HUBERT DELANGE

Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes (deuxième mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 67 (1950), p. 199-242

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__199_0>

SUR LES

THÉORÈMES INVERSES DES PROCÉDÉS DE SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

(DEUXIÈME MÉMOIRE).

PAR M. HUBERT DELANGE.

Introduction.

Ce Mémoire fait suite à notre Mémoire de même titre paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, tome 67.

Dans ce dernier Mémoire, nous avons étudié les théorèmes inverses que nous avons appelés *de type élémentaire*, dans un cas spécial. Dans celui-ci, nous étudierons d'abord, au Chapitre I, les théorèmes de type non élémentaire, dans le cas spécial correspondant au précédent; puis, au Chapitre II, nous indiquerons comment on peut, à partir de chacun des énoncés de notre premier Mémoire et du Chapitre I de celui-ci, former un énoncé plus général.

Le lecteur devra avoir présent à l'esprit ce qui a été dit dans les préliminaires de notre premier Mémoire, en particulier les remarques des paragraphes 1.1.2 et 1.2 et les définitions des différentes fonctions associées, au Chapitre II, à une fonction $s(t)$ définie pour $t \geqq 0$ et bornée sur tout intervalle fini.

Rappelons en outre le théorème suivant énoncé par Karamata et qui résulte des travaux de Wiener :

$N(t)$ *étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *On a* $\int_0^{+\infty} N(t)\, t^{iu}\, dt \neq 0$ *pour tout* u *réel.*

(2) *L'ensemble des fonctions de la forme* $\sum_1^n \alpha_j N(\beta_j t)$, *où les* α_j *sont des constantes réelles ou complexes et les* β_j *des constantes réelles positives, est partout dense dans l'espace* $L_1(0, +\infty)$.

(3) *Toute fonction $f(t)$ mesurable et bornée sur* $(0, +\infty)$ *et satisfaisant à*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{N}(xt) f(t)\, dt = 0 \qquad \textit{pour tout } x \textit{ positif}$$

est nécessairement nulle presque partout (¹).

Notons que la propriété (3) est manifestement équivalente à

(3′) *Si $f(t)$ est mesurable, s'il existe un nombre positif* M *tel que l'on ait presque partout sur* $(0, +\infty)$ $|f(t)| \leqq \mathrm{M}$, *et si*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{N}(xt) f(t)\, dt = 0 \qquad \textit{pour tout } x \textit{ positif},$$

$f(t)$ est nécessairement nulle presque partout sur $(0, +\infty)$.

[Car on peut changer la valeur de $f(t)$ sur un ensemble de mesure nulle sans changer l'intégrale.]

I. — Théorèmes de type non élémentaire, dans le cas canonique.

1.1. Il est entendu une fois pour toutes que dans tout ce Chapitre nous faisons encore les hypothèses indiqées au pargraphe 3.1 de notre premier Mémoire, à savoir :

(1) *Pour chaque valeur de x réelle et supérieure à un certain nombre a positif ou nul, $\psi(t, x)$, qui est réelle ou complexe, est une fonction de t sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *et l'on a*

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, dt = 1.$$

(2) *$\varphi(t, x)$ est la fonction définie pour $x > a$ et $t \geqq 0$ par*

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du.$$

(¹) Cet énoncé se trouve dans Karamata [6], p. 62 (les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article).

La démonstration repose sur le théorème suivant dû à N. Wiener :

F(x) *étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$, *pour que l'ensemble des fonctions de la forme*

$$\sum_1^n \lambda_j \mathrm{F}(x + h_j),$$

où les λ_j sont des constantes complexes et les h_j des constantes réelles, soit partout dense dans l'espace $\mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, *il faut et il suffit que la transformée de Fourier de* F(x) *n'ait aucun zéro réel* (*voir* [12], th. 11, p. 9).

(3) *Il existe une fonction positive ou nulle* $F(t)$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et telle que l'on ait, quel que soit* $x > a$ *et quel que soit* $t \geqq 0$,

$$|x\psi(xt, x)| \leqq F(t).$$

(4) *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $x\psi(xt, x)$ *tend vers une fonction limite* $N(t)$.

(5) $s(t)$ *est une fonction réelle ou complexe définie pour* $t \geqq 0$, *mesurable et bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$.

En outre, nous faisons l'hypothèse :

(4′) *On a* $\int_0^{+\infty} N(t)\, t^{iu}\, dt \neq 0$ *pour tout* u *réel.*

Ces différentes hypothèses resteront sous-entendues dans tous nos énoncés.

1.1.1. Nous pouvons répéter les remarques suivantes faites dans notre premier Mémoire :

1° On a

$$\int_0^{+\infty} N(t)\, dt = 1.$$

2° L'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ est certainement convergente pour $x > a$ si $s(t)$ est bornée. Elle l'est aussi sous la seule hypothèse que $w_s(\lambda) < +\infty$ si $F(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, ou simplement si $x\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

3° Dans ces deux derniers cas, si $s(t)$ non seulement satisfait à $w_s(\lambda) < +\infty$ mais est à variation bornée sur tout intervalle fini et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ est aussi convergente et est égale à la précédente.

4° Lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$, on a pour $x > \alpha a$, avec α positif quelconque,

$$\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) [s(xt) - s(x)]\, dt. \tag{1}$$

1.1.2. Rappelons aussi les deux résultats suivants établis dans notre premier Mémoire [et où l'hypothèse (4′) n'est pas nécessaire] :

Théorème A. — *Supposons que, pour chaque* $x > a$, *la fonction* $x\psi(xt, x)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(1, +\infty)$, *et que l'on ait*

$$\int_1^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \log t\, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Alors, si $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ *et si*

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt = \mathrm{O}[1] \qquad (x \to +\infty),$$

on a

$$s(t) = \mathrm{O}[1] \qquad (t \to +\infty).$$

THÉORÈME B. — *Supposons que la fonction* $\psi(t, x)$ *soit réelle positive ou nulle, que, pour chaque* $x > a$, *la fonction* $x\psi(xt, x)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(1, +\infty)$, *et que l'on ait*

$$\int_0^{+\infty} x\psi(xt, x) \log t\, dt = \mathrm{O}[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Alors, si $s(t)$ *est réelle et satisfait à* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *et si l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ *est convergente pour* $x > a$ *et reste bornée quand* x *tend vers* $+\infty$, *on a*

$$s(t) = \mathrm{O}[1] \qquad \textit{pour } t \textit{ tendant vers } +\infty.$$

1.2. Ceci étant, nous établirons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons que* $s(t)$ *soit bornée et posons*

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt.$$

Si, quel que soit k *positif, on a pour* x *infini*

$$(2) \qquad \Psi(kx) - \Psi(x) = \mathrm{o}[1],$$

alors, quelle que soit la fonction $g(t)$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *on a pour* x *infini*

$$(3) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt = \mathrm{G}\Psi(x) + \mathrm{o}[1], \qquad \textit{avec} \quad \mathrm{G} = \int_0^{+\infty} g(t)\, dt.$$

Nous supposerons que $|s(t)| \leq \mathrm{M}$ et nous poserons

$$\Psi^*(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \mathrm{N}\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt \qquad (x \text{ réel positif quelconque}).$$

On voit d'abord que, pour $x > a$,

$$\begin{aligned} \Psi(x) - \Psi^*(x) &= \int_0^{+\infty} \left[\psi(t, x) - \frac{1}{x}\mathrm{N}\left(\frac{t}{x}\right)\right] s(t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} [x\psi(xt, x) - \mathrm{N}(t)]\, s(xt)\, dt. \end{aligned}$$

La fonction sous le signe $\int$ est de module au plus égal à $2\,\mathrm{MF}(t)$ et tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Par suite $\Psi(x) - \Psi^\star(x)$ tend vers zéro pour x infini.

Il en résulte que, quel que soit k positif, $\Psi^\star(kx) - \Psi^\star(x)$ tend vers zéro pour x infini.

Ceci étant, soit ε un nombre positif quelconque.

Il résulte de l'hypothèse $(4')$ indiquée au paragraphe 1.1 que l'on peut trouver un système de nombres réels ou complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et un système de nombres réels positifs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, tels que

$$\int_0^{+\infty} \left| \sum_1^n \alpha_j \mathrm{N}(\beta_j t) - g(t) \right| dt \leqq \varepsilon.$$

Nous écrirons alors (en supposant $x > a$) :

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \mathrm{G}\Psi(x) = \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \Psi^\star\left(\frac{x}{\beta_j}\right) \right]$$
$$+ \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \left[\Psi^\star\left(\frac{x}{\beta_j}\right) - \Psi^\star(x) \right]$$
$$+ \left[\sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} - \mathrm{G} \right] \Psi^\star(x) + \mathrm{G}[\Psi^\star(x) - \Psi(x)].$$

Mais

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt = \int_0^{+\infty} g(t)\, s(xt)\, dt,$$

et

$$\Psi^\star\left(\frac{x}{\beta_j}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta_j}{x} \mathrm{N}\left(\frac{\beta_j t}{x}\right) s(t)\, dt = \beta_j \int_0^{+\infty} \mathrm{N}(\beta_j t)\, s(xt)\, dt,$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \Psi^\star\left(\frac{x}{\beta_j}\right) = \int_0^{+\infty} \left[g(t) - \sum_1^n \alpha_j \mathrm{N}(\beta_j t) \right] s(xt)\, dt,$$

d'où résulte que

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \Psi^\star\left(\frac{x}{\beta_j}\right) \right| \leqq \varepsilon \mathrm{M}.$$

On a, d'autre part,

$$\sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} - \mathrm{G} = \int_0^{+\infty} \left[\sum_1^n \alpha_j \mathrm{N}(\beta_j t) - g(t) \right] dt, \qquad \text{d'où} \qquad \left| \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} - \mathrm{G} \right| \leqq \varepsilon,$$

et

$$\Psi^\star(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{N}(t)\, s(xt)\, dt, \qquad \text{d'où} \qquad |\Psi^\star(x)| \leqq \mathrm{M} \int_0^{+\infty} |\mathrm{N}(t)|\, dt.$$

En définitive, (4) donne

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}g\left(\frac{t}{x}\right)s(t)\,dt-G\Psi(x)\right|\leq\varepsilon M\left[1+\int_0^{+\infty}|N(t)|\,dt\right]$$
$$+\left|\sum_1^n\frac{\alpha_j}{\beta_j}\left[\Psi^\star\left(\frac{x}{\beta_j}\right)-\Psi^\star(x)\right]\right|$$
$$+|G[\Psi^\star(x)-\Psi(x)]|.$$

Comme le deuxième et le troisième terme du second membre tendent vers zéro pour x infini, ceci donne

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}g\left(\frac{t}{x}\right)s(t)\,dt-G\,\Psi(x)\right|\leq\varepsilon M\left[1+\int_0^{+\infty}|N(t)|\,dt\right].$$

Comme le second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant convenablement ε, on a (3).

1.3. En prenant pour $g(t)$ la fonction égale à 1 pour $0\leq t\leq 1$ et à 0 pour $t>1$, le théorème 1 donne immédiatement comme corollaire le suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons que $s(t)$ soit bornée et posons*

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt\qquad(x \text{ réel} > a)$$

et

$$\Sigma(x)=\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt\qquad(x \text{ réel} > 0).$$

Si, quel que soit k positif, on a pour x infini

$$(2)\qquad \Psi(kx)-\Psi(x)=o[1],$$

on a aussi pour x infini

$$(5)\qquad \Sigma(x)=\Psi(x)+o[1].$$

1.3.1. Bien que le théorème 2 soit, comme nous l'avons dit, un corollaire immédiat du théorème 1, nous en donnerons une démonstration indépendante, qui nous paraît intéressante en elle-même :

Posons

$$S_x(t)=\int_0^t s(xu)\,du\qquad(x>0 \text{ quelconque}).$$

Si, quel que soit $t>0$, $|s(t)|\leq M$, on voit que chacune des fonctions $S_x(t)$ satisfait à

$$|S_x(t)|\leq Mt\qquad\text{pour } t>0 \text{ quelconque},$$

et

$$(6)\qquad |S_x(t')-S_x(t)|\leq M|t'-t|\qquad\text{pour } t \text{ et } t'\geq 0 \text{ quelconques}.$$

Il en résulte que, de toute suite de valeurs de x, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que la suite des fonctions $S_{x_n}(t)$ converge sur l'intervalle $(0, +\infty)$ vers une fonction limite $S(t)$.

Comme, quel que soit $x > 0$, $S_x(0) = 0$, on a $S(0) = 0$.

