Marc Zamansky

Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 67 (1950), p. 161-198

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__161_0>

CLASSES DE SATURATION DES PROCÉDÉS DE SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER ET APPLICATIONS AUX SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR M. MARC ZAMANSKY.

INTRODUCTION.

Dans un Mémoire antérieur [5] (¹), nous avons indiqué les classes de saturation pour quelques procédés de sommation des séries de Fourier des fonctions continues. L'objet du présent travail est de donner une réponse plus générale à ce problème en considérant les procédés de sommation définis par une fonction sommatoire $g(u)$ telle que $g(0)=1$, $g(1)=0$ et qui consistent à étudier l'approximation fournie d'une fonction continue

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px),$$

par les polynômes

$$P_n(g, f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)(a_p \cos px + b_p \sin px).$$

Le premier résultat concernait le procédé défini par $g(u) = 1 - u$

(¹) Ces chiffres renvoient à la bibliographie p. 198.

[procédé (C, 1)]. Nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante pour que f fût approchée à $O\left(\frac{1}{n}\right)$ près par ses sommes de Fejer, était que la fonction conjuguée $\tilde{f}$ de f satisfît à une condition de Lipschitz d'ordre 1 et nous indiquions que cette condition était équivalente à

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}\,dt = O(1),$$

uniformément en ε et x.

Pour des procédés non réguliers, c'est-à-dire qui ne sont pas définis *a priori* par une fonction sommatoire, nous montrions que l'étude était possible en utilisant les propriétés des dérivées de polynômes trigonométriques $P_n(x)$ convergeant uniformément vers $f(x)$ [procédés (C, k) pour k entier >0, procédés de Jackson-de la Vallée-Poussin, procédés construits à partir des différences successives de f]. Les procédés non réguliers ne seront pas envisagés ici.

Moyennant des conditions de dérivabilité assez larges imposées à $g(u)$, le résultat général relatif aux procédés définis par $g(u)$ de type p entier que nous définirons, est le suivant :

La classe de saturation est définie pour p impair par $\tilde{f}^{(p-1)} \in \text{Lip}\,1$, pour p pair par $f^{(p-1)} \in \text{Lip}\,1$.

Au cours de ce travail, nous étudions l'approximation de $f(x)$ par des polynômes provenant d'un procédé de type p lorsque $f(x)$ appartient à la classe des fonctions dont la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n est $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(0<r<p)$, complétant ainsi les résultats de M. de Nagy [3] et nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour que $f^{(p)}$ ou $\tilde{f}^{(p)}$ satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre α $(0<\alpha\leqq 1)$, exprimée au moyen de f.

A la fin de la première Partie, nous abordons le problème de la saturation des procédés non nécessairement convergents, tels ceux qui sont définis par $1+u^p$.

La seconde Partie est réservée à des applications et à des précisions supplémentaires. Nous donnons la relation existant en un point x entre l'approximation de f et $\tilde{f}$ par leurs sommes de Fourier S_n et $\tilde{S}_n$, lorsque f est continue. Une étude précise de l'approximation de $\tilde{f}$ par ses sommes de Fejer $\tilde{\sigma}_n$ lorsque la meilleure approximation $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$ nous a permis d'obtenir une condition exprimée au moyen de $f(x)$ et non au moyen de $\tilde{f}(x)$, ce qui faisait l'objet d'un théorème antérieur. L'égalité obtenue donne des résultats concernant les séries trigonométriques. En particulier nous généralisons un théorème de Fatou et indiquons des critères de convergence concernant des séries de la forme $\sum a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x$ avec la condition $\sum_1^p n_k = O(n_p)$, plus générale que $\frac{n_{p+1}}{n_p} > q > 1$ et qui n'est pas incompatible avec la condition $\lim_{p\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1$.

RAPPEL DE RÉSULTATS ANTÉRIEURS ET NOTATIONS.

1. Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_p \cos px + b_p \sin px$$

une fonction sommable de période 2π et sa série de Fourier. Nous écrirons

$$\text{(N.1)} \qquad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_p \cos px + b_p \sin px$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{\sin t} \sin(2n+1)t \, dt,$$

$$\text{(N.2)} \qquad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{\sin t} \sin(2n+1)t \, dt.$$

La fonction conjuguée de $f(x)$ sera désignée par $f^{\cdot}(x)$ et lorsqu'elle existe

$$\text{(N.3)} \qquad f^{\cdot}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt.$$

La série conjuguée sera

$$\sum_1^\infty (b_p \cos px - a_p \sin px),$$

$$\text{(N.4)} \qquad S_n^{\cdot}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin t} [\cos t - \cos(2n+1)t] \, dt.$$

Nous posons

$$\text{(N.5)} \qquad \sigma_n(x) = \frac{S_0 + \ldots + S_{n-1}}{n},$$

et lorsque l'égalité suivante a un sens

$$\text{(N.6)} \qquad f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t^2} \sin nt \, dt.$$

2. Soient

$$(\text{N.7})\qquad \begin{cases} \Delta_1(t) = \Delta_1(f, x, t) = f(x+t) - f(x-t), & \ldots, \\ \Delta_{2p+1}(t) = \Delta_{2p-1}(t) - 2^{2p-1}\Delta_{2p-1}\left(\dfrac{t}{2}\right), \end{cases}$$

$$(\text{N.8})\qquad \begin{cases} \Delta_2(t) = \Delta_2(f, x, t) = f(x-t) - 2f(x) + f(x+t), & \ldots. \\ \Delta_{2p}(t) = \Delta_{2p-2}(t) - 2^{2p-2}\Delta_{2p-2}\left(\dfrac{t}{2}\right). \end{cases}$$

Soit $E_n(f)$ la meilleure approximation trigonométrique de $f(x)$ d'ordre n. Nous rappelons que si $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0 < \alpha \leq 1)$, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right)$.

Réciproquement si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right)$ $(0 < \alpha < 1)$, $f^{(p)}$ existe et $\in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

Si dans les hypothèses on remplace $\mathrm{Lip}\,\alpha$ par $\mathrm{lip}\,\alpha$ ou O par o on peut dans les conclusions remplacer O par o ou $\mathrm{Lip}\,\alpha$ par $\mathrm{lip}\,\alpha$, lorsque $0 < \alpha < 1$.

$$(\text{N.9})\qquad \text{Si}\quad E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad\text{ou}\quad o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{alors}\qquad E_n(f') = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad\text{ou}\quad o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$(\text{N.10})\qquad \frac{\Delta_2(t)}{t} = O(1), \qquad \text{uniformément borné en } x \text{ et } t,$$

ou

$$(\text{N.11})\qquad \frac{\Delta_2(t)}{t} = o(1), \qquad \text{tend vers zéro avec } t \text{ uniformément en } x.$$

3. Si l'on pose

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n}{1 + 2 + \ldots + n},$$

on a

$$(\text{N.12})\qquad \sigma_n^{\cdot\prime} = (n+1)(\sigma_n^2 - \sigma_n) \qquad\text{et}\qquad \sigma_n' = (n+1)(\sigma_n^{\cdot} - \sigma_n^{2\cdot}).$$

4. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, positive, non croissante. Si une suite de polynômes trigonométriques $P_n(x)$ est telle que

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{\varphi(n)}{n^{k-1}},$$

où k est entier positif, alors

$$(\text{N.13})\qquad P_n^{(k)}(x) = O(n\varphi(n)) + O(1)\int_1^n \varphi(t)\,dt + O(1)$$

uniformément en x.

