

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. DIXMIER

Sur la réduction des anneaux d'opérateurs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 68 (1951), p. 185-202

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__185_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA

RÉDUCTION DES ANNEAUX D'OPÉRATEURS

PAR M. J. DIXMIER.

Dans un précédent article [1] ⁽¹⁾, j'ai défini et étudié les anneaux d'opérateurs de classe finie. Le présent article est consacré aux anneaux d'opérateurs quelconques ⁽²⁾. J. von Neumann a montré [5] que ces anneaux étaient des *sommes directes généralisées* de facteurs (cette notion fait intervenir essentiellement la théorie de la mesure). En *regroupant* ceux de ces facteurs qui appartiennent à une même *classe* (la classification des facteurs a été faite par F. J. Murray et J. von Neumann dans [3]), on obtient une décomposition moins fine des anneaux d'opérateurs. Le but du présent travail est d'obtenir cette réduction indépendamment de [3], de [5], et de toute théorie de la mesure. Les démonstrations sont valables dans des espaces non séparables, alors que les démonstrations de [3] et [5] s'appliquent seulement aux espaces séparables. Les résultats contiennent donc la classification des facteurs dans les espaces hilbertiens quelconques.

Les théorèmes qui suivent seront utilisés dans un autre Mémoire, à paraître dans *Compositio Mathematica*, où l'on généralisera aux anneaux quelconques la théorie de l'application \mathfrak{K} , établie dans [1] pour les anneaux de classe finie.

Des résultats voisins ont été obtenus par I. Kaplansky [2].

Notations et remarques diverses.

On utilisera sans explications les notations de [1]. Cependant, quelques modifications ont paru préférables.

⁽¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

⁽²⁾ Il sera toujours sous-entendu que ces anneaux contiennent $\mathbb{1}$. Cette restriction n'est d'ailleurs pas essentielle, d'après [4].

1. Soit \mathbf{M} un anneau d'opérateurs. Le centre de \mathbf{M} sera noté \mathbf{M}^{\natural} (dans [1], il est noté $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$).

2. Si N est un ensemble quelconque d'opérateurs, on désignera par \tilde{N} l'ensemble des variétés linéaires fermées \mathcal{N} telles que $P_{\mathcal{N}} \in N$. Ainsi, l'ancienne notation $\mathcal{N} \eta \mathbf{M}$ est remplacée par $\mathcal{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$.

3. Soit $\mathcal{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$. On désignera par \mathcal{N}^{\natural} ce qui, dans [1], était noté $[\mathcal{N}^{\mathbf{M}}]$ (cf. définition 3.1 de [1]). Rappelons que $\mathcal{N}^{\mathbf{M}}$ est la réunion des $U(\mathcal{N})$ où U parcourt \mathbf{M}_0 . La variété \mathcal{N}^{\natural} est la plus petite variété de $\tilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ contenant \mathcal{N} , ou encore la variété sous-tendue par les variétés équivalentes à \mathcal{N} ([1], lemme 3.1). Si $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés de $\tilde{\mathbf{M}}$, $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i^{\natural}$ est la plus petite variété de $\tilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ contenant les \mathcal{N}_i^{\natural} , donc les \mathcal{N}_i , donc $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i$; d'où

$$\left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i\right)^{\natural} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i^{\natural}$$

4. On écrira $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ s'il existe une $\mathcal{N}'' \sim \mathcal{N}$ avec $\mathcal{N}'' \subset \mathcal{N}'$. La relation $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ est réflexive et transitive. Si $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ [resp. $(\mathcal{N}'_i)_{i \in I}$] est une famille de variétés deux à deux orthogonales, et si $\mathcal{N}_i \prec \mathcal{N}'_i$ pour $i \in I$, on a $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i \prec \bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}'_i$.

I. — Variétés finies et infinies.

Les propriétés des variétés finies s'obtiennent à peu près comme dans [3]. Par contre, pour les variétés infinies, le fait que \mathbf{M} n'est pas un facteur et la non-séparabilité de l'espace entraînent des complications.

DÉFINITION 1.1. — Une variété $\mathcal{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$ sera dite finie si toute variété de $\tilde{\mathbf{M}}$ contenue dans \mathcal{N} et équivalente à \mathcal{N} est identique à \mathcal{N} . Si $\mathcal{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$ n'est pas finie, \mathcal{N} sera dite infinie.

DÉFINITION 1.2 — Une variété $\mathcal{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$ sera dite proprement infinie si $\mathcal{N} \neq 0$ et si, pour toute variété $\mathcal{N}' \in \tilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ telle que $\mathcal{N}' \cap \mathcal{N} \neq 0$, $\mathcal{N}' \cap \mathcal{N}$ est infinie.

DÉFINITION 1.3. — Une variété $\mathcal{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$ sera dite purement infinie si $\mathcal{N} \neq 0$ et si \mathcal{N} ne contient aucune variété finie $\neq 0$.

On a immédiatement les implications suivantes :

$$\text{purement infinie} \rightarrow \text{proprement infinie} \rightarrow \text{infinie.}$$

Il est aussi évident que, si \mathcal{N} est infinie et si $\mathcal{N}' \supset \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}' \in \tilde{\mathbf{M}}$), \mathcal{N}' est infinie. Car si $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}_1$ avec $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{N}_1 \neq \mathcal{N}$, on a

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} \oplus (\mathcal{N}' \ominus \mathcal{N}) \sim \mathcal{N}_1 \oplus (\mathcal{N}' \ominus \mathcal{N}) \neq \mathcal{N}.$$

LEMME 1.1. — Soient $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$ des variétés finies telles que les \mathfrak{N}_i^{\sharp} soient deux à deux orthogonales. $\mathfrak{N} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}_i$ est finie.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}^{\sharp} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}_i^{\sharp}$ une variété de $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Elle est compatible avec les \mathfrak{N}_i^{\sharp} , donc, posant $\mathfrak{N}'_i = \mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N}_i^{\sharp}$, on a $\mathfrak{N}' = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}'_i$. D'autre part, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_i^{\sharp}$ est évident. Si alors $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}' \sim \mathfrak{N}$, on a $\mathfrak{N}'_i \subset \mathfrak{N}_i$ et $\mathfrak{N}'_i \sim \mathfrak{N}_i$, donc, puisque \mathfrak{N}_i est finie, $\mathfrak{N}'_i = \mathfrak{N}_i$; donc $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$.

LEMME 1.2. — Soit \mathfrak{N} une variété de $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Il existe une variété \mathfrak{N} de $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\sharp}$ telle que : 1° $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}$ est finie; 2° $\mathfrak{N} \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) = 0$ ou $\mathfrak{N} \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N})$ est proprement infinie.

Démonstration. — Considérons, grâce au théorème de Zorn, une famille $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$ maximale de variétés de $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\sharp}$ deux à deux orthogonales telles que $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_i$ soit finie pour tout $i \in I$. Soit $\mathfrak{N} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}_i$. On a $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_i$, donc $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_i)^{\sharp} \subset \mathfrak{N}_i$, donc les $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_i)^{\sharp}$ sont deux à deux orthogonales. D'après le lemme 1.1, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_i$ est finie. Montrons par l'absurde que, si $\mathfrak{N} \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) \neq 0$, $\mathfrak{N} \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N})$ est proprement infinie. S'il existait une variété $\mathfrak{N}' \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{\sharp}$ telle que $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N} \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N})$ soit $\neq 0$ et finie on pourrait ajouter $\mathfrak{N}' \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) \neq 0$ à la famille $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$, ce qui contredit le fait que cette famille est maximale.

LEMME 1.3. — Soit \mathfrak{N} une variété proprement infinie. Pour tout entier $n > 0$, il existe une partition $\mathfrak{N}^1, \mathfrak{N}^2, \dots, \mathfrak{N}^n$ de \mathfrak{N} telle que $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}^1 \sim \mathfrak{N}^2 \sim \dots \sim \mathfrak{N}^n$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1$, avec $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_1$. Si $U \in M_{p_1}$ applique isométriquement \mathfrak{N}_1 sur \mathfrak{N}_2 , posons $\mathfrak{N}_{i+1} = U^i(\mathfrak{N}_1)$. On a $\mathfrak{N}_{i+1} = U(\mathfrak{N}_i)$, ce qui prouve, par récurrence, que $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \mathfrak{N}_3 \supset \dots$. Soit $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_i \ominus \mathfrak{N}_{i+1}$. On a $\mathfrak{N}_{i+1} = U^i(\mathfrak{N}_1)$, donc $0 \neq \mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_3 \sim \dots$. Ainsi $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots)$ est une partition homogène infinie majorée par \mathfrak{N}_1 .

