui sont des cols.*

Il sera commode dans la suite de considérer les points d'intersection des caractéristiques L avec un orbe Γ, sans contact avec R, et admettant un voisinage orientable sur S. Nous allons montrer tout d'abord qu'il existe toujours sur S un orbe sans contact avec R.

Dans la démonstration, nous remplaçons l'hypothèse que R n'admet que des points singuliers du type col, par l'hypothèse plus générale que R admet une demi-caractéristique L n'aboutissant à aucun point singulier.

Soit alors M un point d'accumulation de L. Il existe un arc $\alpha\beta$ passant par M

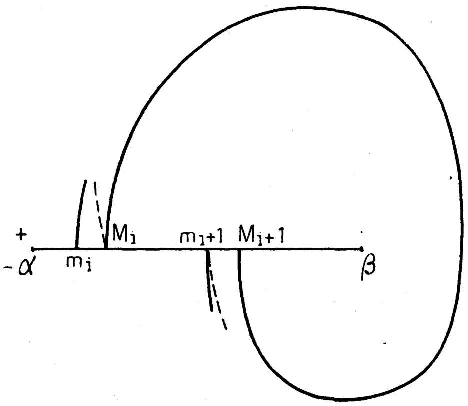

Fig. 18.

et sans contact avec R. Un tel arc est traversé par L une infinité de fois. Si l'on suit L les points d'intersection de L avec $\alpha\beta$ sont rangés sur L, dans l'ordre M_1, M_2, ..., M_i, ..., le nombre des arcs M_iM_{i+1} de L qui passent par un col de R est fini ou nul. En négligeant les premiers termes de la suite, nous obtenons donc une suite infinie M_1, M_2, ..., M_i, ..., de points de L, situés sur $\alpha\beta$ et tels qu'aucun des arcs M_iM_{i+1} ne rencontre $\alpha\beta$ ou ne passe par un col de R.

Considérons un arc M_iM_{i+1} de L. Une caractéristique voisine de L rencontre Γ en deux points, m_i, m_{i+1}, voisins de M_i, M_{i+1}. Si nous choisissons m_i suffisamment près de M_i, l'arc de caractéristique m_im_{i+1} est tout entier situé dans un voisinage de l'arc de caractéristique M_iM_{i+1} qui ne contient aucun point singulier de R et, d'autre part, les arcs de $\alpha\beta$ d'extrémités m_iM_i et $m_{i+1}M_{i+1}$ sont disjoints.

Nous avons alors sur l'arc $\alpha\beta$ l'une des deux dispositions suivantes :

$$\alpha m_i M_i m_{i+1} M_{i+1} \beta \quad \text{ou} \quad \alpha m_i M_i M_{i+1} m_{i+1} \beta.$$

1° Lorsque la première disposition se trouve réalisée, nous obtenons un orbe sans contact avec R par la réunion des deux arcs sans contact suivants :

a. Un arc $M_i m_{i+1}$ traversant une fois chacun des arcs de caractéristiques joignant un point de l'arc $m_i M_i$ porté par $\alpha\beta$ à un point de l'arc $m_{i+1} M_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$.

b. L'arc $M_i m_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$.

2° Si tout arc de caractéristique $M_i M_{i+1}$ présente, avec les arcs de caractéristique voisins la seconde disposition, considérons deux arcs $M_{i-1} M_i$ et $M_i M_{i+1}$ consécutifs. Supposons alors que M_i soit situé sur $\alpha\beta$ à l'extérieur de $M_{i-1} M_i$. Nous nous ramenons au premier cas étudié en remplaçant $\alpha\beta$ par un arc $\alpha\beta'$ porté par $\alpha\beta$ contenant $M_{i-1} M_{i+1}$ et non le point M_i.

3° Il reste donc à étudier le cas où sur $\alpha\beta$, M_i est situé entre M_{i-1} et M_{i+1}. Considérons deux caractéristiques voisines de L rencontrant $\alpha\beta$ en m_{i-1}, m_i,

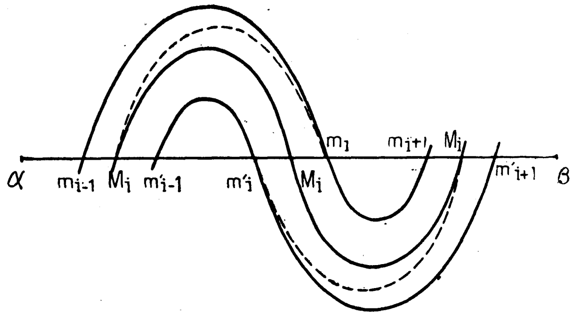

Fig. 19.

m_{i+1} et m'_{i-1}, m'_i, m'_{i+1} voisins respectivement de M_{i-1}, M_i et M_{i+1} tels que les arcs $m_{i-1} m_{i+1}$ et $m'_{i-1} m'_{i+1}$ de ces caractéristiques soient situés dans un voisinage de l'arc de caractéristique $M_{i-1} M_{i+1}$ ne contenant aucun point singulier de R. Si les points $m_i m'_i$ sont pris assez près de M_i, nous avons la disposition suivante sur $\alpha\beta$: $\alpha m_{i-1} M_{i-1} m'_{i-1} m'_i M_i m_i m_{i+1} M_{i+1} m'_{i+1} \beta$. Il existe alors un orbe, sans contact avec R, formé par la réunion de quatre arcs sans contact : *a*. arc $M_{i-1} m_i$ rencontrant une fois les caractéristiques qui traversent l'arc $M_i m_i$ de $\alpha\beta$; *b*. arc $m_i M_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$; *c*. arc $M_{i+1} m'_i$ rencontrant une fois les caractéristiques qui traversent l'arc $M_i m'_i$ de $\alpha\beta$; *d*. arc $m'_i M_{i+1}$ porté par $\alpha\beta$.

Par suite, nous pouvons toujours déterminer un orbe Γ *sans contact avec* R.

D'autre part, si Γ est un orbe sans contact avec R, sans voisinage orientable sur S, il existe un orbe sans contact avec R, soit Γ', homotope à 2Γ, admettant un voisinage orientable et frontière, sur S, d'une aire homéomorphe à un ruban de Möbius dont la ligne médiane est le correspondant dans l'homéomorphisme de la courbe Γ. Il existe donc toujours un orbe Γ sans contact avec R et *admettant un voisinage orientable sur* S.

C. *Ensemble d'accumulation d'une demi-caractéristique issue d'un point de la frontière d'une aire* (A) *simplement connexe et située tout entière dans l'aire* (A).

Nous pouvons supposer (en effectuant au besoin une homéomorphie) que l'aire (A) est un cercle de circonférence frontière C. Nous pouvons dans le plan de (A), représenter par $y = \alpha$ une famille de droites (D) parallèles entre elles. Considérons une demi-caractéristique L située tout entière sur A et dont l'origine est un point M de C. L ne traverse aucune des droites (D) qui ne coupent pas C. Soit, alors, α_1 la borne supérieure précise des valeurs de α telles que L ait un point au moins sur la droite $y = \alpha$.

1° *Supposons que* L *n'ait aucun point sur la droite* (D_1), $y = \alpha_1$; la courbe L admet au moins un point d'accumulation sur cette droite. Nous allons montrer que ce point est unique.

Supposons, en effet, que L admette deux points P et P′ de (D_1) comme points

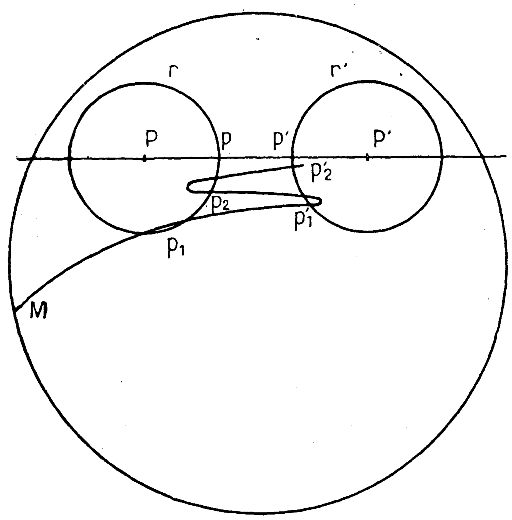

Fig. 20.

d'accumulation. Soient alors Γ et Γ' deux orbes, ne rencontrant pas C, présentant un nombre fini de contacts avec R, et limitant sur (A) deux aires (a) et (a') simplement connexes disjointes contenant chacune l'un des points P et P′. De tels orbes existent toujours. La courbe L admet au moins un point dans (a) et un dans (a') donc L traverse Γ en un point P_1 et Γ' en un point P'_1. Supposons, pour fixer les idées, que L admet un arc continu $MP_1P'_1$. Cet arc reste à une distance finie δ de P et de P′. Il existe donc un point de L, situé au delà de P'_1, à une distance de P inférieure à δ, et, par suite, un arc P'_1P_2 de L, traversant Γ en P_2. De même, il existe un arc $P_2P'_2$ traversant Γ' en P'_2, et ainsi de suite. Nous définissons ainsi deux suites infinies de points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sur Γ et $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ sur Γ'.

Soit pp' les deux points situés à l'intersection de Γ et de Γ' avec le segment PP'. Les arcs MP_i (ou MP'_i) de L, et P_ip de Γ (ou P'_ip' de Γ') partagent la partie de (A) située au-dessous de D_1 en deux aires simplement connexes. Par suite, tous les points P_{i+j} sont situés sur l'arc P_ip de Γ. Les points P_i forment donc sur Γ une suite monotone et bornée.

D'autre part, chacun des arcs P_iP_{i+1} de Γ limite avec l'arc P_iP_{i+1} de L une (au moins une) aire simplement connexe. Lorsque cette aire ne contient pas de points singuliers de R, l'arc P_iP_{i+1} de Γ présente au moins un contact avec R. Or le nombre des points singuliers de R est fini; il y a par suite, une infinité d'arcs P_iP_{i+1} de Γ présentant un contact avec R, et le nombre de contacts de Γ avec R n'est pas fini. Nous arrivons donc à une contradiction.

Soit alors P le point d'accumulation unique de L sur D. P est un point limite de L, c'est-à-dire un point singulier de R auquel aboutit L.

