Annales scientifiques de l'É.N.S.

Allégret

Mémoire sur la représentation des transcendantes par des arcs de courbes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 149-200
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__149_0>

MÉMOIRE

SUR LA

REPRÉSENTATION DES TRANSCENDANTES

PAR DES ARCS DE COURBE,

PAR M. ALLÉGRET,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

CHAPITRE I.

MÉTHODE DE JACQUES HERMANN POUR REPRÉSENTER LES QUADRATURES PAR DES ARCS DE COURBE, A UNE QUANTITÉ ALGÉBRIQUE PRÈS. — FORMULES ANALOGUES DE JEAN BERNOULLI.

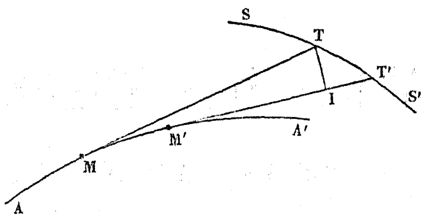
1. On sait depuis longtemps exprimer l'arc d'une courbe par une quadrature; mais le problème inverse, qui consiste à déterminer la courbe algébrique dont l'arc équivaut à une quadrature donnée, offre plus de difficulté. Un savant géomètre du XVIII^e siècle, Jacques Hermann, de Bâle (1), en a, le premier, donné, dans les *Actes de Leipzig* de 1723, une solution que je vais rapporter brièvement.

2. Soient menées deux tangentes successives MT, M′T′ à une courbe plane quelconque; elles intercepteront sur une autre courbe donnée SS′ un arc infiniment petit TT′, dont la projection IT′ sur l'une des tangentes exprime la somme des différentielles de l'arc AM et de la tangente MT.

(1) Né en 1678, mort en 1733.

Il suit de là que, si les coordonnées de SS′ sont données arbitrairement en fonction d'une même variable t, et qu'on coupe cette courbe

Fig. 1.



par une série continue de droites TM, T′M′,..., sous un angle dont le cosinus soit égal à $\frac{f(t)}{\varphi(t)}$, en désignant par $\varphi(t)$ le quotient de TT′ divisé par dt, et par $f(t)$ une fonction algébrique arbitraire; l'enveloppe de TM déterminera une courbe AA′, telle que

$$\text{arc AM} + \text{MT} = \int f(t)\,dt,$$

et dont l'arc indéfini représentera, par suite, la quadrature $\int f(t)\,dt$, à la quantité algébrique près, égale à la tangente MT.

Telle est la solution générale due à Hermann [1].

3. Si l'on prend pour équation en coordonnées polaires de la courbe SS′, entre le rayon vecteur r et l'angle t,

$$r = f(t),$$

le cosinus précédent devient

$$\frac{f(t)\,dt}{ds} = \frac{r\,dt}{ds},$$

en désignant par s l'arc de la courbe SS′. La droite TI passe donc alors

---

[1] *Actes de Leipzig* de 1723, p. 174. Hermann a fait voir de plus qu'en représentant la quadrature par la somme de deux aires variables qui, dans quelques cas particuliers, forment un rectangle de valeur algébrique, l'arc de la courbe algébrique AA′ exprime non-seulement, à une quantité algébrique près, la quadrature donnée, mais cette courbe peut avoir, en outre, autant d'arcs absolument rectifiables qu'on voudra fixer d'avance.

par le pôle, et la courbe cherchée AA′ est simplement l'enveloppe de la droite TM, menée en M perpendiculairement au rayon vecteur qui aboutit à ce point. C'est la solution que Legendre a présentée beaucoup plus tard comme nouvelle, et dont il a fait diverses applications (¹).

4. Jean Bernoulli a publié dans les *Actes de Leipzig* (²), peu de temps après la découverte d'Hermann, quelques formules analytiques pour résoudre le même problème.

En exprimant les coordonnées rectangulaires x, y de la courbe cherchée en fonction des deux variables u et z, Bernoulli se propose de trouver une relation entre ces dernières, de telle sorte qu'on ait

$$x = \frac{du}{dz}, \quad y = u - z\frac{du}{dz};$$

ce qui donne, pour la différentielle ds de l'arc de la courbe,

$$ds = \sqrt{1+z^2}\,\frac{d^2u}{dz^2}\,dz;$$

d'où il résulte, en intégrant par partie,

$$s = \sqrt{1+z^2}\,\frac{du}{dz} - \int \frac{z\,du}{\sqrt{1+z^2}}$$

ou encore

$$s = -\frac{uz}{\sqrt{1+z^2}} + \sqrt{1+z^2}\,\frac{du}{dz} + \int \frac{u\,dz}{\sqrt{(1+z^2)^3}}.$$

Bernoulli pose ensuite, dans la première expression,

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = p,$$

ce qui fait dépendre l'arc s de la quadrature $\int p\,du$. Comme on sup-

(¹) On lit, p. 591, t. II du *Traité des Fonctions elliptiques :* « Ainsi la quadrature d'une courbe algébrique peut toujours se réduire à la rectification d'une autre courbe, *proposition dont l'inverse seulement était connue.* » Ces dernières paroles autorisent à penser que Legendre n'a pas eu connaissance des travaux de ses prédécesseurs, notamment d'Euler, sur ce sujet.

(²) Année 1724. *Voir* aussi *OEuvres de Jean Bernoulli*, t. II, p. 582.

pose p donné en fonction de u, l'équation précédente fait connaître u en fonction de z. Le problème est ainsi résolu.

Mais la solution se simplifie un peu en faisant

$$\frac{u}{\sqrt{(1+z^2)^3}}=f(z),$$

et en exprimant l'arc au moyen de la seconde expression.

On trouve, dans ce cas, pour formules définitives,

$$u=f(z)\sqrt{(1+z^2)^3},$$

$$x=\frac{du}{dz},\quad y=u-z\frac{du}{dz}\quad \text{et}\quad s=2z(1+z^2)f(z)+(1+z^2)^2f'(z)+\int f(z)\,dz.$$

5. Si l'on fait dans ces dernières

$$z=\operatorname{tang}\theta\quad \text{et}\quad f(z)=\varphi(\theta)\cos^2\theta,$$

en prenant pour nouvelle variable θ, elles se transforment dans les suivantes :

$$u=\frac{\varphi(\theta)}{\cos\theta},$$

$$x=\cos^2\theta\frac{du}{d\theta},\quad y=u-\sin\theta\cos\theta\frac{du}{d\theta}$$

ou, en développant les calculs,

$$x=\cos\theta\,\varphi'(\theta)+\sin\theta\,\varphi(\theta),\quad y=\cos\theta\,\varphi(\theta)-\sin\theta\,\varphi'(\theta)$$

et

$$s=\varphi'(\theta)+\int\varphi(\theta)\,d\theta.$$

Ce sont précisément les formules que Legendre a données à la fin de son *Traité des Fonctions elliptiques* (1); elles se déduisent facilement, comme on voit, des précédentes, et plus rapidement encore de la remarque du n° 3.

6. Je me bornerai, comme exercice, à appliquer directement la solution donnée à la fin du n° 4 à la représentation de la fonction elliptique

(1) T. II, p. 588.

de première espèce ou à l'intégrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} = F(c, \varphi).$$

En posant

$$b^2 = 1 - c^2 \quad \text{et} \quad z = b \operatorname{tang}\varphi,$$

elle se change en

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}\sqrt{z^2 + b^2}}.$$

L'application des formules trouvées donne ensuite sans difficulté

$$u = \frac{1 + z^2}{\sqrt{z^2 + b^2}},$$

$$x = \frac{du}{dz} = \frac{\sin\varphi}{b^2}(b^2 - c^2\cos^2\varphi),$$

$$y = u - z\frac{du}{dz} = \frac{\cos\varphi}{b}(1 + c^2\sin^2\varphi),$$

$$s = -\frac{uz}{\sqrt{1 + z^2}} + \sqrt{1 + z^2}\frac{du}{dz} + F(c, \varphi) = F(c, \varphi) - \frac{c^2}{b^2}\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi),$$

en posant, avec Legendre,

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}.$$

Ces valeurs coïncident avec celles que ce savant a données dans son *Traité* (¹). Elles déterminent une courbe de sixième degré, étudiée par divers géomètres (²).

(¹) T. Iᵉʳ, p. 36 et 37; t. II, p. 590.
(²) Outre Legendre, Talbot dans les *Annales de Gergonne*; Tortolini dans le *Journal de Crelle*, t. 33 p. 90, etc.

CHAPITRE II.

EXPOSÉ D'UNE AUTRE MÉTHODE POUR RÉSOUDRE COMPLÉTEMENT LE MÊME PROBLÈME DANS UN GRAND NOMBRE DE CAS.

7. Les règles que nous venons de rappeler introduisent une fonction algébrique qu'il faut ajouter à l'arc indéfini de la courbe obtenue pour avoir la valeur de la quadrature donnée; elles sont donc insuffisantes quand on demande de faire correspondre exactement entre eux l'arc et la quadrature. Ce second problème a aussi depuis longtemps attiré l'attention des géomètres. On trouve dans les *Œuvres* des deux frères Bernoulli, Jean et Jacques (1), ainsi que dans de nombreux Mémoires d'Euler (2), la solution de quelques cas particuliers de ce problème, et en même temps le témoignage des efforts infructueux tentés dans d'autres, qui ne paraissent pas, au premier abord, plus difficiles (3). C'est ainsi qu'Euler déclare, dans un de ses Mémoires, qu'après avoir obtenu une infinité de courbes algébriques dont les arcs sont respectivement égaux à ceux d'une ellipse ou d'une parabole donnée, il n'a pas pu découvrir de courbe différente de l'hyperbole, et dont l'arc fût représenté par la même transcendante (4). Le même géomètre affirme ailleurs que, quoique l'arc de parabole soit exprimable par la somme d'une fonction algébrique et d'une *fonction logarithmique,* il est cependant impossible de trouver une courbe algébrique dont l'arc soit simplement égal à une

---

(1) *Œuvres de Jacques Bernoulli,* t. II, n° 103, et t. Ier, nos 59 et 60; *Œuvres de Jean Bernoulli,* t. IV, p. 92; Mémoire : *De transformationibus et rectificationibus curvarum.*

(2) *Opera postuma,* Saint-Pétersbourg, 1862, t. Ier, p. 439 : *De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur,* t. XI des *Mémoires de Saint-Pétersbourg,* p. 94 à 125, etc.

(3) *Postquam in hoc argumento plurimum elaborassem, nullam tamen hujusmodi curvam elicere potuerim.* EULER, *Mémoires de Saint-Pétersbourg,* t. XI, p. 114.

(4) *Nullam adhuc investigare mihi licuit ejusmodi curvam algebricam, cujus rectificatio cum hyperbola conveniret. Mémoires de Saint-Pétersbourg,* t. XI, p. 95 (20 août 1781). Le même aveu se retrouve aussi à la fin d'un autre Mémoire, *Nova acta,* t. V, p. 85. Cette question a été traitée depuis par N. Fuss, *Nova acta,* t. XIV; mais ce dernier géomètre ne paraît avoir considéré que le cas particulier où l'hyperbole est équilatère, qui est beaucoup plus facile. On trouvera plus loin (60) la solution complète du cas général.

fonction *logarithmique* (¹). Euler avait aussi nié, en même temps, l'existence d'aucune courbe algébrique dont l'arc fût identique à un arc de cercle, et ce n'est que dans un de ses derniers Mémoires qu'il a signalé lui-même un nombre infini de courbes jouissant de cette propriété (²).