En particulier si $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a

$$P_n''(x) = O(n) \quad\text{ou}\quad o(n).$$

Lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a

$$(\text{N}.14) \qquad \sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(\text{N}.15) \qquad n(\sigma_n^2 - f) = 2n(\sigma_n - f) + O(1) \quad \text{ou} \quad o(1).$$

Si $f'(x)$ est continue pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$:

$$(\text{N}.16) \qquad \sigma_n(x) - f(x) = \frac{f'(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

CHAPITRE I.

CLASSES DE SATURATION

Nous établissons quelques lemmes préliminaires.

Lemme I. — *Pour que* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(r > 0)$, *il faut et il suffit que* $\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^r} = O(1)$ *ou* $o(1)$ *pour* $2p > r$.

Lemme II. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma''_n = O(n)$ *ou* $o(n)$.

Lemme III. — *Soit* $\{\rho_n\}$ *une suite de nombres positifs, tendant vers zéro pour* $n\infty$. *S'il existe une suite de polynômes trigonométriques* $P_n(x)$ *d'ordre* n, *tels que* $P_n - f = O(\rho_n)$ *et que* $P_n^{(2p)}(x) = O(n^{2p}\rho_n)$, *p étant entier* > 0, *alors, q étant un entier* > 1 :

$$\frac{1}{n^{q-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \sin nt\,dt = O(\rho_n), \qquad \frac{1}{n^{q-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \cos nt\,dt = O(\rho_n).$$

Si dans les hypothèses on peut remplacer O *par* o, *on peut aussi dans les conclusions remplacer* O *par* o.

Démonstrations. — *Lemme* I. — Nous avons précédemment utilisé les expressions

$$u_n^p = \frac{\Lambda_{p+1}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2}} \sin^{2p+2} nt\,dt,$$

différences entre une somme trigonométrique d'ordre $2^p pn$ et $f(x)$ [5].

Si $\Delta_{2p}(t) = O(|t|^r)$, $u_n^p = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^r} \to 0$ avec t, uniformément en x, posons $\left|\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^r}\right| = \varepsilon(t)$ pour $0 \leqq t \leqq \pi$.

On a

$$u_n^p = \frac{A_{p+1}}{n^{2p+1}}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} + \int_{\pi}^{+\infty}\right]$$
$$= O\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right)\int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon(t)\, t^r n^{2p+2}\, dt + O\left(\frac{1}{n^r}\right)\int_1^{n\pi} \frac{\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right) t^r}{t^{2p+2}} \sin^{2p+2} t\, dt + O\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right)$$
$$= o\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\right)\int_1^{n\pi},$$

car $2p > r$,

Si l'on écrit la dernière intégrale $\int_1^{\pi\sqrt{n}} + \int_{\pi\sqrt{n}}^{\pi n}$ on trouve, d'après la première formule de la moyenne,

$$\int_1^{\pi\sqrt{n}} = o(1), \qquad \int_{\pi\sqrt{n}}^{\pi n} = O(1)\int_{\pi\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2p+2}} = o(1).$$

Réciproquement si $P_n - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, d'après (N.13) on a

$$P_n^{(2p)}(x) = O(n^{2p-r}) \quad \text{ou} \quad o(n^{2p-r}) \qquad (2p > r).$$

Écrivons

$$f(x) = \sum_1^{\infty} (P_{2^{k+1}} - P_{2^k}).$$

D'où, lorsque $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$:

$$(1) \qquad \Delta_{2p}(f, x, t) = \sum_1^{\infty} \Delta_{2p}(P_{2^{k+1}} - P_{2^k}, x, t) = \sum_1^{N} + \sum_{N+1}^{\infty}.$$

Or $\Delta_{2p}(P_n, x, t) = |t|^{2p}\, O\left(\max_x |P_n^{(2p)}|\right)$. Donc

$$\Delta_{2p}(f, x, t) = O(|t|^{2p})\sum_{k=1}^{N} 2^{k(2p-r)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{2^{kr}}\right) = O(|t|^r),$$

en choisissant N de façon que

$$\frac{1}{2^{N+1}} \leq |t| < \frac{1}{2^N}.$$

Si $E_n = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, on écrira $|P_n^{(2p)}(x)| < \varepsilon_n n^{2p-r}$ $\left(\lim_{n\infty} \varepsilon_n = 0\right)$ et l'on obtient

$$\Delta_{2p}(f, x, t) = O(|t|^{2p})\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k 2^{k(2p-r)} + o\left(\frac{1}{2^{Nr}}\right).$$

Or les hypothèses $v_k > 0$, $\varepsilon_k = o(1)$ et $\sum v_k$ diverge, entraînent

$$\sum_1^N \varepsilon_k v_k = o\left(\sum_1^N v_k\right).$$

Donc

$$\Delta_{2p}(f,\, x,\, t) = \mathrm{O}(|\,t\,|^{2p})\, o(2^{\mathrm{N}(2p-r)}) + o\left(\frac{1}{2^{\mathrm{N}r}}\right) = o(|\,t\,|^{r}),$$

en choisissant N comme précédemment.

Lemme II. — Dans un travail antérieur ([5], th. 20), nous avons prouvé que si $\mathrm{E}_n(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma''_n = \mathrm{O}(n)$. Dans le cas où $\mathrm{E}_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, il suffit de reprendre la démonstration en remplaçant l'hypothèse $\Delta_2(t) = \mathrm{O}(t)$ par $\Delta_2(t) = o(t)$.