De même, (6) entraîne $|S(t') - S(t)| \leqq M|t' - t|$. Par suite, il existe une fonction $\sigma(t)$, satisfaisant à $|\sigma(t)| \leqq M$, telle que

$$S(t) = \int_0^t \sigma(u)\,du \quad (^2).$$

De ce que $|s(x_n t)| \leqq M$ et $\int_0^t s(x_n u)\,du$ tend, pour n infini, vers $\int_0^t \sigma(u)\,du$, il résulte, par un théorème bien connu, que, quelle que soit la fonction $g(t)$ sommable sur $(0, +\infty)$, $\int_0^{+\infty} g(t)s(x_n t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} g(t)\sigma(t)\,dt$.

Si l'on suppose que la suite de valeurs de x dont on est parti tendait vers $+\infty$, il en est de même de la suite $\{x_n\}$, et l'on voit que, quel que soit $\alpha > 0$, $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\sigma(t)\,dt$.

En effet,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,s(x_n t)\,dt + \int_0^{+\infty} \left[x_n \psi\left(x_n t, \frac{x_n}{\alpha}\right) - \alpha\,N(\alpha t)\right] s(x_n t)\,dt.$$

Pour n infini la première intégrale tend vers $\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\sigma(t)\,dt$, d'après ce que l'on vient de dire, la seconde vers zéro parce que la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro et est de module au plus égal à $2M\alpha\,F(\alpha t)$.

De (2) il résulte que la limite de $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)$ est indépendante de α. Soit l sa valeur.

On a, quel que soit $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = l = l\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)[\sigma(t) - l]\,dt = 0.$$

Comme la fonction $\sigma(t) - l$ est bornée, ceci entraîne, par suite de l'hypothèse (4') sur $N(t)$, que l'on a presque partout sur $(0, +\infty)$: $\sigma(t) - l = 0$, d'où résulte que $S(t) = lt$.

(2) On peut prendre par exemple $\sigma(t) = S'(t)$ partout où $S'(t)$ existe et zéro aux autres points.

Donc $\Sigma(x_n)$, qui est égal à $S_{x_n}(1)$, tend vers l quand n tend vers $+\infty$, et $\Psi(x_n) - \Sigma(x_n)$ tend vers zéro.

En définitive, on a établi que, de toute suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n) - \Sigma(x_n)$ tende vers zéro. Il en résulte que $\Psi(x) - \Sigma(x)$ tend vers zéro pour x infini.

1.4. Établissons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Posons*

$$\Sigma(x) = \frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt.$$

Si, quel que soit k positif, on a pour x infini

$$\Sigma(kx) - \Sigma(x) = o[1], \tag{7}$$

alors on a

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |s(x) - \Sigma(x)| \leq w_s(1+0) \tag{8}$$

et, plus généralement, quel que soit l'ensemble de nombres réels positifs E, *supposé non borné supérieurement,*

$$\varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} |s(x) - \Sigma(x)| \leq w_s(E, 1+0). \tag{9}$$

Si, de plus, s(t) est réelle, on a

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |s(x) - \Sigma(x)| \leq \varpi_s(1+0), \tag{10}$$

et, quel que soit l'ensemble de nombres positifs E, *non borné supérieurement,*

$$-\varpi''_s(E, 1+0) \leq \varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Sigma(x)] \leq \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Sigma(x)] \leq \varpi'_s(E, 1+0) \tag{11}$$ [3].

Partons de l'égalité

$$kx\,\Sigma(kx) - x\,\Sigma(x) = \int_x^{kx} s(t)\,dt = (k-1)x s(x) + x\int_1^k [s(xt) - s(x)]\,dt.$$

On en tire

$$s(x) = \frac{k\Sigma(kx) - \Sigma(x)}{k-1} - \frac{1}{k-1}\int_1^k [s(xt) - s(x)]\,dt,$$

d'où

$$s(x) - \Sigma(x) = \frac{k}{k-1}[\Sigma(kx) - \Sigma(x)] - \frac{1}{k-1}\int_1^k [s(xt) - s(x)]\,dt. \tag{12}$$

([3]) Ce théorème généralise, pour le cas où $\Lambda(t) = t$, les théorèmes III et V donnés par Karamata dans [7] (p. 28 et 36).

Si $k > 1$, comme, pour $1 \leqq t \leqq k$, $|s(xt) - s(x)| \leqq W_s(x, k)$, on a

$$\left| \int_1^k [s(xt) - s(x)]\, dt \right| \leqq (k-1)\, W_s(x, k).$$

(12) donne donc

$$|s(x) - \Sigma(x)| \leqq \frac{k}{k-1} |\Sigma(kx) - \Sigma(x)| + W_s(x, k). \tag{13}$$

Si E est un ensemble de nombres réels positifs, non borné supérieurement, (13) donne, en tenant compte de (7),

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} |s(x) - \Sigma(x)| \leqq w_s(E, k). \tag{14}$$

Si l'on a $w_s(E, \lambda) < +\infty$ pour λ assez voisin de 1, en faisant tendre k vers 1 dans (14), on obtient (9).

Sinon, $w_s(E, 1+0) = +\infty$ et l'on a encore (9).

(8) est simplement le cas particulier de (9) dans lequel l'ensemble E est l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

Supposons maintenant que $s(t)$ soit réelle.

Si $k > 1$, de ce que, pour $1 \leqq t \leqq k$, $s(xt) - s(x) \geqq -\Pi'_s(x, k)$, il résulte que

$$\int_1^k [s(xt) - s(x)]\, dt \geqq -(k-1)\, \Pi'_s(x, k).$$

(12) donne alors

$$s(x) - \Sigma(x) \leqq \frac{k}{k-1} [\Sigma(kx) - \Sigma(x)] + \Pi'_s(x, k),$$

d'où

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} [s(x) - \Sigma(x)] \leqq \varpi'_s(E, k). \tag{15}$$

Si l'on a $\varpi'_s(E, \lambda) < +\infty$ pour λ assez voisin de 1, en faisant tendre k vers 1 dans (15), on obtient

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} [s(x) - \Sigma(x)] \leqq \varpi'_s(E, 1+0). \tag{16}$$

Sinon, $\varpi'_s(E, 1+0) = +\infty$ et l'on a encore (16).

Si $k < 1$, de ce que, pour $k \leqq t \leqq 1$, $s(xt) - s(x) \leqq \Pi''_s\left(x, \frac{1}{k}\right)$, il résulte que

$$\int_k^1 [s(xt) - s(x)]\, dt \leqq (1-k)\, \Pi''_s\left(x, \frac{1}{k}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{k-1} \int_1^k [s(xt) - s(x)]\, dt = \frac{1}{1-k} \int_k^1 [s(xt) - s(x)] \leqq \Pi''_s\left(x, \frac{1}{k}\right).$$

(12) donne alors

$$s(x) - \Sigma(x) \geqq \frac{k}{k-1}[\Sigma(kx) - \Sigma(x)] - \Pi''_s\left(x, \frac{1}{k}\right),$$

d'où

$$\varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Sigma(x)] \geqq -\varpi''_s\left(E, \frac{1}{k}\right). \tag{17}$$

Si $\varpi''_s(E, \lambda) < +\infty$ pour λ assez voisin de 1, en faisant tendre k vers 1 dans (17), on obtient

$$\varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Sigma(x)] \geqq -\varpi''_s(E, 1+0). \tag{18}$$

Sinon, $\varpi''_s(E, 1+0) = +\infty$ et l'on a encore (18).

(16) et (18) donnent (11).

(10) est le cas particulier de (11) dans lequel E est l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

1.5. En combinant les théorèmes 2 et 3, on obtient le suivant :

Théorème 4. — *Si $s(t)$ est bornée, et si, quel que soit $k > 0$, on a pour x infini*

$$\Psi(kx) - \Psi(x) = o[1], \tag{2}$$

avec

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt,$$

alors on a

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |s(x) - \Psi(x)| \leqq \omega_s(1+0) \tag{19}$$

et, plus généralement, quel que soit l'ensemble E *de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement,*

$$\varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} |s(x) - \Psi(x)| \leqq \omega_s(E, 1+0). \tag{20}$$

Si, de plus, $s(t)$ et $\psi(t, x)$ sont supposées réelles, on a

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |s(x) - \Psi(x)| \leqq \varpi_s(1+0), \tag{21}$$

et, plus généralement, E *ayant la même signification que ci-dessus,*

$$-\varpi''_s(E, 1+0) \leqq \varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] \leqq \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] \leqq \varpi'_s(E, 1+0) \quad [4]. \tag{22}$$

---

[4] Il faut noter que le fait que $s(t)$ est bornée entraîne $\omega_s(\lambda) < +\infty$, de sorte que $\omega_s(1+0)$, $\varpi_s(1+0)$ et, quel que soit E, $\omega_s(E, 1+0)$, $\varpi'_s(E, 1+0)$ et $\varpi''_s(E, 1+0)$ ont des valeurs finies.

Le théorème 2 montre d'abord que l'on a pour x infini

$$\Sigma(x) = \Psi(x) + o[1]. \tag{5}$$

Mais, en tenant compte de (2), ceci entraîne (7), ce qui permet d'appliquer le théorème 3.

(5) permet de remplacer $\Sigma(x)$ par $\Psi(x)$ dans les inégalités (8) et (9), et dans (10) et (11) si $s(t)$ est réelle.

1.5.1. Quel que soit $\psi(t, x)$, il peut y avoir égalité dans (19) et dans (20) avec des seconds membres non nuls; et, si $\psi(t, x)$ est réelle, avec $s(t)$ réelle, il peut y avoir égalité dans (21) et l'on peut avoir

$$\underline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] = -\varpi''_s(E, 1+0)$$

et

$$\overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] = \varpi'_s(E, 1+0),$$

avec des seconds membres non nuls.

Prenons par exemple

$$s(t) = \begin{cases} (-1)^n & \text{pour} \quad 2^n - 1 \leq t < 2^n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ 0 & \text{pour toutes les autres valeurs de } t. \end{cases}$$

On a $w_s(1+0) = \varpi_s(1+0) = 1$ et, pour E égal à l'ensemble des puissances de 2 supérieures à a,

$$w_s(E, 1+0) = \varpi'_s(E, 1+0) = \varpi''_s(E, 1+0) = 1.$$

Comme $|s(xt)| \leq 1$ et $\int_0^t s(xu)\,du$ tend vers zéro pour x infini, et comme

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} N(t)\,s(xt)\,dt + \int_0^{+\infty} [x\psi(xt, x) - N(t)]\,s(xt)\,dt,$$

on voit que $\Psi(x)$ tend vers zéro pour x infini.

Alors on a

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} |s(x) - \Psi(x)| = 1 = w_s(1+0)$$

et, pour E égal à l'ensemble indiqué ci-dessus,

$$\overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} |s(x) - \Psi(x)| = 1 = w_s(E, 1+0).$$

Si $\psi(t, x)$ est réelle, on a

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} |s(x) - \Psi(x)| = 1 = \varpi_s(1+0)$$

et, pour le même E,

$$\varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] = -1 = -\varpi_s''(E, 1+0)$$

et

$$\varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] = 1 = \varpi_s'(E, 1+0).$$

Le même exemple montre que les bornes fournies par le théorème 3 pour les valeurs limites de $|s(x) - \Sigma(x)|$ ou de $s(x) - \Sigma(x)$ peuvent être atteintes sans être nulles.

1.6. En combinant les théorèmes A et 4, on obtient le suivant :

Théorème 5. — *Supposons que, pour chaque x fixé $> a$, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \log t \, dt = O[1].$$

Si l'on a $w_s(\lambda) < +\infty$, et si, en posant

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt,$$

on a pour x infini

(23) $$\Psi(x) = O[1]$$

et, quel que soit $k > 0$,

(2) $$\Psi[kx] - \Psi(x) = o[1],$$

alors on a (19), et, plus généralement, pour tout ensemble E de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement, on a (20).

Si, de plus, $\psi(t, x)$ et $s(t)$ sont réelles, on a (21) et (22).

Le théorème A montre d'abord que $s(t)$ est bornée, on peut alors appliquer le théorème 4.

1.7. En combinant les théorèmes B et 4, on obtient le suivant :

Théorème 6. — *Supposons que la fonction $\psi(t, x)$ soit réelle positive ou nulle, que, pour chaque x fixé $> a$, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{+\infty} x\psi(xt, x) \log t \, dt = O[1].$$

Si $s(t)$ est réelle et satisfait à $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt$

est convergente pour $x > a$, et si, en désignant par $\Psi(x)$ la valeur de cette intégrale, on a pour x infini

$$\Psi(x) = O[1], \tag{23}$$

et, quel que soit $k > 0$,

$$\Psi[kx] - \Psi(x) = o[1], \tag{2}$$

alors on a (19) *et* (21) *et, plus généralement, quel que soit l'ensemble* E *de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement, on a* (20) *et* (22).