8. Depuis Euler, ces sortes de questions ont été un peu délaissées par les géomètres. MM. William Roberts et J.-A. Serret ont cependant fait connaître, il n'y a pas très-longtemps, de nouveaux théorèmes sur la représentation par des arcs de courbe de diverses transcendantes elliptiques (³). Le dernier de ces deux savants est aussi revenu, dans un de ses Mémoires, sur le problème de la détermination des courbes algébriques dont l'arc est identique à un arc de cercle, déjà traité antérieurement par Euler et Fuss (⁴).

Nous allons, dans ce qui va suivre, exposer les divers résultats connus jusqu'ici, en cherchant à leur donner une plus grande extension.

9. Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse de trouver une courbe plane dont l'arc indéfini soit exprimé par la fonction transcendante

$$\int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p d\varphi,$$

où φ désigne un angle variable et a une constante quelconque. Cette fonction, pour des valeurs particulières attribuées à l'exposant commensurable p, comprend les formes les plus connues. On sait que le trinôme $1 + a^2 - 2a\cos\varphi$ est décomposable en deux facteurs imagi-

---

(¹) J'appelle ainsi, pour abréger, le logarithme d'une fonction algébrique. Voir *Opuscula analytica*, t. II, p. 76. *Opera postuma*, t. I, p. 586. Lettre d'Euler à Lagrange, datée de 1775.

(²) *Maxime obstupui*, dit-il à ce propos. Voici encore comment Euler s'exprime au commencement de son Mémoire : *Non dubitavi ante aliquot annos istam propositionem tanquam insigne theorema in medium proferre : quod præter circulum nulla detur curva algebrica cujus arcubus omnibus æquales arcus circulares assignari queant.... Sententiam igitur meam hic solenniter retractans, methodum facilem exponam cujus ope innumerabiles curvæ algebricæ inveniri possunt quarum omnes arcus circularibus sunt æquales*. T. XI, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, p. 114.

(³) *Journal de M. Liouville*, passim, 1^{re} série, principalement les tomes X et XI.

(⁴) XXXVᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 69. *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, t. XI, p. 114 et 274.

naires conjugués, et qu'on a

$$1 + a^2 - 2a\cos\varphi = (e^{\varphi\sqrt{-1}} - a)(e^{-\varphi\sqrt{-1}} - a).$$

Appelons maintenant z l'exponentielle imaginaire $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, et prenons cette quantité pour nouvelle variable; il viendra

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1}{z}, \quad dz\, d\left(\frac{1}{z}\right) = (d\varphi)^2.$$

et, par suite,

$$(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{2p}(d\varphi)^2 = (z-a)^{2p}\,dz\left(\frac{1}{z} - a\right)^{2p} d\left(\frac{1}{z}\right).$$

Si donc, x et y étant les coordonnées rectangulaires de la courbe cherchée et m un exposant commensurable quelconque, on pose

$$dx + dy\sqrt{-1} = z^m(z-a)^{2p}\,dz,$$

comme le changement de signe de $\sqrt{-1}$ correspond au changement de z en $\frac{1}{z}$, la différentielle de l'arc s de la courbe satisfera à la condition demandée

$$ds = (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p\,d\varphi.$$

Quant à la courbe, elle sera complétement déterminée par l'équation

$$x + y\sqrt{-1} = \int z^m(z-a)^{2p}\,dz,$$

où il suffira d'identifier les parties réelles et imaginaires des deux membres.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette courbe soit algébrique est que l'intégrale précédente le soit aussi. Cela aura lieu si l'un des deux nombres m ou $2p$ est entier ou positif, pourvu que l'autre ne soit pas un nombre entier négatif; ou bien encore si, p et m étant tous deux fractionnaires, l'expression

$$2 + 2p + m$$

est un nombre entier négatif. Dans ce dernier cas, l'intégrale peut, en effet, se mettre sous la forme

$$\int \left(\frac{1}{z}\right)^{-2-2p-m} \left(1-\frac{a}{z}\right)^{2p} d\left(\frac{1}{z}\right),$$

et devient algébrique en posant

$$1-\frac{a}{z}=u,$$

10. Lorsque $2p$ est un nombre entier négatif, l'intégrale est encore algébrique, pourvu que m ait une valeur entière et positive inférieure à $-2p-1$. Pour $2p=-1$, aucune courbe algébrique ne serait obtenue par cette méthode, et, en ajoutant l'hypothèse $m=0$, on obtiendrait une courbe transcendante, dont l'équation est

$$x+y\sqrt{-1}=\int \frac{dz}{z-a}=\mathrm{L}(z-a).$$

Cette courbe n'est autre que celle que Legendre a considérée au Chapitre VII du *Traité des Fonctions elliptiques* (1). L'équation finie de cette dernière est susceptible d'être mise sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\cos y=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}(e^x-e^{-x})$$

ou

$$\cos y=\frac{\sqrt{a^2-1}}{2a}(e^x-e^{-x}),$$

selon que a est plus petit ou plus grand que l'unité. Pour $a=1$, l'équation se réduit à

$$\cos y=e^x,$$

courbe transcendante dont l'arc exprime une fonction logarithmique et dont le rayon de courbure jouit de la propriété d'avoir une projection constante sur l'axe des x. L'arc des courbes précédentes représente la fonction elliptique de première espèce au module a ou $\frac{1}{a}$, ainsi que Legendre l'a observé.

---

(1) T. Ier, p. 40.

11. L'intégrale

$$\int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p \, d\varphi$$

se simplifie beaucoup en supposant $a = \pm 1$. Pour $a = -1$, elle se réduit à

$$2^{2p+1}\int \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{2p} \frac{d\varphi}{2},$$

qui équivaut à

$$2^{p+1}\int (\cos\varphi)^p \, d\varphi,$$

par le changement de $2p$ et $\frac{\varphi}{2}$ en p et φ.

La courbe correspondante devient alors, après cette substitution,

$$x + y\sqrt{-1} = \int z^m (z+1)^p \, dz,$$

et en faisant

$$z = e^{2\varphi\sqrt{-1}}$$

on aura pour différentielle de l'arc s

$$ds = 2^{p+1}(\cos\varphi)^p \, d\varphi.$$

Cette nouvelle courbe sera algébrique pour toutes les valeurs positives entières de m et les valeurs commensurables de p (les nombres entiers négatifs exceptés). Il en serait encore de même si, m et p étant fractionnaires,

$$2 + p + m$$

était un nombre entier négatif (*voir* n° 9).

12. La même intégrale est quelquefois susceptible, dans le cas général ou dans le cas particulier que nous venons de considérer, d'être mise sous cette forme simple :

$$z^n (z+1)^p \quad \text{ou} \quad z^n (z-a)^p,$$

en désignant ici uniformément par z l'exponentielle $e^{\varphi\sqrt{-1}}$ et par n et p deux nombres constants quelconques. On obtient ainsi certaines courbes épicycloïdales que nous retrouverons plus loin, et qui méritent de nous arrêter quelques instants.

13. Soit d'abord

$$x + y\sqrt{-1} = z^n(z+1)^p;$$

la différentiation donne

$$dx + dy\sqrt{-1} = z^{n-1}(z+1)^{p-1}[(n+p)z+n]\,dz;$$

l'arc s de la courbe équivaut donc à l'une ou l'autre des intégrales

$$2^p\int\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{p-1}\sqrt{(2n+p)^2-4n(n+p)\sin^2\frac{\varphi}{2}}\;\frac{d\varphi}{2}$$

ou

$$2^p\int\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{p}\sqrt{(2n+p)^2+p^2\,\mathrm{tang}^2\frac{\varphi}{2}}\;\frac{d\varphi}{2}.$$

En posant dans la première $\sin\frac{\varphi}{2} = x$ et dans la seconde $\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2} = y$, elles reviennent aux transcendantes

$$(2n+p)2^p\int(1-x^2)^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{1-\frac{4n(n+p)}{(2n+p)^2}x^2}\;dx$$

et

$$(2n+p)2^p\int(1+y^2)^{-\frac{p}{2}-1}\sqrt{1+\left(\frac{p}{2n+p}y\right)^2}\;dy,$$

dont la courbe précédente offre ainsi une représentation parfaite.

14. Supposons ensuite

$$x + y\sqrt{-1} = z^n(z-a)^p;$$

il viendra de même

$$dx + dy\sqrt{-1} = z^{n-1}(z-a)^{p-1}[(n+p)z-na]\,dz,$$

ce qui donne lieu de considérer successivement deux cas différents. Le premier consiste à poser

$$n+p = na^2.$$

L'arc est alors égal à la transcendante

$$na\int(1+a^2-2a\cos\varphi)^{\frac{p}{2}}\,d\varphi,$$

dont on a ainsi une infinité de nouvelles représentations.

15. Faisant en second lieu

$$n + p = \pm na,$$

l'arc s'exprimera par

$$4na \int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2}$$

ou par

$$4na \int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{\frac{p-1}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{2},$$

suivant qu'on prendra le signe supérieur ou inférieur, en supposant a essentiellement positif.

Ces intégrales se ramènent à une autre forme, en posant

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1+a}{2\sqrt{a}}\sin\psi \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1-a}{2\sqrt{a}}\operatorname{tang}\psi;$$

elles deviennent respectivement

$$2n\sqrt{a}\,(1+a)^p \int \cos\psi^p\,d\psi \quad \text{et} \quad 2n\sqrt{a}\,(1-a)^p \int \frac{d\psi}{\cos\psi^{p+1}}.$$

16. On peut encore donner une représentation plus générale par des arcs de courbe de la transcendante

$$\int (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p\,d\varphi,$$

en exceptant le cas de $a = \pm 1$. Posons pour cela

$$dx + dy\sqrt{-1} = \frac{z^m(1 - az)^{2p+n}}{(z-a)^n}\,dz,$$

m et n désignant deux nombres entiers positifs quelconques et z l'exponentielle $e^{\varphi\sqrt{-1}}$. Il viendra, pour la différentielle de l'arc s,

$$ds = (1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^p\,d\varphi,$$

et, pour équation de la courbe,

$$x + y\sqrt{-1} = \int \frac{z^m(1 - az)^{2p+n}}{(z-a)^n}\,dz.$$

La courbe sera algébrique lorsque l'intégration pourra être effectuée algébriquement. Supposons $2p$ entier positif ou, dans le cas contraire de $2p$ entier et négatif, $2p+n>0$ et $m<-2p$, conditions qu'il est facile de réaliser; on s'assure aisément que l'intégrale précédente sera algébrique (en faisant $z=a+x$), si l'expression suivante

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[(a+x)^m(1-a^2-ax)^{2p+n}\right]$$

s'annule avec x. Cela revient à dire, en posant

$$u=a(a+x),$$

que l'équation

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[u^m(1-u)^{2p+n}\right]=0$$

doit admettre parmi ses racines la valeur

$$u=a^2.$$

Le carré du nombre a ne peut donc pas, comme on voit, être choisi arbitrairement.

17. Le même résultat est susceptible d'être étendu à des valeurs commensurables quelconques de p. Cette méthode est encore applicable à la transcendante

$$\int d\varphi(\cos\varphi)^p,$$

déjà examinée, et à d'autres transcendantes beaucoup plus compliquées, telles que

$$\int d\varphi(1+a^2-2a\cos\varphi^p(\cos q\varphi)^r.$$

Dans ce dernier cas, la condition, pour que l'équation de la courbe cherchée mise sous la forme

$$x+y\sqrt{-1}=\int\frac{z^m(1-az)^{rp+n}(z^{2q}+1)^r\,dz}{(z-a)^n}$$

soit algébrique, consiste en ce que la valeur $u=a^2$ doit être choisie parmi les racines de l'équation algébrique

$$\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left[u^m(1-u)^{2p+n}(u^{2q}+a^{2q})^r\right]=0.$$

Mais, sans insister sur les nouvelles formules auxquelles on serait ainsi conduit, et dont la discussion offrirait bientôt d'ailleurs une grande complication, nous nous contenterons d'examiner les cas les plus simples de celles que nous avons données antérieurement.