Lemme III. — Nous avons vu ([5], p. 53) que si f possède une dérivée d'ordre $2p$ bornée, alors pour $k \leqq 2p$:

$$\Delta_{2p}(t) = |\,t\,|^{2p}\, \mathrm{O}\big(\max_x |\,f^{(2p)}(x)\,|\big), \quad \ldots,$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Delta_{2p}(t) = |\,t\,|^{2p-k}\, \mathrm{O}\big(\max_x |\,f^{(2p)}(x)\,|\big).$$

Considérons par exemple

$$u_n = \frac{1}{n^{q-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\sin nt\, dt.$$

Si l'on remplace f par un polynôme P_n, tel que $f - \mathrm{P}_n = \mathrm{O}(\rho_n)$, on commet une erreur qui est $\mathrm{O}(\rho_n)$. Désignons par $\Delta^n_{2p}(t)$ ce qui devient $\Delta_{2p}(t)$ quand on a remplacé f par P_n et intégrons par parties. Il vient

$$u_n = \left[-\frac{1}{n^q}\frac{\Delta^n_{2p}(t)}{t^q}\right]_{t=\frac{1}{n}}^{+\infty} + \frac{1}{n^q}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\left[\frac{1}{t^q}\left(\frac{d}{dx}\Delta^n_{2p}\right) - \frac{q\,\Delta^n_{2p}}{t^{q+1}}\right]\cos nt\, dt.$$

Or

$$\Delta^n_{2p}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\big(\max_x |\,\mathrm{P}_n^{(2p)}(x)\,|\big) = \mathrm{O}(\rho_n).$$

Donc

$$u_n = \mathrm{O}(\rho_n) + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\left(\frac{d}{dx}\Delta^n_{2p}\right)\frac{\cos nt}{t^q}\, dt - \frac{q}{n^q}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta^n_{2p}}{t^{q+1}}\cos nt\, dt.$$

On intègre à nouveau par parties et l'on remarque que

$$\left[\frac{d}{dx}\Delta^n_{2p}(t)\right]_{t=\frac{1}{n}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right)\max_x |\,\mathrm{P}_n^{(2p)}\,| = \mathrm{O}\left(\frac{\rho_n}{n}\right),$$

$$\left[\frac{1}{n^{q+1}}\left(\frac{d}{dx}\Delta^n_{2p}\right)\frac{1}{t^q}\right]_{t=\frac{1}{n}} = \mathrm{O}(\rho_n),$$

$$\frac{1}{n^{q+1}}\,\frac{\Delta^n_{2p}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{q+1}} = \mathrm{O}(\rho_n).$$

Après $2p$ opérations, on aboutit à des termes tels que

$$\frac{1}{n^{q-1+2p}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\left(\frac{d^{2p}}{dx^{2p}}\Delta''_{2p}\right)\frac{\sin nt}{t^q}\,dt, \qquad \frac{1}{n^{q-1+2p}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta''_{2p}(t)}{t^{q+2p}}\sin nt\,dt.$$

La première quantité vaut

$$\frac{1}{n^{q-1+2p}}\mathrm{O}(\max|\mathrm{P}_n^{(2p)}|)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^q}=\mathrm{O}(\rho_n).$$

La seconde vaut

$$\frac{1}{n^{q-1+2p}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{t^{2p}\mathrm{O}(n^{2p}\rho_n)}{t^{q+2p}}\,dt=\mathrm{O}(\rho_n).$$

On constate :

1° que si l'on peut dans les hypothèses remplacer O par o, cette démonstration reste valable et dans la conclusion on peut remplacer O par o;

2° que si l'on suppose pour un entier $k>0$, $\mathrm{P}_n^{(k)}(x)=\mathrm{O}(n^k\rho_n)$ ou $o(n^k\rho_n)$, le résultat précédent est valable, parce qu'en vertu du théorème de Bernstein,

$$\mathrm{P}_n^{(2p)}(x)=\mathrm{O}(n^k\rho_n)n^{2p-k}=\mathrm{O}(n^{2p}\rho_n)\quad\text{ou}\quad o(n^{2p}\rho_n);$$

3° que, d'après (N.13), les hypothèses du lemme III sont satisfaites, lorsque $\mathrm{E}_n(f)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $\left[\text{ce qui entraîne } \mathrm{E}_n(f^{\cdot\cdot})=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)\text{ ou } o\left(\frac{1}{n^r}\right)\right]$.

Corollaire du lemme III. — *Si* $\mathrm{E}_n(f)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, *alors*

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad\text{ou}\quad o\left(\frac{1}{n^r}\right)\qquad(0<r\leqq 1);$$

$$\frac{1}{n}\int_{0}^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad\text{ou}\quad o\left(\frac{1}{n^r}\right)\qquad(r>1).$$

La première Partie résulte du lemme I.

Pour démontrer la seconde Partie, supposons d'abord que $1<r<2$ et soit

$$u_n=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}.$$

D'après le lemme I, la première de ces deux dernières intégrales vaut $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$; d'après le lemme III, la seconde vaut aussi $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $2\leqq r<4$, on a

$$2u_{2n}-u_n=2\sigma_{2n}-\sigma_n-f=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad\text{ou}\quad o\left(\frac{1}{n^r}\right)\qquad[4].$$

En changeant t en $\frac{t}{2}$, on obtient

$$u_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 4nt\,dt = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt,$$

et d'après (N.8) :

$$u_n - 2^2 u_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_4(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

La même démonstration que nous avons utilisée dans le cas où $1 < r < 2$, prouve que cette dernière intégrale vaut $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

On a donc

$$u_n - 2^2 u_{2n} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{2}$$

$$u_n - 2u_{2n} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{3}$$

On en conclut que $u_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $4 \leqq r < 6$, on forme

$$u_{2n} - 2^2 u_{4n} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_4(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

D'où

$$u_n - 4u_{2n} - 2^4[u_{2n} - 4u_{4n}] = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_6(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{4}$$

A partir de (2), on obtient

$$u_{2n} - 2^2 u_{4n} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{5}$$

De (3), (4), (5), on conclut que $u_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Ce procédé de démonstration est évidemment valable quel que soit r.

De ce corollaire, on déduit le résultat suivant :

Théorème 1. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(r > 1)$, *alors*

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{f'(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \textit{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

En effet

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

Or on a vu ([5], p. 73), que

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\,dt.$$

Le corollaire du lemme III appliqué à $\sigma_n - f - \frac{f^{\cdot\prime}(x)}{n}$, achève la démonstration.

On remarquera que les mêmes hypothèses entraînent que

$$f^{\cdot}(x) - \sigma_n^{\cdot}(x) = \frac{f'(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

I. — Procédés définis par $g(u) = 1 - u^p$, p entier $\geqq 1$.

Rappelons en quoi consiste le phénomène et le problème de la saturation.

Soit (γ) un procédé de sommation de la série de Fourier de f continue, c'est-à-dire une suite de constantes γ_k^n ($k = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$) et les polynômes trigonométriques

$$T_n(\gamma, f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

S'il existe une fonction $\varphi_\gamma(n)$ croissante, telle que quel que soit n, $\max_x [\varphi_\gamma(n) | T_n - f |] > a$, où a est une constante positive qui dépend de f, et si de plus il existe des fonctions f pour lesquelles $\max_x \varphi_\gamma(n) | T_n - f | < b$, où b est une autre constante dépendant de f, on dira que le procédé (γ) se sature. La classe de saturation attachée à (γ) est l'ensemble des fonctions continues non constantes telles que

$$| T_n(\gamma, f, x) - f(x) | = O\left(\frac{1}{\varphi_\gamma(n)}\right).$$

Considérons le procédé (g) défini par la fonction sommatoire $g(u) = 1 - u^p$ $\left(\gamma_k^n = g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$. Désignons par T_n^p le polynôme $T_n(g, f, x)$.