Le théorème B montre d'abord que $s(t)$ est bornée, on applique ensuite le théorème 4.

1.8. Notons que (23) et (2) sont satisfaites en particulier si $\Psi(x)$ tend vers une limite finie S quand x tend vers $+\infty$, et qu'alors (19) et (20) deviennent

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \, | s(x) - S | \leq w_s(1+0)$$

et

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} \, | s(x) - S | \leq w_s(E, 1+0),$$

et, s'il y a lieu, (21) et (22) deviennent

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \, | s(x) - S | \leq \varpi_s(1+0)$$

et

$$S - \varpi''_s(E, 1+0) \leq \underline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} \, s(x) \leq \overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} \, s(x) \leq S + \varpi'_s(E, 1+0).$$

1.8.1. Notons aussi que, lorsque $w_s(1+0) = 0$, (19) donne

$$s(x) = \Psi(x) + o[1] \qquad (x \to +\infty).$$

(21) donne la même relation lorsque $\varpi_s(1+0) = 0$.

1.9. Comme application du théorème 5 nous donnerons l'énoncé suivant :

THÉORÈME 7. — *Supposons que, pour chaque x fixé $> a$, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{+\infty} | x\psi(xt, x) | \log t \, dt = O[1].$$

Soit, d'autre part, une suite de nombres réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ satisfaisant à

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \quad \textit{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty \quad (^5).$$

---

(5) Noter que nous ne supposons pas ici, comme aux paragraphes 3.5.1 et 3.6.1 de notre premier Mémoire, que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ tend vers 1 pour n infini.

Quelle que soit la suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ satisfaisant à l'une des conditions suivantes :

$$(24) \qquad u_n = \mathrm{O}\left[\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right] \qquad (n \to +\infty)$$

ou

$$(25) \qquad \sum_{j=1}^{j=n} |u_j|^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} = \mathrm{O}[\lambda_n] \quad (n \to +\infty) \qquad \textit{pour un } p \textit{ fixé} > 1,$$

les séries $\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x) u_n$ *et* $\sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] \mathrm{S}_n$, *où* $\mathrm{S}_n = \sum_0^n u_j$, *sont convergentes et égales pour* $x > a$.

Si leur somme tend vers une limite finie S *quand* x *tend vers* $+\infty$, *la série* $\sum_0^{+\infty} u_n$ *est convergente avec pour somme* S (6).

Nous définissons une fonction $s(t)$ pour $t \geqq 0$ par

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ \sum_{\lambda_n \leq t} u_n & \text{pour } t > 0, \end{cases}$$

étant entendu que la somme $\sum_{\lambda_n \leq t} u_n$ est prise égale à zéro s'il n'y a aucun λ_n au plus égal à t.

Le théorème sera établi quand nous aurons montré que, si l'une des conditions (24) ou (25) est satisfaite, on a $w_s(\lambda) < +\infty$ et, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, $w_s(\mathrm{E}, 1+0) = 0$.

En effet, d'après ce qui a été rappelé au paragraphe 1.1.1, si l'on a $w_s(\lambda) < +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$ et, comme $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, \mathrm{L}]$ et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ est aussi convergente et est égale à la précédente.

---

(6) Le cas particulier de ce théorème correspondant à $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$ a été établi :

1° pour la condition (24) par Littlewood [8], avec l'hypothèse que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ tend vers 1 pour n infini, puis par Ananda-Rau [1] sans cette hypothèse ;

2° pour la condition (25) par O. Sasz ([9] et [11]) [Hardy et Littlewood avaient traité précédemment le cas particulier où $\lambda_n = n$ ([4], § 8, p. 283)].

Alors, comme on a

$$\sum_0^N [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]\, S_n = \int_0^{\lambda_{N+1}} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$$

et

$$\sum_0^N \varphi(\lambda_n, x)\, u_n = \int_0^{\lambda_N} \varphi(t, x)\, ds(t),$$

il sera établi tout d'abord que, si l'une des conditions (24) ou (25) est satisfaite,

$$\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)\, u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]\, S_n$$

sont convergentes pour $x > a$ et égales à $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$.

Si, de plus, la somme de ces séries tend vers une limite finie S quand x tend vers $+\infty$, on pourra appliquer le théorème 5. En prenant pour E l'ensemble des λ_n supérieurs à a, (20) donnera

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\, |S_n - S| \leqq 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to +\infty} S_n = S.$$

On pourrait remarquer que (24) entraîne (25), mais nous donnerons des démonstrations indépendantes pour le cas où l'on suppose que l'on a (24) et celui où l'on suppose que l'on a (25).

a. Supposons d'abord que l'on a (24).

On voit d'abord qu'il existe un nombre positif M tel que, pour $n \geqq 1$,

$$|u_n| \leqq M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}.$$

Ceci entraîne

$$|u_n| \leqq M \qquad \text{et} \qquad |u_n| \leqq M \log \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

La seconde inégalité montre que, si $n_2 > n_1$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} |u_n| \leqq M \log \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}.$$

On voit alors que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0 < t < t'$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leqq M \left[1 + \log \frac{t'}{t} \right].$$

En effet, s'il n'y a aucun λ_n satisfaisant à $t < \lambda_n \leqq t'$, on a $s(t') - s(t) = 0$; s'il y en a un, soit λ_{n_1}, on a, puisque $n_1 \geqq 1$,

$$|s(t') - s(t)| = |u_{n_1}| \leqq M;$$

et s'il y en a plusieurs, soit $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_2}$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leqq |u_{n_1}| + \sum_{n_1+1}^{n_2} |u_n| \leqq M + M \log \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}.$$

Il résulte de là que, pour $t > \lambda_0$,

$$W_s(t, \lambda) \leqq M(1 + \log \lambda),$$

donc que

$$w_s(\lambda) \leqq M(1 + \log \lambda) < +\infty.$$

De même, si $t \geqq \lambda_q > 0$, on a

$$|s(t) - s(\lambda_q)| \leqq M \log \frac{t}{\lambda_q};$$

car, si $t < \lambda_{q+1}$, $s(t) - s(\lambda_q) = 0$; et si $\lambda_r \leqq t < \lambda_{r+1}$, avec $r > q$,

$$|s(t) - s(\lambda_q)| \leqq \sum_{q+1}^{r} |u_n| \leqq M \log \frac{\lambda_r}{\lambda_q}.$$

Ceci montre que $W_s(\lambda_q, \lambda) \leqq M \log \lambda$, d'où il résulte que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$w_s(E, \lambda) \leqq M \log \lambda,$$

et par suite $w_s(E, 1+0) = 0$.

b. Supposons maintenant que l'on ait (25).

On voit d'abord qu'il existe un nombre positif M tel que, pour $n \geqq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j|^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} \leqq M^p \lambda_n.$$

Ceci entraîne en premier lieu

$$|u_n|^p \lambda_n^p (\lambda_n - \lambda_{n-1})^{1-p} \leqq M^p \lambda_n, \qquad \text{d'où} \qquad |u_n| \leqq M \left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right)^{1-\frac{1}{p}} \leqq M.$$

D'autre part, en introduisant le nombre p' défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a pour $n_1 < n_2$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} |u_j| \leqq M \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} - 1 \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

En effet, comme, pour $j \geqq 1$,

$$|u_j| = |u_j| \lambda_j (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{-\frac{1}{p'}} \frac{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^{\frac{1}{p'}}}{\lambda_j},$$

l'inégalité de Hölder donne

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} |u_j| \leq \left\{ \sum_{n_1+1}^{n_2} |u_j|^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n_1+1}^{n_2} \frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{\lambda_j^{p'}} \right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

Le premier terme du second membre est au plus égal à $M\lambda_{n_2}^{\frac{1}{p}}$. En remarquant que dans le second terme tous les dénominateurs sont supérieurs à $\lambda_{n_1}^{p'}$, on voit que ce second terme est au plus égal à $\frac{(\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1})^{\frac{1}{p'}}}{\lambda_{n_1}}$. En définitive, le second membre est au plus égal à

$$M\lambda_{n_2}^{\frac{1}{p}} \frac{(\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1})^{\frac{1}{p'}}}{\lambda_{n_1}} = M\left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Ceci étant, on voit, en raisonnant comme plus haut, que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0 < t < t'$, on a

$$(26) \qquad |s(t') - s(t)| \leq M\left[1 + \left(\frac{t'}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t'}{t} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}\right],$$

et, si $t \geq \lambda_q > 0$, on a

$$(27) \qquad |s(t) - s(\lambda_q)| \leq M\left(\frac{t}{\lambda_q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t}{\lambda_q} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

(26) montre que, pour $t \geq \lambda_0$,

$$W_s(t, \lambda) \leq M\left[1 + \lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}\right],$$

et par suite que

$$w_s(\lambda) \leq M\left[1 + \lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}\right] < +\infty.$$

(27) montre que, pour $\lambda_q > 0$,

$$W_s(\lambda_q, \lambda) \leq M\lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}},$$

et par suite que, si E est l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$w_s(E, \lambda) \leq M\lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}},$$

de sorte que $w_s(E, 1 + 0) = 0$.

1. 10. Comme application du théorème 6, nous donnerons l'énoncé suivant :

Théorème 8. — *Supposons que la fonction $\psi(t, x)$ soit réelle ≥ 0, que, pour chaque x fixé $> a$, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{+\infty} x\psi(xt, x) \log t \, dt = O[1].$$

Soit, d'autre part, une suite de nombres réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ satisfaisant à

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad et \qquad \lim \lambda_n = +\infty.$$

Soit encore une autre suite de nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ et posons

$$\operatorname{Max}(0, -u_n) = u'_n, \qquad \sum_0^n u_j = S_n.$$

Si l'une des séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)\, u_n \qquad et \qquad \sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] S_n$$

est convergente pour $x > a$, si la somme de cette série tend vers une limite finie S *quand x tend vers $+\infty$, et si l'on a une des conditions suivantes :*

$$(28) \qquad u'_n = O\left[\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right] \qquad (n \to +\infty),$$

ou

$$(29) \qquad \sum_1^n u_j'^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} = O[\lambda_n] \quad (n \to +\infty) \qquad pour\ un\ p\ fixé > 1,$$

on a

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\, S_n = S \qquad et \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}}\, S_n = S - \delta,$$

avec

$$\delta = \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, u'_n \quad (^7).$$

a. La fonction $s(t)$ étant toujours définie de la même façon à partir de la suite $\{u_n\}$, nous montrerons d'abord que, si l'une ou l'autre des conditions (28) et (29) est satisfaite, on a $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ et, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$\varpi'_s(E, 1+0) = 0 \qquad et \qquad \varpi''_s(E, 1+0) \leq \delta.$$

Comme pour le théorème 7, nous pourrions remarquer que (28) entraîne (29), mais nous préférons donner des démonstrations indépendantes pour le cas où l'on suppose que l'on a (28) et celui où l'on suppose que l'on a (29).

1. Supposons d'abord que l'on ait (28).

Alors il existe un nombre positif M tel que, pour $n \geq 1$,

$$u'_n \leq M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n},$$

---

(7) Nous avons donné dans [3] (th. 7, p. 107) le cas particulier de ce théorème correspondant à $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$, avec la condition (28).

d'où il résulte que $u'_n \leqq \mathrm{M}$ et que, si $n_2 > n_1$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} u'_n \leqq \mathrm{M} \log \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}.$$

En remarquant que, pour $h \leqq k$, $\sum_h^k u_n \geqq -\sum_h^k u'_n$, et raisonnant comme au paragraphe précédent, on en déduit que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0 < t < t'$,

$$s(t') - s(t) \geqq -\mathrm{M}\left(1 + \log \frac{t'}{t}\right), \tag{30}$$

et que, si $t \geqq \lambda_q > 0$,

$$s(t) - s(\lambda_q) \geqq -\mathrm{M} \log \frac{t}{\lambda_q}. \tag{31}$$

(30) entraîne que, pour $t > \lambda_0$,

$$\Pi'_s(t, \lambda) \leqq \mathrm{M}(1 + \log\lambda),$$

et par suite que

$$\varpi_s(\lambda) \leqq \mathrm{M}(1 + \log\lambda) < +\infty.$$

(31) entraîne que, pour $q \geqq 1$,

$$\Pi'_s(\lambda_q, \lambda) \leqq \mathrm{M} \log\lambda,$$

et par suite que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$

$$\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda) \leqq \mathrm{M} \log\lambda,$$

de sorte que $\varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0) = 0$.