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA MÉTHODE A QUELQUES EXEMPLES.

18. Nous commencerons par déterminer, après Euler, quelles sont les courbes algébriques dont l'arc est identique à un arc de parabole.

En prenant pour équation de la parabole, en coordonnées rectangulaires,

$$y^2 = 2ax,$$

on trouve, pour différentielle de l'arc de cette courbe,

$$ds = \frac{dy}{a}\sqrt{a^2+y^2};$$

posant ensuite

$$y = a\operatorname{tang}\varphi,$$

il vient

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Les formules du n° 15 fournissent deux solutions du problème, en faisant $p=2$ ou $p=-3$. En supposant en outre $p=-2$ dans la seconde expression du n° 13, on satisfait encore à la condition demandée. On obtient ainsi les trois classes de courbes algébriques suivantes :

$$x+y\sqrt{-1} = \frac{(z-a)^2}{z^{\frac{2}{1+a}}} = z^n(nz+n+2)^2,$$

$$x+y\sqrt{-1} = \frac{z^{\frac{3}{1-a}}}{(z-a)^3} = \frac{z^n}{[nz-(n-3)]^3}$$

et

$$x+y\sqrt{-1} = \frac{z^n}{(z+1)^2},$$

dans lesquelles l'exposant n désigne un nombre commensurable quelconque et la variable z l'exponentielle imaginaire $e^{\varphi\sqrt{-1}}$.

19. Les dernières courbes se confondent avec celles qu'Euler a définies, dans un de ses Mémoires, par les deux équations (¹)

$$x = \frac{2}{n^2}\,\frac{\cos n\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad y = \frac{2}{n^2}\,\frac{\sin n\varphi}{\cos^2\varphi};$$

car on en déduit par un calcul facile, en faisant $z = e^{2\varphi\sqrt{-1}}$ et $n' = \frac{2+n}{2}$,

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{2}{n'-1}\,\frac{z^{n'}}{(z-1)^2},$$

et cette équation n'est autre que la troisième classe du numéro précédent.

20. On sait que la différentielle de l'arc de la lemniscate, en fonction du rayon vecteur r mené du centre, est

$$ds = \frac{a^2\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}}.$$

Cette expression devient, en posant $r = a\cos\varphi$,

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{2\sqrt{\cos\varphi}}.$$

On peut donc lui appliquer la formule du nº 11, qui devient ici, en faisant $p = -\frac{1}{2}$ et $z = e^{2\varphi\sqrt{-1}}$,

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{2}\int z^m (z+1)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Cette courbe sera algébrique pour toute valeur entière de m, ainsi

(¹) EULER a traité cette question dans plusieurs Mémoires. *Voir* t. V, *Nova acta*, p. 59, et t. XI, *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, p. 100 et 106. Les équations que je rappelle ici sont tirées des *Opera postuma*, Pétersbourg, 1862, t. Iᵉʳ, p. 451. On peut rapprocher de ce numéro les 53ᵉ et 55ᵉ de ce Mémoire.

que pour les valeurs négatives fractionnaires égales à la moitié d'un nombre entier impair plus grand que l'unité (¹).

21. Considérons maintenant quelques cas particuliers de la transcendante

$$\int d\varphi(1+a^2-2a\cos\varphi)^{\frac{p}{2}}.$$

Pour $p=1$, elle donne un arc d'ellipse; pour $p=-2$, un arc de cercle; pour $p=-1$, la fonction elliptique de première espèce la plus générale.

La formule du nº 14 devient, dans les deux derniers cas,

$$x+y\sqrt{-1}=\frac{z^n}{(z-a)^2} \quad \text{ou} \quad x'+y'\sqrt{-1}=\frac{z^{n'}}{z-a},$$

la constante a étant déterminée par l'une ou l'autre des valeurs

$$a=\sqrt{\frac{n-2}{n}} \quad \text{ou} \quad a=\sqrt{\frac{n'-1}{n'}},$$

qui coïncident, en supposant $n=2n'$. Les premières courbes, algébriques pour toute valeur commensurable de n, sont précisément celles qu'Euler a fait connaître le premier dans un Mémoire inséré au tome XI des *Mémoires de Saint-Pétersbourg* (²). M. J.-A. Serret a obtenu les secondes pour représenter le plus simplement possible la fonction elliptique au module

$$\sqrt{\frac{n'-1}{n'}},$$

dans lequel n' est commensurable. Ces dernières courbes sont donc liées à celles d'Euler par la relation exponentielle

$$(x'+y'\sqrt{-1})^2=x+y\sqrt{-1}.$$

Quant aux autres courbes que M. J.-A. Serret a signalées comme satis-

---

(¹) Euler a considéré quelques-unes de ces courbes : *Opera postuma*, t. Iᵉʳ, p. 444, paragraphe *De Curva lemniscata*.

(²) Page 114.

faisant aux mêmes conditions, elles rentrent, comme cas particulier, dans celles qui ont été données au n° 16 du Chapitre précédent, où il suffit de faire successivement $2p = -2$ et $2p = -1$ [1]. Nous démontrerons plus loin (n° 72) la possibilité de solutions encore plus générales.

22. La détermination des courbes algébriques dont les arcs sont égaux à ceux d'un cercle peut encore être effectuée d'une manière différente, au moyen de la seconde formule du n° 15, dans laquelle on fait $p = -1$, en supposant en même temps n positif et plus petit que l'unité. Il vient alors

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{z^n}{z - \frac{1-n}{n}},$$

la variable z étant toujours égale à $e^{\varphi\sqrt{-1}}$. En posant ensuite

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2n-1}{2\sqrt{n(1-n)}}\tang\psi,$$

on trouve, pour expression de l'arc s,

$$s = 2\frac{n\psi}{2n-1}\sqrt{n(1-n)},$$

qui est ainsi proportionnel à l'angle ψ. L'arc de cette courbe présente cependant en ses points de rebroussement, pour les valeurs de φ qui sont multiples de π, une espèce de discontinuité dont nous parlerons plus loin (n° 65).

23. Si l'on fait de même $p = -1$ dans la première des formules du n° 15, en donnant maintenant à n des valeurs commensurables positives plus grandes que l'unité ou des valeurs négatives plus petites que l'unité, en valeur absolue, l'équation de la courbe deviendra

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{z^n}{z - \frac{n-1}{n}},$$

---

(1) *Voir* XXXVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 76, et *Journal de Liouville*, 1re série, t. XI, p. 357.

en supposant toujours

$$z = e^{\varphi\sqrt{-1}}.$$

Faisant ensuite (n° 15)

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2n-1}{2\sqrt{n(n-1)}}\sin\psi,$$

on trouvera, pour l'expression de l'arc s,

$$s = \frac{2n}{2n-1}\sqrt{n(n-1)}\,\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right).$$

Comme les lignes trigonométriques de l'angle ψ se déduisent algébriquement des coordonnées de la courbe, on obtient ainsi une solution du problème dont il a été question au n° 7. Cette dernière formule démontre, contrairement à l'assertion d'Euler, l'existence de courbes algébriques dont l'arc indéfini est exprimable par une fonction logarithmique des coordonnées de l'extrémité variable de l'arc.

Les mêmes courbes offrent du reste, en leurs points de rebroussement, la discontinuité que nous avons signalée dans les précédentes, et sur laquelle nous reviendrons.

24. Si l'on fait $p = -1$ dans l'expression donnée au n° 13, on trouverait également une représentation simple de la transcendante égale à l'arc d'hyperbole, au moyen de nouvelles courbes algébriques. Nous avons déjà remarqué plus haut (n° 19) que les mêmes formules donnent, pour $p = -2$, les courbes paraboliques découvertes autrefois par Euler.

Nous ne poursuivrons pas davantage cette énumération des cas particuliers compris dans les formules du Chapitre précédent; nous préférons y substituer l'étude directe de certaines courbes dérivées géométriquement de courbes connues. Nous compléterons ensuite la solution analytique précédente en montrant, à la fin de ce Mémoire, comment elle peut être appliquée à une somme quelconque des intégrales considérées. On aura ainsi une représentation exacte, par des arcs de courbes algébriques, de la transcendante très-complexe

$$m\int d\varphi\,(1+a^2-2a\cos\varphi)^p \pm m'\int d\varphi'\,(1+a'^2-2a'\cos\varphi')^{p'}$$
$$\pm m''\int d\varphi''(1+a''^2-2a''\cos\varphi'')^{p''}+\ldots,$$

où $m, m', \ldots, a, a', \ldots, p, p', \ldots$ sont des constantes susceptibles de prendre une infinité de valeurs différentes, et où les variables $\varphi, \varphi', \ldots$ sont assujetties à satisfaire à certaines conditions particulières qui facilitent la solution du problème.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION EXPONENTIELLE DE MACLAURIN. EXPRESSION DE L'ARC INDÉFINI DES COURBES ORTHOGÉNIDES OU DÉRIVÉES DE LA LIGNE DROITE.

25. Maclaurin a fait connaître, il y a longtemps, notamment dans son *Traité des fluxions* (1), un procédé ingénieux pour déduire d'une courbe plane donnée une infinité d'autres courbes.

En appelant r et θ les coordonnées polaires de la première courbe, r' et θ' celles de la courbe dérivée, rapportée au même axe et au même pôle, cette transformation, que nous appellerons *exponentielle*, consiste à poser simultanément

$$r' = r^n,$$
$$\theta' = n\theta,$$

en désignant par n un nombre commensurable quelconque, positif ou négatif, qui représente l'*ordre* ou l'*exposant de dérivation*.

Il est visible que la tangente menée aux points correspondants des deux courbes fait un même angle avec le rayon vecteur aboutissant au point de contact, car la tangente trigonométrique de cet angle est donnée par les rapports égaux

$$\frac{r'\,d\theta'}{dr'} = \frac{nr^n\,d\theta}{nr^{n-1}\,dr} = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

Les différentielles des arcs s et s' des deux courbes satisfont, de plus, à l'équation

$$ds' = nr^{n-1}\,ds.$$

---

(1) Édimbourg, 1742. *Voir* Chap. XI, t. Ier, p. 330, les corollaires 3, 4 et 5 de la proposition XXXIV.

Ce qui donne, en supposant $ds' = f(r')\,dr'$,

$$ds = f(r^n)\,dr.$$

Toutes ces relations, fort simples, nous seront utiles.

26. Appliquons d'abord ce mode de dérivation à la droite dont l'équation polaire est, comme on sait,

$$r = \frac{a}{\cos\theta}.$$

En prenant $\frac{1}{n}$ pour ordre de la courbe dérivée que nous appellerons dorénavant une *orthogénide*, il viendra, pour équation polaire de cette courbe, en vertu de la remarque faite plus haut,

$$r'^n = \frac{a^n}{\cos n\theta'};$$

l'élément différentiel ds de la droite étant

$$ds = \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - a^2}},$$

celui de l'arc d'orthogénide d'ordre $\frac{1}{n}$ ou $-\frac{1}{n}$ sera

$$ds' = \frac{1}{n}\,\frac{a\,d\theta}{\cos^{\frac{n+1}{n}}\theta} = \frac{r^n\,dr}{\sqrt{r^{2n} - a^{2n}}}$$

ou

$$ds' = \frac{a}{n}\cos^{\frac{1-n}{n}}\theta\,d\theta = \frac{a^n\,dr}{\sqrt{a^{2n} - r^{2n}}}.$$

Ces sortes de courbes ont déjà été étudiées, dans le siècle dernier, par Maclaurin et par Fagnano (¹). Elles donnent, comme on voit, par leurs

---

(¹) *Transactions philosophiques de* 1718, n° 356. *Voir* aussi plusieurs Chapitres du *Traité des fluxions*, notamment le n° 810, Chap. IV, Livre II.