Théorème 2. — *Le procédé (g) défini par $1 - u^p$ est saturé; l'ordre de l'approximation de saturation est $\varphi_\gamma(n) = \frac{1}{n^p}$; pour que $T_n^p - f = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, il faut et il suffit que*

$$f^{\cdot(p-1)} \in \mathrm{Lip}\,1 \quad \textit{si} \quad p = 2m + 1,$$
$$f^{(p-1)} \in \mathrm{Lip}\,1 \quad \textit{si} \quad p = 2m.$$

Démonstration. — Un calcul facile montre que

$$(6) \qquad T_n^{2m} = S_n + (-1)^{m-1} \frac{S_n^{(2m)}}{n^{2m}} = \sigma_n - \frac{\sigma_n^{\cdot\prime}}{n} - \frac{\sigma_n''}{n^2} + \ldots + (-1)^m \frac{\sigma_n^{\cdot(2m-1)}}{n^{2m-1}},$$

$$(7) \qquad T_n^{2m+1} = S_n + (-1)^m \frac{S_n^{\cdot(2m+1)}}{n^{2m+1}} = \sigma_n - \frac{\sigma_n^{\cdot\prime}}{n} - \frac{\sigma_n''}{n^2} + \ldots + (-1)^m \frac{\sigma_n^{(2m)}}{n^{2m}}.$$

Si l'on suppose que pour une infinité de valeurs de n, soient n_p,

$$T_{n_p}^{2m} - f = o\left(\frac{1}{n_p^{2m}}\right),$$

on aurait

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{+\pi}(\mathrm{T}_{n_p}^{2m}-f)\cos kx\,dx=\frac{(-1)^{m-1}}{n_p^{2m}}k^{2m}a_k=o\left(\frac{1}{n_p^{2m}}\right)\qquad (k<n_p),$$

donc $a_k=0$ et de même $b_k=0$. Ce résultat serait aussi obtenu si l'on supposait que pour une infinité de n on avait

$$\mathrm{T}_{n_p}^{2m+1}-f=o\left(\frac{1}{n_p^{2m+1}}\right).$$

Le procédé (g) est donc saturé, $\varphi_\gamma(n)=\frac{1}{n^p}$ et la classe de saturation est à chercher dans la classe des fonctions telles que $\mathrm{E}_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Nous supposons donc que $\mathrm{E}_n(f)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ et nous cherchons l'approximation en un point x que fournissent de f les polynômes T_n^p.

Soit $p=2$. Alors d'après (6) :

$$\mathrm{T}_n^2-f=\sigma_n-f-\frac{\tilde{\sigma}_n'}{n}.$$

D'après le théorème 1 :

$$\mathrm{T}_n^2-f=\frac{\tilde{f}'(x)}{n}-\frac{\tilde{\sigma}_n'(x)}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et comme $\mathrm{E}_n(\tilde{f}')=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut utiliser le résultat relatif à la classe de saturation attachée au procédé $1-u$, à savoir $\tilde{f}'-\tilde{\sigma}_n'=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ si et seulement si $f'\in\mathrm{Lip}\,1$ ([5], p. 35).

Si $p=3$, f', f'', $\tilde{f}'$, $\tilde{f}''$ existent et $\mathrm{E}_n(f')=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\mathrm{E}_n(f'')=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsqu'on suppose que $\mathrm{E}_n(f)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n^3-f&=\sigma_n-f-\frac{\tilde{\sigma}_n'}{n}-\frac{\sigma_n''}{n},\\&=\frac{\tilde{f}'}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)-\frac{\tilde{\sigma}_n'}{n}-\frac{\sigma_n''}{n^2},\\&=\frac{\tilde{f}'-\tilde{\sigma}_n'}{n}-\frac{\sigma_n''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),\\&=\frac{f''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)-\frac{\sigma_n''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),\\&=\frac{f''-\sigma_n''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

$f''-\sigma_n''=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ si et seulement si $\tilde{f}''\in\mathrm{Lip}\,1$.

Le théorème 2 s'établit de proche en proche par ce raisonnement.

THÉORÈME 3. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(r > 0)$,

$$T_n(1-u^p, f, x) - f(x) = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \text{ ou } o\left(\frac{1}{n^r}\right) \qquad \textit{pour} \quad r < p.$$

Lorsque $0 < r < 1$, l'hypothèse $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ entraîne $\sigma_n - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Ce résultat classique résulte du lemme I.

Si $1 \leqq r < 2$, soit $T''_n = \sigma_n - \frac{\sigma_n^{\cdot\prime}}{n} - \frac{\sigma''_n}{n^2} + \ldots$.

Pour $r = 1$, on a obtenu ([5], p. 82) :

$$\sigma_n^{\cdot\prime} = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\,dt + O(1) \quad \text{ou} \quad o(1),$$
$$= n(\sigma_n - f) + O(1) \quad \text{ou} \quad o(1).$$

D'après le lemme II, $\sigma''_n = O(n)$, $\sigma_n^{\cdot\prime\prime} = O(n)$ ou $o(n)$, donc $\sigma_n^{(m)} = O(n^{m-1})$ ou $o(n^{m-1})$ et $\sigma_n^{\cdot(m)} = O(n^{m-1})$ ou $o(n^{m-1})$ pour tout entier $m \geqq 2$. Par conséquent

$$T''_n - f = \sigma_n - f - \frac{\sigma_n^{\cdot\prime}}{n} - \frac{\sigma''_n}{n^2} + \ldots = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $1 < r < 2$, f', $f^{\cdot\prime}$ existent, sont continues et leur meilleure approximation d'ordre n est $O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$ et d'après (N. 13) :

$$\sigma_n^{\cdot\prime\prime} = O(n^{2-r}) \quad \text{ou} \quad o(n^{2-r}), \qquad \sigma''_n = O(n^{2-r}) \quad \text{ou} \quad o(n^{2-r}), \qquad \ldots$$

Le théorème 1 montre que

$$\sigma_n - f = \frac{f^{\cdot\prime}}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Donc

$$T^p_n - f = \frac{f^{\cdot\prime} - \sigma_n^{\cdot\prime}}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right),$$
$$= O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Cette méthode utilisée un nombre de fois suffisant démontre le théorème 3.