On voit d'autre part que, si $\lambda_q > \lambda\lambda_0$, on a

$$\Pi''_s(\lambda_q, \lambda) \leqq u'_{q'} + \mathrm{M} \log\lambda,$$

où q' est l'entier déterminé par $\lambda_{q'-1} \leqq \frac{\lambda_q}{\lambda} < \lambda_{q'}$.

En effet, quel que soit $t \geqq \lambda_0$, on a

$$s(t) - s(\lambda_q) = s(\lambda_r) - s(\lambda_q),$$

où r est l'entier déterminé par $\lambda_r \leqq t < \lambda_{r+1}$.

Si $\frac{\lambda_q}{\lambda} \leqq t \leqq \lambda_q$, on aura

$$t \geqq \lambda_0 \quad \text{et} \quad q' - 1 \leqq r \leqq q.$$

Si $r \geqq q'$, (31) donne, en y remplaçant t par λ_q et λ_q par λ_r,

$$s(\lambda_q) - s(\lambda_r) \geqq -\mathrm{M} \log \frac{\lambda_q}{\lambda_r} \geqq -\mathrm{M} \log\lambda,$$

d'où

$$s(t) - s(\lambda_q) \leqq \mathrm{M} \log\lambda \leqq \mathrm{M} \log\lambda + u'_{q'};$$

Si $r=q'-1$, on peut écrire

$$s(\lambda_q)-s(\lambda_r)=s(\lambda_q)-s(\lambda_{q'})+u_{q'},$$

et, en utilisant (31) et l'inégalité $u_{q'}\geqq -u'_{q'}$, on a

$$s(\lambda_q)-s(\lambda_r)\geqq -\mathrm{M}\log\frac{\lambda_q}{\lambda_{q'}}-u'_{q'}\geqq -\mathrm{M}\log\lambda-u'_{q'},$$

d'où

$$s(t)-s(\lambda_q)\leqq \mathrm{M}\log\lambda+u'_{q'}.$$

Il résulte de là que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$

$$\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda)\leqq \delta+\mathrm{M}\log\lambda,$$

et, par suite, $\varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0)\leqq\delta$.

2. Supposons maintenant que l'on ait (29).

Alors il existe un nombre positif M tel que l'on ait, pour $n\geqq 1$,

$$\sum_1^n u'^p_j\lambda^p_j(\lambda_j-\lambda_{j-1})^{1-p}\leqq \mathrm{M}^p\lambda_n,$$

d'où l'on déduit, en raisonnant comme au paragraphe 1.9, que, pour $n\geqq 1$, $u'_n\leqq\mathrm{M}$, et que, si $n_1<n_2$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} u'_j\leqq \mathrm{M}\left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}-1\right)^{\frac{1}{p'}},$$

p' étant le nombre réel défini par $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

On voit alors que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0<t<t'$,

$$s(t')-s(t)\geqq -\mathrm{M}\left[1+\left(\frac{t'}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{t'}{t}-1\right)^{\frac{1}{p'}}\right], \tag{32}$$

et, que si $t>\lambda_q>0$,

$$s(t)-s(\lambda_q)\geqq -\mathrm{M}\left[\left(\frac{t}{\lambda_q}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{t}{\lambda_q}-1\right)^{\frac{1}{p'}}\right]. \tag{33}$$

(32) entraîne que, pour $t>\lambda_0$,

$$\Pi'_s(t, \lambda)\leqq \mathrm{M}\left[1+\lambda^{\frac{1}{p}}(\lambda-1)^{\frac{1}{p'}}\right],$$

et, par suite, que

$$\varpi_s(\lambda)\leqq \mathrm{M}\left[1+\lambda^{\frac{1}{p}}(\lambda-1)^{\frac{1}{p'}}\right]<+\infty.$$

(33) entraîne que, pour $q\geqq 1$,

$$\Pi'_s(\lambda_q, \lambda)\leqq \mathrm{M}\lambda^{\frac{1}{p}}(\lambda-1)^{\frac{1}{p'}},$$

et, par suite, que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$

$$\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda) \leqq \mathrm{M}\lambda^{\frac{1}{p}}(\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}},$$

de sorte que $\varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0) = 0$.

On voit ensuite, en raisonnant comme plus haut, que, pour E égal à ce même ensemble,

$$\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda) \leqq \delta + \mathrm{M}\lambda^{\frac{1}{p}}(\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0) \leqq \delta.$$

b. Pour $\lambda_{\mathrm{N}} \leqq \mathrm{L} < \lambda_{\mathrm{N}+1}$, l'intégrale $\int_0^{\mathrm{L}} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est comprise entre la somme des N premiers termes et la somme des N + 1 premiers termes de la série $\sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] \mathrm{S}_n$. Par suite, si cette série est convergente pour $x > a$ et a pour somme $\mathrm{S}(x)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est aussi convergente et égale à $\mathrm{S}(x)$.

De même, comme, pour $\lambda_{\mathrm{N}} \leqq \mathrm{L} < \lambda_{\mathrm{N}+1}$,

$$\int_0^{\mathrm{L}} \varphi(t, x)\, ds(t) = \sum_0^{\mathrm{N}} \varphi(\lambda_n, x) u_n,$$

si la série $\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x) u_n$ est convergente pour $x > a$ et a pour somme $\mathrm{S}(x)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ est convergente et égale à $\mathrm{S}(x)$. Alors, comme $\psi(t, x) \geqq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est aussi convergente et égale à $\mathrm{S}(x)$.

On voit que, de toute façon, les hypothèses du théorème impliquent que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$ et tend vers S quand x tend vers $+\infty$.

c. Puisque, d'après ce qui a été dit en *a*, $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, on peut appliquer le théorème 6.

En prenant E égal à l'ensemble des λ_n supérieurs à a, et tenant compte de ce que l'on a établi en *a*, (22) donne

$$(34) \qquad \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, \mathrm{S}_n \leqq \mathrm{S} \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}}\, \mathrm{S}_n \geqq \mathrm{S} - \delta.$$

Si $\delta = 0$, ceci entraîne bien

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}}\, \mathrm{S}_n = \mathrm{S}, \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}}\, \mathrm{S}_n = \mathrm{S} - \delta.$$

Supposons donc $\delta > 0$. Alors il existe une suite d'entiers croissants n_1, n_2, ..., n_k, ... telle que u'_{n_k} tende vers δ.

Pour k assez grand, $u'_{n_k} > 0$ et $u_{n_k} = -u'_{n_k}$, de sorte que

$$S_{n_k} = S_{n_k - 1} - u'_{n_k}.$$

De là il résulte que

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}} S_{n_k} = \overline{\lim_{k \to +\infty}} S_{n_k - 1} - \delta,$$

ce qui entraîne

$$\underline{\lim_{n \to +\infty}} S_n \leqq \overline{\lim_{n \to +\infty}} S_n - \delta.$$

En combinant ceci avec (34), on obtient encore

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} S_n = S \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}} S_n = S - \delta.$$

1.10.1. Il est clair que, *si dans le théorème* 8 *on ajoute l'hypothèse que* $\delta = 0$, *la conclusion devient que la série* $\sum_0^{+\infty} u_n$ *est convergente et a pour somme* S.

Il en est de même si l'on ajoute l'hypothèse que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ *tend vers* 1 *pour n infini* (8), *car nous allons voir que, si l'on a* (28), *on a*

$$\delta \leqq (1 - \alpha)\mu, \qquad \textit{avec} \quad \alpha = \underline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \qquad \textit{et} \qquad \mu = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} u'_n,$$

et, si l'on a (29), *on a*

$$\delta \leqq (1 - \alpha)^{\frac{1}{p'}} \nu^{\frac{1}{p}}, \qquad \textit{avec} \quad \alpha = \underline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \qquad \textit{et} \qquad \nu = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \sum_1^n u_j'^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p}.$$

En effet, si l'on a (28), quel que soit $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \geqq \alpha - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} u'_n \leqq \mu + \varepsilon,$$

d'où

$$u'_n \leqq (\mu + \varepsilon)\left(1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \leqq (\mu + \varepsilon)(1 - \alpha + \varepsilon),$$

et par suite on a

$$\delta \leqq (\mu + \varepsilon)(1 - \alpha + \varepsilon).$$

(8) O. Sasz [11] a établi le théorème 8 sous cette forme particulière, avec la condition (29), dans le cas où $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$. Il avait traité précédemment [10] le cas particulier où $\lambda_n = n$.

Si l'on a (29), quel que soit ε, on a pour n assez grand

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \geqq \alpha - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\lambda_n}\sum_1^n u_j'^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} \leqq \nu + \varepsilon,$$

d'où

$$u_n'^p \lambda_n^p (\lambda_n - \lambda_{n-1})^{1-p} \leqq (\nu + \varepsilon)\lambda_n,$$

d'où

$$u_n'^p \leqq (\nu + \varepsilon)\left(1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{p-1} \leqq (\nu + \varepsilon)(1 - \alpha + \varepsilon)^{p-1},$$

ou

$$u_n' \leqq (\nu + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} (1 - \alpha + \varepsilon)^{\frac{1}{p'}},$$

et par suite on a

$$\delta \leqq (\nu + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} (1 - \alpha + \varepsilon)^{\frac{1}{p'}}.$$

1.11. Nous avons établi le théorème 5 en combinant les théorèmes A et 4, c'est-à-dire en définitive en combinant les théorèmes A, 2 et 3 [ce qui est la méthode suivie par Karamata pour établir le théorème inverse relatif à la condition de convergence $w_{s,\Lambda}(1+0) = 0$].

Si l'on remplace dans le théorème 5 l'hypothèse que $x\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$ et que l'on a pour x infini

$$\int_1^{+\infty} x\psi(xt, x) \log t \, dt = O[1],$$

par l'hypothèse, plus restrictive, que la fonction $F(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, on peut donner une démonstration directe, indépendante des autres théorèmes établis ici.

1.11.1. Nous commençons par étudier la famille des fonctions $G_x(t)$ définies par

$$G_x(t) = \int_0^t g_x(u)\, du, \qquad \text{avec} \quad g_x(t) = s(xt) - s(x).$$

a. Nous savons que l'hypothèse $w_s(\lambda) < +\infty$ entraîne que $s(t)$ satisfait à $|s(t') - s(t)| \leqq H\left|\log\frac{t'}{t}\right| + K$, de sorte que

$$|g_x(t)| \leqq H\,|\log t| + K.$$

Il en résulte que, quels que soient t et t' satisfaisant à $0 \leqq t < t'$, et quel que soit $x > 0$, on a

$$(35) \qquad |G_x(t') - G_x(t)| \leqq \int_t^{t'} [H\,|\log u| + K]\, du.$$

Ceci montre que les fonctions $G_x(t)$ sont également continues, et bornées dans leur ensemble sur tout intervalle fini $[0, L]$. *Donc, de toute suite de valeurs de x on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $G_{x_n}(t)$ tende vers une fonction limite* $G(t)$.

On a $G(0)=0$ puisque $G_x(0)=0$ quel que soit $x>0$.

De plus, $G(t)$ est absolument continue puisque (35) donne à la limite

$$|G(t')-G(t)| \leqq \int_t^{t'} [H|\log u|+K]\,du.$$

Il existe donc une fonction $g(t)$, satisfaisant à $|g(t)| \leqq H|\log t|+K$, telle que $G(t)=\int_0^t g(u)\,du$.