Fagnano a également considéré les mêmes courbes dans plusieurs Mémoires *Sur les courbes dont les rayons vecteurs menés à un point fixe font avec l'axe un angle qui soit dans un rapport commensurable avec celui que fait la normale avec le même axe.* (*Produzioni matematiche,* t. II, p. 375. Pesaro, 1750.)

Il est facile de s'assurer que les courbes algébriques définies ainsi dans le titre des Mémoires de Fagnano se confondent avec nos *orthogénides*.

arcs la représentation exacte de la transcendante

$$\int d\theta \cos^p(\theta),$$

dans laquelle l'exposant p peut recevoir toutes les valeurs commensurables possibles, à l'exception toutefois de $p = -1$, qui correspond, comme limite, à l'*orthogénide singulière* transcendante, dont l'équation en coordonnées rectilignes rectangulaires est

$$\cos y = e^x$$

(*voir* n° **10**), et que nous nous bornons à rappeler ici.

27. L'expression générale de l'arc des courbes précédentes montre que les orthogénides d'ordre pair négatif sont absolument rectifiables. La rectification des orthogénides d'ordre impair négatif dépend de la quadrature du cercle, tandis que celle des orthogénides d'ordre entier positif, pair ou impair, dépend d'une fonction logarithmique, à laquelle il faut joindre, de même que dans le cas précédent, une fonction algébrique. Lorsque l'ordre de dérivation est fractionnaire, on peut distinguer les valeurs particulières suivantes :

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3},$$

où l'arc représente, à un facteur numérique près, les quadratures

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}, \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{\cos^2\theta}}, \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt[3]{\cos\theta}}$$

ou encore

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Si l'on change respectivement, dans ces trois dernières intégrales, x en $\frac{1}{y}$, en $\frac{1}{y^2}$ ou en $\frac{1}{\sqrt{y}}$, elles se transforment en

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^4-1}}, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^6-1}}, \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}.$$

Ces six dernières intégrales expriment des cas particuliers de la fonction elliptique de première espèce.

Mentionnons encore deux autres orthogénides d'ordre

$$-\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{3}{4},$$

dont l'arc s'exprime par les deux transcendantes elliptiques connues

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

La première équivaut à l'ordonnée de la célèbre courbe élastique, considérée pour la première fois par Jacques Bernoulli, et dont la construction a fait l'objet des recherches des frères Bernoulli, de Maclaurin (1) et de Fagnano (2).

CHAPITRE V.

ÉTUDE ANALOGUE RELATIVEMENT A LA CLASSE DES COURBES CYCLOGÉNIDES OU DÉRIVÉES DU CERCLE.

28. Je passe à une seconde classe de courbes, dérivées d'un cercle quelconque, par la méthode de Maclaurin, et que j'appellerai de même *cyclogénides*. L'équation polaire de ces courbes affecte deux formes différentes, selon que le pôle est situé à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle primitif; et il n'y a pas d'ailleurs lieu de placer ce pôle sur le cercle même, car les courbes dérivées se confondraient alors avec les orthogénides dont nous avons formé une classe distincte.

Dans le premier cas, le cercle a pour équation polaire

$$r^2 - 2\tang\alpha\, r\sin\theta - 1 = 0,$$

en convenant de prendre pour axe polaire la direction de la corde divisée par le pôle en deux parties égales, pour unité de longueur la

(1) N° 927 du *Traité des fluxions*.

(2) *Produzioni matematiche*. *Voir*, à ce sujet, à la fin de l'Ouvrage une revendication de priorité, un peu aigre, en faveur de Fagnano.

moitié de cette corde, et enfin pour α l'angle constant que fait avec cette corde le rayon mené à son extrémité.

J'introduirai maintenant, pour simplifier les calculs, l'angle variable φ que fait un rayon quelconque de ce cercle avec le diamètre passant par le pôle; ce qui donne, entre φ et r, cette relation

$$\cos^2\alpha\, r^2 = 1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi,$$

qui s'établit immédiatement, en observant que le rayon du cercle, d'une part, et la distance de son centre à l'axe, d'autre part, ont respectivement pour valeurs

$$\frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\alpha.$$

Il vient, par suite, pour la différentielle de l'arc de cercle s,

$$ds = \frac{d\varphi}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{2r\,dr}{\sqrt{-1 + 2\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r^2 - r^4}},$$

d'où l'on déduit, pour l'arc s' d'une cyclogénide quelconque d'ordre $\frac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} ds' &= \frac{ds}{n}\,r^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\,\frac{d\varphi}{(\cos\alpha)^{\frac{1}{n}}}(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi)^{\frac{1-n}{2n}} \\ &= \frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{2r'^n\,dr'}{\sqrt{-1 + 2\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r'^{2n} - r'^{4n}}} \\ &= \frac{2}{\cos\alpha}\,\frac{dr'}{\sqrt{2\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} - (r'^{2n} + r'^{-2n})}}, \end{aligned}$$

et l'on aura, de plus, pour l'équation polaire de la même courbe

$$r'^{2n} - 2\operatorname{tang}\alpha\, r'^n \sin n\,\theta' - 1 = 0.$$

29. Dans le second cas, où le pôle est extérieur au cercle primitif, nous conviendrons de prendre pour axe polaire le diamètre passant par le pôle, pour unité de longueur la tangente menée du pôle, et nous désignerons par α l'inclinaison de cette tangente sur l'axe polaire. Dans

ces hypothèses, l'équation du cercle devient

$$r^2 - 2r\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + 1 = 0.$$

En introduisant encore l'angle variable auxiliaire φ qu'un rayon quelconque du cercle fait avec l'axe, et en observant que $\operatorname{tang}\alpha$ et $\frac{1}{\cos\alpha}$ désignent alors respectivement le rayon du cercle et la distance du centre au pôle, on aura de même

$$r^2\cos^2\alpha = 1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi,$$

$$ds = \operatorname{tang}\alpha\, d\varphi = \frac{2\operatorname{tang}\alpha\, r\,dr}{\sqrt{-1 + 2\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r^2 - r^4}}.$$

Ce qui donne lieu, pour la cyclogénide extérieure, d'ordre $\frac{1}{n}$, aux équations suivantes :

$$r'^{2n} - 2r'^n\frac{\cos n\theta'}{\cos\alpha} + 1 = 0,$$

$$ds' = \frac{1}{n}\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^{\frac{1}{n}}}(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi)^{\frac{1-n}{2n}}$$

$$= 2\operatorname{tang}\alpha\frac{r'^n\,dr'}{\sqrt{-1 + 2\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}r'^{2n} - r'^{4n}}}$$

$$= 2\operatorname{tang}\alpha\frac{dr'}{\sqrt{2\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} - (r'^{2n} + r'^{-2n})}}.$$

30. Ces dernières formules sont, comme on voit, tout à fait semblables aux précédentes, et, par suite, l'arc des cyclogénides intérieures ou extérieures de même ordre exprime toujours une même fonction transcendante, qui ne dépend des fonctions circulaires que dans le cas où l'ordre de la cyclogénide est un nombre entier impair quelconque. Nous appellerons l'angle α, qui, dans les deux cas considérés, a une signification différente, le *paramètre angulaire* de la cyclogénide.

On peut remarquer que deux cyclogénides de nature différente, de même ordre et de même paramètre, rapportées au même pôle et au même axe, se coupent orthogonalement en des points dont les distances au pôle sont deux à deux inverses l'une de l'autre. De plus, ces mêmes points sont sur des rayons symétriquement placés dans l'arc correspondant, sur chaque cyclogénide, au demi-cercle primitif déterminé soit par l'axe ou par le diamètre perpendiculaire.

On obtient ainsi une infinité de systèmes de courbes orthogonales et isothermes qui fournissent, ou par eux-mêmes, ou par une transformation facile, tous ceux qu'on a étudiés jusqu'ici. Ainsi le système orthogonal des cyclogénides du second ordre, transformé par des rayons réciproques menés d'un même point convenablement choisi, donne le système bien connu des courbes confocales du second degré. Nous pourrons revenir ailleurs sur ces divers points, que nous nous contentons d'indiquer en passant.

31. Mentionnons, en terminant ce Chapitre, une formule remarquable exprimant la différence ou la somme des arcs d'une même cyclogénide, qui ont une même extrémité fixe, et dont les deux autres sont assujetties à être à des distances du pôle inverses l'une de l'autre.

On trouve, pour la différentielle de cet arc σ,

$$d\sigma = 2\sqrt{2}\,(\text{séc}\,\alpha \text{ ou } \tan\!g\,\alpha)\frac{d\left(\dfrac{r' \pm r'^{-1}}{2}\right)}{\sqrt{\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} - \left(\dfrac{r'^{2n}+r'^{-2n}}{2}\right)}},$$

en prenant pour facteur, dans la première parenthèse, sécα ou tangα, selon que la cyclogénide est intérieure ou extérieure.

L'ambiguïté du signe, dans la seconde parenthèse, correspond aux deux cas différents où il s'agit de la somme ou de la différence des arcs considérés.

Les fonctions

$$\frac{r' \pm r'^{-1}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r'^{2n}+r'^{-2n}}{2}$$

ne sont autre chose que des sinus ou des cosinus hyperboliques. Or il existe entre ces fonctions une relation algébrique, lorsqu'on donne à n une valeur commensurable quelconque. L'arc σ est donc l'intégrale d'une différentielle algébrique dans laquelle on peut prendre pour variable

$$\frac{r' + r^{-1}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{r' - r'^{-1}}{2},$$

et, dans certains cas, cette intégrale est susceptible d'avoir une valeur beaucoup plus simple que celle qui exprime la valeur de l'arc indéfini de la même courbe.

M. William Roberts a donné autrefois la forme sous laquelle se présente l'intégrale, dans le cas où n est un nombre entier positif ([1]), et a ainsi généralisé un théorème de M. J.-A. Serret relatif à la cyclogénide d'ordre $\frac{1}{2}$ ([2]). Le calcul précédent permet de donner encore plus d'extension aux résultats trouvés par ces deux géomètres.

CHAPITRE VI.

DE QUELQUES THÉORÈMES DE CALCUL INTÉGRAL AUXQUELS CONDUIT LA COMPARAISON DES ARCS DE CYCLOGÉNIDE.

32. Nous venons de retrouver, comme arc de cyclogénide, la transcendante

$$\int (1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\varphi)^p \, d\varphi,$$

que nous avons prise, au Chapitre II, pour base de notre solution analytique du problème de la rectification inverse. Cette quadrature est équivalente, à un facteur constant près, à

$$\int (1 - c^2 \sin^2 u)^p \, du.$$

Il suffit, pour passer de la première à la seconde, de poser, en effet,

$$u = \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{2\sqrt{\sin\alpha}}{1 + \sin\alpha};$$

([1]) *Journal de Liouville*, t. XIII, p. 38.

([2]) *Journal de Liouville*, t. VIII, p. 145; t. IX, p. 160, et *Calcul intégral* de M. J.-A. Serret, p. 263.

et comme, dans les hypothèses faites précédemment, $\sin\alpha$ est essentiellement positif, on voit que c est réel et plus petit que l'unité.