2° *Supposons maintenant que* L *admette un point* M_1 *sur* D_1 et que ce point ne soit pas un point singulier, c'est-à-dire un point d'arrêt de L. L'arc MM_1 de L partage la partie de (A) inférieure à D en deux aires simplement connexes et, au delà de M_1, L reste constamment dans l'une, soit (A_1) de ces deux aires. En considérant la borne inférieure précise des valeurs de α telle que L rencontre la droite $y=\alpha$, au delà de M_1, nous retrouvons une étude semblable à celle que nous avons faite plus haut.

Il se peut qu'après un nombre fini d'opérations analogues, la courbe L aboutisse à un point singulier P de R. Si cette éventualité ne se produit pas, nous définissons une suite (A_1), (A_2), ..., (A_i), ... d'aires simplement connexes intérieures les unes aux autres et telles que chacune d'elles (A_i) contienne la totalité de L au delà d'un point M_i. Soit alors (A_0) la partie commune à toutes les aires (A_i). A_0 peut se réduire à un point qui constitue l'ensemble d'accumulation de L et est un point singulier de R. S'il n'en est pas ainsi, l'aire (A_0) admet une frontière Γ_0. Les points d'accumulation de L se trouvent nécessairement sur Γ_0. D'autre part, *tout point de* Γ_0 *est un point d'accumulation de* L. En effet, tout point m, qui n'est pas d'accumulation par L, admet un voisinage dans lequel L ne pénètre plus au delà d'un certain point de L, c'est-à-dire que ce voisinage, ou bien est extérieur aux aires (A_i) pour i suffisamment élevé, ou bien est intérieur à (A_0), c'est-à-dire que le point m ne peut pas être sur la frontière de (A_0).

3° *Nous nous proposons d'étudier la frontière* Γ_0 *de* (A_0). Lorsque (A_0) ne se réduit pas à un point, considérons une droite D qui a des points dans (A_0), D a un nombre fini de contacts avec R (sinon on peut toujours déformer D en une courbe infiniment voisine présentant un nombre fini de contacts avec R). Les points de (A_0) sur D sont les points de D communs à l'ensemble des (A_i). Je dis que ces points se répartissent en un nombre *fini* de segments disjoints (éventuellement réduits à des points isolés).

En effet, considérons la section de (A_i) par D. Cette section se compose de segments disjoints dont les extrémités sont des points de l'arc MM_i de L et, éventuellement, un point de C. L'arc M_iM_{i+1} de L rencontre D en un nombre non nul de points. Ce nombre, *a priori*, peut être fini ou infini. Si ce nombre est différent de 1, il existe au moins un arc de M_iM_{i+1} limitant, avec un segment de D, une aire (a) simplement connexe intérieure à l'aire $(A_i - A_{i+1})$. Il existe un contact de R avec D sur le segment frontière de (a) à moins que (a) ne contienne un point singulier de R. L'une ou l'autre de ces éventualités peut produire un nombre fini de fois. Par suite, sauf pour un nombre fini de valeurs de i, l'arc M_iM_{i+1}, de L rencontre D en un seul point et le nombre de segments de D intérieurs à (A_i) est égal au nombre des segments intérieurs à (A_{i+1}).

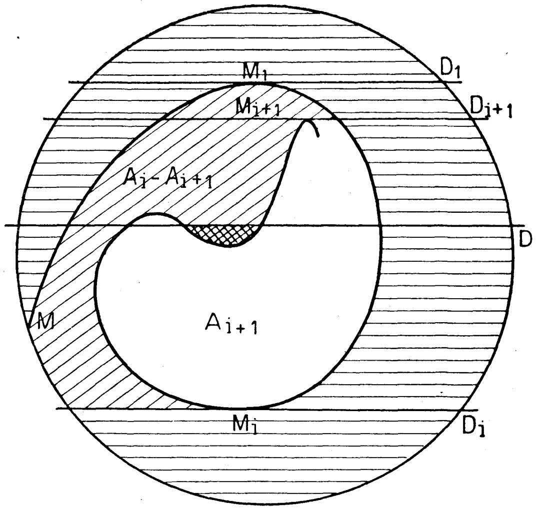

Fig. 21.

D'autre part, l'arc M_iM_{i+1} rencontre D en un nombre fini de points. En effet, un arc présentant un nombre fini de contacts avec un faisceau de droites parallèles rencontre une droite du faisceau en un nombre fini de points. Or, nous pouvons couvrir l'arc M_iM_{i+1} de L par un nombre fini de voisinages dans chacun desquels R est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles. Le segment de D, situé sur chacun de ces voisinages, rencontre l'arc correspondant de M_iM_{i+1} en un nombre fini de points, par suite, M_iM_{i+1} et D ont un nombre total de points communs qui est fini.

Le nombre des segments de D intérieurs à (A_0) s'obtient de proche en proche en passant de (A_i) à (A_{i+1}) par une somme algébrique finie de termes finis. Au delà d'une certaine valeur de i, cette somme ne varie pas. Les points de D appartenant à (A_0) ou à sa fontière Γ_0 couvrent donc un nombre fini de segments. Γ_0 *coupe* D aux points extrémités de ces segments c'est-à-dire *en nombre fini de points*.

a. Si Γ_0 ne contient aucun point singulier de R, on peut couvrir Γ_0 par un nombre fini de voisinages V dans chacun desquels R est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles. Si m est un point de Γ_0, c'est-à-dire un point d'accumulation de L, il en est de même pour tout point de la caractéristique de m. Par suite, sur un voisinage V, Γ_0 est formé par des arcs de caractéristiques. S'il y a une infinité de tels arcs disjoints, il existe une droite D qui rencontre Γ en une infinité de points. Nous avons montré plus haut que cette hypothèse est impossible. Par suite, la partie de Γ_0 située sur V est constituée par un nombre fini d'arcs caractéristiques. Les voisinages V couvrant Γ_0 étant eux-mêmes en nombre fini *la courbe* Γ_0 *sera une caractéristique fermée de* R.

b. Si la frontière de (A_0) contient des points singuliers de R, Γ_0 sera couvert par des voisinages aussi petits que l'on veut de chacun de ces points singuliers et par un nombre fini de voisinages dans lesquels R est homéomorphe à une famille de droites parallèles. Γ_0 est alors constitué par un nombre fini d'arcs de caractéristique joignant deux points singuliers de R.

Nous avons établi ainsi le résultat suivant : *une demi-caractéristique de* R, *qui reste constamment à l'intérieur d'une aire homéomorphe à un cercle, admet soit un point limite, soit une courbe limite qui est constituée par une caractéristique fermée de* R, *ou par l'ensemble d'un nombre fini d'arcs de caractéristiques joignant deux points singuliers de* R.

En particulier, *lorsque le réseau* R *n'admet ni caractéristique fermée, ni arc de caractéristique joignant deux points singuliers, ni point singulier autre que des cols* (au delà desquels on peut toujours prolonger une séparatrice par une autre), *aucune caractéristique ne pourra jamais demeurer à l'intérieur d'une aire simplement connexe quelconque.*

2. Nous supposons dans la suite que le réseau R n'admet pas d'autre point singulier que des cols et n'admet pas de caractéristiques fermées.

Nous nous proposons d'étudier l'aire couverte par une famille continue d'arcs de caractéristiques joignant deux points situés sur deux arcs d'un même orbe sans contact et ne passant par aucun col de R.

A. *Soit* Γ *un orbe, sans contact avec* R, *admettant sur* S *un voisinage orientable.* Nous distinguons les deux côtés de Γ sur S par les signes + et —.

Supposons qu'il existe un arc de caractéristique ayant ses extrémités M et N sur Γ, ne traversant pas Γ et ne passant par aucun point singulier de R. Nous pouvons supposer que l'arc MN aboutit en M à Γ_+. Il existe un voisinage de l'arc de caractéristique MN, où R est localement homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles. Par suite, un arc de caractéristique voisin de MN aboutit à Γ en m et n, au voisinage de M et N, et ne traverse pas Γ.

Faisons varier m sur Γ dans un sens constant de façon continue à partir de M, le point n varie dans un sens constant à partir de N. L'arc de caractéristique mn balaie sur S une aire (A) qui ne contient pas de point singulier de R. (A) ne se recouvre pas partiellement si les arcs Mm et Nn appartenant à Γ sont disjoints car, par suite de la constitution du réseau R, deux points de deux arcs distincts de caractéristiques ne peuvent pas coïncider en un point de S non singulier pour R. Nous pouvons, ainsi, déplacer m sur Γ jusqu'à la réalisation de l'une des éventualités suivantes :

1° Il existe un point m_0 limite des points m et tel que la demi-caractéristique issue de Γ_+ en m_0 ne traverse pas Γ. Ce cas fera l'objet d'une étude détaillée plus loin.

2° On aboutit à un point m_0 tel que l'arc $m_0 n_0$ correspondant soit constitué par deux arcs m_0C et Cn_0 de séparatrices. Au delà de m_0, les arcs de caractéristiques issus de Γ_+ ne retraversent pas Γ au voisinage de n_0 sans avoir auparavant rencontré Γ.

3° Si l'arc MN aboutit en N à Γ_-, et si aucune des deux premières éventualités

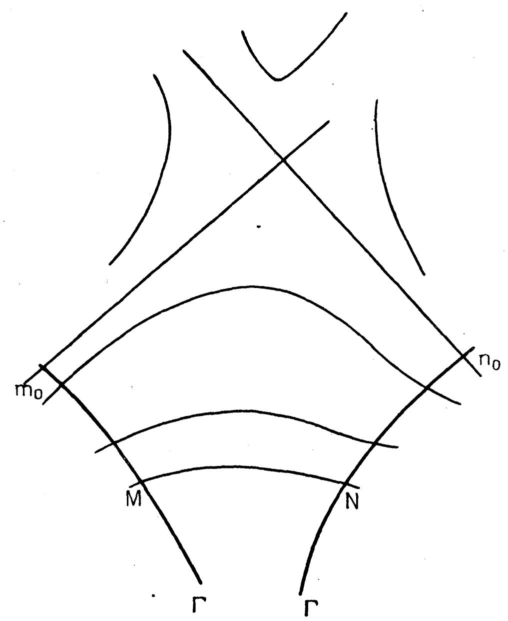

Fig. 22.

ne se présente, nous pouvons faire décrire à m toute la courbe Γ_+ jusqu'à ce que m vienne coïncider avec M. n vient alors coïncider avec N. Mais n ne peut coïncider avec N que si m coïncide avec M, par suite, n décrit Γ une fois et une seule.