D'autre part, λ étant un nombre réel positif quelconque, nous poserons

$$H_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}G(\lambda t)-G(t).$$

On voit que

$$H_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda t} g(u)\,du-\int_0^t g(u)\,du=\int_0^t [g(\lambda u)-g(u)]\,du.$$

b. Si l'on est parti d'une suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$, de sorte que la suite $\{x_n\}$ tend aussi vers $+\infty$, *quel que soit $\lambda \neq 1$, on a presque partout sur* $(0, +\infty)$:

$$|g(\lambda t)-g(t)| \leqq \begin{cases} \varpi_s(\lambda) & \text{si } \lambda>1, \\ \varpi_s\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) & \text{si } \lambda<1. \end{cases} \tag{36}$$

En effet, on a

$$H_\lambda(t)=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\lambda}G_{x_n}(\lambda t)-G_{x_n}(t)\right]=\lim_{n\to+\infty}\int_0^t [s(\lambda u x_n)-s(u x_n)]\,du,$$

puisque

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}G_{x_n}(\lambda t)-G_{x_n}(t)&=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda t} g_{x_n}(u)\,du-\int_0^t g_{x_n}(u)\,du\\ &=\int_0^t [g_{x_n}(\lambda u)-g_{x_n}(u)]\,du\\ &=\int_0^t [s(\lambda u x_n)-s(u x_n)]\,du.\end{aligned}$$

On a donc, quels que soient t et t' satisfaisant à $0<t<t'$,

$$H_\lambda(t')-H_\lambda(t)=\lim_{n\to+\infty}\int_t^{t'} [s(\lambda u x_n)-s(u x_n)]\,du.$$

Comme on a évidemment

$$\left|\int_t^{t'} [s(\lambda ux) - s(ux)]\,du\right| \leqq (t'-t)\,W_s(ux,\lambda) \qquad \text{si} \quad \lambda > 1,$$

$$\left|\int_t^{t'} [s(\lambda ux) - s(ux)]\,du\right| \leqq (t'-t)\,W_s\left(\lambda ux, \frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{si} \quad \lambda < 1,$$

on en déduit que

$$|H_\lambda(t') - H_\lambda(t)| \leqq \begin{cases} (t'-t)\,w_s(\lambda) & \text{si} \quad \lambda > 1, \\ (t'-t)\,w_s\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) & \text{si} \quad \lambda < 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_t^{t'} [g(\lambda u) - g(u)]\,du\right| \leqq \begin{cases} (t'-t)\,w_s(\lambda) & \text{si} \quad \lambda > 1, \\ (t'-t)\,w_s\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) & \text{si} \quad \lambda < 1. \end{cases}$$

c. Si la suite de valeurs de x dont on est parti, non seulement tend vers $+\infty$, mais est formée de nombres de l'ensemble E, *de sorte qu'il en est de même de la suite $\{x_n\}$, et si* $G(t)$ *possède une dérivée pour* $t = 1$, *on voit que*

$$|G'(1)| \leqq w_s(E, 1+0), \tag{37}$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$-\varpi'_s(E, 1+0) \leqq G'(1) \leqq \varpi''_s(E, 1+0). \tag{38}$$

En effet, si $t > 1$, on a

$$\left|\frac{G_x(t) - G_x(1)}{t-1}\right| = \frac{1}{t-1}\left|\int_1^t [s(xu) - s(x)]\,du\right| \leqq W_s(x, t).$$

On en déduit

$$\left|\frac{G(t) - G(1)}{t-1}\right| \leqq w_s(E, t),$$

et, en faisant tendre t vers 1, on obtient (37).

Si $s(t)$ est réelle, on a pour $t > 1$:

$$\frac{G_x(t) - G_x(1)}{t-1} = \frac{1}{t-1}\int_1^t [s(xu) - s(x)]\,du \geqq -\Pi'_s(x, t),$$

d'où

$$\frac{G(t) - G(1)}{t-1} \geqq -\varpi'_s(E, t).$$

En faisant tendre t vers 1, on obtient $G'(1) \geqq -\varpi'_s(E, 1+0)$.

Pour $t < 1$, on a

$$\frac{G_x(t) - G_x(1)}{t-1} = \frac{1}{1-t}\int_t^1 [s(xu) - s(x)]\,du \leqq \Pi''_s\left(x, \frac{1}{t}\right),$$

d'où

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} \leqq \varpi_s''\left(E, \frac{1}{t}\right).$$

En faisant tendre t vers 1, on obtient $G'(1) \leqq \varpi_s''(E, 1+0)$.

1.11.2. Remarquons maintenant que, si x_n tend vers $+\infty$ et si $G_{x_n}(t)$ tend vers $G(t)=\int_0^t g(u)\,du$, alors, quel que soit $\alpha > 0$,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) - s(x_n) \qquad \text{tend vers} \qquad \int_0^{+\infty} \alpha\, N(\alpha t)\, g(t)\, dt.$$

En effet, la formule (1) donne

$$\begin{aligned}\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) &= \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) g_x(t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha\, N(\alpha t)\, g_x(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - \alpha N(\alpha t)\right] g_x(t)\, dt.\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers zéro pour x infini, car la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro, puisque $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ tend vers $\alpha N(\alpha t)$ et $|g_x(t)| \leqq H|\log t| + K$, et elle est de module au plus égal à $2\alpha F(\alpha t)\,[H|\log t| + K]$, fonction qui est sommable sur $(0, +\infty)$.

D'autre part, de ce que $\int_0^t g_{x_n}(u)\,du$ tend vers $\int_0^t g(u)\,du$, et que, sur l'intervalle $\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$, où $0 < \varepsilon < 1$,

$$|g_{x_n}(t)| \leqq H \log\frac{1}{\varepsilon} + K,$$

il résulte que

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha\, N(\alpha t)\, g_{x_n}(t)\, dt \qquad \text{tend vers} \qquad \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha\, N(\alpha t)\, g(t)\, dt.$$

La convergence de $\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha N(\alpha t) g_{x_n}(t)\, dt$ vers $\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t) g_{x_n}(t)\, dt$ quand ε tend vers zéro étant uniforme par rapport à n, du fait que

$$|\alpha\, N(\alpha t)\, g_{x_n}(t)| \leqq \alpha\, F(\alpha t)\,[H\,|\log t| + K],$$

un théorème bien connu sur l'interversion des passages à la limite montre que

$$\int_0^{+\infty} \alpha\, N(\alpha t)\, g_{x_n}(t)\, dt \qquad \text{tend vers} \qquad \int_0^{+\infty} \alpha\, N(\alpha t)\, g(t)\, dt.$$

1.11.3. Nous sommes maintenant en mesure d'établir (20), et (22) si $s(t)$ est réelle.

En prenant E égal à l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à a, (20) donnera (19) et (22) donnera (21).

D'après ce que l'on a vu, de toute suite de valeurs de x appartenant à l'ensemble E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $G_{x_n}(t)$ tende vers la fonction limite $G(t) = \int_0^t g(u)\,du$, $g(t)$ et $G(t)$ possédant les propriétés que nous avons indiquées.

De plus, quel que soit $\alpha > 0$,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) - s(x_n) \qquad \text{tend vers} \qquad \int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,g(t)\,dt.$$

Comme, quel que soit $k > 0$, on a pour x infini

$$\Psi(kx) - \Psi(x) = o\,[1],$$

cette limite est indépendante de α.

Donc, quels que soient α et λ positifs, on a

$$\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\lambda} N\left(\frac{\alpha}{\lambda} t\right) g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,g(\lambda t)\,dt,$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)[g(\lambda t) - g(t)]\,dt = 0.$$

Supposons λ fixé $\neq 1$. La fonction $g(\lambda t) - g(t)$ étant presque partout de module au plus égal à $w_s(\lambda)$ si $\lambda > 1$, ou $w_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ si $\lambda < 1$, le fait que ceci ait lieu quel que soit $\alpha > 0$ entraîne que l'on ait presque partout sur $(0, +\infty)$:

$$g(\lambda t) - g(t) = 0.$$

On a donc

$$H_\lambda(t) = \int_0^t [g(\lambda u) - g(u)]\,du = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda} G(\lambda t) - G(t) = 0.$$

Ceci vaut évidemment encore si $\lambda = 1$.

En faisant $t = 1$ et posant $G(1) = l$, on obtient $G(\lambda) = l\lambda$.

On voit que $G'(1)$ existe et est égale à l.

Par suite, (37) donne

$$|l| \leqq w_s(E, 1+0),$$

et, si $s(t)$ est réelle, (38) donne

$$(39) \qquad - \varpi'_s(E, 1+0) \leqq l \leqq \varpi''_s(E, 1+0).$$

Mais $g(t)=l$ presque partout et $\int_0^{+\infty} \mathrm{N}(t)\, g(t)\, dt=l$, donc $\Psi(x_n)-s(x_n)$ tend vers l.

En définitive, on a démontré, dans le cas général, que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $|\Psi(x_n)-s(x_n)|$ tende vers une limite finie $|l|$ satisfaisant à $|l| \leqq w_s(\mathrm{E}, 1+0)$. Ceci entraîne (20).

Dans le cas où $s(t)$ est réelle, on a montré que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n)-s(x_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à (39). Ceci entraîne

$$-\varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0) \leqq \overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{E}}}}\, [\Psi(x)-s(x)] \leqq \varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0),$$

ce qui est équivalent à (22).

1.11.4. Il faut noter que nous n'avons pas utilisé ici l'hypothèse que $\Psi(x)=\mathrm{O}[1]$.

1.12. En perfectionnant un peu le raisonnement précédent, on arrive au théorème suivant :

Théorème 9. — *Supposons que* $\mathrm{F}(t)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$. *Supposons, d'autre part, que* $w_s(\lambda) < +\infty$, *et posons*

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt.$$

Si, quel que soit k positif, on a pour x infini :

$$\frac{\Psi(kx)}{\log kx}-\frac{\Psi(x)}{\log x}=o\left[\frac{1}{\log x}\right], \tag{40}$$

alors, en posant $\mathrm{C}=\int_0^{+\infty} \mathrm{N}(t) \log \frac{1}{t}\, dt$, *on a, quel que soit l'ensemble* E *de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement,*

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{E}}}} \left| s(x)-\Psi(x)-\mathrm{C}\frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \leqq w_s(\mathrm{E}, 1+0), \tag{41}$$

et, si $\psi(t, x)$ *et* $s(t)$ *sont réelles,*

$$-\varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0) \leqq \overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{E}}}} \left[s(x)-\Psi(x)-\mathrm{C}\frac{\Psi(x)}{\log x}\right] \leqq \varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0). \tag{42}$$

Si l'on prend pour E *l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à a*, (41) *devient*

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| s(x)-\Psi(x)-\mathrm{C}\frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \leqq w_s(1+0) \tag{43}$$

et (42) *devient*

$$(44)\qquad \varlimsup_{x\to+\infty}\left|s(x)-\Psi(x)-C\frac{\Psi(x)}{\log x}\right|\leqq\varpi_s(1+0).$$

On peut répéter sans modification ce qui a été dit aux paragraphes 1.11.1 et 1.11.2.

Nous remarquons, de plus, que pour x infini $\Psi(x)=O[\log x]$, car $s(t)=O[\log t]$ et, d'autre part, $s(t)$ satisfaisant à $|s(t')-s(t)|\leqq H\left|\log\frac{t'}{t}\right|+K$, la formule (1), avec $\alpha=1$, donne

$$|\Psi(x)-s(x)|\leqq\int_0^{+\infty}F(t)[H|\log t|+K]\,dt.$$

Alors, de toute suite de valeurs de x appartenant à l'ensemble E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle non seulement que $G_{x_n}(t)$ tende vers une fonction limite $G(t)=\int_0^t g(u)\,du$, [où $G(t)$ et $g(u)$ possèdent les propriétés que nous avons indiquées] mais aussi que $\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n}$ tende vers une limite finie ρ.

Quels que soient α et λ positifs,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-s(x_n)\qquad\text{tend vers}\qquad\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\,g(t)\,dt$$

et

$$\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-s(x_n)\qquad\text{tend vers}\qquad\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{\lambda}N\left(\frac{\alpha}{\lambda}t\right)g(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\,g(\lambda t)\,dt.$$

Par différence, on voit que

$$\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)\qquad\text{tend vers}\qquad\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)[g(\lambda t)-g(t)]\,dt.$$

Mais, en tenant compte de (40), on voit que, quel que soit k positif, $\Psi(kx_n)-\Psi(x_n)$ tend vers $\rho\log k$.

En particulier $\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-\Psi(x_n)$ tend vers $\rho\log\frac{\lambda}{\alpha}$ et $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-\Psi(x_n)$ tend vers $\rho\log\frac{1}{\alpha}$, de sorte que $\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)$ tend vers $\rho\log\lambda$.

On a donc, quels que soient α et λ positifs,

$$\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)[g(\lambda t)-g(t)]\,dt=\rho\log\lambda,$$

ou

$$\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)[g(\lambda t)-g(t)-\rho\log\lambda]\,dt=0.$$

Supposons λ fixé $\neq 1$. La fonction $g(\lambda t)-g(t)-\rho\log\lambda$ étant presque partout de module au plus égal à un nombre fixe, le fait que cette égalité ait lieu quel que soit α positif entraîne que l'on ait presque partout sur $(0, +\infty)$:

$$g(\lambda t) - g(t) - \rho \log \lambda = 0, \qquad \text{ou} \qquad g(\lambda t) - g(t) = \rho \log \lambda.$$

On a donc

$$H_\lambda(t) = \int_0^t [g(\lambda u) - g(u)]\, du = (\rho \log \lambda)\, t,$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} G(\lambda t) - G(t) = (\rho \log \lambda)\, t.$$

Ceci vaut évidemment encore pour $\lambda = 1$.