La correspondance entre deux points de cyclogénide situés à des distances inverses du pôle est donnée par l'équation

$$b \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v = 0,$$

en désignant par v une nouvelle valeur de la variable u, et par b une constante liée à c par la relation

$$b = \sqrt{1 - c^2}.$$

33. Cette substitution donne lieu aux équations suivantes :

$$\cos u = \frac{b \sin v}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 v}}, \quad \sin u = \frac{\cos v}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 v}},$$

$$1 - c^2 \sin^2 u = \frac{b^2}{1 - c^2 \sin^2 v}, \qquad du = -\frac{b\, dv}{1 - c^2 \sin^2 v},$$

d'où l'on déduit, en représentant par m un nombre commensurable quelconque,

$$b^{-m}(1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du = - b^m (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv,$$

et, par suite, en intégrant et en tenant compte des valeurs aux limites,

$$b^{-m} \int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du = + b^m \int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv$$

ou, ce qui revient au même,

$$b^{-m} \int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du + b^m \int_0^v (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv$$

$$= b^{-m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 u)^{m - \frac{1}{2}} du$$

$$= b^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{-m - \frac{1}{2}} dv.$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du$$

est susceptible d'être transformée au signe, à un facteur et à une constante près, en la même intégrale, dans laquelle m est pris avec un signe contraire.

34. En appliquant ce théorème aux trois transcendantes

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)^3}}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)^3}} \quad \text{et} \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{(1 - c^2 \sin^2 \varphi)^2}},$$

on peut, d'après cela, les ramener à ces formes simples, plus connues,

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{et} \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

dont la première est l'arc d'ellipse ou la fonction elliptique de seconde espèce, et dont les deux autres ont été étudiées spécialement par Legendre, dans son *Traité des Fonctions elliptiques* (¹).

35. La même substitution peut encore servir à généraliser un théorème de Fagnano relatif aux arcs d'ellipse.

Posons pour cela

$$bx = 1 - c^2 \sin^2 u \quad \text{et} \quad by = 1 - c^2 \sin^2 v,$$

les variables u et v étant toujours liées par l'équation précédente

$$b \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v = 1.$$

Il s'ensuit, par un calcul facile,

$$xy = 1, \quad c \sin u = \sqrt{1 - bx}, \quad c \cos u = \sqrt{b}\sqrt{x - b},$$

$$du = -\frac{b\,dx}{2c^2 \sin u \cos u} = -\frac{\sqrt{b}\,dx}{2\sqrt{x(1 - b^2) - b(1 + x^2)}}.$$

(¹) T. Iᵉʳ, p. 178 et 180.

et, par suite,

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du = -\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{b}}^{x} \frac{d(x^m)}{\sqrt{1 + b^2 - b(x + x^{-1})}},$$

$$\int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{m-\frac{1}{2}} dv = +\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{b}}^{x} \frac{d(x^{-m})}{\sqrt{1 + b^2 - b(x + x^{-1})}},$$

d'où résulte

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du - \int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{m-\frac{1}{2}} dv = -\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)}^{z} \frac{d\varphi_m(z)}{\sqrt{1 - b^2 - 2bz}}$$

et

$$\int_0^u (1 - c^2 \sin^2 u)^{m-\frac{1}{2}} du + \int_v^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \sin^2 v)^{m-\frac{1}{2}} dv = -\frac{b^m}{2m} \int_{\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)}^{z} \frac{d\psi_u(z)}{\sqrt{1 - b^2 - 2bz}},$$

en posant

$$\frac{x + x^{-1}}{2} = z, \quad \frac{x^m + x^{-m}}{2} = \varphi_m z \quad \text{et} \quad \frac{x^m - x^{-m}}{2} = \psi_m z,$$

$\varphi_m z$ et $\psi_m z$ désignant un sinus et un cosinus hyperboliques qui s'expriment par une fonction algébrique de z pour toute valeur commensurable donnée à m.

36. Si m est un nombre entier, φ_m est un polynôme entier en z du degré m; dans ce cas, la différence des transcendantes précédentes est algébrique, et la différence des arcs qui y correspondent est rectifiable.

Si l'on fait, par exemple, $m = 1$, on obtient, après quelques réductions faciles,

$$\int_0^u du \sqrt{1 - c^2 \sin^2 u} - \int_v^{\frac{\pi}{2}} dv \sqrt{1 - c^2 \sin^2 v} = c^2 \sin u \sin v.$$

C'est dans cette relation que consiste le théorème de Fagnano, sous la forme que lui a donnée Legendre (¹).

(¹) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Iᵉʳ, p. 45.

37. D'après ce qu'on vient de voir, ce théorème s'étend aux cyclogénides d'ordre entier pair quelconque, qui fournissent ainsi, d'une infinité de manières, des arcs dont la différence est rectifiable, bien que l'arc indéfini de ces courbes ne soit exprimable que par les fonctions elliptiques.

La même analyse, qui ne diffère pas essentiellement de celle du n° **31**, montrerait encore, en faisant m égal à un nombre fractionnaire ayant pour dénominateur 3 ou 4, que la différence des transcendantes devient alors exprimable par les fonctions elliptiques; mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter plus longtemps sur ces théorèmes et d'autres analogues qui nous éloigneraient trop de notre sujet.

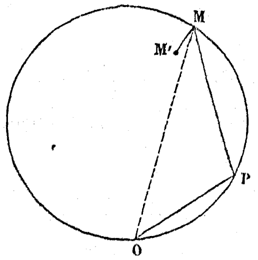
CHAPITRE VII.

D'UN THÉORÈME DE M. J.-A. SERRET SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FONCTION ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE ET D'UNE CONSÉQUENCE CURIEUSE QUI EN RÉSULTE.

38. Les recherches qui sont exposées dans ce Mémoire ont eu pour point de départ l'examen d'un théorème découvert par M. J.-A. Serret (¹), et dont voici l'énoncé, que j'emprunte au récent *Cours de Calcul différentiel et intégral* publié par cet auteur (²).

Théorème. — « Si un triangle OMP varie dans son plan de manière

Fig. 1.



que le sommet O reste fixe, et que les côtés constants OP et PM soient

(¹) *Journal de Liouville*, t. X et XI, *Mémoires des Savants étrangers*, t. XIII, *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. Iᵉʳ, p. 186, etc.

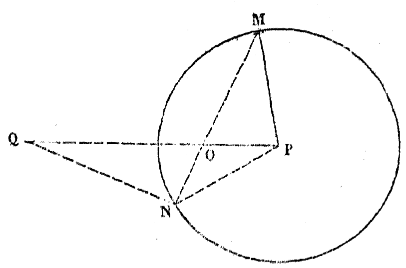
(²) Paris, 1868, Gauthier-Villars; t. II, p. 269.

proportionnels, le premier à $\sqrt{n}$ et le second à $\sqrt{n+1}$; si, de plus, le déplacement infiniment petit MM′ du point M a lieu à chaque instant suivant le rayon du cercle circonscrit au triangle OMP, le point M engendrera une courbe (algébrique pour les valeurs commensurables de n) dont l'arc indéfini sera égal au produit de OP par la fonction elliptique de première espèce, en prenant pour module le rapport $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PM}}$ et pour amplitude l'angle MOP. »

39. Je me suis assuré, ainsi qu'il suit, que la courbe définie par le théorème précédent est l'inverse d'une épicycloïde plane particulière dont le centre du cercle fixe serait en O.

Du point P comme centre, et avec PM pour rayon, je décris, pour

Fig. 2.



cela, un cercle qui coupe en N le prolongement de OM. On aura

$$\mathrm{OM} \times \mathrm{ON} = \overline{\mathrm{PM}}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2 = 1,$$

en supposant, conformément au théorème,

$$\mathrm{OP} = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{PM} = \sqrt{n+1}.$$

Soit maintenant pris, sur le prolongement de PO, le point Q, à une distance OQ du point O inverse de OP, ou

$$\mathrm{OQ} = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

la droite NQ sera la transformée inverse de la circonférence circonscrite au triangle OPM, qui est normale au lieu décrit par le point M :

donc NQ est normale à la courbe inverse décrite par le point N, conjugué du point M.

Imaginons deux cercles, l'un fixe ayant son centre en O et OQ pour rayon; le second mobile, auquel le point N est invariablement lié, et ayant PQ pour rayon et P pour centre. Ce second cercle fera décrire au point N une épicycloïde dont la normale en N serait NQ. Cette courbe est donc précisément l'inverse de celle qui est définie par le théorème précédent.

D'après les conditions de l'énoncé, la distance NP = MP du point de l'épicycloïde au centre du cercle mobile doit être moyenne proportionnelle entre la distance des centres OP des deux cercles et le rayon PQ du cercle mobile.

40. On aurait pu arriver au même résultat en partant des équations données par M. J. Liouville [1], à la suite de son rapport sur le premier Mémoire de M. J.-A. Serret relatif à la représentation des fonctions elliptiques. En appelant x et y les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque des courbes précédentes, n un nombre commensurable et φ un angle variable auxiliaire, M. J. Liouville a obtenu les équations suivantes :

$$x = \frac{\cos 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cos(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}.$$

$$y = \frac{\sin 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\sin(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi},$$

d'où il a déduit, pour l'expression du rayon vecteur $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et de la différentielle de l'arc s,

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}},$$

$$ds = 2\sqrt{n(n+1)}\, r\, d\varphi.$$

En transformant la courbe considérée par des rayons inverses menés de l'origine, il vient, pour les coordonnées x_1, y_1 de la nouvelle

[1] *Journal de Liouville*, t. X, p. 295.

courbe,

$$x_1 = \cos 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cos(2n+1)\varphi,$$

$$y_1 = \sin 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\sin(2n+1)\varphi;$$

posant ensuite

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{n}, \quad \beta = (n+1)\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

et faisant tourner les axes coordonnés de l'angle β, ces dernières équations se simplifient encore et deviennent

$$x\cos\alpha = \cos n\varphi + \sin\alpha\cos(n+1)\varphi,$$

$$y\cos\alpha = \sin n\varphi + \sin\alpha\sin(n+1)\varphi,$$

qui sont, sous une forme bien connue, les valeurs des coordonnées de l'épicycloïde particulière dont il vient d'être question.

CHAPITRE VIII.

EXPRESSION DE L'ARC DES ÉPICYCLOÏDES OU HYPOCYCLOÏDES PLANES ET DES COURBES QUI EN SONT DÉRIVÉES PAR LA MÉTHODE EXPONENTIELLE.

41. La remarque précédente nous conduit naturellement à chercher la rectification des courbes épicycloïdes transformées par la méthode exponentielle, qui comprend, comme cas très-particulier, leurs inverses.

Supposons qu'un cercle mobile quelconque roule sur un autre cercle fixe, en lui présentant au contact la même convexité; un point lié invariablement au premier cercle décrira, dans ce mouvement, une courbe épicycloïde dont les coordonnées x et y seront représentées par les équations

$$x = m\cos\varphi + a\cos m\varphi,$$

$$y = m\sin\varphi + a\sin m\varphi,$$

dans lesquelles l'angle variable φ désigne l'angle que fait la ligne des centres des cercles avec l'axe des x; a la distance du centre du cercle mobile au point qui décrit la courbe (en prenant pour unité de longueur le rayon de ce cercle); enfin m la distance des centres des deux cercles, qui est positive ou négative, selon que le cercle mobile est plus grand ou plus petit que le cercle fixe.

Dans le premier cas, où $m > 0$, la courbe est une épicycloïde proprement dite; dans le second, au contraire, où l'on a $m < 0$, la courbe est une *épicycloïde intérieure* ou une *hypocycloïde*. Ces deux familles distinctes sont séparées, pour le cas limite de $m = 0$, par le système formé d'une infinité de cercles concentriques.

Il est visible que le nombre m sera toujours plus petit que l'unité, en valeur absolue, dans l'hypothèse où nous nous plaçons. Nous appellerons ce nombre m l'*ordre* de l'épicycloïde, et *module* le second rapport a, que nous supposerons essentiellement positif.