Puisque le réseau R est au voisinage de tout point non singulier homéomorphe à un faisceau plan de droites parallèles, l'arc *mn* de caractéristique balaie sur S une aire S′ sans frontière qui coïncide avec S supposée connexe. Le réseau R n'admet alors pas de point singulier. La surface S est donc d'ordre de connexion 2. Elle est homéomorphe à un tore ou à une surface de Klein.

4° Si l'arc MN aboutit en N à Γ_+ et si aucune des deux premières éventualités ne se produit, nous pouvons déplacer *m* sur Γ tant que les deux arcs M*m* et N*n* restent disjoints. Supposons tout d'abord, que les points *m* et *n* se déplacent sur Γ en sens contraire (ce qui se produit si l'orbe formé par l'arc MN de Γ et par l'arc de caractéristique MN admet sur S un voisinage orientable). Nous déplaçons *m* jusqu'à ce que *m* et *n* viennent se confondre en m_0; dans ce cas, s'il n'existe pas de caractéristique fermée passant par m_0, Γ présente en m_0 un contact avec R. Ces deux éventualités étant contraires aux hypothèses, ce cas ne se présente jamais.

Les points *m* et *n* se déplacent nécessairement dans le même sens sur Γ et l'orbe constitué par l'arc MN, et l'arc de caractéristique MN n'admet pas de voisinage orientable sur S. Nous déplaçons *m* jusqu'en N; les deux arcs de caractéristiques *mn* et NM coïncident. L'ensemble des arcs de caractéristique sortant de Γ_+ couvre alors une surface S_1 admettant un bord Γ_+. Si l'on identifie les points de Γ_+ on transforme S_1 en une surface close S′ couverte par un réseau R_1 admettant un point singulier unique au point correspondant à Γ_+. Ce point a pour indice $+1$, la surface S′ a pour nombre de connexion 1 et la surface S_1 est homéomorphe à un bonnet croisé. Soit S_2 l'ensemble des points de S non intérieurs à S_1 si l'on identifie sur S_2 les points de Γ qui sont les extrémités d'un même arc de caractéristique *mn* situé sur S_1, on remplace la partie du réseau R situé sur S_2 par un réseau R_2. Une caractéristique de R_2 est constituée par l'ensemble des arcs, appartenant à une même caractéristique de R, situés sur S_2. Par suite, pour chercher les points d'accumulation situés sur S_2 d'une caractéristique de R on pourra étudier les points d'accumulation de la caractéristique correspondante de R_2.

B. Il nous reste maintenant à étudier le cas où il existe un point m_0 limite de *m* tel que la demi-caractéristique issue en m_0 de Γ_+, ne rencontre pas Γ. Il existe, de même, un point n_0 limite des points *n*; la demi-caractéristique d'origine n_0, située au voisinage de n_0 du même côté de Γ que l'arc *mn* au voisinage de *n*, ne rencontre pas non plus Γ.

L'ensemble des arcs de caractéristiques issus de Γ_+ sur Mm_0 aboutissant à Γ sur Nn_0 et ne traversant pas Γ couvre, sur S, une aire (A) ne contenant aucun point singulier de R. Cette aire (A) ne traverse pas Γ, puisque aucun des arcs de caractéristiques couvrant (A) ne traverse Γ. Nous avons déjà vu que (A) ne se recouvre pas partiellement sur S. L'aire (A) est donc simplement connexe. Elle admet pour frontière l'arc de caractéristique MN, les arcs Mm_0 et Nn_0

appartenant à Γ, les demi-caractéristiques d'origine m_0 et n_0 et situées au voisinage de m_0 et n_0 du même côté de Γ que l'arc MN au voisinage de M et N et, éventuellement, un certain nombre de caractéristiques de R prises en totalité. En particulier, si une séparatrice appartient à la frontière de (A), il en sera de même de l'une des deux séparatrices qui la prolongent au delà du col.

Théorème. — *Tout arc intérieur à* (A) *joignant deux points situés sur la frontière de* (A) *et n'appartenant ni à l'arc de caractéristique* MN, *ni aux deux arcs* $\mathrm{M}m_0$ *et* $\mathrm{N}n_0$ *de* Γ, *présente au moins un contact avec* R.

Soient a un point de MN et b un point appartenant à une caractéristique frontière de (A), autre que l'arc MN. Il existe un arc ab sans contact avec R et

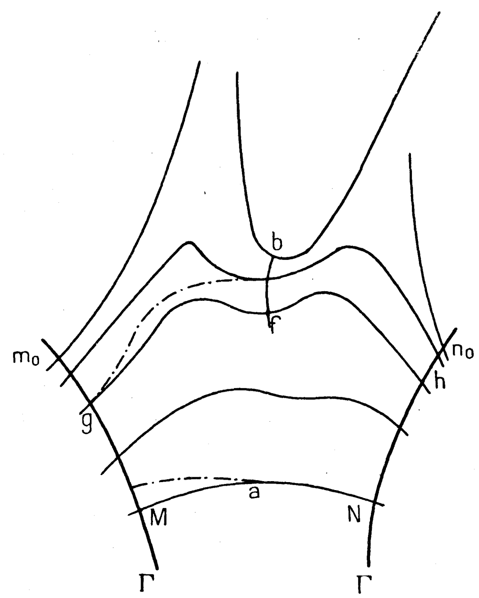

Fig. 23.

intérieur à (A). En effet, il existe toujours un arc $b\alpha$ sans contact avec R et intérieur à (A). Cet arc rencontre en f une caractéristique de R qui traverse l'arc $\mathrm{M}m_0$ de Γ en g et l'arc $\mathrm{N}n_0$ de Γ en h. Il existe alors deux arcs ab sans contact avec R et infiniment voisins des deux sommes d'arcs : 1° arc de caractéristique aM, arc Mg appartenant à Γ, arc de caractéristique gf, arc sans contact fb porté par $b\alpha$; 2° arc de caractéristique aN, arc Nh appartenant à Γ, arc de caractéristique hf, arc fb porté par $f\alpha$.

Considérons deux points b_1 et b_2 sur la frontière de (A) non situés sur MN, ni sur Γ. On peut joindre b_1a et b_2a par deux arcs sans contacts, n'ayant d'autre point commun que a [on pourra prendre, soit pour b_1 une somme d'arc 1° et pour b_2 une somme d'arc 2°, soit l'inverse en choisissant les points f_1

et f_2 associés à b_1 et b_2 sur un même arc de caractéristique intérieur à (A)]. L'arc $b_1 a b_2$ constitué par l'ensemble de ces deux arcs sans contact présente en a un contact avec R.

Tout arc $b_1 b_2$ intérieur à (A) forme avec $b_1 a b_2$ un orbe (ou un ensemble d'orbes) d'indice nul. Par suite, le nombre de contacts avec R de tout arc $b_1 b_2$ intérieur à (A) est de même parité que le nombre des contacts de l'arc $b_1 a b_2$ précédemment défini, c'est-à-dire est impair. Tout arc intérieur à (A) joignant deux points situés sur une caractéristique frontière de (A) présente alors au moins un contact avec R.

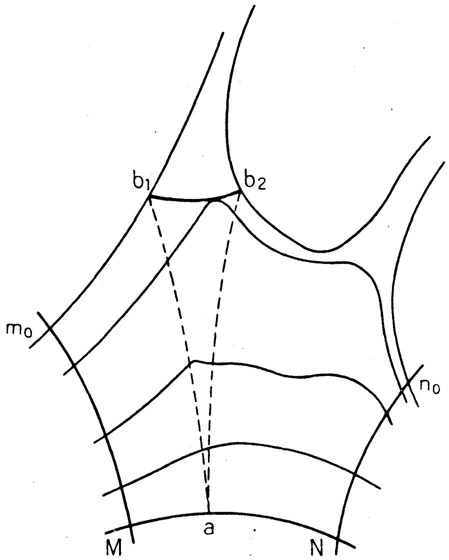

Fig. 24.

Il résulte de ce théorème qu'*il est impossible qu'une demi-caractéristique de* R *appartienne tout entière à la frontière de* (A). Nous donnons une démonstration par l'absurde.

Une demi-caractéristique L par hypothèse admet au moins un point d'accumulation P sur S. Il existe toujours sur S un arc P_1PP_2 sans contact avec R puisque au voisinage de P, R est localement homéomorphe à un faisceau de droites parallèles. L rencontre une infinité de fois cet arc PP_1P_2 en des points $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_i$. Si L appartient en totalité à la frontière de (A), chaque point ι_i appartient à la frontière de (A), donc limite un arc contigu intérieur à (A). Chacun de ces arcs présente au moins un contact avec R d'après le théorème précédent, c'est-à-dire que l'arc P_1PP_2 que nous avons supposé sans contact doit présenter un nombre infini de contacts avec R. Nous aboutissons donc à une contradiction.

La frontière de (A) comprend donc, outre deux arcs de Γ et l'arc MN, un arc $m_0 n_0$ appartenant à une seule caractéristique de R.

Nous pouvons tirer de l'étude précédente les conclusions suivantes : étant donné un orbe sans contact avec R de voisinage orientable sur S, *si nous considérons l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de Γ_+ par exemple, nous nous trouverons nécessairement dans l'un des cas suivants :*

1° *Aucune de ces demi-caractéristiques ne traversent* Γ. Nous verrons plus loin que ce cas ne peut jamais se présenter.

2° *Toutes les demi-caractéristiques retraversent* Γ *en aboutissant à* Γ_+ *et aucune d'entre elles n'est une séparatrice.*

Dans ce cas, Γ partage S en deux sufaces ouvertes dont l'une, S_1, est homéomorphe à un bonnet croisé. Le réseau R sur S_1 est homéomorphe au réseau obtenu en considérant une couronne circulaire couverte par des segments de rayons et en identifiant les points diamétralement opposés sur l'une des circonférences frontière de la couronne circulaire. Si l'on considère alors les demi-caractéristiques issues des points de Γ_-, la seconde éventualité envisagée ne peut se produire et la troisième n'aura lieu que si S est homéomorphe à l'ensemble des deux bonnets croisés (donc S est non orientable de nombre de connexion 2) et si R n'admet aucun point singulier.

3° Γ *est partagé en un nombre fini d'arcs par des points* $m_1, m_2, \ldots, m_i$, *tels que la demi-caractéristique issue de* Γ_+ *en* m_α *aboutisse à un col de* R *avant d'avoir traversé* Γ. *Si les demi-caractéristiques issues de* Γ *sur un arc* $m_\alpha m_{\alpha+1}$ *ne rencontrent pas toutes* Γ *en couvrant un arc continu, aucune d'entre elles ne retraverse* Γ.