Considérons les partitions homogènes majorées par \mathfrak{N}_1 qui contiennent $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots$ comme éléments. Soit (théorème de Zorn) $\Phi = (\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$ une telle partition maximale. Soit $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_1 \ominus (\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}_i)$. Appliquons le théorème 6 de [1] à \mathfrak{N}_0 et \mathfrak{N}_1 qui sont orthogonales. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ de $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\sharp}$, avec $\mathfrak{N}' = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$;

trois variétés orthogonales n_1, \bar{n}_1, n_0 contenues dans \mathfrak{N} ;

trois variétés orthogonales n'_1, n'_0, \bar{n}'_0 contenues dans \mathfrak{N}' ;

avec

$$n_1 \sim n_0, \quad n'_1 \sim n'_0, \quad \mathfrak{N}_1 = n_1 \oplus \bar{n}_1 \oplus n'_1, \quad \mathfrak{N}_0 = n_0 \oplus n'_0 \oplus \bar{n}'_0$$

On a $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \neq 0$, sinon $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{N}'$, donc $\mathfrak{N}_1 = n'_1 \sim n'_0 \subset \mathfrak{N}_0$, de sorte que Φ ne serait pas maximale (on pourrait lui ajouter n'_0).

Puisque $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}_1$ pour $i \in I$, il existe dans \mathfrak{N}_i des variétés orthogonales n_i, n'_i, \bar{n}_i avec

$$n_i \sim n_1, \quad n'_i \sim n'_1, \quad \bar{n}_i \sim \bar{n}_1, \quad \mathfrak{N}_i = n_i \oplus \bar{n}_i \oplus n'_i.$$

Puisque \mathfrak{N}_0 et les \mathfrak{N}_i sous-tendent \mathfrak{M}_1 , et puisque toutes ces variétés sont compatibles avec \mathfrak{N} et \mathfrak{N}' , on voit que n_0 , les n_i et les \bar{n}_i sous-tendent $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}$. Soit \mathfrak{N}^* la variété sous-tendue par les n_i et les \bar{n}_i . Comme I et $I \cup \{0\}$ sont équipotents, on a $\bigoplus_{i \in I} n_i \sim n_0 \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} n_i \right)$, donc $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}^*$. Or \mathfrak{N}^* est sous-tendue par la partition homogène $(n_i \oplus \bar{n}_i)_{i \in I}$. Donc :

Il existe une partition homogène infinie $(\bar{\mathfrak{N}}_i)_{i \in I}$ de $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \neq 0$.

Nous allons alors démontrer le lemme pour $n = 2$, afin de simplifier les notations. Mais il sera évident que la démonstration est générale. Partageons I en deux sous-ensembles I_1, I_2 , équipotents à I , et posons $\bar{\mathfrak{M}}^1 = \bigoplus_{i \in I_1} \bar{\mathfrak{N}}_i, \bar{\mathfrak{M}}^2 = \bigoplus_{i \in I_2} \bar{\mathfrak{N}}_i$. $\bar{\mathfrak{M}}^1$ et $\bar{\mathfrak{M}}^2$ sont orthogonales, sous-tendent $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}$, et $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \bar{\mathfrak{M}}^1 \sim \bar{\mathfrak{M}}^2$.

Ceci posé, considérons les familles $(\mathfrak{N}^j)_{j \in J}$ de variétés deux à deux orthogonales de $\tilde{\mathfrak{M}}^1$ possédant la propriété suivante : pour tout $j \in J$, il existe des variétés $\bar{\mathfrak{M}}_j^1, \bar{\mathfrak{M}}_j^2$ orthogonales, sous-tendant $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}^j \neq 0$, et telles que $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}^j \sim \bar{\mathfrak{M}}_j^1 \sim \bar{\mathfrak{M}}_j^2$. Grâce au théorème de Zorn, considérons une telle famille maximale, que nous notons encore $(\mathfrak{N}^j)_{j \in J}$ pour simplifier. Soit $\tilde{\mathfrak{N}} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{N}^j$. On a $\mathfrak{M}_1 \cap \tilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{M}_1$, sinon $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{H} \ominus \tilde{\mathfrak{N}}) \neq 0$ serait infinie, et, appliquant dans l'espace $\mathfrak{H} \ominus \tilde{\mathfrak{N}}$ le raisonnement du début à $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{H} \ominus \tilde{\mathfrak{N}})$, on pourrait ajouter une variété de $\tilde{\mathfrak{M}}^1$ à la famille $(\mathfrak{N}^j)_{j \in J}$ qui est pourtant maximale. Alors, les variétés $\mathfrak{M}^i = \bigoplus_{j \in J} \bar{\mathfrak{M}}_j^i$ ($i = 1, 2$) sont les variétés du lemme.

LEMME 1.4. — Soient $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_{1'}$ (resp. $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_{2'}$) deux variétés de $\tilde{\mathfrak{M}}$ orthogonales, complémentaires dans une variété \mathfrak{M} . Il existe deux variétés $\mathfrak{N}^1, \mathfrak{N}^2$ de $\tilde{\mathfrak{M}}^1$ avec $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}^1$ telles que, en posant $\mathfrak{M}_i^j = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}^j$ ($i = 1, 2, 1', 2'; j = 1, 2$) on ait $\mathfrak{M}_1^1 \prec \mathfrak{M}_2^1, \mathfrak{M}_1^2 \prec \mathfrak{M}_2^2$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j$ ($i, j = 1, 2, 1', 2'$). Appliquons le théorème 6 de [1] à $\mathfrak{M}_{2,1'}$ et $\mathfrak{M}_{2,1}$. Il existe deux variétés $\mathfrak{N}^1, \mathfrak{N}^2$ de $\tilde{\mathfrak{M}}^1$, avec $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}^1$ telles que $\mathfrak{M}_{2,1'} \cap \mathfrak{N}^1 \prec \mathfrak{M}_{2,1'} \cap \mathfrak{N}^2, \mathfrak{M}_{2,1} \cap \mathfrak{N}^1 \prec \mathfrak{M}_{2,1} \cap \mathfrak{N}^2$. On va voir que $\mathfrak{N}^1, \mathfrak{N}^2$ ont les propriétés du lemme. Par exemple, prouvons que $\mathfrak{M}_1^1 \prec \mathfrak{M}_2^1$.

$\mathfrak{N}_{2,1}$ et $\mathfrak{N}_1 \ominus \mathfrak{N}_{2,1}$ sont orthogonales complémentaires dans \mathfrak{N}_1 ; $\mathfrak{N}_{2,1}$ et $\mathfrak{N}_2 \ominus \mathfrak{N}_{2,1}$ sont orthogonales complémentaires dans \mathfrak{N}_2 . Or $\mathfrak{N}_1 \ominus \mathfrak{N}_{2,1}$ et $\mathfrak{N}_2 \ominus \mathfrak{N}_{2,1}$ sont en position p' donc équivalentes, donc leurs intersections avec \mathfrak{U}^1 sont équivalentes. Ceci, combiné avec $\mathfrak{N}_{2,1} \cap \mathfrak{U}^1 \prec \mathfrak{N}_{2,1} \cap \mathfrak{U}^1$, donne $\mathfrak{N}_1^1 \prec \mathfrak{N}_2^1$.

LEMME 1.5. — Si $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_n$ sont des variétés finies, $\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{N}_i$ est finie.