42. L'expression différentielle de l'arc peut être mise sous la forme

$$ds = \frac{m\,d\psi}{1 - m}\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\psi},$$

en posant

$$\psi = (1 - m)\varphi.$$

Ce nouvel angle variable ψ n'est autre que celui que fait le rayon mobile avec la ligne des centres des deux cercles. Il en résulte que la spire complète d'épicycloïde, correspondant à une révolution complète du cercle mobile, ou à la variation de ψ depuis 0 jusqu'à 2π, est équivalente au demi-périmètre d'une ellipse dont les axes sont entre eux dans le rapport de

$$1 - a \quad \text{à} \quad 1 + a,$$

et que les arcs indéfinis de ces deux courbes se correspondent mutuellement, ce qui est une proposition très-connue.

43. Il vient maintenant, en prenant pour pôle l'origine, par l'application à l'épicycloïde de la transformation exponentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre (n° 25),

$$ds' = nr^{n-1}\,ds = \frac{nm}{1 - m}(a^2 + m^2 + 2am\cos\psi)^{\frac{n-1}{2}}(1 + a^2 + 2a\cos\psi)^{\frac{1}{2}}\,d\psi,$$

et en observant que le rayon vecteur r est donné par la formule

$$r = (a^2 + m^2 + 2am\cos\psi)^{\frac{1}{2}}.$$

L'expression de l'arc se simplifie beaucoup dans trois cas principaux que nous allons examiner successivement.

44. Le cas de $a = 1$ correspond aux épicycloïdes ordinaires, qui sont décrites par un point même de la circonférence du cercle mobile. On obtient, dans cette première hypothèse,

$$ds' = \frac{4nm}{1-m}(1 + m^2 + 2m\cos\psi)^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\psi}{2}\,\frac{d\psi}{2};$$

si l'on pose ensuite

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{1+m}{2\sqrt{m}}\sin\theta \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{1+m}{2\sqrt{-m}}\operatorname{tang}\theta,$$

suivant que m est positif ou négatif, on retrouve pour l'arc s' ces expressions semblables à celles du n° 15, savoir :

$$2n\sqrt{m}\,\frac{(1+m)^n}{1-m}\int \cos\theta^n\,d\theta \quad \text{ou} \quad 2n\sqrt{-m}\,\frac{(1+m)^n}{1-m}\int \frac{d\theta}{\cos\theta^{n+1}},$$

ce qui est une représentation de l'arc des orthogénides par une infinité de courbes algébriques différentes [1].

45. Lorsque $n = -1$, l'arc s' se présente sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{2\sqrt{m}}{1-m^2}\int \frac{d\theta}{\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{2\sqrt{-m}}{1-m^2}\int d\theta.$$

Cet arc exprime donc, pour des valeurs positives de m, une fonction logarithmique des coordonnées de l'extrémité variable [2], et devient identique à un arc de cercle pour les valeurs négatives de m. Ainsi, on le voit, les inverses des épicycloïdes et des hypocycloïdes donnent une

---

[1] Cette solution n'est autre que celle qui résulte de l'analyse directe du n° 15.
[2] *Voir* la Note (1) du n° 7, p. 154.

solution simple des deux problèmes jugés autrefois impossibles par Euler, et dont nous avons parlé (n° 7, Chap. II).

46. Nous supposerons maintenant, en second lieu, dans la formule du n° 43,

$$a = \pm m,$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que la courbe est une épicycloïde ou une hypocycloïde. Dans l'un et l'autre cas, le pôle est nécessairement un point multiple de la courbe, qui reste tel dans les dérivées d'ordre positif, tandis qu'il donne naissance à des branches infinies dans les dérivées d'ordre négatif. Cette propriété suffit d'ailleurs pour caractériser nettement le cas actuel.

L'arc devient alors

$$s' = \frac{n.2^n.a^n}{1-a}\int(1+a^2+2a\cos\psi)^{\frac{1}{2}}\cos^{n-1}\frac{\psi}{2}\frac{d\psi}{2},$$

ou

$$s' = \frac{n.2^n.a^n}{1+a}\int(1+a^2+2a\cos\psi)^{\frac{1}{2}}\sin^{n-1}\frac{\psi}{2}\frac{d\psi}{2},$$

selon que m est positif ou négatif (¹). Ces intégrales donnent surtout un résultat simple pour les valeurs particulières $n = -2$ et $n = -1$, comme nous le verrons dans les deux Chapitres suivants.

47. Le dernier cas de la formule du n° 43, que nous voulons considérer, revient à supposer

$$a = \sqrt{m},$$

et, par suite, m essentiellement positif. L'épicycloïde est alors décrite par un point situé à une distance du centre du cercle mobile, moyenne proportionnelle entre la distance des centres et le rayon du cercle mobile.

Posons, dans cette hypothèse,

$$m = \sin^2\alpha;$$

(¹) Formules analogues à celles du n° 13.

les formules qui donnent r et ds (n^{os} 43 et 42) deviennent respectivement

$$r = \sin\alpha\,(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\psi)^{\frac{1}{2}},$$

$$ds = \tang^2\alpha(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\psi)^{\frac{1}{2}}\,d\psi,$$

et l'on aura, par la transformation exponentielle du $n^{ième}$ ordre (n° 43),

$$ds' = \frac{n\sin\alpha^{n+1}}{\cos^2\alpha}(1 + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\psi)^{\frac{n}{2}}\,d\psi:$$

l'arc s' est donc identique à l'arc de la cyclogénide d'ordre $\pm n'$, en faisant (n^{os} 28 et 29),

$$n = \pm n' - 1.$$

48. Pour $n = -2$, il vient $n' = \pm 1$; la rectification de la courbe est identique à celle du cercle; pour $n = -1$, la rectification donne la fonction elliptique de première espèce. Les courbes correspondant à ces deux cas particuliers ont été considérées, pour la première fois, par Euler et J.-A. Serret. Elles ont entre elles et les épicycloïdes, comme on voit, une relation simple, sur laquelle nous reviendrons encore dans les Chapitres suivants.

CHAPITRE IX.

DE LA RECTIFICATION DES ÉPICYCLOÏDES DÉRIVÉES DU SECOND ORDRE NÉGATIF, — COURBES QU'EULER A TROUVÉES PAR L'ANALYSE DANS SES DERNIERS MÉMOIRES.

49. La transformation exponentielle des épicycloïdes mérite d'être examinée en détail pour le premier et le second ordre négatif : c'est ce que nous ferons dans ce Chapitre et le suivant, en commençant par le second ordre qui conduit à des résultats connus.

La différentielle ds' de l'arc de l'épicycloïde la plus générale devient dans ce cas (n° 43)

$$ds' = \frac{2m}{1-m}\,d\psi\sqrt{\frac{1 + a^2 + 2a\cos\psi}{(a^2 + m^2 + 2am\cos\psi)^3}},$$

expression susceptible d'être ramenée à une forme plus simple par un changement de variable.

50. En posant, en effet,

$$\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \frac{a+m}{a-m}\operatorname{tang} u,$$

et en écartant pour le moment le cas de $a = \pm m$, que nous traiterons plus loin, cette substitution donnera successivement

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{(a+m)\sin u}{\sqrt{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u}},$$

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{(a-m)\cos u}{\sqrt{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u}},$$

$$d\psi = 2\frac{(a^2 - m^2)\,du}{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u},$$

$$1 + a^2 + 2a\cos\psi = \frac{(1-a)^2(a+m)^2\sin^2 u + (1+a)^2(a-m)^2\cos^2 u}{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u},$$

$$m^2 + a^2 + 2am\cos\psi = \frac{(a^2-m^2)^2}{(a-m)^2 + 4am\sin^2 u},$$

et, par suite,

$$ds' = \frac{4m\,du}{(1-m)(a^2-m^2)^2}\sqrt{(1-a)^2(a+m)^2\sin^2 u + (1+a)^2(a-m)^2\cos^2 u}.$$

51. Cette dernière expression montre que la rectification de notre courbe épicycloïde est identique à celle d'une ellipse dans laquelle les axes seraient entre eux, abstraction faite du signe, dans le rapport de

$$(1-a)(a+m) \quad \text{à} \quad (1+a)(a-m).$$

Nous avons maintenant à examiner le cas particulier de $a = 1$ et $a = \pm m$, qui mettent ce théorème en défaut.

52. Le cas de $a = 1$ n'offre aucune difficulté : la courbe devient absolument rectifiable, et la formule précédente donne immédiatement

$$s' = \frac{8m\sin u}{(1-m^2)^2},$$

l'angle u étant lié à l'angle ψ de l'épicycloïde par la relation

$$\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \frac{1+m}{1-m}\operatorname{tang} u.$$

53. Reprenons la formule du n° 49, qui donne pour différentielle de l'arc

$$ds' = \frac{2m}{1-m}\, d\psi \sqrt{\frac{1+a^2+2a\cos\psi}{(a^2+m^2+2am\cos\psi)^3}};$$

elle devient dans le second cas de $a = \pm m$, en distinguant les deux signes,

$$ds' = \frac{1}{2(1-a)a^2}\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}\,\frac{\frac{d\psi}{2}}{\cos^3\frac{\psi}{2}},$$

ou

$$ds' = \frac{1}{2(1+a)a^2}\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}\,\frac{\frac{d\psi}{2}}{\sin^3\frac{\psi}{2}},$$

suivant que m sera positif ou négatif. Si l'on pose, dans le premier cas,

$$\tang\frac{\psi}{2} = \frac{1+a}{1-a}\tang\theta,$$

et dans le second, au contraire,

$$\tang\frac{\psi}{2} = \frac{1-a}{1+a}\tang\theta,$$

il viendra

$$s' = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

ou

$$s' = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

Ainsi, dans l'un et l'autre cas, l'arc de la courbe équivaut, à un facteur numérique près, à un arc de parabole qui a pour valeur, comme on a vu (n° 18), l'intégrale

$$\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}.$$

54. L'excentricité de l'ellipse qui mesure, dans le cas général, l'arc indéfini de la courbe, devient nulle en faisant

$$m = a^2;$$

il vient alors

$$\tang \frac{\psi}{2} = \frac{1+a}{1-a} \tang u,$$

et, pour valeur de l'arc s',

$$s' = \frac{4u}{a(1-a^2)^2},$$

qui est identique à un arc de cercle, ce qui est conforme à la remarque que nous avons déjà faite au n° 48.

55. Euler a obtenu les courbes générales précédentes dans le Mémoire posthume intitulé : *De binis curvis algebricis eadem rectificatione gaudentibus* [1]. Il a reconnu que la courbe est algébrique lorsque le rapport des axes de l'ellipse qui lui correspond est commensurable; ce qui revient à supposer dans les formules précédentes a et m commensurables en même temps; mais on peut prendre a incommensurable et m commensurable, et ce rapport devient alors incommensurable sans que la courbe cesse d'être algébrique. Notre résultat est donc un peu plus général que celui d'Euler. Le même géomètre a consacré un Mémoire spécial, imprimé à la suite du précédent, à l'examen du cas où l'ellipse devient un cercle [2]. Quant aux courbes paraboliques qui appartiennent au même mode de génération, Euler les a également mentionnées dans différents Mémoires, ainsi que nous l'avons dit (n° 19); mais l'illustre géomètre ne paraît pas avoir remarqué la nature épicycloïdale de toutes ces courbes, mise en évidence dans ce Chapitre.

CHAPITRE X.

REPRÉSENTATION EXACTE DE LA FONCTION ELLIPTIQUE DE TROISIÈME ESPÈCE PAR LES ARCS DES ÉPICYCLOÏDES INVERSES. — CAS PARTICULIERS REMARQUABLES.