Remarque. — Si Γ n'est pas un orbe sans contact, mais présente un nombre fini de contacts avec R, en $a_1, a_2, \ldots, a_p$, il peut y avoir des arcs de caractéristique ne traversant pas Γ ayant une extrémité en un point b_β de Γ_+ et aboutissant en un point a_γ. Les points a_γ, b_β, m_α partagent Γ en un nombre fini d'arcs tels que si les demi-caractéristiques issues de Γ_+ sur un de ces arcs ne retraversent pas toutes Γ sur un arc continu, aucune d'elle ne retraverse Γ.

Nous arrivons à un résultat analogue en considérant non pas un orbe Γ, mais un arc présentant un nombre fini de contacts avec R.

3. Nous introduisons dans ce chapitre une hypothèse supplémentaire (h) et nous étudions les réseaux R satisfaisant à (h).

Nous disons que l'hypothèse (h) *est satisfaite, sur la surface* S, *par le réseau* R, *si tout point de* S *est un point d'accumulation pour une caractéristique, au moins, de* R.

D'autre part, nous disons que *l'hypothèse* (h) *est satisfaite sur un orbe* Γ *si tout point de* Γ *est un point d'accumulation pour une caractéristique, au moins, de* R.

Nous montrerons, d'ailleurs, plus loin, que, si la condition (h) est satisfaite sur un orbe sans contact, elle est satisfaite sur la surface S. Inversement, si la condition (h) est satisfaite sur S, elle est évidemment satisfaite sur tout orbe, et, en particulier, elle est satisfaite sur au moins un orbe sans contact avec R puisque nous avons vu que l'on peut toujours trouver un tel orbe sur S.

A. Théorème. — *Lorsque l'hypothèse* (h) *est satisfaite sur un orbe* Γ *admettant un voisinage orientable, ne passant par aucun col de* R *et sans contact avec* R, *toute demi-caractéristique issue d'un point quelconque de* Γ *retraverse* Γ.

Nous avons vu que Γ_+ et Γ_- sont décomposables en un nombre fini d'arcs tels que les demi-caractéristiques dont l'origine est sur un de ces arcs retraversent ou non simultanément Γ. Supposons alors qu'il existe un arc $\alpha\beta$ de Γ, tel qu'aucune des demi-caractéristiques issues de $\alpha\beta_+$ ne retraverse $\alpha\beta$.

Un arc de caractéristique ayant ses extrémités sur $\alpha\beta$, s'il en existe, aboutira à $\alpha\beta$. Un tel arc MN appartiendra à une caractéristique constituée, outre l'arc MN, par deux demi-caractéristiques issues en M et N de $\alpha\beta_+$ et qui ne retraverseront pas $\alpha\beta$. Par suite, aucune caractéristique n'aura plus de deux points commun avec $\alpha\beta$ et aucun point de $\alpha\beta$ ne pourra être point d'accumulation d'aucune caractéristique de R, c'est-à-dire que l'hypothèse (h) ne sera pas vérifiée sur Γ.

Donc, si l'hypothèse (h) est vérifiée sur Γ toute demi-caractéristique, issue d'un point de Γ, retraverse Γ une infinité de fois, puisque aucune caractéristique n'est une courbe fermée.

Remarque importante. — Nous avons vu que si une demi-caractéristique issue d'un point M de Γ ne retraverse pas un arc $\alpha\beta$ contenant M, l'autre demi-caractéristique issue de M traversera, au plus, une fois, l'arc $\alpha\beta$. C'est-à-dire que *deux demi-caractéristiques appartenant à la même caractéristique ont le même ensemble d'accumulation sur* S.

B. Théorème. — *Lorsque l'hypothèse* (h) *est vérifiée sur un orbe* Γ *admettant un voisinage orientable, ne passant par aucun col de* R, *et sans contact avec* R, *toute caractéristique de* R *traverse* Γ.

Nous supposerons, tout d'abord, que R n'admet pas d'arc de caractéristique joignant deux cols. Γ_+ d'une part, Γ_- d'autre part, sont partagés en un nombre fini d'arcs par les premiers points de rencontre avec Γ des différentes séparations de R suivies à partir des cols, soient m_1, m_2, ..., m_n; les points m_1, m_2, ..., m_i sont situés sur Γ_{+1}, m_{i+1}, ..., m_n sur Γ_-. Nous supposons, en outre, que ces points sont rangés dans l'ordre où on les rencontre sur Γ_+ et sur Γ_-.

Les demi-caractéristiques issues de Γ sur l'un des arcs, $m_\alpha m_{\alpha+1}$ retraversent Γ en couvrant un autre de ces arcs. L'ensemble des arcs de caractéristiques issus de l'arc $m_\alpha m_{\alpha+1}$ et aboutissant sur l'arc $m_\beta m_{\beta+1}$ sans avoir traversé Γ, forme un ruban de courbes, couvrant sur S une aire (B) homéomorphe à l'intérieur d'un rectangle plan; cette aire (B) admet comme frontière, outre les arcs $m_\alpha m_{\alpha+1}$ et $m_\beta m_{\beta+1}$ portés par Γ, un arc de caractéristique joignant m_α à m_β (ou à $m_{\beta+1}$) et un arc de caractéristique joignant $m_{\alpha+1}$ à $m_{\beta+1}$ (ou à m_β). Chacun de ces arcs de caractéristiques est constitué par l'ensemble de deux arcs de séparatrices puisque l'arc $m_\alpha m_\beta$, par exemple, passe par un col et un seul.

Les différentes aires $(B)_\lambda$ couvertes par les différents rubans de caractéristiques ne se recouvrent pas partiellement. D'autre part, tout arc de séparatrice joignant un col au point m_α correspondant appartient à la frontière des deux aires $(B)_{\lambda_1}$ et $(B)_{\lambda_2}$ couvertes par les arcs de caractéristiques issus des points des arcs $m_{\alpha-1} m_\alpha$ et $m_\alpha m_{\alpha+1}$ (sauf si $\alpha = i$ ou $i+1$).

L'ensemble des aires $(B)_\lambda$ couvre alors sur S une surface sans frontière, et, puisque S est supposée connexe, l'ensemble des aires $(B)_\lambda$ couvre S en totalité. Par suite, l'ensemble des caractéristiques traversant Γ coïncide avec la totalité des caractéristiques de R.

Remarque I. — Nous avons vu précédemment que toute demi-caractéristique issue de Γ retraverse Γ. Par suite, toutes les caractéristiques de R traversent Γ une infinité de fois.

Remarque II. — Nous avons supposé que R n'admet pas d'arc de séparatrice joignant deux cols. Si nous supprimons cette hypothèse, mais que nous supposons toujours que R n'admet pas de caractéristique fermée, nous pouvons remplacer le réseau R par un réseau R′ en identifiant tous les points d'un arc de caractéristique joignant deux cols $C_1 C_2$. Pour le réseau R′ il existe un orbe Γ' sans contact ne passant par aucun col, admettant un voisinage orientable et, par suite, il existe pour R un orbe Γ ne rencontrant pas l'arc $C_1 C_2$ de caractéristique, admettant un voisinage orientable et sans contact avec R. Toutes les caractéristiques de R′ traverseront une infinité de fois Γ' et, par suite, toutes les caractéristiques de R traverseront une infinité de fois Γ.

C. Théorème. — *Toute caractéristique de* R *traverse tout arc* mn *porté par un orbe* Γ, *sans contact avec* R, *ne passant par aucun col de* R *et admettant un voisinage orientable sur* S.

Nous établirons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *L'ensemble des caractéristiques qui traversent l'arc* mn *est identique à l'ensemble des caractéristiques qui traversent un arc continu* $\mu\nu$ *de* Γ, *arc contenant l'arc* mn *et au moins un autre arc de* Γ *dont une extrémité est en* m *ou* n.

Il y a au plus un nombre fini α de séparatrices de R qui traversent l'arc mn. Nous prenons sur chacune d'elles le premier point de rencontre avec mn lorsque l'on suit la séparatrice à partir du col.

Ces α points partagent alors mn_+ et mn_- en un certain nombre d'arcs. Soient dans l'ordre où ils se présentent sur mn, m_1, m_2, $\ldots$, m_i les points situés sur mn_+ et m_{i+3}, m_{i+4}, $\ldots$, m_α les points situés sur mn_-. Nous convenons de désigner par m_0 et m_{i+1} les points m et n considérés comme appartenant à mn_+ et par m_{i+2} et $m_{\alpha+1}$ les points m et n considérés comme appartenant à mn_-.

Nous avons déjà vu (p. 309, A) que toute demi-caractéristique issue d'un point de mn retraverse mn si l'hypothèse (h) est vérifiée sur Γ.

L'une au moins des quatre demi-caractéristiques issues des points m et n n'est pas une séparatrice et n'admet pas d'arc joignant mn. En effet, s'il existe un arc de caractéristique joignant m et n, les demi-caractéristiques prolongeant cet arc mn au delà de m et de n ne sont pas deux séparatrices, car il

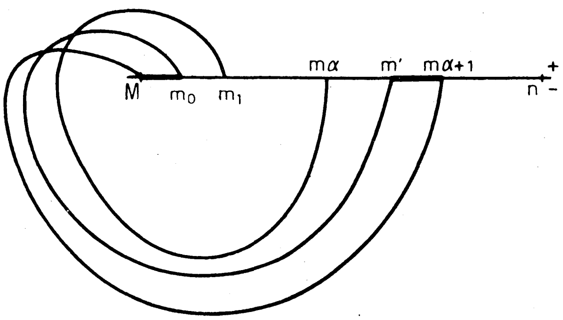

Fig. 25.

existerait alors deux séparatrices, car il existerait alors un arc de caractéristique joignant deux cols. D'autre part, s'il n'existe pas d'arc de caractéristique joignant m et n, une demi-caractéristique issue de m et une demi-caractéristique de n, au moins, ne sont pas des séparatrices.

Supposons, par exemple, que la demi-caractéristique de m_0 (c'est-à-dire la demi-caractéristique issue de mn_+ en m) ne soit pas une séparatrice et n'aboutisse pas en n. La demi-caractéristique de m_1, retraverse mn en m_α et les demi-caractéristiques issues des points de l'arc $m_1 m_0$ retraversent mn en couvrant un arc continu $m_\alpha m'$ porté par l'un des deux arcs $m_{\alpha-1} m_\alpha$ ou $m_\alpha m_{\alpha+1}$. Supposons, pour fixer les idées, que l'arc $m_\alpha m'$ soit porté par $m_\alpha m_{\alpha+1}$.