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de prouver le lemme pour deux variétés $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_1'$. Soient $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_1'$, et $\overline{\mathfrak{N}}_1 = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1$. $\overline{\mathfrak{N}}_1$ est en position p' avec $\mathfrak{N}_1 \ominus (\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_1') \subset \mathfrak{N}_1'$ donc est finie. Et $\overline{\mathfrak{N}}_1, \mathfrak{N}_1$ sont orthogonales complémentaires dans \mathfrak{N} . Bref, il suffit de prouver le lemme pour deux variétés $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_1'$ finies orthogonales. Supposons $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_1'$ infinie. Alors (lemmes 1.2 et 1.3) il existe une variété $\mathfrak{U} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\sharp}$ et une partition $\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2'$ de $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}$ telle que $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_2' \neq 0$.

Raisonnant dans \mathfrak{U} et changeant de notations, on a la situation suivante : \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_1' sont des variétés finies orthogonales, et $\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2'$ forment une partition de $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_1'$ telle que $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_2'$. Donc $\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2'$ sont infinies.

Appliquons le lemme 1.4 en changeant le rôle des indices. Il existe deux variétés $\mathfrak{U}^1, \mathfrak{U}^2$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\sharp}$ avec les propriétés suivantes : $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{U}^1$; $\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{U}^1 \prec \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{U}^1$, donc $\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{U}^1$ est finie; alors $\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{U}^1 \sim \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{U}^1$ est aussi finie; $\mathfrak{N}_2' \cap \mathfrak{U}^2 \prec \mathfrak{N}_1' \cap \mathfrak{U}^2$, donc $\mathfrak{N}_2' \cap \mathfrak{U}^2$ et $\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{U}^2$ sont finies. Alors (lemme 1.1) $\mathfrak{N}_2 = (\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{U}^1) \oplus (\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{U}^2)$ est finie, d'où contradiction.

Les lemmes 1.6 à 1.9 ne seront pas utilisés dans ce qui suit. Mais ils seront nécessaires pour la théorie des applications \sharp annoncée dans l'Introduction. Comme ce sont des conséquences directes des lemmes précédents, nous les démontrons ici.

LEMME 1.6. — Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ deux variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ finies et équivalentes, et $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ une variété contenant \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 . Il existe un $U \in \mathbf{M}_U$ conservant \mathfrak{N} et tel que $U(\mathfrak{N}_1) = \mathfrak{N}_2$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$. \mathfrak{N}' est finie (lemme 1.5). Donc les opérateurs de \mathbf{M} réduits par \mathfrak{N}' induisent dans \mathfrak{N}' un anneau de classe finie. Alors (d'après [1], lemme 4.12) il existe dans l'espace \mathfrak{N}' un opérateur unitaire de cet anneau qui transforme \mathfrak{N}_1 en \mathfrak{N}_2 . Prolongeons cet opérateur à \mathfrak{H} par linéarité en un opérateur U en posant $Ux = x$ pour $x \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}'$. U est invariant par tout unitaire de \mathbf{M}' , donc $U \in \mathbf{M}$, et U transforme \mathfrak{N}_1 en \mathfrak{N}_2 .

LEMME 1.7. — Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ deux variétés équivalentes de $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Il existe deux variétés $\mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}''_1$ (resp. $\mathfrak{N}'_2, \mathfrak{N}''_2$) de $\widetilde{\mathfrak{M}}$, orthogonales, sous-tendant \mathfrak{N}_1 (resp. \mathfrak{N}_2) telles que $\mathfrak{N}'_2 = U'(\mathfrak{N}'_1)$ et $\mathfrak{N}''_2 = U''(\mathfrak{N}''_1)$ pour un $U' \in \mathfrak{M}_U$ et un $U'' \in \mathfrak{M}_U$.

Démonstration. — D'après le lemme 1.2, il existe une variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{\sharp}$ telle que $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}$ soit finie et $\mathfrak{N}_1 \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N})$ proprement infinie [ou $\mathfrak{N}_1 \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) = \mathfrak{o}$]. On a

$$\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N}_1 \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) \sim \mathfrak{N}_2 \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}),$$

de sorte qu'il suffit de démontrer le lemme en supposant successivement \mathfrak{N}_1 finie et \mathfrak{N}_1 proprement infinie. Si \mathfrak{N}_1 est finie, il suffit d'appliquer le lemme 1.6 (en prenant $\mathfrak{N}'_1 = \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}''_1 = \mathfrak{o}$). Supposons désormais \mathfrak{N}_1 (et \mathfrak{N}_2) proprement infinies. Alors (lemme 1.3) il existe une partition $(\mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}''_1)$ de \mathfrak{N}_1 , une partition $(\mathfrak{N}'_2, \mathfrak{N}''_2)$ de \mathfrak{N}_2 , avec $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}'_1 \sim \mathfrak{N}''_1 \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}'_2 \sim \mathfrak{N}''_2$. Montrons par exemple qu'il existe un $U' \in \mathfrak{M}_U$ tel que $\mathfrak{N}'_2 = U'(\mathfrak{N}'_1)$. Il suffit visiblement de prouver que $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}'_2 \sim \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}'_1$. Or

$$\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}'_i = (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}_i) \oplus \mathfrak{N}''_i \sim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}_i) \oplus \mathfrak{N}_i = \mathfrak{H} \quad (i = 1, 2)$$

et le lemme est démontré.

LEMME 1.8. — Supposons \mathfrak{H} proprement infinie. Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ des variétés finies. Il existe une variété équivalente à \mathfrak{N}_2 et orthogonale à \mathfrak{N}_1 .

Démonstration. — Soit $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}_1$. D'après le théorème 6 de [1] appliqué à \mathfrak{N}_0 et \mathfrak{N}_2 , il existe deux variétés $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ de $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\sharp}$, avec

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}' \prec \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}'.$$

Alors $\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}$ est finie. $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}$ est aussi finie. Puisque \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_0 sous-tendent \mathfrak{H} , $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}$ sous-tendent \mathfrak{N} , qui est donc finie (lemme 1.5). Comme \mathfrak{H} est proprement infinie, $\mathfrak{N} = \mathfrak{o}$. Alors

$$\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}' \prec \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_0,$$

ce qui prouve le lemme.

LEMME 1.9. — Supposons \mathfrak{H} proprement infinie. Si $\mathfrak{N}_i \prec \mathfrak{N}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) avec une variété \mathfrak{N} finie, il existe des $\mathfrak{N}'_i \sim \mathfrak{N}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), deux à deux orthogonales, telles que $\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{N}_i \subset \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{N}'_i$.

Démonstration. — Par récurrence sur n , on est ramené à prouver ceci : soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_{n-1}$ des variétés deux à deux orthogonales équivalentes à \mathfrak{N} ; soit $\mathfrak{N}_n \prec \mathfrak{N}$; alors, il existe une variété $\mathfrak{N}'_n \sim \mathfrak{N}$, orthogonale à $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_{n-1}$, avec $\bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{N}_i \subset \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{N}_i \right) \oplus \mathfrak{N}'_n$.

Or, soit $\mathcal{N}_n'' = \left(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{N}_i \right) \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i \right)$. \mathcal{N}_n'' est en position p' avec une variété contenue dans \mathcal{N}_n , donc $\mathcal{N}_n'' \prec \mathcal{N}_n \prec \mathcal{N}$. $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i$ est finie (lemme 1.5), donc (lemme 1.8) il existe une $\overline{\mathcal{M}} \sim \mathcal{M}$ avec $\overline{\mathcal{M}}$ orthogonale à $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i$. \mathcal{N}_n'' et $\overline{\mathcal{M}}$ sont contenues dans $H \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i \right)$ donc (lemme 1.6) il existe un $U \in \mathbf{M}_U$ conservant $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}_i$ et tel que $U(\mathcal{N}_n'') \subset \overline{\mathcal{M}}$. $U^{-1}(\overline{\mathcal{M}})$ est la variété \mathcal{N}_n' cherchée.

II. — Première réduction des anneaux d'opérateurs.

DÉFINITION 2.1. — \mathbf{M} sera dit de classe finie (resp. purement infinie) si la variété H est finie (resp. purement infinie).

C'est bien là la définition des anneaux de classe finie donnée dans [1].

LEMME 2.1. — Soit \mathcal{N}_1 une variété finie, \mathcal{N}_2 une variété purement infinie. \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 sont orthogonales.