Remarque. — C étant une constante indépendante de x et de n, et r étant > 0, si l'on suppose que

$$|T_n(g, f) - f| < \frac{C}{n^{1+r}},$$

on a aussi

$$|T'_n(g, f) - f'| < \frac{C'}{n^r}.$$

En effet $T'_n(g, f) = T_n(g, f')$ et d'après le théorème de Bernstein, $|T'_n - T'_{2n}| < \frac{C'}{n^r}$. D'où

$$|T'_{2^p} - T'_{2^{p+1}}| < \frac{C'}{2^{pr}}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |T'_{2^{p+k}} - T'_{2^{p+k+1}}| = O\left(\frac{1}{2^{pr}}\right), \qquad |T'_{2^{p-1}} - f'| = O\left(\frac{1}{2^{(p-1)r}}\right).$$

n étant un entier positif quelconque et p tel que $2^{p-1} \leqq n < 2^p$, on a $T'_{2^{p-1}} - T'_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, donc $T'_n - f' = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. De même si $T_n(g, f) - f = o\left(\frac{1}{n^{1+r}}\right)$, $T'_n(g, f) - f' = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

II. — Procédés définis par une fonction sommatoire $g(u)$ de type entier p.

Soit $g(u)$ une fonction définie pour $u \geqq 0$, continue, nulle pour $u > 1$.

Définition. — *On dira que le procédé* (g) *est de type* p *au moins, si* $g(u)$ *satisfait aux conditions suivantes :* $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, g', g'', $\ldots$, $g^{(p+1)}$ *existent, sont bornées pour* $0 \leqq u \leqq 1$, $g^{(p+1)}$ *est à variation bornée,*

$$g'(0) = g''(0) = \ldots = g^{(p-1)}(0) = 0.$$

Si de plus $g^{(p)}(0) \neq 0$, *on dira que le procédé* (g) *est de type* p.

Théorème 4. — *Si le procédé* (g) *est de type* p *au moins et si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, $(0 < r < p)$, *alors* $T_n(g, f) - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Ce théorème généralise le théorème 3. Nous le démontrons en usant du théorème 3, des différences $\Delta_{2p}(f, x, t)$ et des expressions de $T_n(g, f) - f$ utilisées par M. B. de Nagy [3].

Soient

$$u_n^0 = T_n(g, f) - f = \int_0^{+\infty} \Delta_2\left(\frac{t}{n}\right) C(t)\, dt,$$
$$C(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(u) \cos ut\, du.$$

Nous supposons $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Comme la démonstration est fondée sur l'emploi des lemmes I, II, III et de l'inégalité (N. 13), elle sera valable si l'on remplace partout O par o.

Par une transformation déjà employée, on obtient

$$u_n^1 = u_n^0 - 2^2 u_{2n}^0 = \int_0^{+\infty} \Delta_4\left(\frac{t}{n}\right) C(t)\, dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_n^{k-1} = u_n^{k-2} - 2^{2k-2} u_{2n}^{k-2} = \int_0^{+\infty} \Delta_{2k}\left(\frac{t}{n}\right) C(t)\, dt = n \int_0^{+\infty} \Delta_{2k}(t)\, C(nt)\, dt.$$

Si $u_n^0 = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, $u_n^{k-1} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ aussi. Réciproquement, K étant une constante indépendante de x et de n, si $|u_n^{k-1}| < \frac{K}{n^r}$, alors $u_n^{k-2} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, $\ldots$, $u_n^0 = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, *lorsque* $r > 2k-2$.

En effet, par hypothèse $u_n^{k-1} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. La série dont le terme général est

$$v_p = 2^{(2k-2)p-1}\left[u_{2^{p-1}n}^{k-2} - 2^{(2k-2)} u_{2^p n}^{k-2}\right]$$

est absolument et uniformément convergente lorsque $r > 2k-2$, car

$$|v_p| < \frac{K 2^{p(2k-2)}}{2^{pr} n^r} = \frac{K}{n^r}\left(\frac{1}{2^{r-2k+2}}\right)^p.$$

Donc, si l'on écrit

$$\begin{gathered}
|u_n^{k-2} - 2^{2k-2} u_{2n}^{k-2}| < \frac{K}{n^r}, \\
|u_{2n}^{k-2} - 2^{2k-2} u_{2^2n}^{k-2}| < \frac{K}{2^r n^r}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
|u_{2^{p-1}n}^{k-2} - 2^{2k-2} u_{2^p n}^{k-2}| < \frac{K}{2^{pr} n^r}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}$$

en multipliant successivement par 1, 2^{2k-2}, $\ldots$, $2^{p(2k-2)}$, $\ldots$, on obtient

$$|u_n^{k-2}| < \sum_1^\infty v_p = O\left(\frac{1}{n^r}\right)\sum_{p=1}^\infty\left(\frac{1}{2^{r-2k+2}}\right)^p.$$

Nous distinguons alors deux cas.

1° (g) est de type $2m$ au moins. En intégrant par parties, on trouve

$$(8) \qquad \begin{aligned}
\pi C(nt) = {} & \frac{g'(1)\cos nt}{n^2 t^2} - \frac{g''(1)\sin nt}{n^3 t^3} + \ldots + \frac{(-1)^m}{n^{2m+2}t^{2m+2}} g^{(2m+1)}\cos nt \\
& - \frac{g^{(2m+1)}(0)}{n^{2m+2}t^{2m+2}} + \frac{(-1)^{m+1}}{n^{2m+2}t^{2m+2}}\int_0^1 \cos nut\, dg^{(2m+1)}.
\end{aligned}$$

Soit k un entier tel que $2k-2 < r < 2k \leqq 2m$.
D'après le lemme I,

$$n\int_0^{\frac{1}{n}} \Delta_{2k}(t)\, C(nt)\, dt = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

D'après le lemme III, tous les termes de $n\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \Delta_{2k}(t)\, C(nt)\, dt$, où l'on a remplacé $C(nt)$ par son développement obtenu en (8), valent $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Le dernier terme est $\frac{1}{n^{2m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2k}(t)}{t^{2m+2}}\left[\int_0^1\right]dt$. Si l'on y remplace f par P_n, on commet une erreur $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ et d'après (N.13) le terme obtenu vaut $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ parce que $2k \leqq 2m$.

Si $r = 2k - 2$, on remarque que pour une primitive de $f - \frac{a_0}{2}$, soit F, on a $E_n(F) = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$ et comme $2k - 2 < r + 1 < 2k$,

$$T_n(g, F) - F = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

d'où

$$T_n(g, f) - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{(th. 3, remarque).}$$

2° (g) est de type $2m+1$ au moins.

Si $2k - 2 \leqq r < 2k \leqq 2m$, les raisonnements faits au 1° restent valables.

Si $2m < r < 2m + 1$, il suffit d'utiliser Δ_{2m+2}.