Comme la demi-caractéristique de m_0 n'est pas une séparatrice et n'aboutit pas à n, le point m' est distinct du point $m_{\alpha+1}$ et, le réseau R étant homéomorphe à un faisceau de droites parallèles au voisinage de l'arc de caractéristique $m_0 m$, il existera un arc $m'\mu'$ porté par l'arc $m' m_{\alpha+1}$ de mn tel que les demi-caractéristiques issues des points de $m'\mu'$ traverseront un arc continu $m\mu$

contigu à mn sur Γ. L'ensemble des caractéristiques traversant mn est le même que l'ensemble des caractéristiques traversant l'arc μn de Γ.

Nous pouvons faire le même raisonnement à partir de l'arc μn. On obtient ainsi une suite d'arc $\mu_1 \nu_1, \mu_2 \nu_2, \ldots, \mu_h \nu_h$ portés par Γ tels que

$$\mu_h \nu_h \supset \mu_{h-1} \nu_{h-1}.$$

L'ensemble des caractéristiques traversant $\mu_h \nu_h$ est identique à celui des caractéristiques traversant l'arc mn initial.

Si les caractéristiques traversant mn ne couvrent pas Γ en totalité, il existe un arc continu $\mu' \nu'$, contenant tous les arcs $\mu_h \nu_h$, qui est le plus grand des arcs continus couverts en totalité par l'ensemble des caractéristiques traversant mn.

Un raisonnement identique à celui que l'on a fait plus haut, montre l'existence d'un arc contenant $\mu' \nu'$ et couvert en totalité par les caractéristiques traversant $\mu' \nu'$ c'est-à-dire par l'ensemble des caractéristiques traversant mn.

Nous arrivons donc à une contradiction et l'ensemble des caractéristiques traversant mn couvre l'orbe Γ en totalité. Par suite, une caractéristique quelconque de R traverse l'arc mn.

Par suite, si l'hypothèse (h) *est vérifiée sur un orbe* Γ *sans contact toute caractéristique de* R *traverse un arc quelconque porté par* Γ *et, par suite, la courbe* Γ *appartient au lieu des points d'accumulation d'une caractéristique quelconque de* R.

D. Soit P un point appartenant à l'ensemble d'accumulation (E) de L. Si P n'est pas situé sur une séparatrice, tous les points de la caractéristique de P appartiendront à (E). Si P est situé sur une séparatrice Λ qui se prolonge au delà du col par deux séparatrices Λ_1 ou Λ_2, l'ensemble (E) contiendra tous les points de Λ et l'une au moins des deux séparatrices Λ_1 et Λ_2. Si P est un point d'accumulation de L simultanément à droite et à gauche, les deux séparatrices Λ_1 et Λ_2, appartiennent à l'ensemble E.

Si l'hypothèse (h) est vérifiée sur Γ une caractéristique L quelconque traverse tout arc de Γ; par suite, tout point de Γ est un point d'accumulation à la fois à droite et à gauche pour L. Alors l'ensemble des points situés sur une caractéristique de R appartient à l'ensemble (E) qui contient tous les points de S.

Nous avons donc le résultat suivant :

S'il existe un orbe Γ *sans contact avec* R, *ne passant par aucun point singulier de* R_1, *admettant un voisinage orientable sur* S, *et sur lequel l'hypothèse* (h) *est vérifiée, une courbe quelconque de* R *admet tout point de* S *comme point d'accumulation.*

En particulier, chaque fois que l'hypothèse (h) est vérifiée sur tout S, une courbe quelconque de R admet tout point de S comme point d'accumulation [1].

Ce sera en particulier le cas du réseau décrit (p. 284, B).

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'hypothèse (h) soit vérifiée sur S *est que tout point d'un orbe* Γ *sans contact soit un point d'accumulation pour au moins une séparatrice de* R.

La condition est nécessaire, puisque si (h) est vérifiée, tout point de Γ est un point d'accumulation pour une caractéristique quelconque de R. Or nous avons vu que deux demi-caractéristiques appartenant à une même caractéristique ont le même ensemble d'accumulation, tout point de Γ est, par suite, un point d'accumulation, pour toute demi-caractéristique et, en particulier, pour toute séparatrice.

Il est, d'autre part, immédiat que la condition est suffisante.

Par suite, une condition nécessaire et suffisante pour que (h) soit vérifiée est qu'il existe au moins une séparatrice de R traversant un arc quelconque porté par Γ.

CINQUIÈME PARTIE.

Nous considérons dans la suite des réseaux (R) qui ne sont pas assujettis à satisfaire l'hypothèse (h).

Nous allons montrer que toutes les caractéristiques de R ont le même ensemble d'accumulation sur S et que toute caractéristique de R rencontre un orbe Γ sans contact avec R, ne passant par aucun point singulier de R et admettant un voisinage orientable sur S. Nous établirons pour cela, successivement, les points suivants :

1° Si l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points d'un arc $\alpha\beta_+$ de Γ_+ forme un ruban qui ne se ramifie pas (c'est-à-dire qu'aucune des demi-caractéristiques n'aboutit à un col), aucune des demi-caractéristiques du ruban ne retraverse $\alpha\beta$ si la surface S a un nombre de connexion différent de 2.

2° L'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de $\alpha\beta_-$ est alors constitué par la réunion d'un nombre fini de rubans ne se ramifiant pas. Nous étudierons dans la suite chacun de ces rubans c'est-à-dire que nous serons

---

(1) En mécanique, les mouvements récurrents se rencontrent fréquemment. Un mouvement est dit récurrent si une trajectoire admet chacun de ses points comme point d'accumulation. Lorsque le lieu des trajectoires est une surface S, les trajectoires forment sur S un réseau R. Si ce réseau n'admet pas de points singuliers auxquels aboutissent une infinité de trajectoires, nous pouvons affirmer qu'une trajectoire quelconque passe aussi près que l'on veut d'un point arbitraire de S.

ramenés au cas où l'ensemble des caractéristiques traversant $\alpha\beta$ forme un ruban doublement infini ne se ramifiant pas.

3° Nous montrerons alors que l'on peut faire correspondre au réseau R un réseau R′ tracé sur une surface S′ homéomorphe à S, de telle façon que les courbes de R correspondent à celles de R′ de façon biunivoque, à l'exception des caractéristiques de R intérieures ou frontières d'un ruban ne se ramifiant pas, dont l'ensemble correspond à une courbe unique de R′.

1. Théorème. — *S'il existe un arc $\alpha\beta$ de Γ tel que l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de $\alpha\beta$ forme un ruban qui ne se ramifie pas, aucune des demi-caractéristiques du ruban ne retraverse $\alpha\beta$, si le nombre de connexion de* S *est différent de* 2.

1° Supposons tout d'abord que l'ensemble de toutes les demi-caractéristiques issues de Γ_+ forme un ensemble ne se ramifiant pas.

Si une demi-caractéristique retraverse Γ il en sera de même pour toutes les demi-caractéristiques. Nous avons vu que les demi-caractéristiques considérées couvrent alors toute la surface S. Celle-ci a pour nombre de connexion 2, puisque R n'a pas de point singulier.

Si nous supposons que la surface S a un nombre de connexion différent de 2 (ou plus généralement que le réseau R admet des points singuliers), il existe au moins une demi-caractéristique issue de Γ_+ qui aboutit à un col.

2° D'autre part, si $\alpha\beta$ est contenu dans un arc $\alpha'\beta'$ de Γ tel que l'ensemble des demi-caractéristiques issues de $\alpha'\beta'_+$ ne se ramifie pas, il suffit d'établir la propriété énoncée pour le ruban issu de $\alpha'\beta'_+$ car elle sera alors vérifiée *a fortiori* pour $\alpha\beta_+$. Nous supposons que l'ensemble des demi-caractéristiques issues des points de tout arc de Γ contenant $\alpha\beta_+$ se ramifie.

3° Supposons alors qu'il existe un arc de caractéristique MN aboutissant en M sur $\alpha\beta_+$ et en N sur $\alpha\beta$.

Si l'on considère un point m variable sur $\alpha\beta$, la demi-caractéristique issue en m de $\alpha\beta_+$ retraverse Γ en un point m_1. Lorsque m se déplace de façon continue et dans un sens constant sur l'arc $\alpha\beta$ de Γ, m_1 se déplacera de façon continue et dans un sens constant sur un arc $\alpha_1\beta_1$ de Γ; l'arc orienté mm_1 de Γ est une fonction continue du point m.

4° Il est impossible que l'arc MN aboutisse en N sur $\alpha\beta_+$.

Supposons en effet qu'il en soit ainsi, lorsque le point m coïncide avec M, le point m'_1 coïncide avec N et l'arc mm'_1 avec l'arc MN. Lorsque m est en N, m_1^+ est en M. Par suite, lorsque m varie de M à N, il existe, nécessairement, une position de m telle que l'arc mm_1 de Γ soit nul. La demi-caractéristique issue en m de Γ_+ revient donc se superposer à elle-même, ce qui n'est possible que si elle admet un point d'arrêt qui est un col auquel aboutit une séparatrice unique ou si elle aboutit à un col et peut être prolongée par une courbe fermée. Nous avons supposé qu'aucune demi-caractéristique issue de $\alpha\beta_+$ n'aboutit à un col; par suite, il n'est pas nécessaire d'utiliser l'hypothèse que R n'a pas de courbe fermée pour affirmer qu'un arc de caractéristique issu d'un point de $\alpha\beta_+$ ne peut aboutir que sur $\alpha\beta_-$.

5° L'arc MN aboutit donc en N sur $\alpha_1\beta_1$ et se prolonge au delà de N par une demi-caractéristique issue de $\alpha\beta_+$. L'arc $\alpha_1\beta_1$ a une partie commune avec $\alpha\beta$, mais aucun des points α et β ne peut être intérieur à l'arc $\alpha_1\beta_1$. En effet, si l'arc $\alpha\beta$ ne couvre pas la totalité de Γ, il existe un arc $(\alpha\beta + \alpha_1\beta_1)$ contenant $\alpha\beta$ tel que l'ensemble des demi-caractéristiques issues de $(\alpha\beta + \alpha_1\beta_1)_+$ ne se ramifie pas, hypothèse que nous avons exclue. Si, d'autre part, l'arc $\alpha\beta$ couvre la totalité de Γ, la demi caractéristique issue de Γ_+ en α aboutit à un col et, par suite, le point α ne peut pas être intérieur à l'arc $\alpha_1\beta_1$.