Démonstration. — Il existe ([1], théorème 6) des variétés m_1, m_1' , (resp. m_2, m_2') orthogonales complémentaires dans \mathcal{N}_1 (resp. \mathcal{N}_2) avec $m_1 \prec m_2, m_2' \prec m_1', m_2^{\sharp} \text{ orthogonale à } m_1^{\sharp}$. Comme $m_1 \subset \mathcal{N}_1, m_1$ est finie, et, comme $m_1 \prec m_2 \subset \mathcal{N}_2, m_1 = 0$. Comme $m_2' \prec m_1' \subset \mathcal{N}_1, m_2'$ est finie, et, comme $m_2' \subset \mathcal{N}_2, m_2' = 0$. Alors, $\mathcal{N}_1^{\sharp} = m_1^{\sharp}$ est orthogonale à $\mathcal{N}_2^{\sharp} = m_2^{\sharp}$. D'où le lemme.

LEMME 2.2. — Soit H^{pi} la variété sous-tendue par l'ensemble des variétés purement infinies ⁽³⁾ :

- a. $H^{pi} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\sharp}$;
- b. H^{pi} est purement infinie;
- c. les variétés purement infinies ne sont autres que les variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}, \neq 0$, contenues dans H^{pi} .

Démonstration. — $H^{pi} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ est évident; H^{pi} est aussi invariante par tout $U \in \mathbf{M}_U$, d'où a. Toute variété finie est orthogonale à H^{pi} , d'après le lemme 2.1, d'où b. Par définition de H^{pi} , toute variété purement infinie est contenue dans H^{pi} ; et toute variété de $\widetilde{\mathbf{M}}, \neq 0$, contenue dans H^{pi} , est purement infinie puisque H^{pi} est purement infinie, d'où c.

LEMME 2.3. — Soit H^f la variété sous-tendue par l'ensemble des variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\sharp}$ ⁽³⁾ :

⁽³⁾ Si cet ensemble est vide, la variété sous-tendue est 0 conformément aux conventions usuelles.

- a. $H^f \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$;
 b. H^f est finie;
 c. les variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ ne sont autres que les variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ contenues dans H^f .

Démonstration. — a est immédiat, c résulte aussitôt de la définition de H^f et de b . Prouvons b . Soit $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ la famille des variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$. Soit $\mathcal{N} \subset H^f$, avec $\mathcal{N} \sim H^f$. Pour tout $i \in I$, on a

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{N}_i \subset H^f \cap \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i \quad \text{et} \quad \mathcal{N} \cap \mathcal{N}_i \sim \mathcal{N}_i,$$

d'où, comme \mathcal{N}_i est finie, $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i$. Donc $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_i$, et par suite $\mathcal{N} \supset H^f$. D'où $\mathcal{N} = H^f$, ce qui prouve b .

LEMME 2.4. — Il existe une variété finie \mathcal{N} telle que $\mathcal{N}^{\natural} = H \ominus H^{p_i}$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ une famille maximale (théorème de Zorn) de variétés finies telles que les \mathcal{N}_i^{\natural} soient deux à deux orthogonales. Soit $\mathcal{N} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i$, qui est finie (lemme 1.1). On a $\mathcal{N} \subset H \ominus H^{p_i}$ (lemme 2.1), donc $\mathcal{N}^{\natural} \subset H \ominus H^{p_i}$ (lemme 2.2a). Si $\mathcal{N}' = (H \ominus H^{p_i}) \ominus \mathcal{N}^{\natural} \neq 0$, \mathcal{N}' , n'étant pas purement infinie, contient une variété finie $\widehat{\mathcal{N}} \neq 0$; comme $\mathcal{N}' \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, on a $\widehat{\mathcal{N}}^{\natural} \subset \mathcal{N}'$, de sorte qu'on pourrait ajouter $\widehat{\mathcal{N}}$ à la famille $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ qui ne serait pas maximale. Donc $\mathcal{N}^{\natural} = H \ominus H^{p_i}$.

LEMME 2.5. — a . Toute variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenue dans H^f est finie.

b . L'ensemble des variétés finies sous-tend $H \ominus H^{p_i}$ (³).

Démonstration. — a est immédiat. Prouvons b . Toute variété finie est contenue dans $H \ominus H^{p_i}$ (lemme 2.1). D'autre part, les variétés équivalentes à une variété \mathcal{N} sous-tendent \mathcal{N}^{\natural} ([1], lemme 3.1), donc $H \ominus H^{p_i}$ si l'on prend pour \mathcal{N} la variété \mathcal{N} du lemme 2.4.

Posons $H^i = H \ominus (H^f \oplus H^{p_i})$. On peut grouper les principaux résultats qui précèdent de la manière suivante :

THÉORÈME 1. — Il existe trois variétés H^{p_i} , H^f , H^i , appartenant à $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H , avec les propriétés que voici :

- a . \mathbf{M} induit dans H^{p_i} un anneau de classe purement infinie. Toute variété $\neq 0$ d'un tel anneau est purement infinie.
 b . \mathbf{M} induit dans H^f un anneau de classe finie. Toute variété d'un tel anneau est finie.
 c . \mathbf{M} induit dans H^i un anneau pour lequel : 1° aucune variété n'est purement infinie; 2° aucune variété du centre n'est finie.
 d . H^{p_i} , H^f , H^i sont déterminées univoquement par les propriétés précédentes.

III. — Deuxième réduction des anneaux d'opérateurs.

Elle va être basée sur les notions suivantes :

DÉFINITION 3.1. — Une variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ est dite irréductible si $\mathfrak{N} \neq 0$ et s'il n'existe aucune partition homogène d'ordre 2 majorée par \mathfrak{N} .

DÉFINITION 3.2. — Une variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ est dite simple si $\mathfrak{N} \neq 0$ et s'il existe une partition homogène $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$, avec $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}$ pour $i \in I$, et $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}_i \in \widetilde{\mathfrak{M}}^\sharp$.

DÉFINITION 3.3. — Une variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^\sharp$ est dite homogène si $\mathfrak{N} \neq 0$, et s'il existe une partition homogène $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$ de \mathfrak{N} , les \mathfrak{N}_i étant irréductibles (et simples d'après la définition 3.2).

Quand \mathfrak{M} est de classe finie, les définitions 3.2 et 3.3 coïncident avec les définitions 4.2 et 4.6 de [1] (car alors toute partition homogène est finie : [1], lemme 4.2). La définition 3.1 n'est autre que la définition 4.5 de [1].

LEMME 3.1. — Toute variété irréductible est finie.

Démonstration. — Elle résulte aussitôt des lemmes 1.2 et 1.3.

LEMME 3.2. — Soit \mathfrak{N} une variété irréductible.

a. Soient A et B des opérateurs de \mathfrak{M} réduits par \mathfrak{N} . Les parties induites par A et B dans \mathfrak{N} sont permutables.

b. Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ des variétés orthogonales contenues dans \mathfrak{N} . \mathfrak{N}_1^\sharp et \mathfrak{N}_2^\sharp sont orthogonales.

Démonstration. — Ce lemme est démontré dans [1] (lemmes 4.7 et 4.8). Les démonstrations de [1] ne font nul usage du fait que \mathfrak{M} est de classe finie.