En faisant $t = 1$ et posant $G(1) = l - \rho$, on obtient

$$G(\lambda) = (l - \rho)\lambda + \rho \lambda \log \lambda.$$

On voit que $G'(1)$ existe et est égale à l, de sorte que (37) donne

$$|l| \leqq w_s(E, 1+0)$$

et, si $s(t)$ est réelle, (38) donne

$$(39) \qquad -\varpi'_s(E, 1+0) \leqq l \leqq \varpi''_s(E, 1+0).$$

D'autre part, on a presque partout

$$g(t) = G'(t) = l + \rho \log t,$$

et par suite

$$\int_0^{+\infty} N(t)\, g(t)\, dt = l - \rho C.$$

Donc $\Psi(x_n) - s(x_n)$ tend vers $l - \rho C$ et $\Psi(x_n) + C\dfrac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s(x_n)$ tend vers l.

En définitive, on voit que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\left| \Psi(x_n) + C\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s(x_n) \right|$$

tende vers une limite finie $|l|$ au plus égale à $w_s(E, 1+0)$, ce qui entraîne (41), et, si $\psi(t, x)$ et $s(t)$ sont réelles, on peut dire que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n) + C\dfrac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s(x_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à (39), ce qui entraîne

$$-\varpi'_s(E, 1+0) \leqq \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \left[\Psi(x) + C\frac{\Psi(x)}{\log x} - s(x) \right] \leqq \varpi''_s(E, 1+0),$$

inégalités équivalentes à (42).

1.13. Nous établirons encore le théorème suivant :

Théorème 10. — *Supposons que* $F(t)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et que* $\psi(t, x)$ *soit réelle* $\geqq 0$. *Supposons d'autre part que* $s(t)$ *soit réelle, que* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *et que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ *soit convergente pour* $x > a$, *et désignons par* $\Psi(x)$ *la valeur de cette intégrale.*

Si l'on a pour x *infini*

$$\Psi(x) = O[\log x],$$

et, quel que soit k *positif,*

$$\frac{\Psi(kx)}{\log kx} - \frac{\Psi(x)}{\log x} = o\left[\frac{1}{\log x}\right], \tag{40}$$

cette dernière relation ayant lieu uniformément par rapport à k *pour* $1 \leqq k \leqq 1 + h$ (⁹), *alors on a* (44) *et, quel que soit l'ensemble* E *de nombres réels supérieurs à* a, *supposé non borné supérieurement, on a* (42).

1° Les hypothèses faites sur $\Psi(x)$ entraînent, d'une part, qu'il existe un nombre positif H et un nombre réel x_0 supérieur à a, et que l'on peut supposer supérieur à 1, tel que, pour $x \geqq x_0$, $\left|\frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \leqq H$, d'autre part, qu'à tout ε positif correspond un nombre réel $X_0(\varepsilon)$, que l'on peut supposer $\geqq \operatorname{Max}(x_0, 1 + h)$, tel que, pour $x \geqq X_0(\varepsilon)$ et $1 \leqq k \leqq 1 + h$,

$$\left|\frac{\Psi(kx)}{\log kx} - \frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{\log x}.$$

Notons qu'en multipliant par $\log kx$, qui est > 0 puisque $x > 1$ et $k \geqq 1$, cette inégalité donne

$$\left|\Psi(kx) - \Psi(x) - \Psi(x)\frac{\log k}{\log x}\right| \leqq \varepsilon\left[1 + \frac{\log k}{\log x}\right] \leqq 2\varepsilon,$$

d'où

$$|\Psi(kx) - \Psi(x)| \leqq \left|\frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \log k + 2\varepsilon \leqq H \log k + 2\varepsilon.$$

2° Ceci étant, donnons-nous une suite de nombres réels croissants $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ satisfaisant à

$$t_1 > a, \qquad \lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1,$$

puis définissons une fonction $s_1(t)$, pour $t \geqq 0$, de la façon suivante :

pour $0 \leqq t < t_1$,

$$s_1(t) = 0,$$

(⁹) Ceci veut dire que, quand x tend vers $+\infty$, le produit du premier membre par $\log x$ tend vers zéro *uniformément*.

pour $t_n \leqq t < t_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$,

$$s_1(t) = \Psi(t_n) + C\frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}.$$

Il est clair que $s_1(t)$ *est mesurable et bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$.

On va voir que *l'on a pour t infini*

$$(45) \qquad s_1(t) = \Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} + o[1].$$

En effet, on a pour $t_n \leqq t < t_{n+1}$:

$$\Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} - s_1(t) = \Psi(t) - \Psi(t_n) + C\left[\frac{\Psi(t)}{\log t} - \frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}\right],$$

d'où

$$\left|\Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} - s_1(t)\right| \leqq |\Psi(t) - \Psi(t_n)| + |C|\left|\frac{\Psi(t)}{\log t} - \frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}\right|.$$

Mais, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que l'on ait pour $n \geqq N(\varepsilon)$:

$$t_n \geqq X_0(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{t_{n+1}}{t_n} \leqq \operatorname{Min}[1+h, e^{\frac{\varepsilon}{H}}].$$

Alors on a, pour $t \geqq t_{N(\varepsilon)}$,

$$\left|\Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} - s_1(t)\right| \leqq \varepsilon\left[3 + \frac{|C|}{\log(1+h)}\right];$$

car, si $t \geqq t_{N(\varepsilon)}$, il existe un entier $n \geqq N(\varepsilon)$ tel que $t_n \leqq t < t_{n+1}$, et l'on a

$$t_n \geqq X_0(\varepsilon), \qquad 1 \leqq \frac{t}{t_n} \leqq 1+h \qquad \text{et} \qquad \frac{t}{t_n} \leqq e^{\frac{\varepsilon}{H}},$$

d'où

$$|\Psi(t) - \Psi(t_n)| \leqq H \log\frac{t}{t_n} + 2\varepsilon \leqq 3\varepsilon$$

et

$$\left|\frac{\Psi(t)}{\log t} - \frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{\log t_n} \leqq \frac{\varepsilon}{\log(1+h)}.$$

On a d'autre part

$$\varpi_{s_1}(\lambda) \leqq H \log \lambda.$$

Il suffit de le montrer pour $1 < \lambda \leqq 1+h$, puisque, quels que soient λ réel > 1 et p entier $\geqq 1$,

$$\varpi_{s_1}(\lambda^p) \leqq p\varpi_{s_1}(\lambda).$$

Posons

$$s_1(t) = \Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} + \eta(t) \qquad (t > a).$$

Quels que soient t et $t' > a$, on a

$$|s_1(t') - s_1(t)| \leqq |\Psi(t') - \Psi(t)| + |C|\left|\frac{\Psi(t')}{\log t'} - \frac{\Psi(t)}{\log t}\right| + |\eta(t')| + |\eta(t)|.$$

On voit donc que, si $t \geqq t_{N(\varepsilon)}$ et $t \leqq t' \leqq \lambda t$,

$$|s_1(t') - s_1(t)| \leqq [H \log\lambda + 2\varepsilon] + \frac{|C|\varepsilon}{\log(1+h)} + 2\varepsilon\left[3 + \frac{|C|}{\log(1+h)}\right].$$

Autrement dit, pour $t \geqq t_{N(\varepsilon)}$,

$$W_{s_1}(t, \lambda) \leqq H \log\lambda + \varepsilon\left[8 + \frac{3|C|}{\log(1+h)}\right].$$

3° Puisque $w_{s_1}(\lambda) < +\infty$ et que $F(t)\log t$ est supposée sommable sur $(0, +\infty)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s_1(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$.

On va voir que, si l'on désigne la valeur de cette intégrale par $\Psi_1(x)$, la différence $\Psi(x) - \Psi_1(x)$ tend vers zéro pour x infini.

On a d'abord

$$\Psi_1(x) - s_1(x) = \int_0^{+\infty} x\psi(xt, x)[s_1(xt) - s_1(x)]\, dt,$$

et la fonction sous le signe $\int$ est de module au plus égal à la fonction sommable $F(t)[H_1|\log t| + K_1]$, H_1 et K_1 étant deux constantes positives.

Si une suite $\{x_n\}$ tend vers $+\infty$, et si $\dfrac{\Psi(x_n)}{\log x_n}$ tend vers une limite finie, soit ρ, (40) et (45) montrent que $s_1(x_n t) - s_1(x_n)$ tend vers $\rho \log t$.

Alors $x_n \psi(x_n t, x_n)[s_1(x_n t) - s_1(x_n)]$ tend vers $\rho N(t) \log t$ et $\Psi_1(x_n) - s_1(x_n)$ tend vers $-\rho C$.

Par suite $\Psi_1(x_n) + C\dfrac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s_1(x_n)$ tend vers zéro.

Comme, de toute suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite satisfaisant à la condition indiquée, on voit que $\Psi_1(x) + C\dfrac{\Psi(x)}{\log x} - s_1(x)$ tend vers zéro pour x infini. En tenant compte de (45), on en déduit que $\Psi_1(x) - \Psi(x)$ tend vers zéro.

4° Posons maintenant

$$s_2(t) = s(t) - s_1(t).$$

On voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s_2(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$ et égale à $\Psi(x) - \Psi_1(x)$. Elle tend donc vers zéro pour x infini.

On pourra lui appliquer le théorème 6, car $\varpi_{s_2}(\lambda) < +\infty$.

En effet, l'égalité

$$s_2(t') - s_2(t) = [s(t') - s(t)] - [s_1(t') - s_1(t)] \tag{46}$$

montre que, quels que soient $t > 0$ et $\lambda > 1$,

$$\Pi'_{s_2}(t, \lambda) \leqq \Pi'_s(t, \lambda) + W_{s_1}(t, \lambda).$$

Il en résulte que, quel que soit l'ensemble de nombres positifs E, non borné supérieurement,

$$(47)\qquad \varpi'_{s_2}(\mathrm{E}, \lambda) \leqq \varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda) + w_{s_1}(\mathrm{E}, \lambda) \leqq \varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda) + \mathrm{H}\log\lambda.$$

En particulier, en prenant pour E l'ensemble de tous les nombres positifs, on a

$$(48)\qquad \varpi_{s_2}(\lambda) \leqq \varpi_s(\lambda) + \mathrm{H}\log\lambda.$$

Le théorème 6 donne

$$(49)\qquad \varlimsup_{x \to +\infty} |s_2(x)| \leqq \varpi_{s_2}(1+0)$$

et, quel que soit l'ensemble E de nombres réels $> a$, supposé non borné supérieurement,

$$(50)\qquad -\varpi''_{s_2}(\mathrm{E}, 1+0) \leqq \varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{E}}} s_2(x) \leqq \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{E}}} s_2(x) \leqq \varpi'_{s_2}(\mathrm{E}, 1+0).$$

Comme, pour x infini,

$$s_2(x) = s(x) - s_1(x) = s(x) - \Psi(x) - \mathrm{C}\frac{\Psi(x)}{\log x} + o[1],$$

on peut remplacer dans (49) et (50) $s_2(x)$ par $s(x) - \Psi(x) - \mathrm{C}\dfrac{\Psi(x)}{\log x}$.

D'autre part, (48) donne $\varpi_{s_2}(1+0) \leqq \varpi_s(1+0)$, (47) donne

$$\varpi'_{s_2}(\mathrm{E}, 1+0) \leqq \varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0).$$

De plus (46) montre aussi que

$$\Pi''_{s_2}(t, \lambda) \leqq \Pi''_s(t, \lambda) + \operatorname*{Sup}_{\frac{t}{\lambda} \leq t' \leq t} \mathrm{W}_{s_1}(t', \lambda),$$

d'où résulte

$$\varpi''_{s_2}(\mathrm{E}, \lambda) \leqq \varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda) + w_{s_1}(\lambda) \leqq \varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda) + \mathrm{H}\log\lambda,$$

et par suite

$$\varpi''_{s_2}(\mathrm{E}, 1+0) \leqq \varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0).$$

On peut donc remplacer aussi dans (49) et (50) $\varpi_{s_2}(1+0)$ par $\varpi_s(1+0)$, $\varpi'_{s_2}(\mathrm{E}, 1+0)$ par $\varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0)$, et $\varpi''_{s_2}(\mathrm{E}, 1+0)$ par $\varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0)$.

Ainsi, on obtient bien (44) et (42).