Si $r = 2m$, on a encore $u_n^m = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, mais on ne peut pas par les raisonnements précédents, en déduire que $u_n^0 = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Posons alors

$$(9) \qquad g(u) = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}(u^p - 1) + \left[1 + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right] g_1(u).$$

Comme $g(1) = 0$ et $g(0) = 0$, on a aussi $g_1(1) = 0$ et $g_1(0) = 1$.

On a encore

$$g^{(k)}(u) = \frac{g^{(p)}(0)}{k!} u^{(p-k+1)} + \left[1 + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right] g_1^{(k)}(u).$$

Donc $g_1^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, p$. (g_1) est donc un procédé de type $(p+1)$ au moins. D'après le 1° et le théorème 3, on a encore $T_n(g, f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ pour $r = 2m$ et un procédé (g) de type $2m+1$ au moins.

THÉORÈME 5. — *Classes de saturation : Pour que le procédé (g) de type p donne de f l'approximation $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, il faut et il suffit que*

$$f^{(p-1)} \in \text{Lip}\,1 \quad \textit{si} \quad p = 2m+1,$$
$$f^{(p-1)} \in \text{Lip}\,1 \quad \textit{si} \quad p = 2m.$$

Écrivons d'après (9)

$$(10) \quad T_n(g, f) - f = -\frac{g^{(p)}(0)}{p!}[T_n(1 - u^p, f) - f] + \left[1 + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right][T_n(g_1, f) - f].$$

Si l'on avait $T_n(g, f) - f = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, on aurait $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, donc $T_n(g, f) - f = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ d'après le thèorème 4. Mais $T_n(1 - u^p, f) - f = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Donc (g) est saturé et l'approximation de saturation est $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$. (10) prouve alors que, si l'on cherche la classe de saturation dans la classe des fonctions f telles que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, on a

$$T_n(g, f) = O\left(\frac{1}{n^p}\right) - \frac{g^{(p)}(0)}{p!}[T_n(1 - u^p, f) - f],$$

ce qui prouve le théorème 5.

Remarque. — On pourrait démontrer le même résultat, en imposant à $g(u)$ des conditions un peu moins restrictives, telles celles qu'a considérées M. B. de Nagy [3].

III. — Procédés définis par une fonction sommatoire de type non entier.

Nous nous bornerons à étudier le cas de $g(u) = 1 - u^\alpha (0 < \alpha < 1)$, lorsque $0 \leqq u \leqq 1$ et $g(u) = 0$ lorsque $u > 1$.

On a ici

$$\begin{aligned} T_n(g, f) - f &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)\left[\int_0^1 (1 - u^\alpha)\cos ut\,du\right]dt, \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)}{t}\left[\int_0^1 u^{\alpha-1}\sin ut\,du\right]dt, \\ &= \frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\left[\int_0^{nt} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\,d\theta\right]dt. \end{aligned}$$

Si $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)(r < \alpha)$, la même méthode que nous avons utilisée, prouve que $T_n(g, f) - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $E_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, on aura encore

$$T_n(g, f) - f = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\,d\theta - \int_{nt}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\,d\theta\right]dt,$$

$$\begin{aligned} (11) \qquad T_n(g, f) - f = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) &+ \left[\frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\,d\theta\right]\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \\ &- \frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\left[\int_{nt}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\,d\theta\right]dt. \end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_a^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\,d\theta\right| < \left|\int_a^{a+\pi}\left[\frac{1}{\theta^{1-\alpha}} - \frac{1}{(\theta + \pi)^{1-\alpha}} + \ldots\right]d\theta\right| < (a + \pi)^\alpha - a^\alpha.$$

Le dernier terme de (11) est donc en valeur absolue moindre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)\right|}{t^{1+\alpha}}[(t + \pi)^\alpha - t^\alpha]\,dt,$$

et comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{(t+\pi)^\alpha - t^\alpha}{t}\, dt = \mathrm{O}(1),$$

l'hypothèse $\Delta_2(t) = \mathrm{O}(t^\alpha)$ entraîne que

$$\int_1^{\infty} \frac{\left|\Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)\right|}{t^{1+\alpha}} [(t+\pi)^\alpha - t^\alpha]\, dt = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Donc

Lorsque $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$,

$$\mathrm{T}_n(1-u^\alpha, f) - f = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\, d\theta\right) \frac{1}{n^\alpha} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt.$$

On peut généraliser à un procédé de la forme $g(u) = 1 - u^\alpha h(u)$, où $h(u)$ est continue et possède une dérivée première à variation bornée.

Remarque. — Il est facile de construire des sommes trigonométriques constituant un procédé d'approximation saturé et dont la classe de saturation est par exemple Lip 1. Ainsi les sommes $\mathrm{T}_n^p(f, x) + \frac{\sigma'_n(x)}{n}$ répondent à la question. Mais un tel procédé n'est pas défini par une fonction sommatoire $g(u)$ jouissant des propriétés précédemment admises.

IV. — Condition pour que $f^{(p)}$ et $\tilde{f}^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$.

THÉORÈME 6. — 1° *Pour que* $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$, *il faut et il suffit que* $\frac{\Delta_{p+1}(f, x, t)}{t^{p+1}}$ *soit borné uniformément en* x *et* t.

2° *Pour que* $\tilde{f}^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$, *il faut et il suffit que* $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\Delta_{p+2}(f, x, t)}{t^{p+2}}\, dt$, *soit uniformément borné en* x *et* ε.

1° Si $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$, $\Delta_{p+1}(f, x, t) = \mathrm{O}(t^{p+1})$. Réciproquement, supposons que $\Delta_{p+1}(f, x, t) = \mathrm{O}(t^{p+1})$. Si $p = 2m+1$, en utilisant par exemple les sommes trigonométriques déjà considérées ([5], p. 38), on voit que l'hypothèse $\Delta_{2m+2}(f, x, t) = \mathrm{O}(t^{2m+2})$ entraîne $\mathrm{E}_n(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right)$. Si $p = 2m$, comme on peut supposer f à valeur moyenne nulle ($a_0 = 0$) et comme

$$\frac{d}{dt}\Delta_{2m+2}(f) = \Delta_{2m+1}(f', x, t),$$

F étant une primitive de f, on a

$$\frac{d}{dt}\Delta_{2m+2}(\mathrm{F}, x, t) = \Delta_{2m+1}(f, x, t).$$

D'où

$$\Delta_{2m+2}(\mathrm{F}, x, t) = \int_0^t \Delta_{2m+1}(f, x, t) = \mathrm{O}(t^{2m+2}),$$

et par suite $\mathrm{E}_n(\mathrm{F}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right)$, donc $\mathrm{E}_n(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)$.