L'arc $\alpha_1\beta_1$ ne peut pas non plus coïncider avec $\alpha\beta$, car le réseau R admettrait une ou deux courbes fermées selon que α coïncide avec α_1 ou avec β_1.

Par suite, l'arc $\alpha_1\beta_1$ est porté par l'arc $\alpha\beta$ et a au plus une extrémité commune avec $\alpha\beta$. Mais alors, les demi-caractéristiques issues de $\alpha\beta_+$ retraverseront successivement des arcs $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\ldots$, $\alpha_n\beta_n$ tel que chacun d'eux soit contenu dans celui qui le précède. Ces arcs admettront alors un arc limite $\alpha'\beta'$ (qui peut se réduire à un point) et par les points α', β' passeront une ou deux caractéristiques fermées de R. Comme nous avons supposé que R n'admettait pas de courbes fermées, nous arrivons à une impossibilité.

Nous voyons donc que si le réseau R admet des points singuliers, aucune des demi-caractéristiques issues des points d'un arc $\alpha\beta_+$ porté par un orbe sans contact Γ, ne retraverse $\alpha\beta$ si l'ensemble de ces demi-caractéristique forme un ruban ne se ramifiant pas.

Si l'ensemble des demi-caractéristiques issues de $\alpha\beta_+$ ne se ramifie pas, l'ensemble des caractéristiques traversant $\alpha\beta$ forme un nombre fini de rubans de caractéristiques ne se ramifiant pas. En effet, le nombre de séparatrices de R étant fini, un nombre au plus fini d'entre elles traversent $\alpha\beta$. Elles aboutissent nécessairement sur $\alpha\beta$ et aucune ne retraverse $\alpha\beta$, puisque aucune demi-caractéristique issue de $\alpha\beta_+$ ne retraverse $\alpha\beta$. Par suite, un nombre au plus fini de points de $\alpha\beta$ appartiennent à une séparatrice et ces points partagent $\alpha\beta$ en un nombre fini d'arcs $m_i m_{i+1}$ tels que l'ensemble des caractéristiques traversant l'un d'eux forme un ruban ne se ramifiant pas.

Nous étudions, dans la suite, chacun de ces rubans, c'est-à-dire que nous considérons le cas où les caractéristiques traversant $\alpha\beta$ forment un ruban ne se ramifiant pas. Une caractéristique du ruban traverse alors $\alpha\beta$ en un seul point.

2. *Étude des réseaux* R *ne satisfaisant pas* (h). — A. Considérons une représentation de S sur une aire plane Σ dont la frontière est un polygone π à

un seul sommet et $2q$ côtés, correspondant deux par deux à un ensemble d'orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ de S qui présentent un nombre de contacts au plus fin avec R. Au réseau R correspond sur Σ un réseau ρ.

Une demi-caractéristique de R ne peut pas correspondre à un arc de ρ ne rencontrant pas π, puisque ρ comme R n'admet ni points singuliers autres que des cols, ni caractéristiques fermées ([1]). Par suite, une caractéristique de R est représentée sur Σ par une infinité d'arcs de ρ d'extrémités sur π.

1° Si R ne satisfait pas à l'hypothèse (h), il existe au moins un ruban de caractéristiques de R ne se ramifiant pas. Aucun point d'une caractéristique intérieure à un tel ruban ne sera point d'accumulation pour aucune caractéristique de R. Un nombre au plus fini de caractéristiques intérieures à un ruban seront tangentes à l'un des orbes Γ_i. Nous avons vu qu'un ruban ne couvre jamais deux arcs sans contact ayant une partie commune. Nous pouvons donc remplacer un ruban par un nombre fini de rubans tels qu'aucune des caractéristiques intérieures à l'un d'entre eux ne soit tangente à aucun des orbes Γ_i et ne passe pas le point de S commun à tous les orbes Γ_i.

Soit alors une caractéristique L_0 de R intérieure à un ruban. Elle rencontrera les orbes Γ_i en une suite de points $\ldots, M_{-n}, \ldots, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, où l'on suppose les points rangés dans l'ordre où on les rencontre sur L_0. Considérons pour fixer les idées le point M_0 sur l'orbe Γ_i représenté par le point m_0 sur π. Une caractéristique L, intérieure au ruban, que l'on fait varier de façon continue dans un sens constant à partir de L_0 sera représentée par une série d'arcs de ρ dont l'un rencontrera π en un point m qui décrit dans un sens constant un arc porté par π et d'origine m_0. Cet arc $m_0 m$ ne peut couvrir la totalité de π, puisqu'en particulier, il ne peut contenir aucun des points images sur π des points $M_{-n}, \ldots, M_{-1}, M, \ldots, M_n$. Par suite, le plus grand arc continu contenant m_0 que couvriront les courbes de ρ correspondant aux caractéristiques de R appartenant au ruban étudié sera un arc $\alpha_0 m_0 \beta_0$ où les points α_0 et β_0 correspondront à des points a_0 et b_0 situés sur les caractéristiques frontières du ruban.

Un ruban de R sera alors représenté par l'ensemble des arcs de ρ joignant les points situés sur deux arcs de π, $\alpha'_p \beta'_p$ et $\alpha''_p \beta''_p$, où $\alpha'_i \alpha''_i$ sont les deux points correspondant au point a_i sur une caractéristique frontière, $\beta'_i \beta''_i$ les deux points correspondant au point b_i sur l'autre caractéristique frontière du ruban.

2° Nous avons déjà vu que deux arcs $\alpha'_p \beta'_p$ (ou $\alpha''_p \beta''_p$) et $\alpha'_q \beta'_q$ sont sans partie commune, nous allons montrer, en outre, que *ces arcs sont disjoints*, exception faite éventuellement des points correspondant à un point de contact de π avec ρ. Supposons, en effet, que deux points α_p et α_{p+2} coïncident en un point

([1]) ρ ne peut donc admettre de caractéristique non fermée à l'intérieur d'une aire simplement connexe (p. 303).

autre qu'un contact de π avec ρ; le ruban considéré admet une caractéristique frontière fermée, ce qui est impossible. Supposons alors qu'un point β_p coïncide avec un point α_{p+r}, le point $\beta_{p+\lambda r}$ coïncide de même avec le point $\alpha_{p+(\lambda+1)r}$. Les arcs $\alpha_p\beta_p$, $\alpha_{p+r}\beta_{p+r}$, ..., $\alpha_{p+\lambda r}\beta_{p+\lambda r}$, ... couvriront un arc continu de π ne pouvant contenir π en totalité. La suite des points $\alpha_{p+\lambda r}$ est donc sur π monotone, infinie et bornée et admet un point limite α qui correspond à un point a sur S. La caractéristique de R passant par a ne peut être qu'une courbe fermée, puisque le $r^{\text{ième}}$ point de rencontre à partir de a de cette caractéristique avec l'ensemble des orbes Γ_i coïncide avec a. Nous aboutissons donc à une contradiction et, lorsque R n'admet pas de caractéristique fermée, les arcs de π traversés par des arcs de ρ correspondant à des arcs de caractéristiques appartenant à un ruban de R sont deux à deux disjoints.

3° *Les points d'accumulation d'une caractéristique intérieure à un ruban coïncident avec les points d'accumulation des caractéristiques frontières du ruban.*

Nous avons vu que si m est un point d'accumulation d'une caractéristique L de R, tout point de la caractéristique passant en m sera point d'accumulation de L. Il suffit donc ici de montrer que les points des orbes Γ_i qui sont points d'accumulation pour une caractéristique intérieure à un ruban sont les mêmes que les points d'accumulation pour une caractéristique frontière du ruban. Or, dire que m sur Γ_i est point d'accumulation d'une courbe intérieure au ruban signifie que tout arc de π contenant un point image de m contient une infinité d'arcs $\alpha'_p\beta'_p$ ou $\alpha''_p\beta''_p$. Par suite, m sera ou non point d'accumulation, simultanément, pour toute les caractéristiques appartenant à un même ruban.

B. Un ruban de R est représenté sur Σ par des arcs de courbe couvrant des arcs de π, $\alpha'_p\beta'_p$ et $\alpha''_p\beta''_p$, où p varie par valeurs entières de $(-\infty)$ à $(+\infty)$. Soit (E) l'ensemble des points de π qui ne sont intérieurs à aucun des arcs $\alpha'_p\beta'_p$ et $\alpha''_q\beta''_q$. Nous nous proposons d'établir une correspondance point par point entre les points de (E) et les points d'un cercle C, correspondance respectant l'ordre des points (si l'on considère trois points M_1, M_2, M_3 de E et leurs trois correspondants μ_1, μ_2, μ_3, tout point situé sur l'arc M_1M_2 ne contenant pas M_3 sur π a pour correspondant sur C un point situé sur l'arc $\mu_1\mu_2$ ne contenant pas μ_3).

Posons :

$$\alpha'_0\beta'_0 = \lambda_0, \qquad \alpha''_0\beta''_0 = \lambda_1, \qquad \ldots,$$
$$\alpha'_p\beta'_p = \lambda_{4p-2}, \qquad \alpha''_p\beta''_p = \lambda_{4p-1}, \qquad \alpha'_{-p}\beta'_{-p} = \lambda_{4p}, \qquad \alpha''_{-p}\beta''_{-p} = \lambda_{4p+1} \qquad (p > 0).$$

Nous voulons établir entre les points de π et les points de C, une correspondance continue associant à l'ensemble des points intérieurs ou frontière de l'un des arcs λ_p un point unique de C.