56. Les inverses de trois espèces particulières d'épicycloïdes donnent, comme nous l'avons vu (n^{os} 45, 46 et 48), par leur rectification,

---

[1] *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, t. XI, p. 107 et suivantes.
[2] *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, p. 114.

quelques transcendantes fort simples. Nous allons faire voir que l'arc indéfini de l'inverse de l'épicycloïde la plus générale est précisément égal à la fonction elliptique de troisième espèce, dans laquelle le paramètre et le module sont laissés complétement arbitraires.

Pour le cas de $n = -1$, la formule du n° 43 donne

$$ds' = \frac{m\,d\psi}{1-m}\,\frac{\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}}{a^2+m^2+2am\cos\psi}.$$

57. Posons, en effectuant un changement de variable,

$$\cot\frac{\psi}{2} = \frac{1-a}{1+a}\tang u;$$

on obtiendra les relations suivantes :

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{(1-a)\sin u}{\sqrt{(1+a)^2-4a\sin^2 u}},$$

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{(1+a)\cos u}{\sqrt{(1+a)^2-4a\sin^2 u}},$$

$$d\psi = -\frac{2(1-a^2)\,du}{(1+a)^2-4a\sin^2 u},$$

$$m^2+a^2+2am\cos\psi = \frac{(a-m)^2(1+a)^2-4a(1-m)(a^2-m)\sin^2 u}{(1+a)^2-4a\sin^2 u},$$

$$\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi} = \frac{1-a^2}{\sqrt{(1+a)^2-4a\sin^2 u}};$$

d'où l'on déduit enfin, en écartant le cas de $a = 1$,

$$ds = \frac{2m}{1-m}\,\frac{(1-a)^2}{1+a}\,\frac{1}{(a-m)^2+\dfrac{4a(m-1)(a^2-m)}{(1+a)^2}\sin^2 u}\,\frac{du}{\sqrt{1-\dfrac{4a}{(1+a)^2}\sin^2 u}},$$

dernière formule qui démontre notre théorème.

58. Il viendra donc, en employant la notation connue de Legendre,

$$s' = \frac{2m}{1-m}\,\frac{(1-a)^2}{(1+a)(a-m)^2}\,\Pi\left[\frac{4a(m-1)(a^2-m)}{(a-m)^2(1+a)^2},\ \frac{2\sqrt{a}}{1+a},\ u\right],$$

et si l'on se donne le paramètre n, et le module c de la fonction elliptique de troisième espèce, l'ordre et le module de l'épicycloïde inverse correspondante seront aussi donnés. Le module a dépendra uniquement de c par la relation

$$c = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}.$$

Quant à l'ordre m, on l'obtiendra par la résolution de l'équation du second degré

$$4a(m-1)(a^2-m) = n(a-m)^2(1+a)^2,$$

susceptible d'être mise sous cette forme plus simple

$$\frac{m+a}{m-a} = \pm\frac{1+a}{1-a}\sqrt{n+1}.$$

On voit qu'on pourra toujours déterminer deux valeurs différentes réelles de m, pourvu qu'on ne donne pas à n de valeur négative plus grande que l'unité en valeur absolue, ou, ce qui revient au même, pourvu qu'on ne prenne pas le paramètre de la fonction elliptique de troisième espèce hors des limites exigées par la théorie même de cette fonction ([1]).

Dans le cas où a et $\sqrt{1+n}$ seraient à la fois deux quantités commensurables, la courbe considérée serait alors algébrique. La fonction elliptique de troisième espèce est donc susceptible d'être représentée, dans une infinité de cas, par l'arc indéfini d'une pareille courbe.

59. La fonction complète

$$\Pi^1(n, c),$$

qui correspond à l'intégrale précédente, entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$ données à u, sera évidemment égale à l'intégrale comprise entre les valeurs o et π, attribuées, comme limites, à l'angle ψ. Ainsi cette fonction Π^1 est exactement représentée par l'arc inverse de celui qui est engendré par une demi-révolution du cercle mobile de l'épicycloïde. Nous allons maintenant passer en revue quelques cas remarquables.

([1]) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. I^{er}, n° 53, p. 71.

60. On sait que la fonction

$$\Pi(-1, c, u)$$

exprime, à un facteur constant près, l'arc d'une hyperbole [1]. Or la valeur $n = -1$ du paramètre est obtenue en faisant ici

$$m = -a.$$

Ainsi l'arc inverse de toute hypocycloïde, à branches infinies [2], est équivalent à l'arc de l'hyperbole définie par les équations

$$x = \frac{c}{\cos\varphi}\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}, \quad y = b^2 \operatorname{tang}\varphi,$$

où φ désigne un angle auxiliaire variable, et où l'on pose, en outre,

$$c = \frac{2\sqrt{a}}{1+a} \quad \text{et} \quad b = \frac{1-a}{1+a}.$$

L'arc s' de la première courbe est alors lié à l'arc Ψ de la seconde par cette équation [3]

$$s' = \frac{\Psi}{2a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \Pi\left(-1, \frac{2\sqrt{a}}{1+a}, \varphi\right).$$

Il est facile de s'assurer que la racine carrée du module a n'est autre ici que la tangente trigonométrique de la moitié de l'angle que fait l'asymptote avec l'axe non transverse de l'hyperbole précédente.

61. Nous ne nous arrêterons pas à examiner le cas particulier où $n = \pm c$, où l'on aurait entre a et m cette condition

$$\frac{m-a}{m+a} = \frac{1 \pm \sqrt{a}}{\sqrt{1+a}}.$$

L'arc de l'épicycloïde inverse serait alors égal à la somme d'une fonction elliptique de première espèce et d'un arc de cercle qu'on

---

(1) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Ier, p. 70.
(2) *Voir* l'observation faite au n° 46.
(3) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Ier, p. 16 et 70.

pourrait construire algébriquement pour toute valeur commensurable de $\sqrt{a}$ [1]. Nous avons hâte d'arriver à d'autres cas beaucoup plus simples.

62. Pour $n = 0$ ou $m = a^2$, l'arc équivaut exactement à une fonction elliptique de première espèce dont le module est

$$\frac{2\sqrt{a}}{1+a}.$$

La fonction complète de première espèce correspond encore à l'arc inverse d'une demi-spire, de même que la fonction complète de seconde espèce, pour le même module, est égale à l'arc direct de cette demi-spire d'épicycloïde. Toutefois, l'arc indéfini inverse est susceptible de prendre une autre forme, en posant

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin\psi}{a+\cos\psi},$$

ce qui donne, pour différentielle de l'arc en fonction de ψ,

$$ds' = \frac{1}{1-a^2}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}} = \frac{2}{1-a^2}\,\frac{1}{1+a}\,\frac{\frac{d\psi}{2}}{\sqrt{1-\frac{4a}{(1+a)^2}\sin^2\frac{\psi}{2}}},$$

et en fonction de θ

$$ds' = \frac{1}{1-a^2}\,\frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}}.$$

La nouvelle amplitude θ n'est d'ailleurs autre chose que l'angle que fait le rayon vecteur de la courbe avec la ligne des centres, et le module de la fonction elliptique de première espèce devient alors égal au module même de l'épicycloïde [2].

63. La longueur de la demi-spire de notre courbe épicycloïde inverse correspond à la fonction complète quand on prend pour amplitude $\frac{\psi}{2}$, et au *double* de la fonction complète du module a quand on

(1) LEGENDRE, *Traité des Fonctions elliptiques*, t. Ier, p. 69.
(2) *Voir* ci-dessus les nos 38 et 39.

prend pour amplitude θ. En appelant S la longueur de cet arc, on aura de plus, suivant la notation de Legendre,

$$S = \frac{2}{1-a^2}\,\frac{1}{1+a}\,F^1\left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}\right),$$

et, dans le second cas,

$$S = \frac{2}{1-a^2}\,F^1(a);$$

d'où résulte cette identité connue [1]

$$(1+a)\,F^1(a) = F^1\left(\frac{2\sqrt{a}}{1+a}\right),$$

dont on obtient ainsi une interprétation géométrique intéressante.

64. Il nous reste à examiner un dernier cas qui répond à l'hypothèse

$$a = 1,$$

et où la première substitution employée au n° 57 est en défaut. Ce cas a déjà été examiné sommairement aux nos 22, 23 et 45 de ce Mémoire. La courbe est alors l'inverse d'une épicycloïde ou d'une hypocycloïde ordinaire. La rectification de l'arc est donnée dans le premier cas par la formule

$$\frac{1-m^2}{\sqrt{m}}\,s' = L\left(\frac{1+m+2\sqrt{m}\sin\frac{\psi}{2}}{1+m-2\sqrt{m}\sin\frac{\psi}{2}}\right),$$

où l'arc s' est compté à partir du point milieu d'une spire entière, et où l'angle ψ varie depuis o jusqu'à $\pm\pi$. Au delà, la formule ne saurait convenir. De même, dans le second cas, l'arc inverse des hypocycloïdes satisfait à l'équation

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1-m^2}{2\sqrt{-m}}\right)s' = \frac{2\sqrt{-m}}{1+m}\sin\frac{\psi}{2},$$

---

[1] *Fonctions elliptiques*, t. Ier, p. 81.

qui convient, pour toute valeur négative de m, à la longueur d'une spire entière, en faisant varier ψ depuis $-\pi$ jusqu'à $+\pi$.

65. Le défaut que nous venons de signaler pour les deux dernières classes de courbes tient à l'existence des points de rebroussement par lesquels deux spires consécutives se soudent l'une à l'autre. Cette circonstance ne se présente pas dans les autres épicycloïdes où le point décrivant la courbe n'est pas situé sur la circonférence du cercle mobile. Les spires se succèdent l'une à l'autre sans changement brusque dans la direction de l'arc. Par un changement convenable de la constante, en chaque point de rebroussement, on pourrait toutefois suivre encore la marche de l'arc indéfini, en passant d'une spire à l'autre. Il était bon d'avertir de cette restriction à apporter aux formules précédentes, et ce que nous venons de dire suffit pour prévenir toute difficulté, dans l'emploi des formules générales.

66. Les résultats que nous venons d'exposer dans ce Chapitre sont susceptibles d'une grande extension, lorsqu'on prend le pôle de la transformation par rayons réciproques hors du plan de l'épicycloïde, et en un point quelconque de la perpendiculaire élevée au centre du cercle fixe. On obtient ainsi une courbe sphéro-conique, dont l'arc s' a pour expression différentielle

$$ds' = \frac{m\,d\psi}{1-m}\,\frac{\sqrt{1+a^2+2a\cos\psi}}{b^2+a^2+m^2+2am\cos\psi},$$

en désignant par b la distance du pôle à l'origine primitive.

Cette expression peut encore être transformée par la substitution du n° 57, et l'on retrouve, pour valeur de l'arc indéfini, la fonction elliptique de troisième espèce, dont on aurait ainsi une nouvelle représentation. Nous supprimons, pour abréger, les remarques auxquelles donnerait lieu la discussion de cette dernière formule, ainsi qu'un rapprochement qu'il est naturel de faire entre notre méthode et celle que M. William Roberts a suivie autrefois [1] pour représenter les diverses

[1] *Journal de Liouville*, t. VIII, IX et X.

fonctions elliptiques par l'inverse sphérique d'une courbe du second degré [1].

CHAPITRE XI.

EXTENSION A UNE SOMME QUELCONQUE D'INTÉGRALES DE LA MÉTHODE EXPOSÉE AU SECOND CHAPITRE. — POSSIBILITÉ DE NOUVELLES REPRÉSENTATIONS, EN NOMBRE ILLIMITÉ, D'UNE MÊME FONCTION ELLIPTIQUE DONNÉE, DE PREMIÈRE ESPÈCE.