LEMME 3.3. — Soit \mathfrak{N} une variété irréductible et $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ une variété de $\widetilde{\mathfrak{M}}$. On a $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'^\sharp$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}'$. On a $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}''^\sharp$, donc $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}''^\sharp$. De même $\mathfrak{N}'' \subset \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'^\sharp$. \mathfrak{N}' et \mathfrak{N}'' sont orthogonales, donc aussi (lemme 3.2b) $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N}''^\sharp \subset \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}'' \cap \mathfrak{N}'^\sharp \subset \mathfrak{N}''$. Comme \mathfrak{N}' et \mathfrak{N}'' sont complémentaires dans \mathfrak{N} , on a nécessairement

$$\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N}''^\sharp = \mathfrak{N}', \quad \mathfrak{N}'' \cap \mathfrak{N}'^\sharp = \mathfrak{N}''.$$

LEMME 3.4 — Soient $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ deux variétés irréductibles. Pour que $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$, il faut et il suffit que $\mathfrak{N}_1^\sharp = \mathfrak{N}_2^\sharp$.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le lemme 3.1 de [1]. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$, et appliquons le théorème 6 de [1] à \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 . Il existe des variétés m_1, m'_1 (resp. m_2, m'_2) orthogonales complémentaires dans \mathfrak{N}_1 (resp. \mathfrak{N}_2), avec $m_1 \prec m_2, m'_2 \prec m'_1, m'_2$ orthogonale à m'_1 . On a

$$\mathfrak{N}_1^{\natural} = m_1^{\natural} \oplus m'_1{}^{\natural}, \quad \mathfrak{N}_2^{\natural} = m_2^{\natural} \oplus m'_2{}^{\natural};$$

m_2^{\natural} est orthogonale à $m'_1{}^{\natural}, m_1^{\natural} \subset m_2^{\natural}, m'_2{}^{\natural} \subset m'_1{}^{\natural}$, donc l'hypothèse $\mathfrak{N}_1^{\natural} = \mathfrak{N}_2^{\natural}$ entraîne $m_1^{\natural} = m_2^{\natural}, m'_1{}^{\natural} = m'_2{}^{\natural}$. On a $m_1 \sim \bar{m}_1$, avec $\bar{m}_1 \subset m_2$, donc $\bar{m}_1^{\natural} = m_1^{\natural} = m_2^{\natural}$, et, comme $(m_2 \ominus \bar{m}_1)^{\natural}$ est orthogonale à \bar{m}_1^{\natural} (lemme 3.2 b), $(m_2 \ominus \bar{m}_1)^{\natural} = 0, \bar{m}_1 = m_2, m_1 \sim m_2$. De même $m'_1 \sim m'_2$. D'où le lemme.

LEMME 3.5. — Soit \mathfrak{N} une variété homogène, et $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}, (\mathfrak{N}'_j)_{j \in J}$ deux partitions homogènes de \mathfrak{N} , les \mathfrak{N}_i et les \mathfrak{N}'_j étant irréductibles. I et J sont équipotents.

Démonstration. — Si I par exemple est fini, \mathfrak{N} est finie (lemmes 3.1 et 4.5). Alors J est fini ([1], lemme 4.2). D'ailleurs le lemme 3.4 prouve que $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}'_j$. Si I et J n'avaient pas le même nombre d'éléments, on voit aussitôt que \mathfrak{N} serait équivalente à une variété strictement contenue dans \mathfrak{N} , ce qui est absurde. Donc I et J sont équipotents. Supposons maintenant I et J infinis. Considérons un indice particulier $i \in I$. Soit $f_i \in \mathfrak{N}_i$, avec $f_i \neq 0$, et soit \mathfrak{N}_i la plus petite variété de $\tilde{\mathfrak{M}}$ contenant f_i . On a $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_i$, donc, posant $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_i^{\natural}$, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_i \cap \mathfrak{N}$ (lemme 3.3). D'autre part, f_i est orthogonal à toutes les \mathfrak{N}'_j sauf au plus à une infinité dénombrable d'entre elles, soit $(\mathfrak{N}'_j)_{j \in K}$. Donc $f_i \in \bigoplus_{j \in K} \mathfrak{N}'_j$, et par suite $\mathfrak{N}_i \subset \bigoplus_{j \in K} \mathfrak{N}'_j$. Ceci posé, comme $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}_{i'}$ pour $i' \in I$, il existe une $\mathfrak{N}_{i'} \subset \mathfrak{N}_{i'}$ avec les propriétés suivantes :

- 1° $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}_{i'}$, et par suite $\mathfrak{N}_i^{\natural} = \mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{i'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_{i'}$;
- 2° $\mathfrak{N}_{i'}$ est orthogonale aux \mathfrak{N}'_j sauf au plus à une infinité dénombrable d'entre elles.

Comme les $\mathfrak{N}_{i'}$ sous-tendent \mathfrak{N} , les $\mathfrak{N}_{i'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_{i'}$ sous-tendent \mathfrak{N} . Alors, pour toute \mathfrak{N}'_j existe une $\mathfrak{N}_{i'}$ non orthogonale à \mathfrak{N}'_j (sinon \mathfrak{N}'_j serait orthogonale à \mathfrak{N} ; donc toute \mathfrak{N}'_j , équivalente à \mathfrak{N}'_j , serait orthogonale à $\mathfrak{N} \in \tilde{\mathfrak{M}}$ donc \mathfrak{N} serait orthogonale à $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}, \mathfrak{N} = 0, \mathfrak{N}_{i'} = 0$ contrairement à $f_i \neq 0$). D'après ce qui précède, i_j ne peut être le même que pour une infinité dénombrable au plus d'indices j . On en déduit aussitôt :

$$\text{puissance de J} \leq \text{puissance de I} \times \aleph_0 = \text{puissance de I},$$

et, par symétrie entre I et J, le lemme est démontré.

Nous pouvons alors poser la définition suivante :

DÉFINITION 3.4. — Soit \mathfrak{N} une variété homogène. On appellera degré de \mathfrak{N} la puissance de toute partition homogène de \mathfrak{N} dont les éléments sont irréductibles.

Les lemmes 1.5 et 3.1 prouvent aussitôt que \mathfrak{N} , homogène, est finie si et seulement si son degré est fini.

LEMME 3.6. — Si \mathfrak{N} est une variété homogène de degré α , toute variété \mathfrak{N} de $\tilde{\mathfrak{M}}^\alpha$ contenue dans \mathfrak{N} et $\neq 0$ est homogène de degré α .

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$ une partition homogène de \mathfrak{N} , les \mathfrak{N}_i étant irréductibles et I ayant pour puissance α . Les $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_i$ forment une partition homogène de \mathfrak{N} et sont irréductibles, ce qui prouve le lemme.

LEMME 3.7. — Soit α un nombre cardinal. S'il existe des variétés homogènes de degré α , il en existe une, soit H^α , plus grande que toutes les autres. Alors, les variétés homogènes de degré α ne sont autres que les variétés $\neq 0$ de $\tilde{\mathfrak{M}}^\alpha$ contenues dans H^α .

Démonstration. — Considérons, parmi les partitions dont les éléments sont des variétés homogènes de degré α , une partition maximale (théorème de Zorn), soit $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$. Soit $H^\alpha = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}_i$. Soit, pour $i \in I$, $(\mathfrak{N}'_j)_{j \in J}$ une partition de \mathfrak{N}_i dont les éléments sont irréductibles; on peut supposer l'ensemble d'indices J indépendant de i et de puissance α . Soit $\mathfrak{N}^j = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{N}'_i$. Les \mathfrak{N}^j , où $j \in J$, forment une partition homogène d'ordre α de H^α . De plus, \mathfrak{N}^j est irréductible; car, soit (m, m') une partition homogène majorée par \mathfrak{N}^j ; soient $m_i = m \cap \mathfrak{N}'_i$, $m'_i = m' \cap \mathfrak{N}'_i$; comme $m \sim m' \neq 0$, on a $m_i \sim m'_i \neq 0$ pour un $i \in I$, de sorte que (m_i, m'_i) est une partition homogène majorée par \mathfrak{N}'_i , ce qui est absurde. Donc H^α est homogène de degré α .

Maintenant, soit \mathfrak{N} une variété homogène de degré α . Si

$$\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \ominus (\mathfrak{N} \cap H^\alpha) \neq 0,$$

$\overline{\mathfrak{N}}$ est homogène de degré α d'après le lemme 3.6, donc on peut ajouter $\overline{\mathfrak{N}}$ à la partition $(\mathfrak{N}_i)_{i \in I}$, ce qui est absurde. Donc $\overline{\mathfrak{N}} = 0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{N} \subset H^\alpha$. H^α est donc bien la plus grande des variétés homogènes de degré α . La fin du lemme résulte aussitôt du lemme 3.6.

LEMME 3.8. — Si α et β sont deux nombres cardinaux différents pour lesquels H^α et H^β existent, H^α et H^β sont orthogonales.