Soit M un point quelconque de (E), [(E) n'est jamais vide puisque (E) contient au moins les points frontières des arcs λ_p] et μ un point quelconque de C. Nous faisons correspondre M à μ. Nous sommes alors ramenés à établir une correspondance entre deux segments de droite soit ox et oy, que l'on peut supposer de longueur 1. Sur le segment (0, 1) porté par ox, on a une infinité dénombrable de segments disjoints $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \ldots$

Considérons l'intervalle λ_0 d'extrémité $\alpha_0\beta_0$, nous posons $y(\lambda_0) = \frac{1}{2}$. Si l'un des intervalles $o\alpha_0$ (ou $\beta'_0 1$) est vide d'intervalles λ_p, on établit une correspondance linéaire entre cet intervalle et l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2}, 1\right)$ de oy. Sinon dans chacun des deux intervalles $o\alpha_0$ et $\beta'_0 1$ on considère celui des λ_p d'indice minimum, soit λ_1^1, λ_1^2 ces deux intervalles. L'un d'eux coïncidera certainement avec λ_1. Pour λ_1^1 nous posons $y = \frac{1}{2^2}$ pour λ_1^2, $y = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}$. Nous

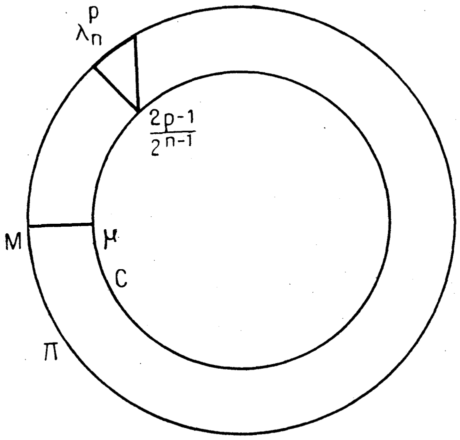

Fig. 26.

recommençons dans chacun de 2^2 intervalles $o\lambda_1^1$, $\lambda_1^1\lambda_0$, $\lambda_0\lambda_1^2$, $\lambda_1^2 1$ en considérant les λ_p d'indice minimum dans chacun des intervalles considérés et en leur attribuant le milieu de l'intervalle correspondant sur oy. En opérant ainsi de proche en proche, à la $n^{\text{ième}}$ opération, on considère les intervalles $\lambda_n^1, \ldots, \lambda_n^{2^n}$ et l'on pose

$$y\left(\lambda\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} + (p-1)\frac{1}{2^n} = \frac{2^{p-1}}{2^{n+1}}.$$

L'intervalle λ_n se trouve toujours parmi les λ_i^j d'indice inférieur ou au plus égal à n.

D'autre part, chaque fois que l'on aura un intervalle $\lambda_n^i\lambda_n^{i+1}$ vide d'intervalles λ_p, on établira une correspondance linéaire entre les points de cet intervalle et les points de oy compris entre $y(\lambda_n^i)$ et $y(\lambda_n^{i+1})$.

On définit par ce procédé une fonction $y(x)$, qui fait correspondre π à C, et qui est :

1° Définie. Tout point du segment (0, 1) sur ox se présente comme appartenant soit à un intervalle λ_p soit à un segment compris entre λ_n^i et λ_n^{i+1}, soit enfin comme limite d'une suite d'intervalle λ_p. Dans les deux premiers cas nous avons défini directement la valeur $y(x)$. Dans le 3^e^ cas, $y(x)$ sera définie par une coupure dans l'ensemble des nombres $\frac{1}{2^i}$.

2° Monotone.

3° Continue, car à deux valeurs voisines de x correspondent deux valeurs de y qui sont voisines ou identiques.

Dans cette correspondance, nous voyons que *tout point de* E *a un correspondant unique sur* C *et que tout point de* C *correspond à un point de* E *unique ou à deux points de* E *frontières d'un même intervalle* λ_p.

C. Nous nous proposons maintenant d'*étendre la correspondance précédente entre* C *et* π, *en établissant une correspondance continue entre les points de l'aire* (A) *intérieure à* C *et les points de* Σ *situés sur des arcs de* ρ *aboutissant sur* π *en des points de* E.

Nous allons définir, sur l'aire (A), un réseau ρ' formé d'arcs continus joignant deux points de C correspondant sur π aux deux extrémités d'un arc de ρ.

Les séparatrices de ρ et ses caractéristiques tangentes à π, partagent Σ en un certain nombre d'aires simplement connexes Σ_i. Dans chaque aire Σ_i, ρ est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles et formé d'arcs joignant deux points situés sur deux arcs continus $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$ de π. Si aucun des arcs $a'_i b'_i$ de π n'appartient en totalité à un arc λ_p, nous associons point par point aux séparatrices et caractéristiques de ρ tangentes à π des courbes partageant (A) en des aires (A_1), (A_2), ..., (A_j) dont la frontière correspond respectivement à la frontière de Σ_1, Σ_2, ..., Σ_j.

Si un arc $a'_i b'_i$ appartient en totalité à un arc λ_p, nous ferons correspondre aux deux arcs de caractéristiques frontières de l'aire Σ_i un seul arc de courbe ρ dans (A) joignant les deux points de C correspondant aux deux arcs $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$ de π. Si les caractéristiques frontières de Σ_i passent toutes deux par un col de ρ, nous faisons correspondre les deux cols à un même point de ρ. L'aire Σ_i correspond dans ce cas à une aire (A_i) nulle.

Soit une aire Σ_i correspondant à une aire (A_i) non nulle, les deux arcs $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$ de π qui sont frontières de Σ_i peuvent être disjoints ou avoir une extrémité commune b'_i coïncidant avec b''_i.

Dans le premier cas, Σ_i admet comme frontières deux arcs de courbe de ρ. Nous pouvons établir un homéomorphisme entre Σ_i et l'intérieur d'un carré ABCD de côté 1 dont deux côtés opposés AB et DC correspondent aux deux arcs de courbe de ρ frontière de Σ_i et dont les deux autres côtés AD et BD correspondent aux arcs $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$ de π. Nous associons deux points de $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$, extrémités d'un même arc de ρ, à deux points $m' m''$ de AD et BC tel que $Am' = Bm''$. Le réseau ρ est alors homéomorphe au faisceau f des segments parallèles aux côtés AB et DC d'extrémités sur AD et BC.

L'aire (A) sera de même homéomorphe à l'intérieur A′B′C′D′ d'un carré de côté 1 dont deux côtés A′B′ et D′C′ correspondent aux courbes de ρ' frontières de A_i et dont les deux autres côtés A′D′ et B′C′ correspondent aux arcs de C frontière de A_i. Nous associons deux points correspondant à deux extrémités d'un même arc de ρ sur C, dans la correspondance établie plus haut entre C et π, à des points $\mu' \mu''$ tel que $A'\mu' = B'\mu''$. Nous pouvons alors couvrir A_i par un réseau ρ' homéomorphe au faisceau f' des segments parallèles aux côtés A′B′ et D′C′ d'extrémités sur A′D′ et B′C′.

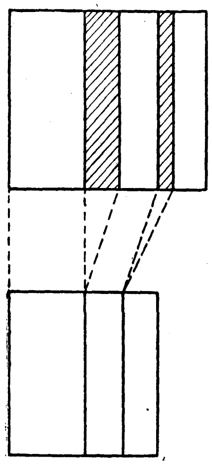

Fig. 27.

Nous établissons alors entre les carrés ABCD et A′B′C′D′ la correspondance suivante : nous faisons correspondre à un point m' de AD le point μ' de A′D′ tel que les pré-images de m' et μ' sur π et C sont deux points correspondants de π et C. D'autre part, nous ferons correspondre au segment de f d'extrémité m' le segment de f' d'extrémité μ', la correspondance se faisant avec conservation de la longueur.

Il résulte de la correspondance entre les carrés ABCD et A′B′C′D′ une correspondance entre Σ_i et A_i qui est continue et telle que tout point de Σ_i ait un correspondant unique sur A_i alors que tout point de A_i correspond, soit à un point unique de Σ_i situé sur une caractéristique aboutissant sur C en un point intérieur de E, soit à deux points de Σ_i situés sur deux caractéristiques aboutissant sur C aux extrémités d'un arc λ_p et à une infinité de points dont les caractéristiques couvrent l'arc λ_p.

Lorsque les deux arcs $a'_i b'_i$ et $a''_i b''_i$ ont une extrémité commune, on établit de la même façon une correspondance entre Σ_i et A_i à partir d'une correspondance entre deux familles de segments parallèles situées sur deux triangles équilatéraux de côtés 1 dont la base appartient à la famille des segments parallèles et dont les autres côtés correspondent aux arcs frontières de Σ_i et A_i portés par π et C.

Nous opérerons de même avec les différentes aires Σ_i et A_i en prenant la précaution suivante : on établit un homéomorphisme entre un arc de courbe aboutissant d'une part à un point singulier de ρ ou ρ', et d'autre part à π ou C et un segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. De même, on établit un homéomorphisme entre un arc de caractéristique frontière d'une aire Σ et d'extrémités sur π, et un segment 0, 1. Ces homéomorphismes sont utilisés dans la correspondance entre ρ et ρ' et les familles de segments parallèles dans les triangles équilatéraux ou les carrés.

Considérons alors l'ensemble des aires Σ_i qui constituent Σ et l'ensemble des

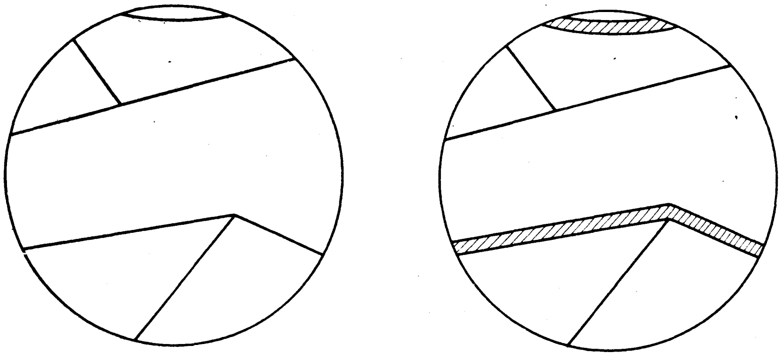

Fig. 28.

aires (A_i) qui couvrent (A). Nous avons établi une correspondance point par point entre Σ et (A), c'est-à-dire, finalement, entre S et (A). Dans cette correspondance, tout point de S, non situé sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$, correspond à un point unique à l'intérieur de (A), alors que tout point de (A) correspond soit à un point unique de S n'appartenant pas au ruban considéré, soit à une infinité de points de S intérieurs au ruban et à un couple de points situés chacun sur une caractéristique frontière du ruban.

Un couple d'arcs de π correspondant à un même arc de courbe sur S correspond sur C, soit à un couple d'arcs, soit à un couple de points. Comme C est un cercle, *il existe au moins un couple d'arcs de π correspondant à un même arc de* S *qui correspond à un couple d'arc sur* C. C sera donc partagé en un certain nombre d'arcs correspondant deux par deux à un même arc de S. Aux $2q$ arcs de π correspondant aux orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ correspondent alors $2q_1$ arcs sur C ($q_1 \leqq q$, certains des orbes Γ_i pouvant *a priori* être couverts en totalité par le ruban considéré).