Donc quel que soit p entier l'hypothèse $\Delta_{p+1}(f, x, t) = \mathrm{O}(t^{p+1})$ entraîne $\mathrm{E}_n(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$. Dans l'égalité $n^{p+1}\Delta_{p+1}\left(f, x, \frac{1}{n}\right) = \mathrm{O}(1)$, remplaçons f par P_n tel que $f - \mathrm{P}_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$. L'erreur commise est $\mathrm{O}(1)$. Or

$$n^{p+1}\Delta_{p+1}\left(\mathrm{P}_n, x, \frac{1}{n}\right) = n^{p+1}\frac{1}{n^{p+1}}\mathrm{P}_n^{(p+1)}(\xi), \qquad |x - \xi| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $\mathrm{P}_n^{(p+1)}(\xi) = \mathrm{O}(1)$. Mais

$$|\mathrm{P}_n^{(p+1)}(\xi) - \mathrm{P}_n^{(p+1)}(x)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\max_x |\mathrm{P}_n^{(p+2)}(x)|.$$

D'après (N.13) : $\mathrm{P}_n^{(p+2)}(x) = \mathrm{O}(n)$, donc $\mathrm{P}_n^{(p+1)}(x) = \mathrm{O}(1)$, ce qui entraîne que $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$.

2° Si l'on cherche la condition pour que $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$, il est nécessaire de supposer que $\mathrm{E}_n(f^{(p)}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc que $\mathrm{E}_n(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

On peut encore supposer f à valeur moyenne nulle.

Soit $p = 2m$ et soit $\int_\varepsilon^\infty \frac{\Delta_{2m+2}(t)}{t^{2m+2}}\,dt$.

Prenons un procédé de type $(2m+1)$, par exemple $1 - u^{2m+1}$. La formule (8) donne dans l'hypothèse $\mathrm{E}_p = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)$,

$$\mathrm{T}_n(1 - u^{2m+1}, f) - f = \pm\frac{g^{(2m+1)}(0)}{n^{2m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2m+2}(t)}{t^{2m+2}}\,dt + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right).$$

Or la condition pour que $\mathrm{T}_n(1 - u^{2m+1}, f) - f = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)$ est que $f^{(2m)} \in \mathrm{Lip}\,1$ (th. 3). C'est aussi $\int_\varepsilon^\infty \frac{\Delta_{2m+2}(t)}{t^{2m+2}}\,dt = \mathrm{O}(1)$. D'où résulte le résultat énoncé.

Soit $p = 2m+1$; alors F étant une primitive de f, $\mathrm{E}_n(\mathrm{F}) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2m+3}}\right)$. Or

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\Delta_{2m+3}(f, x, t)}{t^{2m+3}}\,dt &= \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{d}{dt}(\Delta_{2m+4}(\mathrm{F}, t))\frac{dt}{t^{2m+3}} \\ &= \left[\frac{\Delta_{2m+4}(\mathrm{F}, t)}{t^{2m+3}}\right]_\varepsilon^{+\infty} + (2m+3)\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\Delta_{2m+4}(\mathrm{F}, t)\,dt}{t^{2m+4}} \\ &= \mathrm{O}(1) + (2m+3)\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\Delta_{2m+4}(\mathrm{F}, t)\,dt}{t^{2m+4}}\end{aligned}$$

en vertu du lemme I.

Or la condition $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2m+4}(F, t)}{t^{2m+4}} dt = O(1)$ est équivalente, d'après le résultat qui vient d'être obtenu pour $p = 2m$, à $F^{\cdot(2m+2)} \in \text{Lip}\, 1$. Comme $F^{\cdot(2m+2)} = f^{\cdot(2m+1)}$, la condition $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2m+3}(t)}{t^{2m+3}} dt = O(1)$ est équivalente à $f^{\cdot(2m+1)} \in \text{Lip}\, 1$.

V. — Saturation de procédés non nécessairement convergents.

La démonstration qui suit est donnée pour le procédé $g(u) = 1 + u$, mais s'applique aux procédés définis par $1 + u^p$ (p entier > 0).

Soit

$$T_n(1 + u, f, x) = S_n(x) - \frac{S_n^{\cdot\prime}(x)}{n}. \tag{12}$$

Si f est une fonction continue quelconque, ces polynômes ne convergeront pas nécessairement. Par contre, on voit encore que ce procédé se sature dans la classe des fonctions dont la meilleure approximation est $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si l'on cherche la condition pour que $T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$, on supposera donc que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Une condition nécessaire pour que

$$T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

est, d'après (N.13), que $T_n'' = O(n)$, c'est-à-dire que $S_n''(x) - \frac{S_n^{\cdot'''}(x)}{n} = O(n)$.

Or si $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma_n'' = O(n)$ et comme $\sigma_n'' = S_n'' + \frac{S_n^{\cdot'''}}{n}$, on en déduit que nécessairement $S_n''(x) = O(n)$ et par suite que $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ [5]. En résumé, si $T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'après (12), $S_n^{\cdot\prime}(x) = O(1)$.

Réciproquement si $S_n^{\cdot\prime}(x) = O(1)$, on a $S_n^{\cdot''} = O(n)$, $S_n'' = O(n)$, $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ [5], donc $T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ce résultat est général.

La condition nécessaire et suffisante pour que $T_n(1 + u^p, f) - f = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ *est que*

$$S_n^{\cdot(2m+1)} = O(1), \quad \text{si } p = 2m + 1,$$
$$S_n^{(2m)} = O(1), \quad \text{si } p = 2m.$$

Il semble intéressant de noter, que cette condition est équivalente, dans le cas $p = 1$ par exemple, à $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *et* $\sigma_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *simultanément*, et que pour les procédés tels que $1 - u^p$ la classe de saturation pouvait également être définie par $\sigma_n^{\cdot(2m+1)} = O(1)$ ou $\sigma_n^{(2m)} = O(1)$.

Voici une autre différence entre les classes de saturation attachées aux procédés $1-u$ et $1+u$.

Soit $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ et écrivons

$$f=\sum(\sigma_{n+1}-\sigma_n)=\sum(\sigma_{n+1}^2-\sigma_n^2).$$

D'après (N.12) $\sigma_n^{2'}=(\sigma_n^2-\sigma_n)(n+1)$; comme

$$\sigma_n=\frac{1}{2}[(n+1)\sigma_n^2-(n-1)\sigma_{n-1}^2], \qquad \text{on a} \quad \sigma_{n+1}^2-\sigma_n^2=\frac{2\sigma_n^{2'}}{n^2-1}.$$

Donc la classe de saturation attachée au procédé $1-u$ est obtenue quand $|\sigma_{n+1}^2-\sigma_n^2|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, tandis que $\sigma_{n+1}-\sigma_n=-\frac{S_n^{1'}}{n(n+1)}$, prouve que la classe de saturation attachée au procédé $1+u$ est obtenue quand $|\sigma_{n+1}-\sigma_n|=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

CHAPITRE II.