67. Soient plusieurs lignes courbes planes données, définies chacune par deux équations entre les coordonnées rectangulaires

$$x, y, x_1, y_1, \ldots, \quad x_i, y_i$$

de chaque point et une variable auxiliaire correspondante t, $t_1, \ldots, t_i$; de telle sorte qu'on ait le système suivant :

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x = \varphi(t), & x_1 = \varphi_1(t_1), \ldots, & x_i = \varphi_i(t_i), \\ y = \psi(t), & y_1 = \psi_1(t_1), \ldots, & y_i = \psi_i(t_i), \end{cases}$$

où φ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$, ψ, $\psi_1, \ldots, \psi_i$ désignent des fonctions données algébriques des variables t, $t_1, \ldots, t_i$. Supposons maintenant, de plus, que ces diverses variables soient liées entre elles par les relations nouvelles

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx_1}{dy_1} = \ldots = \frac{dx_i}{dy_i},$$

ou

$$\text{(B)} \qquad \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{\varphi'_1(t_1)}{\psi'_1(t_1)} = \frac{\varphi'_2(t_2)}{\psi'_2(t_2)} = \ldots = \frac{\varphi'_i(t_i)}{\psi'_i(t_i)},$$

formées au moyen des dérivées de toutes les fonctions précédentes.

Ces dernières équations expriment que les tangentes et les normales menées aux points correspondants des $i+1$ courbes considérées sont

---

[1] L'ellipse coïncide évidemment avec l'hypocycloïde du premier ordre ($m = -1$). Cette courbe se change en hyperbole, lorsque, après avoir multiplié les seconds membres des équations du n° 41, par $p + \sqrt{q-1}$, on fait $m = -1$ et $a = \dfrac{p - q\sqrt{-1}}{p + q\sqrt{-1}}$. Nos théorèmes s'appliquent donc aux inverses *planes ou sphériques* d'une courbe quelconque du second degré à centre.

toujours respectivement parallèles, pour chaque système de valeurs simultanées des variables t, t_1,... et t_i.

68. Cela posé, formons les deux expressions

$$(C)\qquad \begin{cases} \xi = m\varphi(t) + m_1\varphi_1(t_1) + \ldots + m_i\varphi_i(t_i), \\ \eta = m\psi(t) + m_1\psi_1(t_1) + \ldots + m_i\psi_i(t_i), \end{cases}$$

qui représentent les coordonnées d'une nouvelle courbe, en désignant par m, m_1,..., m_i des nombres constants quelconques. Cette dernière courbe sera algébrique, de même que les précédentes, et son équation résultera de l'élimination des $(i+1)$ variables t, t_1,..., t_i entre les $i+2$ équations (B) et (C).

69. En appelant s, s_1,..., s_i et σ les arcs indéfinis de toutes ces courbes, dont les diverses extrémités se correspondent mutuellement, on aura, en vertu des équations (A) et (B),

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx_1}{ds_1} = \ldots = \frac{dx_i}{ds_i} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}},$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy_1}{ds_1} = \ldots = \frac{dy_i}{ds_i} = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}},$$

d'où l'on déduira, pour les valeurs des différentielles $d\xi$ et $d\eta$,

$$\begin{aligned} d\xi &= m\,dx + m_1\,dx_1 + \ldots + m_i\,dx_i \\ &= \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}}(m\,ds + m_1\,ds_1 + \ldots + m_i\,ds_i) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\eta &= m\,dy + m_1\,dy_1 + \ldots + m_i\,dy_i \\ &= \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}}(m\,ds + m_1\,ds_1 + \ldots + m_i\,ds_i), \end{aligned}$$

ce qui donne, pour la valeur de la différentielle $d\sigma$ de l'arc σ,

$$d\sigma = m\,ds + m_1\,ds_1 + \ldots + m_i\,ds_i$$

et, par suite,

$$\sigma = ms + m_1 s_1 + \ldots + m_i s_i.$$

Il faut remarquer qu'on a, en outre,

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{\varphi'_1(t_1)}{\psi'_1(t_1)} = \ldots = \frac{\varphi'_i(t_i)}{\psi'_i(t_i)}$$

ou

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{dx}{dy} = \frac{dx_1}{dy_1} = \ldots = \frac{dx_i}{dy_i}.$$

Ainsi l'arc σ de la nouvelle courbe représente, en longueur, la somme des arcs des courbes primitives multipliées respectivement par des nombres constants quelconques; et, de plus, tous les arcs correspondants $s, s_1, \ldots, s_i$ et ce dernier σ sont compris sous le même angle formé par les normales menées aux extrémités de chacun d'eux.

Cette méthode est la traduction analytique d'un théorème remarquable dû à Jean Bernoulli, que ce géomètre a démontré par la considération d'un déplacement particulier des figures planes, appelé par lui *rampement* (motus reptorius) (1).

70. Il résulte de ce qui précède que lorsque le problème de la représentation de certaines transcendantes par les arcs de courbes algébriques aura été résolu par une méthode analogue à celle que nous avons fait connaître dans le Chapitre II de ce Mémoire, et qu'on sera parvenu à exprimer algébriquement les coordonnées rectangulaires de chaque courbe au moyen d'une même variable, on pourra ensuite en conclure la possibilité d'effectuer de même la représentation d'une somme quelconque de ces fonctions transcendantes. Il suffira de former le système des $i+2$ équations algébriques (B) et (C), et d'éliminer entre elles les $i+1$ variables auxiliaires; l'arc de la courbe algébrique obtenue sera exprimé par une somme de transcendantes ayant la forme prescrite.

71. On tire de cette méthode générale une conséquence intéressante, quand on l'applique aux fonctions transcendantes dont on peut effectuer l'addition algébriquement, et dont on peut obtenir en même temps, une représentation par des arcs dissemblables. Ainsi si l'on combine un cercle quelconque avec une courbe dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle, qu'on fasse ensuite correspondre algé-

(1) Voir *Opera*, t. Ier, *De motu reptorio*, p. 408.

briquement entre eux, deux à deux, les arcs de ces courbes, on en déduira une nouvelle courbe, également algébrique, qui jouira de la même propriété, et, en partant de cette dernière, on pourra encore continuer à l'infini à en former d'autres par le même procédé.

Il existe donc une infinité de courbes différentes de celles que nous avons considérées et dont les arcs sont égaux respectivement à des arcs de cercle.

72. Le même raisonnement est applicable à la fonction elliptique de première espèce. Formons, par exemple, le système des équations de deux courbes identiques, mais de position différente,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \varphi(t) = \dfrac{\cos p^2 t + p\cos t}{1 + p^2 + 2p\cos(1 - p^2)t}, \\ y = \psi(t) = \dfrac{\sin p^2 t + p\sin t}{1 + p^2 + 2p\cos(1 - p^2)t}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(u) = \dfrac{\cos p^2 u - p\cos u}{1 + p^2 - 2p\cos(1 - p^2)u}, \\ y_1 = \psi_1(u) = \dfrac{\sin p^2 u - p\sin u}{1 + p^2 - 2p\cos(1 - p^2)u}, \end{cases}$$

qui représentent chacune la fonction elliptique de première espèce, au module p, que nous supposerons être un nombre essentiellement positif, égal à la racine carrée d'un nombre commensurable quelconque.

Les équations (B) deviendront ici

$$(3)\qquad \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{\varphi'_1(u)}{\psi'_1(u)}.$$

En combinant cette dernière équation avec les deux autres,

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = \varphi(t) + m\varphi_1(u), \\ \eta = \psi(t) + m\psi_1(u), \end{cases}$$

où m désigne un nouveau nombre commensurable quelconque, l'élimination de t et u entre les équations (3) et (4) déterminera une nouvelle courbe algébrique qui représentera encore, par son arc indéfini, la fonction elliptique de première espèce, au module p.

En effet, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut, en désignant par s, s_1 et σ les arcs respectifs de ces trois courbes algébriques,

$$\sigma = s + ms_1;$$

d'autre part, les intégrales à modules complémentaires

$$s = \frac{p}{1-p^2}\int_0^t \frac{d(1-p^2)t}{\sqrt{1+p^2+2p\cos(1-p^2)t}},$$

$$s_1 = \frac{p}{1-p^2}\int_0^u \frac{d(1-p^2)u}{\sqrt{1+p^2-2p\cos(1-p^2)u}}$$

sont susceptibles d'être ramenées à la même forme par les deux substitutions (n° 62)

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sin(1-p^2)t}{p+\cos(1-p^2)t},$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin(1-p^2)u}{-p+\cos(1-p^2)u},$$

qui permettent d'exprimer les arcs s et s_1 par les formules

$$s = \frac{p}{1-p^2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-p^2\sin^2\theta}} = \frac{p}{1-p^2}\mathrm{F}(p,\theta),$$

$$s_1 = \frac{p}{1-p^2}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1-p^2\sin^2\omega}} = \frac{p}{1-p^2}\mathrm{F}(p,\omega).$$

On aura, par suite, pour valeur de l'arc σ,

$$\sigma = \frac{p}{1-p^2}[\mathrm{F}(p,\theta) + m\mathrm{F}(p,\omega)] = \frac{p}{1-p^2}\mathrm{F}(p,\varpi),$$

et la nouvelle amplitude ϖ sera liée aux amplitudes θ et ω, au moyen du théorème connu sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce.

Il est donc maintenant démontré que l'arc de la courbe algébrique représentée par l'ensemble des équations (1), (2), (3) et (4) a pour valeur exacte la fonction elliptique de première espèce dont le module est égal à la racine carrée d'un nombre commensurable quelconque.

En faisant varier m, on obtiendra ainsi une infinité de courbes algébriques différentes de chacune desquelles on continuera, si l'on veut, à déduire de nouvelles, et toutes ces courbes jouiront encore de la même propriété.

73. Les calculs auxquels conduit la méthode que nous venons d'exposer peuvent être extrêmement abrégés, en ayant recours à la formule déjà donnée au n° **21** du Chapitre II, pour représenter la fonction elliptique de première espèce au module $p = \sqrt{\frac{n'-1}{n'}}$.

Posons en effet

$$z = e^{t\sqrt{-1}} = \cos t + \sin t\sqrt{-1}, \quad \zeta = e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sin u\sqrt{-1}, \quad \rho = \xi + \eta\sqrt{-1}.$$

A l'aide de ces trois nouvelles variables auxiliaires z, ζ et ρ, on s'assurera aisément que les équations (1), (2), (3) et (4) sont susceptibles d'être remplacées par les deux suivantes :

$$\rho = \frac{z}{z^{1-p^2}+p} + m\,\frac{\zeta}{\zeta^{1-p^2}-p}, \tag{5}$$

$$z^2\,\frac{p\,z^{1-p^2}+1}{p\,z^{p^2-1}+1}\left(\frac{z^{p^2-1}+p}{z^{1-p^2}+p}\right)^2 = \zeta^2\,\frac{p\,\zeta^{1-p^2}-1}{p\,\zeta^{p^2-1}-1}\left(\frac{\zeta^{p^2-1}-p}{\zeta^{1-p^2}-p}\right)^2. \tag{6}$$

Si l'on élimine ζ de ces dernières, qu'on mette pour ρ et z leurs valeurs imaginaires et qu'on décompose l'équation résultante en deux équations réelles, on en tirera, par l'élimination de t, une équation finale entre les coordonnées ζ, η et les deux paramètres commensurables p et m. Ce sera l'équation de la courbe cherchée, dont l'arc indéfini est, comme on l'a montré plus haut,

$$\sigma = \frac{p}{1-p^2}\,\mathrm{F}(p, \varpi).$$

D'autres conséquences, relatives à la théorie des fonctions elliptiques, se déduiraient encore de certaines équations analogues à (5) et (6); mais nous ne les examinerons pas en ce moment.