Si nous identifions alors deux à deux les arcs de C correspondant à un même arc de S, nous remplaçons l'aire (A) et le réseau ρ' par une surface S' et un réseau R′ : toute caractéristique de R correspond à une caractéristique unique de R′ et une caractéristique de R′ correspond à une courbe unique de R n'appartenant pas au ruban considéré ou à l'une quelconque des courbes intérieure ou frontière du ruban considéré.

En particulier, nous pouvons prendre une représentation de S sur un polygone π dont le sommet sera un point de S n'appartenant, ni à l'intérieur, ni à la frontière du ruban considéré, ce qui est toujours possible puisque la section de S par une courbe fermée comprend, outre des points intérieurs au ruban, un ensemble ayant la puissance du continu. Nous sommes alors assurés qu'aucun des orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ n'est tout entier intérieur au ruban. Chacun de ces orbes correspond sur C à deux arcs non nuls et par suite la surface S′ est homéomorphe à S.

A un point de S *qui est point d'accumulation pour une caractéristique* L *de* R *correspond un point* M′ *qui est point d'accumulation pour la caractéristique* L′ *de* R *correspondant à* L. En effet, si M est un point d'accumulation de L′, L′ traverse en un point différent de M tout arc $\alpha'\beta'$ sans contact avec R′ passant par M′. Cette condition est vérifiée puisque L traverse l'arc correspondant à $\alpha'\beta'$ sur S, arc qui passe par M.

Réciproquement, si M′ est un point d'accumulation pour une courbe L′, peut-on dire que M est un point d'accumulation pour L ?

Si M n'est ni intérieur au ruban considéré, ni frontière de ce ruban tout arc sans contact avec R passant par M correspond à un arc sans contact avec ρ' passant par M′. M est alors point d'accumulation pour L.

Mais si M est intérieur au ruban considéré, un arc sans contact avec R passant par M correspond à un arc passant par M′ qui peut coïncider avec un arc de ρ'. Dans ce cas, M n'est pas point d'accumulation pour L.

Enfin, si M est frontière du ruban, M′ correspond à un arc MM_1 de S et L traversera tout arc contenant cet arc MM_1, et sans contact avec S. L'ensemble d'accumulation de L admet, alors, l'un au moins des points M et M_1. Si M′ est point d'accumulation à droite et à gauche pour L′, c'est-à-dire si L′ traverse une infinité de fois chacun des arcs $\alpha'M'$ et $M'\beta'$, les deux points M_1 et M_2 seront point d'accumulation pour L sur S.

D. Le réseau R admet un nombre au plus fini de rubans admettant une séparatrice frontière ou une caractéristique frontière tangente à l'un des orbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$; en effet une même caractéristique ne peut appartenir à la frontière de plus de deux rubans et il y a un nombre fini de séparatrices et de caractéristiques tangentes à l'un des orbes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$. D'autre part, nous considérons comme formant un seul ruban deux rubans admettant une caractéristique frontière commune qui ne serait ni tangente à l'un des orbes Γ_i, ni une séparatrice. Nous pouvons alors avec un nombre fini d'opérations comme celle que nous venons d'étudier remplacer la surface S et le réseau R par une surface homéomorphe S_1 et un réseau R_1 n'admettant pas de rubans ayant une frontière commune.

Considérons alors l'ensemble des rubans disjoints de R_1 : ils couvrent, sur un ensemble d'orbes Γ_i^1 rendant S_1 simplement connexe, une infinité dénombrable d'arcs disjoints. Nous pouvons appliquer une fois de plus la transformation précédemment définie, cette fois pour la totalité des rubans de R_1. Nous remplaçons ainsi S_1 par une surface homéomorphe S' couverte par un réseau R' n'admettant pas de rubans, c'est-à-dire sur laquelle l'hypothèse (h) est vérifiée.

Par suite :

1° Toutes les caractéristiques de R' ont le même ensemble d'accumulation constitué par la totalité de S'.

2° Il en résulte que *toutes les caractéristiques de* S *ont le même ensemble d'accumulation* constitué par les points de S non intérieur à un ruban ne se recouvrant pas partiellement (c'est-à-dire, dans le cas où $q \neq 2$, ne se ramifiant pas).

3° *La section de cet ensemble par une courbe fermée quelconque* Γ *non homotope à* o *tracée sur* S *a la puissance du continu* puisqu'on peut établir une correspondance entre les points de cet ensemble sur Γ et les points d'une courbe fermée sur S'.

3. *Étude des réseaux* R *dans le cas général.* — Dans l'étude des ensembles d'accumulation des caractéristiques de R nous nous sommes limités, dans ce qui précède, au cas suivant : 1° les points singuliers de R sont tous des cols et 2° il n'y a pas de courbe fermée appartenant à R.

Nous allons maintenant considérer un réseau R dans le cas le plus général. Cette étude nous permettra de voir l'intérêt du cas particulier précédent, puisque les résultats obtenus dans ce cas nous permettront l'étude complète du cas général.

A. Nous avons déjà vu que tout point singulier P de R a un indice fini et qu'il existe un orbe homotope à o, présentant un nombre fini de contacts avec R, situé dans un voisinage arbitrairement petit de P et entourant P. Si nous considérons l'ensemble des caractéristiques aboutissant à P, plusieurs cas peuvent se produire :

1° Aucune caractéristique de R n'aboutit à P qui est un centre, c'est-à-dire que R admet une infinité de courbes fermées, homotopes à o, entourant le point P;

2° Un nombre fini de caractéristiques aboutit à P qui est un col;

3° Une infinité de caractéristiques aboutit à P, mais parmi elles il y en a un nombre au plus fini tel que les caractéristiques de R, infiniment voisines, n'aboutissent pas toutes à P. Ce seront à ces caractéristiques que nous réserverons dans la suite le terme de séparatrice, jusqu'ici employé dans un sens plus large, et nous dirons qu'une telle *séparatrice* est *associée au point* P.

Soit P un point singulier du dernier type. Parmi les caractéristiques aboutissant à P se trouve un nombre au plus fini (comme le nombre total des séparatrices) de séparatrices associées à d'autres points singuliers de R. L'ensemble de ces séparatrices et des séparatrices associées à P partage l'ensemble des caractéristiques aboutissant à P en un nombre fini de pinceaux ne se ramifiant pas, de frontières à deux séparatrices pour chaque pinceau.

Si une courbe intérieure à un tel pinceau issu de P aboutit à un point singulier Q de R, il en sera de même de toutes les courbes du pinceau qui admettront comme ensemble d'accumulation les points P et Q. Sinon, les courbes du pinceau couvrent, sur S, une aire A ne se recouvrant pas partiellement et admettent le même ensemble d'accumulation que les courbes frontières. Dans les deux cas, on peut établir une correspondance entre S et R d'une part et une surface S′ homéomorphe à S et un réseau R′ d'autre part, correspondance biunivoque et bicontinue, à l'exception d'une courbe de R′ qui correspond à l'ensemble de toutes les courbes du pinceau.

Par suite, on ramène l'étude du cas général à celle du cas où les points singuliers de R sont des cols ou des centres.

B. Nous n'avons, jusqu'ici, fait aucune hypothèse sur l'existence de caractéristiques fermées.

S'il n'y a pas de caractéristiques fermées, il ne peut y avoir de centre et nous sommes ramenés au cas complètement étudié.

Si R admet un nombre fini de caractéristiques fermées nous pouvons par étranglement de ces courbes nous ramener à l'étude d'un ou plusieurs réseaux R_1, R_2, ..., R_p n'admettant pas de caractéristique fermée et présentant des points singuliers provenant des caractéristiques disparues, qui ne seront ni des cols, ni des centres. Nous savons alors nous ramener au cas de réseaux R sans autres points singuliers que des cols et qui n'auront pas de caractéristiques fermées.

Il reste donc à étudier le cas où R admet une infinité de caractéristiques fermées. Nous avons vu que ces *courbes se répartissent nécessairement* en un nombre fini de familles d'orbes *isotopes* entre eux.

Si certaines de ces familles sont constituées par un nombre fini d'orbes, nous les feront disparaître par étranglement puis nous ramènerons à l'étude de réseaux R n'ayant d'autres points singuliers.

Considérons alors une famille d'orbes isotopes entre eux en nombre infini. Nous partageons cette famille en un nombre fini de familles g_1, g_2, ..., g_m telles que deux orbes d'un même g_i limitent sur S une surface homéomorphe à une couronne circulaire ne contenant pas de points singuliers de R. L'ensemble des aires comprises entre deux orbes variables de g_i couvre sur S une aire connexe A_i; si A_i couvre S en totalité, R présente deux centres qui sont chacun entourés d'une infinité de courbes de g dont il forment la limite; S est alors de genre o.

Si A_i ne couvre pas S en totalité, A_i couvrira soit une aire homéomorphe à une couronne circulaire de frontière deux orbes Γ_1 et Γ_2 de g_i, soit une aire homéomorphe à l'intérieur d'un cercle dont le centre o correspond à un point singulier de R du type centre et où les correspondants des orbes de g_i sont des cercles de centre o.

Nous pouvons alors pour étudier R, d'une part considérer le réseau sur les aires A_i, d'autre part, lorsque ces aires ne couvrent pas S en totalité, établir une correspondance entre les points de S non inférieurs aux A_i et les points d'une surface close S', correspondance qui sera biunivoque et bicontinue, exception faite des points de la frontière des A_i pour lesquels deux points de S peuvent avoir un même correspondant sur S'.

L'étude du cas général de R *se ramène finalement, d'une part à l'étude du cas complètement étudié* où R n'admet pas de caractéristiques fermées et où tous les points singuliers sont des cols, *d'autre part à l'étude d'un réseau* R *situé sur une couronne circulaire* (dont un cercle limite peut être de rayon nul), *réseau admettant comme caractéristiques particulières une infinité de cercles concentriques aux cercles frontières de la couronne.*

La section d'un rayon de la couronne par les différents cercles du réseau forme un ensemble de points fermé, car la courbe limite d'une famille de cercles de R est un cercle de R. Inversement, tout ensemble formé linéaire de points donne par rotation une famille de cercles pouvant appartenir à un réseau R.

Lorsque l'ensemble de points ne couvre pas la totalité du rayon de la couronne circulaire, tout contigu $\alpha\beta$ à l'ensemble est traversé une infinité de fois par une caractéristique qui passe en un des points de $\alpha\beta$. Une telle caractéristique a pour ensemble d'accumulation les deux cercles de R qui passent en α et β.

Les résultats précédents se conservent lorsque l'aire A_i a pour frontières des points limites au lieu de cercles.