Démonstration. — Si $H^\alpha \cap H^\beta \neq 0$, $H^\alpha \cap H^\beta$ est homogène de degré α et de

degré β (lemme 3.6), ce qui est absurde. Donc $H^\alpha \cap H^\beta = 0$, et le lemme en résulte puisque $H^\alpha \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ et $H^\beta \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$.

LEMME 3.9. — *Toute variété irréductible \mathcal{N}_1 contient une variété irréductible simple.*

Démonstration. — Considérons les partitions homogènes qui contiennent \mathcal{N}_1 comme élément, et soit $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ une telle partition maximale (théorème de Zorn). Soit $\mathcal{N}_0 = H \ominus \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i \right)$. Raisonnant exactement comme dans [1] (lemme 4.9), on détermine, pour $i \in I$ ou $i = 0$, des variétés $m_i \subset \mathcal{N}_i$, équivalentes, $\neq 0$, sous-tendant une variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$. Alors m_1 est la variété du lemme.

THÉORÈME 2. — *Soit A l'ensemble des nombres cardinaux inférieurs ou égaux à la dimension de H. Il existe une famille $(H^\alpha)_{\alpha \in A}$ avec les propriétés suivantes :*

- a. $H^\alpha = 0$ ou H^α est homogène de degré α ; l'ensemble des variétés homogènes de degré α est l'ensemble des variétés $\neq 0$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ contenues dans H^α ; cette propriété détermine univoquement H^α ;
- b. H^α et H^β sont orthogonales si $\alpha \neq \beta$;
- c. $H^0 = H \ominus \left(\bigoplus_{\alpha \in A} H^\alpha \right)$ ne contient aucune variété irréductible;
- d. $H^\alpha \subset H^f$ si α est fini, $H^\alpha \subset H^i$ si α est infini.

Démonstration. — a et b sont déjà prouvés, prouvons c. Si H^0 contient une variété irréductible, H^0 contient (lemme 3.9) une variété irréductible simple m , et, comme $H^0 \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, H^0 contient la variété homogène m^{\natural} . Le degré de cette variété homogène est évidemment un nombre de A, soit α , de sorte que $m^{\natural} \subset H^\alpha$, d'où absurdité. Donc H^0 ne contient aucune variété irréductible.

Prouvons d. On a déjà observé que, si α est fini, H^α est finie, donc $H^\alpha \subset H^f$. Soit maintenant $\alpha \in A$ un nombre cardinal infini tel que $H^\alpha \neq 0$. Il existe une variété irréductible \mathcal{N} telle que $H^\alpha = \mathcal{N}^{\natural}$. \mathcal{N} est finie (lemme 3.1), donc \mathcal{N} et par suite \mathcal{N}^{\natural} sont orthogonales à H^{p_i} (lemme 2.1). D'autre part, si $H^\alpha \cap H^f \neq 0$, $H^\alpha \cap H^f$ est homogène de degré α (lemme 3.6), et finie, ce qui est absurde; donc H^α est orthogonale à H^f . Donc $H^\alpha \subset H^i$.

Nous allons voir maintenant que \mathbf{M} induit dans chaque H^α , ($\alpha \in A$), un anneau de structure simple. Pour mieux comprendre l'intérêt du théorème suivant, rappelons que (indépendamment de tout anneau \mathbf{M}), si $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés deux à deux orthogonales sous-tendant H, un opérateur A est parfaitement déterminé par le tableau à double entrée des opérateurs $P_{\mathcal{N}_i} A P_{\mathcal{N}_j}$. Si de plus les \mathcal{N}_i ont même dimension, et si U_{ij} est un opérateur partiellement isométrique admettant \mathcal{N}_i pour variété initiale et \mathcal{N}_j pour

variété finale, on peut aussi bien définir A par les $U_{i_0}(P_{\mathfrak{M}_i}AP_{\mathfrak{M}_j})U_{i_0} = U_{i_0}AU_{i_0}$, i_0 étant un indice particulier de I . Ces opérateurs appliquent \mathfrak{M}_{i_0} dans \mathfrak{M}_{i_0} et s'annulent dans $H \ominus \mathfrak{M}_{i_0}$, de sorte qu'on peut se contenter de considérer leurs restrictions A_{ij} à \mathfrak{M}_{i_0} . La représentation matricielle correspond au cas où les \mathfrak{M}_i sont de dimension 1, et le calcul sur les A s'effectue d'ailleurs à l'aide des A_{ij} par les règles habituelles du calcul matriciel.

Si \mathbf{M} est abélien, H est, on le voit aussitôt, irréductible, de sorte que, avec les notations précédentes $H = H^1$. On va voir que l'étude de \mathbf{M} dans une H^α se ramène à l'étude des anneaux abéliens.

THÉORÈME 3. — *Supposons H homogène de degré α . Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ une partition homogène de H , les \mathfrak{M}_i étant irréductibles, I étant de puissance α . Soit $U_{ij} \in \mathbf{M}_{P_1}$, admettant \mathfrak{M}_i pour variété initiale, \mathfrak{M}_j pour variété finale. Soit i_0 un indice particulier de I . Il existe dans l'espace \mathfrak{M}_{i_0} un anneau abélien d'opérateurs, soit \mathbf{N} , avec la propriété suivante : l'opérateur borné A de H est dans \mathbf{M} si et seulement si les restrictions A_{ij} à \mathfrak{M}_{i_0} des $U_{i_0}AU_{i_0}$ sont dans \mathbf{N} . \mathbf{N} n'est autre que l'anneau induit par \mathbf{M} dans \mathfrak{M}_{i_0} .*

Démonstration. — Les opérateurs de \mathbf{M} réduits par \mathfrak{M}_{i_0} induisent dans \mathfrak{M}_{i_0} un anneau d'opérateurs \mathbf{N} qui est abélien (lemme 3.2 a). Si $A \in \mathbf{M}$, $U_{i_0}AU_{i_0} \in \mathbf{M}$ applique \mathfrak{M}_{i_0} dans \mathfrak{M}_{i_0} et s'annule dans $H \ominus \mathfrak{M}_{i_0}$, donc est réduit par \mathfrak{M}_{i_0} , et sa partie induite A_{ij} dans \mathfrak{M}_{i_0} est dans \mathbf{N} . Réciproquement, si $A_{ij} \in \mathbf{N}$, les A_{ij} , donc A , sont invariants par tout opérateur unitaire de \mathbf{M}' , de sorte que $A \in \mathbf{M}$.

IV. — Relations avec la réduction de J. von Neumann.

Nous allons, dans toute la fin de cet article supposer H séparable, et utiliser sans explications les notations de [5] en même temps que les notations précédentes.

\mathbf{M}^\sharp est engendré par une résolution de l'unité $E(\lambda)$. Soit $\sigma(\lambda)$ une N -fonction équivalente à $E(\lambda)$. Il existe une représentation de H comme somme directe généralisée d'espaces $H(\lambda)$ avec la N -fonction $\sigma(\lambda)$, à laquelle appartiennent la décomposition de l'unité $E(\lambda)$ et l'anneau \mathbf{M}^\sharp ([5], théorèmes III et IV). Soit $\mathbf{M} \approx \Sigma \mathbf{M}(\lambda)$ la décomposition de \mathbf{M} en facteurs ([5], théorème VII), bien déterminée si l'on néglige les ensembles de σ -mesure 0. Il s'agit d'étudier la classe de ces facteurs suivant la valeur de λ . Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 4.1. — *Soit $E \in \mathbf{M}$ un projecteur proprement infini ^(*), $E \sim \Sigma E(\lambda)$ sa décomposition. Les $E(\lambda)$ sont nuls ou infinis σ -presque-partout.*

(*) Ce qui signifie que la variété correspondant à E est proprement infinie. De même plus loin pour les projecteurs finis, irréductibles, etc. Nous employons l'expression σ -presque-partout pour dire : sauf sur un ensemble de σ -mesure nulle.