1.14. Remarquons que la relation (40) est vérifiée si, pour x infini,

$$(51)\qquad \Psi(x) = \rho(x)\log x + \gamma + o[1],$$

γ étant une constante, et $\rho(x)$ une fonction définie pour x positif assez grand et satisfaisant, quel que soit $k > 0$, à

$$(52)\qquad \rho(kx) - \rho(x) = o\left[\frac{1}{\log x}\right].$$

Si, de plus (52) est satisfaite uniformément par rapport à k pour $1 \leqq k \leqq 1+h$, il en est de même de (40), et si $\rho(x) = O[1]$, on a $\Psi(x) = O[\log x]$.

Lorsque l'on a (51), on a pour x infini

$$\Psi(x) + C \frac{\Psi(x)}{\log x} = \rho(x)[\log x + C] + \gamma + o[1]$$

et l'on peut remplacer $\Psi(x) + C \frac{\Psi(x)}{\log x}$ par $\rho(x)[\log x + C] + \gamma$ dans (41), (42), (43) et (44).

Si, de plus, $w_s(1+0) = 0$, (43) devient

$$s(x) = \rho(x)[\log x + C] + \gamma + o[1] \qquad (x \to +\infty),$$

et il en est de même de (44) si $\varpi_s(1+0) = 0$.

1.15. La démonstration du théorème 10 se simplifie dans le cas particulier où $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, en même temps que les hypothèses sur le comportement de $\Psi(x)$ peuvent être un peu affaiblies, grâce au théorème suivant qui permet de se ramener au théorème 9 :

Théorème 11. — *Supposons que* $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$ *et que* $N(u)$ *soit réel* $\geqq 0$. *Supposons, de plus, que* $s(t)$ *soit réelle et satisfasse à* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *et que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ *soit convergente pour* $x > 0$, *et désignons par* $\Psi(x)$ *la valeur de cette intégrale.*

Si l'on sait qu'il existe trois nombres positifs M, h *et* x_0 *tels que, pour* $x \geqq x_0$ *et* $1 \leqq k \leqq 1+h$,

$$\Psi(kx) - \Psi(x) \leqq M,$$

on peut affirmer que $w_s(\lambda) < +\infty$ (10).

Nous observons d'abord que $\Pi'_s(t, 1+h)$ est bornée pour $t > 0$ quelconque par un nombre positif Ω, puisqu'elle est manifestement bornée pour $s \leqq L$, avec $L > 0$ quelconque, et que sa plus grande limite pour t infini a une valeur finie. Alors, quels que soient t et t' satisfaisant à $0 < t \leqq t' \leqq (1+h)t$, on a

$$s(t') - s(t) \geqq -\Omega.$$

D'autre part, on peut évidemment trouver deux nombres α et β satisfaisant à

$$0 < \alpha < \beta, \qquad \frac{\beta}{\alpha} < 1+h \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta N(t)\, dt > 0 \qquad [\text{c'est-à-dire } K(\alpha) - K(\beta) > 0].$$

---

(10) Ce théorème est, à de légères modifications près, un lemme donné par Karamata dans [5], p. 182. Notre démonstration suit exactement celle de Karamata.

Ceci étant, nous allons montrer que, si $u \geqq \beta x_0$ et $u \leqq u' \leqq (1+h)\frac{\alpha}{\beta}u$,

$$|s(u') - s(u)| \leqq \frac{M+\Omega}{K(\alpha)-K(\beta)} + \Omega = W,$$

c'est-à-dire que, pour $t \geqq \beta x_0$, $W_s[t, \frac{\alpha}{\beta}(1+h)] \leqq W$, d'où il résultera que

$$w_s\left[\frac{\alpha}{\beta}(1+h)\right] \leqq W.$$

D'après ce que l'on vient de dire, on a

$$s(u') - s(u) \geqq -\Omega;$$

il suffira donc de montrer que

$$(53) \qquad s(u') - s(u) \leqq \frac{M+\Omega}{K(\alpha)-K(\beta)} + \Omega.$$

En remarquant que

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} N(t)\, s(xt)\, dt,$$

on peut écrire

$$(54) \qquad \Psi\left(\frac{u'}{\alpha}\right) - \Psi\left(\frac{u}{\beta}\right) + \Omega = \int_0^{+\infty} N(t)\left[s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) + \Omega\right] dt.$$

Comme $\frac{u}{\beta}t < \frac{u'}{\alpha}t \leqq (1+h)\frac{u}{\beta}t$, on a

$$s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) \geqq -\Omega,$$

et par suite la fonction sous le signe $\int$ au second membre de (54) est $\geqq 0$. L'intégrale de 0 à $+\infty$ est donc au moins égale à l'intégrale de α à β.

D'autre part, comme

$$\frac{u}{\beta} \geqq x_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{\beta} < \frac{u'}{\alpha} \leqq (1+h)\frac{u}{\beta},$$

on a

$$\Psi\left(\frac{u'}{\alpha}\right) - \Psi\left(\frac{u}{\beta}\right) \leqq M.$$

On peut donc écrire

$$(55) \qquad M + \Omega \geqq \int_\alpha^\beta N(t)\left[s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) + \Omega\right] dt.$$

Remarquons maintenant que, pour $\alpha \leqq t \leqq \beta$, l'on a

$$u' \leqq \frac{u'}{\alpha}t < (1+h)u' \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{\beta}t \leqq u < (1+h)\frac{u}{\beta}t,$$

de sorte que

$$s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right)-s(u')\geqq-\Omega \qquad \text{et} \qquad s(u)-s\left(\frac{u}{\beta}t\right)\geqq-\Omega,$$

d'où

$$s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right)-s\left(\frac{u}{\beta}t\right)+\Omega\geqq s(u')-s(u)-\Omega.$$

(55) donne alors

$$\mathrm{M}+\Omega\geqq[\mathrm{K}(\alpha)-\mathrm{K}(\beta)]\,[s(u')-s(u)-\Omega],$$

d'où l'on tire (53).

1.15.1. En combinant les théorèmes 9 et 11, on obtient l'énoncé suivant :

Théorème 10*a*. — *Supposons que* $\psi(t, x)=\frac{1}{x}\mathrm{N}\left(\frac{t}{x}\right)$, *que* $\mathrm{N}(u)$ *soit réel* $\geqq 0$ *et que* $\mathrm{N}(t)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Supposons, d'autre part, que $s(t)$ *soit réelle et satisfasse à* $\varpi_s(\lambda)<+\infty$, *et que l'intégrale* $\int_0^{+\infty}\psi(t, x)s(t)\,dt$ *soit convergente pour* $x>0$. *Désignons par* $\Psi(x)$ *la valeur de cette intégrale.*

Si, quel que soit $k>0$, *on a pour* x *infini*

$$\frac{\Psi(kx)}{\log kx}-\frac{\Psi(x)}{\log x}=o\left[\frac{1}{\log x}\right], \tag{40}$$

et s'il existe trois nombres positifs x_0, h *et* M *tels que, pour* $x\geqq x_0$ *et* $1\leqq k\leqq 1+h$, $\Psi(kx)-\Psi(x)\leqq\mathrm{M}$, *alors on a* (44) *et, quel que soit l'ensemble de nombres positifs* E, *non borné supérieurement, on a* (42) ([11]).

Il faut noter que les hypothèses faites ici sur $\Psi(x)$ sont satisfaites lorsque celles faites dans le théorème 10 le sont, puisque nous avons montré que ces dernières entraînent que, pour $x\geqq\mathrm{X}_0(\varepsilon)$ et $1\leqq k\leqq 1+h$,

$$|\Psi(kx)-\Psi(x)|\leqq\mathrm{H}\log k+2\varepsilon\leqq\mathrm{H}\log(1+h)+2\varepsilon.$$

1.16. Remarquons que, *dans tous les énoncés des théorèmes de ce Chapitre où figure l'intégrale* $\int_0^{+\infty}\psi(t, x)s(t)dt$, *on pourrait remplacer cette intégrale par* $\int_0^{+\infty}\varphi(t, x)\,ds(t)$, *en ajoutant l'hypothèse que* $s(t)$ *est à variation bornée sur tout intervalle fini* $[0, \mathrm{L}]$ *et nulle pour* $t=0$.

([11]) Nous avons énoncé ce théorème dans notre Note [2].

En effet, dans les théorèmes 1, 2 et 4, on suppose $s(t)$ bornée; dans le théorème 9 on suppose que $w_s(\lambda) < +\infty$ et que $F(t)\log t$ est sommable sur l'intervalle $(0 + \infty)$; dans le théorème 5, on suppose que $w_s(\lambda) < +\infty$ et que $x\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$. Nous savons que, dans chaque cas, si, en plus de ces hypothèses, $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est convergente pour $x > a$, comme $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$, et est égale à celle-ci.

Enfin, dans les théorèmes 6, 10, 11 et 10a, on suppose $\psi(t, x) \geqq 0$. On sait que, si $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ entraîne celle de $\int_0^{+\infty} x\psi(t, x)\,s(t)\,dt$ avec la même valeur.

II. — Théorème, des deux types, dans leur cas général.

2. 1. Nous allons indiquer maintenant comment on peut, à partir des énoncés de notre premier Mémoire et du Chapitre précédent, en obtenir de plus généraux.

Soit $\psi(t, x)$ une fonction réelle ou complexe définie pour t réel $\geqq 0$ et x appartenant à un certain ensemble de nombres réels $\mathcal{E}$, et supposons que, pour x fixé, $\psi(t, x)$ soit une fonction de t sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

Soit, d'autre part, $s(t)$ une fonction réelle ou complexe définie pour t réel $\geqq 0$, mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$.

Soit alors $V(\tau)$ une fonction réelle définie pour τ réel $\geqq 0$, continue et possédant une dérivée continue pour ces valeurs, avec $V'(\tau) > 0$, et qui croît de 0 à $+\infty$ quand τ croît de 0 à $+\infty$, et soit $\Lambda(t)$ la fonction inverse de $V(\tau)$, qui possédera évidemment les mêmes propriétés.

Soit encore $\eta(y)$ une fonction définie pour y réel supérieur à un certain nombre a positif ou nul, prenant ses valeurs sur l'ensemble $\mathcal{E}$ et tendant vers x_0 quand y tend vers $+\infty$.

Quel que soit $y > a$ et quel que soit $L > 0$, on a

$$\int_0^L \psi[t, \eta(y)]\,s(t)\,dt = \int_0^{\Lambda(L)} \psi^*(\tau, y)\,\sigma(\tau)\,d\tau,$$

avec

$$\psi^*(\tau, y) = \psi[V(\tau), \eta(y)]\,V'(\tau), \tag{56}$$

et

$$\sigma(\tau) = s[V(\tau)]. \tag{57}$$

Donc, toutes les fois que l'une des intégrales $\int_0^{+\infty} \psi[t, \eta(y)]\, s(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \psi^\star(\tau, y)\, \sigma(\tau)\, d\tau$ est convergente, l'autre l'est aussi et lui est égale.

Ceci étant, à chacun des théorèmes donnés dans notre premier Mémoire ou dans le Chapitre précédent relativement à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$, on fera correspondre un nouvel énoncé obtenu de la façon suivante :

Outre les hypothèses mentionnées plus haut sur $\psi(t, x)$ et $s(t)$, on supposera qu'il existe deux fonctions $V(\tau)$ et $\eta(y)$, possédant les propriétés que nous avons indiquées, telles que la fonction $\psi^\star(\tau, y)$ définie par (56) satisfasse aux conditions imposées à $\psi(t, x)$ dans le théorème considéré, puis, en supposant ces deux fonctions fixées, on appliquera ce théorème à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi^\star(\tau, y)\, \sigma(\tau)\, d\tau$, où $\sigma(\tau)$ est donnée par (57), en traduisant les hypothèses à faire sur $\sigma(\tau)$, et éventuellement sur le comportement de cette intégrale, et la conclusion, au moyen de $s(t)$ et $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$.

2.1.1. Nous laissons au lecteur le soin de former ainsi les différents énoncés correspondant à ceux de notre premier Mémoire et du Chapitre précédent.

Bornons-nous à donner quelques indications :

Le fait que la fonction $\psi^\star(\tau, y)$ définie par (56) satisfait aux hypothèses (1), (3), et (4) indiquées au paragraphe 3.1 de notre premier Mémoire et au paragraphe 1.1 de celui-ci se traduit de la façon suivante :

α. Pour chaque $y > a$,

$$\int_0^{+\infty} \psi[t, \eta(y)]\, dt = 1 \quad (^{12}),$$

β. Il existe une fonction positive ou nulle $F(\tau)$ sommable sur $(0, +\infty)$ et telle que l'on ait quel que soit $y > a$

$$|y\psi[V(y\tau), \eta(y)]\, V'(y\tau)| \leq F(\tau),$$

γ. Quand y tend vers $+\infty$, $y\psi[V(y\tau), \eta(y)]\, V'(y\tau)$ tend vers une fonction limite $N(\tau)$.