Démonstration. — Il existe (lemme 4.3) des projecteurs E_1, E_2 de \mathbf{M} avec

$$E_1 E_2 = 0, \quad E_1 + E_2 = E, \quad E \sim E_1 \sim E_2.$$

Soient $E_1 \sim \Sigma E_1(\lambda)$, $E_2 \sim \Sigma E_2(\lambda)$ les décompositions de E_1, E_2 . $E_1(\lambda), E_2(\lambda)$ sont des projecteurs,

$$E(\lambda) = E_1(\lambda) + E_2(\lambda), \quad E_1(\lambda) E_2(\lambda) = 0,$$

tout ceci σ -presque-partout. $E \sim E_1$ signifie qu'il existe un $U \in \mathbf{M}$ avec $U^* U = E$, $U U^* = E_1$, d'où, si $U \sim \Sigma U(\lambda)$,

$$(U(\lambda))^* U(\lambda) = E(\lambda), \quad U(\lambda) (U(\lambda))^* = E_1(\lambda),$$

c'est-à-dire $E(\lambda) \sim E_1(\lambda)$; de même $E(\lambda) \sim E_2(\lambda)$ (σ -presque-partout). Si $E(\lambda) \neq 0$, ceci prouve que $E(\lambda)$ est infini.

LEMME 4.2. — Soit $E \in \mathbf{M}$ un projecteur fini, $E \sim \Sigma E(\lambda)$ sa décomposition. Les $E(\lambda)$ sont finis σ -presque-partout.

Démonstration. — Utilisons plus spécialement les notations du lemme 17 de [5]. Les couples (λ, \bar{V}) dans l'espace $r \times \mathcal{S}_p$, vérifiant $\lambda \in \Delta'_p$ et (21.2) de [5] forment un ensemble D_p qui est borélien. Comme dans la démonstration du lemme 7 de [5], il en résulte l'existence d'un $V(\lambda) \in \mathbf{M}(\lambda)$, dépendant mesurablement de λ , avec, pour $\lambda \in M_\infty$,

$$V(\lambda)^* V(\lambda) = E(\lambda), \quad V(\lambda) V(\lambda)^* = V(\lambda) V(\lambda)^* E(\lambda) \neq E(\lambda),$$

et, pour $\lambda \notin M_\infty$, $V(\lambda) = 0$. Soit $V \sim \Sigma V(\lambda)$ [les $V(\lambda)$ sont partiellement isométriques, donc $\|V(\lambda)\| \leq 1$]. Soit $F(\lambda)$ l'opérateur égal à $1(\lambda)$ pour $\lambda \in M_\infty$, à $0(\lambda)$ pour $\lambda \notin M_\infty$ [$F(\lambda)$ est mesurable puisque M_∞ l'est], et $F \sim \Sigma F(\lambda)$ qui est un projecteur de \mathbf{M}^1 . On a $V^* V = EF$, $V V^* = V V^* EF$; comme E est fini, EF est fini, donc $V V^* EF = EF$; pour $\lambda \in M_\infty$ on a donc $V(\lambda) V(\lambda)^* E(\lambda) = E(\lambda)$ σ -presque-partout. Donc M_∞ est de σ -mesure nulle.

LEMME 4.3. — Soit E un projecteur irréductible, $E \sim \Sigma E(\lambda)$ sa décomposition. Les $E(\lambda)$ sont nuls ou minimaux σ -presque-partout.

Démonstration. — Utilisons encore les notations du lemme 17 de [5]. Considérons les couples (λ, \bar{E}) dans $r \times \mathcal{S}_p$ tels que $\lambda \in \Delta'_p$ et tels que

$$\begin{aligned} \bar{E} \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)} &= \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)} \bar{E}, & \bar{E} \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda)^* \mathcal{J}^{(\lambda)} &= \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda)^* \mathcal{J}^{(\lambda)} \bar{E}, \\ \bar{E} &= \bar{E}^*, \bar{E}^2 = \bar{E} \neq 0, & \bar{E} \mathcal{J}^{(\lambda)-1} E(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)} &= \bar{E} \neq \mathcal{J}^{(\lambda)-1} E(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

A la manière habituelle, on prouve que ces couples forment un ensemble

borélien D_p dans $r \times \mathcal{S}_p$. D'où l'existence d'un $E'(\lambda) \in \mathbf{M}(\lambda)$, dépendant mesurablement de λ , projecteur pour tout λ , avec

$$E'(\lambda)E(\lambda) = E'(\lambda) \neq E(\lambda), \quad E'(\lambda) \neq o(\lambda),$$

lorsque λ appartient à la projection \mathbf{M} de $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_\infty$ sur r , et $E'(\lambda) = o(\lambda)$ pour les autres valeurs de λ . \mathbf{M} est l'ensemble des points pour lesquels $E(\lambda)$ n'est ni nul ni minimal. Soit $E' \sim \Sigma E'(\lambda)$. E' est un projecteur de \mathbf{M} avec $E' \leq E$. Puisque E est irréductible, on a (lemme 3.3) $E' = EF$ avec $F \in \mathbf{M}^\dagger$. Soit $F \sim \Sigma F(\lambda)$, avec $F(\lambda) = 1(\lambda)$ ou $o(\lambda)$ pour tout λ . On a alors $E'(\lambda) = E(\lambda)$ ou $o(\lambda)$ σ -presque-partout. Donc \mathbf{M} est de σ -mesure nulle.

LEMME 4.4. — Si C_{I_m} n'est pas de σ -mesure nulle, il existe un projecteur irréductible $E \in \mathbf{M}$, de décomposition $E \sim \Sigma E(\lambda)$, tel que $E(\lambda) \neq o$ pour $\lambda \in C_{I_m}$, $E(\lambda) = o$ pour $\lambda \notin C_{I_m}$.

Démonstration. — Soit H^* un espace de Hilbert de dimension mn ($n = 1, 2, \dots, \infty$) et $\mathbf{M}^*, \mathbf{M}^{*'} une factorisation couplée de classe (I_m, I_n) dans H^* . $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe (I_m, I_n) si et seulement si il existe un isomorphisme de H^* sur $H(\lambda)$ qui transforme \mathbf{M}^* en $\mathbf{M}(\lambda)$. Comme dans le lemme 20 de [5], les paires (λ, U) dans $r \times \mathcal{S}_{mn}$ pour lesquelles : 1° $\lambda \in \Delta'_{mn}$; 2° U est unitaire dans H^* ; 3° $\mathcal{J}^{(\lambda)}U$ transforme \mathbf{M}^* en $\mathbf{M}(\lambda)$ forment un ensemble borélien. D'où l'existence pour $\lambda \in C_{I_m, I_n}$ d'un $U(\lambda) \in \mathcal{S}_{mn}$ tel que l'image inverse, dans l'application $\lambda \rightarrow U(\lambda)$, de tout ouvert de \mathcal{S}_{mn} soit σ -mesurable. Soit d'autre part $\bar{E} \in \mathcal{S}_{mn}$ un projecteur minimal de \mathbf{M}^* . On prouve à la manière habituelle que $\mathcal{J}^{(\lambda)}U(\lambda)\bar{E}U(\lambda)^{-1}\mathcal{J}^{(\lambda)-1} = E_n(\lambda)$ est un projecteur de $\mathbf{M}(\lambda)$ dépendant σ -mesurablement de λ pour $\lambda \in C_{I_m, I_n}$. Posons $E(\lambda) = E_n(\lambda) \neq o$ pour $\lambda \in C_{I_m, I_n}$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$), $E(\lambda) = o$ pour $\lambda \notin C_{I_m}$. $E(\lambda)$ dépend σ -mesurablement de λ : $E \sim \Sigma E(\lambda)$ est un projecteur de \mathbf{M} . On va prouver que E est irréductible, et le lemme sera établi.$

D'abord $E \neq o$ puisque $E(\lambda) \neq o$ sur l'ensemble C_{I_m} de σ -mesure non nulle. Ensuite, supposons des projecteurs E_1, E_2 de \mathbf{M} avec

$$E_1 E_2 = o, \quad E_1 \leq E, \quad E_2 \leq E, \quad E_1 \sim E_2.$$

Soient $E_1 \sim \Sigma E_1(\lambda)$, $E_2 \sim \Sigma E_2(\lambda)$ leurs décompositions. On a

$$E_1(\lambda)E_2(\lambda) = o, \quad E_1(\lambda) \leq E(\lambda), \quad E_2(\lambda) \leq E(\lambda), \quad E_1(\lambda) \sim E_2(\lambda)$$

σ -presque-partout. Comme $E(\lambda)$ est nul ou minimal pour tout λ , il en résulte $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = o$ σ -presque-partout, donc $E_1 = E_2 = o$, de sorte que E_1, E_2 ne forment pas une partition : E est irréductible.

LEMME 4.5. — Si H est homogène de degré α ($\alpha = 1, 2, \dots, \mathfrak{S}_0$), $\mathbf{M}(\lambda)$ est un facteur de classe I_α σ -presque-partout.

Démonstration. — Soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition homogène de $\mathfrak{1}$, les E_i étant irréductibles et I de puissance α . On a $\mathfrak{1} = \sum_{i=1}^{\alpha} E_i$ au sens de la convergence forte des suites d'opérateurs (si α est fini il n'y a même pas de question de convergence). Soit $E_i \sim \Sigma E_i(\lambda)$ la décomposition de E_i . Les $E_i(\lambda)$ sont des projecteurs nuls ou minimaux σ -presque-partout d'après le lemme 4.3, et $E_i(\lambda)E_j(\lambda) = 0$ pour $i \neq j$ σ -presque-partout. D'après [5] (p. 444), $\mathfrak{1} = \sum_{i=1}^{\alpha} E_i$ entraîne $\mathfrak{1}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\alpha} E_i(\lambda)$ σ -presque-partout, à condition de grouper éventuellement certains termes dans la série. Comme les $E_i(\lambda)$ sont des projecteurs orthogonaux, on a $\mathfrak{1}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\alpha} E_i(\lambda)$ au sens usuel σ -presque-partout. Pour achever de prouver le lemme, il suffit donc de prouver que $E_i(\lambda) \neq 0$ σ -presque-partout. Or, si l'on avait $E_i(\lambda) = 0$ sur un ensemble M de σ -mesure non nulle pour un $i \in I$, on aurait $E_i(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in M$ et pour tout $i \in I$ puisque $E_i \sim E_j$ entraîne $E_i(\lambda) \sim E_j(\lambda)$, d'où $\mathfrak{1}(\lambda) = 0$ σ -presque-partout sur M , ce qui est absurde.

LEMME 4.6. — Si $H = H^f \cap H^0$, c'est-à-dire si H est finie et ne contient aucune variété irréductible, $\mathbf{M}(\lambda)$ est un facteur de classe II_1 σ -presque-partout.

Démonstration. — $\mathfrak{1}(\lambda)$ est fini σ -presque-partout d'après le lemme 4.2. C_{1_m} est de σ -mesure-nulle pour $m = 1, 2, \dots, \infty$ d'après le lemme 4.4. Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe II_1 σ -presque-partout.

LEMME 4.7. — Si $H = H^i \cap H^0$, $\mathbf{M}(\lambda)$ est un facteur de classe II_{∞} σ -presque-partout.

Démonstration. — Par définition de H^f , H^i est proprement infinie, donc $\mathfrak{1}(\lambda)$ est infini σ -presque-partout d'après le lemme 4.1. C_{1_m} est de σ -mesure-nulle pour $m = 1, 2, \dots, \infty$ d'après le lemme 4.4. Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe II_{∞} ou III σ -presque-partout. Soit \mathfrak{N} une variété finie telle que $\mathfrak{N}^{\sharp} = H$ (lemme 2.4), et soit $P_{\mathfrak{N}} \sim \Sigma E(\lambda)$. $E(\lambda)$ est fini σ -presque-partout (lemme 4.2), et un raisonnement déjà fait prouve que $E(\lambda) \neq 0$ σ -presque-partout (à cause de $\mathfrak{N}^{\sharp} = H$). Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est σ -presque-partout de classe II_{∞} .

LEMME 4.8 — Si $H = H^{p_i}$, $\mathbf{M}(\lambda)$ est un facteur de classe II_{∞} ou III σ -presque-partout.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le raisonnement de la démonstration précédente.

Nous pouvons maintenant aborder le cas général. H est sous-tendue par les variétés suivantes de $\widetilde{\mathbf{M}}^\sharp$, deux à deux orthogonales (nous écrivons ∞ au lieu de \mathfrak{S}_0) :

$$H^1, H^2, \dots, H^\infty; H^0 \cap H^j; H^0 \cap H^i; H^{pi}.$$

Reprenant la résolution de l'identité $E(\lambda)$ qui engendre \mathbf{M}^\sharp , on peut supposer, au besoin en remplaçant la représentation de H avec les $H(\lambda)$ par une représentation équivalente ([5], définition 3) :

$$\begin{aligned} E(-3) - E(-4) &= P_{H^{pi}}; & E(-2) - E(-3) &= P_{H^0 \cap H^i}; \\ E(-1) - E(-2) &= P_{H^0 \cap H^j}; & E(0) - E(-1) &= P_{H^\infty}; \\ E(n) - E(n-1) &= P_{H^n} & \text{pour } n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Soit A_1, A_2, \dots une suite d'opérateurs engendrant \mathbf{M} . Soit $A_i \sim \Sigma A_i(\lambda)$ la décomposition de A_i . On peut supposer que $\mathbf{M}(\lambda)$ est l'anneau engendré par les $A_i(\lambda)$.

On a, d'après les définitions (cf. notamment [5], p. 422, ligne 8), $E(1) - E(0) \sim \Sigma F(\lambda)$, où $F(\lambda) = 1$ pour $0 < \lambda \leq 1$, $F(\lambda) = 0$ pour $\lambda \leq 0$, $\lambda > 1$. Donc $A_i(E(1) - E(0)) \sim \Sigma A_i(\lambda)F(\lambda)$. Si $0 < \lambda \leq 1$, $A_i(\lambda)F(\lambda) = A_i(\lambda)$, de sorte que $\mathbf{M}(\lambda)$ ne change pas si l'on remplace les A_i par les $A_i(E(1) - E(0))$. Or les $A_i(E(1) - E(0)) = A_i P_{H^i}$ engendrent $\mathbf{M}P_{H^i}$. Ainsi le facteur $\mathbf{M}(\lambda)$, pour $0 < \lambda \leq 1$, ne change pas si l'on remplace \mathbf{M} par $\mathbf{M}P_{H^i}$. Par suite, pour étudier la nature des $\mathbf{M}(\lambda)$ quand $0 < \lambda \leq 1$, on peut supposer $H = H^1$. Un raisonnement analogue vaut pour les autres valeurs de λ , et les lemmes précédents prouvent alors que :

- Si $n - 1 < \lambda \leq n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe I_n .
- Si $-1 < \lambda \leq 0$, $\mathbf{M}(\lambda)$ » I_∞ .
- Si $-2 < \lambda \leq -1$, $\mathbf{M}(\lambda)$ » II_1 .
- Si $-3 < \lambda \leq -2$, $\mathbf{M}(\lambda)$ » II_∞ .
- Si $-4 < \lambda \leq -3$, $\mathbf{M}(\lambda)$ » II_∞ ou III.

Pour résoudre le problème de mesurabilité de von Neumann ([5], p. 471), il suffit donc de se placer dans le cas où \mathbf{M} est de classe purement infinie. Ceci, d'ailleurs, ne simplifie nullement la solution. Notons seulement qu'une manière plus précise, et assez naturelle, de poser le problème est la suivante : si \mathbf{M} est de classe purement infinie, les $\mathbf{M}(\lambda)$ sont-ils de classe III σ -presque-partout ? Jusqu'à nouvel ordre, il pourrait arriver que tous les $\mathbf{M}(\lambda)$ soient de classe II_∞ !!

Bibliographie.

- [1] J. DIXMIER, *Les anneaux d'opérateurs de classe finie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261).
 - [2] I. KAPLANSKY, *Projections in Banach algebras* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 235-249).
 - [3] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229).
 - [4] J. VON NEUMANN, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren* (*Math. Ann.*, t. 102, 1929, p. 370-427).
 - [5] J. VON NEUMANN, *On rings of operators. Reduction theory* (*Ann. Math.*, t. 50, 1949, p. 401-485).
- 