Pour simplifier, on pourra remplacer (α) par

---

(12) L'hypothèse que $\psi^\star(\tau, y)$ est une fonction de τ sommable sur $(0, +\infty)$ est automatiquement satisfaite du fait que $\psi(t, x)$ est une fonction de t sommable sur cet intervalle.

(α'). Pour chaque x de $\mathcal{E}$,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t,\, x)\, dt = 1 \quad \text{([13])}.$$

De même, s'il y a lieu, l'hypothèse que $\psi[t, \eta(y)]$ est réelle (ou bien réelle $\geqq 0$), qui exprimerait le fait que $\psi^\star(\tau, y)$ est réelle (ou réelle $\geqq 0$), pourra être remplacée par celle que $\psi(t, x)$ est réelle (ou réelle $\geqq 0$).

L'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ est déjà contenue dans celle qu'il en est ainsi de $s(t)$.

Lorsque l'on a à faire l'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est réelle, elle se traduit par celle que $s(t)$ est réelle.

De même pour l'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est bornée.

Pour traduire les autres hypothèses que l'on peut avoir à faire sur $\sigma(\tau)$, on se rappellera que l'on a

$$w_\sigma(\lambda) = w_{s,\Lambda}(\lambda)$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\varpi_\sigma(\lambda) = \varpi_{s,\Lambda}(\lambda),$$

et que

$$\delta_\sigma[\Lambda(t)] = \delta_{s,\Lambda}(t),$$

de sorte que

$$\varlimsup_{t \to +\infty} |\delta_\sigma(t)| = \varlimsup_{t \to +\infty} |\delta_{s,\Lambda}(t)|.$$

Lorsque la conclusion du théorème appliqué à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi^\star(\tau, y)\, \sigma(\tau)\, d\tau$ sera une inégalité portant sur les valeurs limites pour y tendant vers $+\infty$ d'une expression de la forme $\sigma(y) - G(y)$, on pourra remarquer que ces valeurs limites sont les mêmes que celles de $s(t) - G[\Lambda(t)]$ pour t tendant vers $+\infty$, puisque

$$s(t) - G[\Lambda(t)] = \sigma[\Lambda(t)] - G[\Lambda(t)].$$

Si l'on a une inégalité portant sur les valeurs limites de $\sigma(y) - G(y)$ pour y tendant vers $+\infty$ en restant sur un certain ensemble de nombres réels $> a$, il y aura intérêt à l'appliquer à l'ensemble $\Lambda(E)$, où E sera supposé être un ensemble donné de nombres réels supérieurs à $V(a)$, non borné supérieurement. Les valeurs limites de $\sigma(y) - G(y)$ pour y tendant vers $+\infty$ sur $\Lambda(E)$ seront les mêmes que celles de $s(t) - G[\Lambda(t)]$ pour t tendant vers $+\infty$ sur E.

On se rappellera, d'autre part, que l'on a

$$w_\sigma[\Lambda(E), \lambda] = w_{s,\Lambda}(E, \lambda)$$

([13]) Il est clair que l'hypothèse (α') est plus restrictive que (α) si $\eta(y)$ ne prend pas pour valeurs ous les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$.

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\varpi'_\sigma[\Lambda(E), \lambda] = \varpi'_{s,\Lambda}(E, \lambda) \qquad \text{et} \qquad \varpi''_\sigma[\Lambda(E), \lambda] = \varpi''_{s,\Lambda}(E, \lambda).$$

2.1.2. Les théorèmes transformés des théorèmes 3 et 5 de notre premier Mémoire fournissent les énoncés auxquels nous avons fait allusion dans son introduction qui donnent comme corollaire le théorème inverse relatif à la condition de convergence (1) ou (2) ([14]).

Les théorèmes transformés des théorèmes 5 et 9 du présent Mémoire fournissent des énoncés qui donnent comme corollaire le théorème inverse relatif à la condition de convergence (3) ([15]).

Les théorèmes transformés des théorèmes 6 et 10 fournissent des énoncés qui donnent comme corollaire le théorème inverse relatif à la condition de convergence (4) ([16]).

2.1.3. *Dans chacun des énoncés considérés ici*, de même que dans ceux considérés précédemment, *on pourrait remplacer l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ *par* $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$, *où* $\varphi(t, x)$ *est la fonction définie par*

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du,$$

en ajoutant l'hypothèse que $s(t)$ *est à variation bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$ *et nulle pour* $t = 0$.

([14]) Les conditions de convergence (1), (2), (3), (4) mentionnées dans ce paragraphe sont celles indiquées dans l'introduction de notre premier Mémoire.

([15]) En effet, les hypothèses sur $s(t)$ et sur le comportement de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ qui figurent dans ces théorèmes sont satisfaites si l'on a la condition de convergence (3) et si l'intégrale tend vers S quand x tend vers x_0, et la conclusion devient alors que $s(t)$ tend vers S quand t tend vers $+\infty$.

On peut noter, de plus, que nos hypothèses sur le noyau $\psi(t, x)$ sont un peu moins restrictives que celles données par Karamata dans [7] (th. B, p. 28), d'une part parce que nous ne supposons pas ce noyau réel $\geqq 0$, d'autre part parce que nous supposons

$$\int_1^{+\infty} |\psi^\star(\tau, y)| \log\tau\, d\tau = O[1] \qquad (y \to +\infty),$$

tandis que Karamata suppose

$$\int_0^{+\infty} |\psi^\star(\tau, y) \log\tau|\, d\tau = O[1].$$

[Au contraire, dans les théorèmes transformés des théorèmes 3 et 5 de notre premier Mémoire, nos hypothèses sur $\psi(t, x)$ sont un peu plus restrictives que celles de Karamata, du moins si l'on se restreint au cas où $\psi(t, x)$ est réel $\geqq 0$, car nous supposons $F(\tau)\log\tau$ sommable sur $(0, +\infty)$].

([16]) Ici encore, nos hypothèses sur le noyau $\psi(t, x)$ sont un peu moins restrictives que celles de Karamata.

En effet, chaque fois que nous avons appliqué un théorème de notre premier Mémoire ou du Chapitre précédent à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi^\star(\tau, y)\sigma(\tau)d\tau$, nous aurions pu remplacer cette intégrale par $\int_0^{+\infty} \varphi^\star(\tau, y)\, d\sigma(\tau)$, avec $\varphi^\star(\tau, y) = \int_\tau^{+\infty} \psi^\star(u, y)du$, en ajoutant l'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini et nulle pour $\tau = 0$.

Cette dernière hypothèse se traduit par la même hypothèse sur $s(t)$.

D'autre part, on voit que, si

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du,$$

on a

$$\varphi^\star(\tau, y) = \varphi[V(\tau), \eta(y)],$$

de sorte que les intégrales $\int_0^{+\infty} \varphi^\star(\tau, y)\, d\sigma(\tau)$ et $\int_0^{+\infty} \varphi[t, \eta(y)]\, ds(t)$ sont convergentes ou divergentes en même temps et sont égales lorsqu'elles sont convergentes.

2.2. On peut aussi faire correspondre à chacun des théorèmes 4 et 6 de notre premier Mémoire et 7 et 8 de celui-ci, où figure la série $\sum_0^{+\infty} u_n$, un nouvel énoncé obtenu de la façon suivante :

Outre les hypothèses sur $\psi(t, x)$ mentionnées au début du paragraphe 2.1, on suppose qu'il existe deux fonctions $V(\tau)$ et $\eta(y)$ possédant les propriétés indiquées dans ce paragraphe, telles que la fonction $\psi^\star(\tau, y)$ définie par (56) satisfasse aux conditions imposées à $\psi(t, x)$ dans le théorème considéré. Puis, ces deux fonctions étant supposées fixées, et étant entendu que $\varphi(t, x)$ est la fonction définie par

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du,$$

on considère encore une suite de nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ satisfaisant à

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$$

et une suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, et l'on transcrit les hypothèses du théorème considéré, autres que celles sur $\psi(t, x)$, et les conclusions de ce théorème, en y remplaçant λ_n par $\Lambda_n = \Lambda(\lambda_n)$ partout sauf dans $\varphi(\lambda_n, x)$ et $\varphi(\lambda_{n+1}, x)$, et x par $\eta(y)$ dans ces deux dernières expressions et par y partout ailleurs.

La légitimité de cette façon de faire résulte de ce que, si l'on pose, comme au paragraphe 2.1.3,

$$\varphi^{\star}(\tau, y) = \int_{\tau}^{+\infty} \psi^{\star}(u, y)\, du,$$

on a

$$\varphi^{\star}(\Lambda_n, y) = \varphi[\lambda_n, \eta(y)].$$

Dans la conclusion des théorèmes correspondant ainsi aux théorèmes 4 et 6 de notre premier Mémoire, on peut évidemment remplacer

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \left| S\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \sum_{\Lambda_n \leq y} u_n \right|$$

par

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \left| S\left[\frac{\Lambda(t)}{\alpha}\right] - \sum_{\lambda_n \leq t} u_n \right| \quad (^{17}).$$

D'autre part, dans le théorème correspondant au théorème 7 du présent Mémoire, on peut remplacer l'hypothèse que la somme commune des séries

$$\sum_{0}^{+\infty} \varphi[\lambda_n, \eta(y)]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{+\infty} \{\varphi[\lambda_n, \eta(y)] - \varphi[\lambda_{n+1}, \eta(y)]\}\, S_n$$

tend vers S quand y tend vers $+\infty$ par celle que la somme de l'une des séries

$$\sum_{0}^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]\, S_n,$$

supposée convergente pour x appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$, tend vers S quand x tend vers x_0.

De même, dans le théorème correspondant au théorème 8, on peut remplacer l'hypothèse que l'une des séries

$$\sum_{0}^{+\infty} \varphi[\lambda_n, \eta(y)]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{+\infty} \{\varphi[\lambda_n, \eta(y)] - \varphi[\lambda_{n+1}, \eta(y)]\}\, S_n$$

converge pour $y > a$ et que sa somme tend vers S quand y tend vers $+\infty$ par celle que l'une des séries

$$\sum_{0}^{+\infty} \varphi[\lambda_n, x]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]\, S_n$$

---

(17) Il faut bien noter ici qne $S(y)$ désigne la somme commune des séries

$$\sum_{0}^{+\infty} \varphi[\lambda_n, \eta(y)]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{+\infty} \{\varphi[\lambda_n, \eta(y)] - \varphi[\lambda_{n+1}, \eta(y)]\}\, S_n.$$

converge pour x appartenant à $\mathcal{E}$ et que sa somme tend vers S quand x tend vers x_0.

Naturellement, les théorèmes obtenus ainsi pourraient tout aussi bien être obtenus comme corollaires des théorèmes correspondant comme il a été dit plus haut aux théorèmes 3 et 5 de notre premier Mémoire et 5 et 6 de celui-ci.

Bibliographie.

[1] ANANDA-RAU, *On the converse of Abel's theorem* (*Journal London Math. Soc.*, vol. 3, nº 11, p. 200-205).

[2] H. DELANGE, *Théorèmes taubériens généraux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 28-31).

[3] H. DELANGE, *The converse of Abel's theorem on power series* (*Annals of Math.*, vol. 50, 1949, p. 94-109).

[4] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Notes on the theory of series* (IV) *: On the strong summability of Fourier series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 26, 1927, p. 273-286].

[5] J. KARAMATA, *Bemerkung zur Note : Über einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren* (*Publ. Math. Univ. de Belgrade*, t. 4, 1935, p. 181-184).

[6] J. KARAMATA, *Allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren* (*Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansichen Universität*, Bd 12, 1937, p. 48-63).

[7] J. KARAMATA, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité* (*Actualités scientifiques et industrielles*, t. 450, Hermann, Paris, 1937).

[8] J. E. LITTLEWOOD, *The converse of Abel's theorem on power series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 9, 1911, p. 434-448].

[9] O. SASZ, *Über Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze* (*Atti del congresso internazionale dei mathematici*, Bologna 1928, vol. III, p. 269-276).

[10] O. SASZ, *Generalization of two theorems of Hardy and Littlewood on power series* (*Duke Math. Journal*, t. 1, 1935, p. 105-111).

[11] O. SASZ, *Converse theorems of summability for Dirichlet series* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 39, 1936, p. 117-130).

[12] N. WIENER, *Tauberian theorems* [*Annals of Math.*, (2), t. 33, 1932, p. 1-100].