Applications.

I. — Convergence de la série de Fourier et de la série conjuguée.

Le théorème suivant, qui fait intervenir le module de continuité $\omega(h)$ de $f(x)$, est une variante du théorème 4.

Théorème 7. — *Si $g(0)=1$, $g(1)=0$ et si $g''(u)$ est à variation bornée, alors :*
Si $g'(0)\neq 0$, $T_n(g,f)-f=-g'(0)(\sigma_n-f)+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$;
Si $g'(0)=0$, $T_n(g,f)-f=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

Soit

$$T_n(g,f,x)-f(x)=n\int_0^{+\infty}\Delta_2(f,x,t)\,C(nt)\,dt, \qquad C(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 g(u)\cos ut\,du.$$

On a

$$n\int_0^{\frac{1}{n}}\Delta_2(t)C(nt)\,dt=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Donc

$$T_n(g,f)-f=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\frac{g'(0)}{\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^2}\,dt$$
$$+\frac{1}{n^2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^2}\left[-\frac{g''(1)\sin nt}{t}+\frac{g''(0)}{t}+\frac{1}{t}\int_0^1\sin nut\,g''\right]dt.$$

Or

$$\frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{|\Delta_2(t)|}{t^3}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad [5].$$

D'où, d'après (N.14),

$$T_n(g, f, x) - f(x) = -g'(0)[\sigma_n(x) - f(x)] + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

THÉORÈME 8. — *Soient* $\bar{f}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t) - f(x-2t)]\cot t\,dt$ et $\omega(h)$ *le module de continuité de* $f(x)$ *continue. On a les égalités suivantes à* $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ *près :*

$$(13)\qquad \bar{S}_n(x) - \bar{f}_n(x) = \frac{S'_n(x)}{n},$$

$$(14)\qquad = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(\bar{S}_n, x, \frac{\pi}{n}\right),$$

$$(15)\qquad = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x + \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right),$$

$$(16)\qquad = S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x),$$

$$(17)\qquad = -\left[S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right].$$

Considérons le procédé défini par $g(u) = \cos^2\frac{\pi u}{2}$.

On a

$$\cos k(x+\alpha) + \cos k(x-\alpha) + 2\cos kx = 4\cos kx\cos^2\frac{k\alpha}{2},$$

$$\sin k(x+\alpha) + \sin k(x-\alpha) + 2\sin kx = 4\sin kx\cos^2\frac{k\alpha}{2}.$$

Donc

$$T_n\left(\cos^2\frac{\pi u}{2}, f\right) = \frac{1}{4}\left[S_n\left(x+\frac{\pi}{n}\right) + S_n\left(x-\frac{\pi}{n}\right) + 2S_n(x)\right].$$

Lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(0 < r < 2)$,

$$(18)\qquad S_n(x) - f(x) = O(E_n) - \frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right).$$

Si l'on utilise $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, on a

$$(19)\qquad S_n(x) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] - \frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right).$$

Nous allons établir une égalité analogue pour $S_n^{\cdot}(x) - f_n^{\cdot}(x)$. De (N.1) on tire

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right) + \Delta_2\left(f, x-2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t}\sin(2n+1)t\,dt$$

$$= O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right)}{t}\sin 2nt\,dt,$$

car

$$\sin(2n+1)t = \sin t\cos 2nt + \cos t\sin 2nt, \qquad \operatorname{cotg} t - \frac{1}{t} = O(t),$$

$$\Delta_2\left(f, x \pm 2t, \frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Soient A et B deux constantes absolues, finies, et ε_n, ε'_n tels que

$$\frac{A}{n} < \varepsilon_n,\ \varepsilon'_n < \frac{B}{n},$$

$$\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_2}{t}\sin 2nt\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}\pm\varepsilon_n} = O\left[\frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon_n} + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon'_n}^{\frac{\pi}{2}} + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Prenons $\varepsilon'_n > \frac{\pi}{4n}$ et changeons t en $t + \frac{\pi}{4n}$. On obtient alors

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}}^{-\varepsilon_n-\frac{\pi}{4n}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t+\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{4n}\right)}\cos 2nt\,dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon'_n-\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t+\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right)}{\left(t+\frac{4\pi}{n}\right)}\cos 2nt\,dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

On peut à nouveau remplacer les bornes de ces intégrales par $-\frac{\pi}{2}$, $-\varepsilon_n$, ε'_n, $\frac{\pi}{2}$ et comme

$$\frac{1}{t+\frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{4n}\,\frac{1}{t\left(t+\frac{\pi}{4n}\right)},$$

un calcul déjà fait maintes fois [5] donne

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon_n} \frac{\Delta_2}{t}\cos 2nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon'_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2}{t}\cos 2nt\,dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Enfin on remplace $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{\sin t}$ et l'on prend $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$. Il vient

$$(20)\quad \Delta_2\left(\mathrm{S}_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+\frac{\pi}{2n}+2t, \frac{\pi}{n}\right) - \Delta_2\left(f, x+\frac{\pi}{2n}-2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t}\cos 2nt\,dt + \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

(N.4) donne

$$(21)\quad \begin{cases} \mathrm{S}'_n(x) - f'_n(x) = \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] - z_n(x), \\ z_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin t}\cos(2n+1)t\,dt. \end{cases}$$

D'où

$$(21a)\quad \Delta_2\left(z_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon_n} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t}\cos 2nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc, d'après (20),

$$\Delta_2\left(z_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \Delta_2\left(\mathrm{S}_n, x - \frac{2n}{\pi}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Remarquons maintenant que

$$\Delta_2\left(f'_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En effet

$$\Delta_2\left(f'_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right) - \Delta_2\left(f, x-2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t}\cos t\,dt.$$

Sous le signe $\int$, le numérateur vaut $\mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. On peut alors remplacer $\operatorname{cotg} t$ par $\frac{1}{t}$ et l'on obtient à $\mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ près,

$$\begin{aligned} \Delta_2\left(f'_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = {} & \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)}{t}dt \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x+2t-\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x-2t+\frac{\pi}{n}\right)}{t}dt \\ & - \frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{t}dt. \end{aligned}$$

Choisissons $\varepsilon_n > \frac{\pi}{4n}$, remplaçons dans la première intégrale t par $t - \frac{\pi}{2n}$, dans la seconde t par $t + \frac{\pi}{2n}$; un calcul facile donne

$$\Delta_2\left(f_n^{\cdot}, x, \frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\,\Delta_2\left(\frac{1}{t}, t, \frac{\pi}{2n}\right)dt,$$

$$= O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{\pi}{2n^2}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\,\frac{dt}{t\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4\pi^2}\right)}$$

$$= O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En définitive, à partir de (21) on obtient à $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ près,

$$\Delta_2\left(S_n^{\cdot}, x, \frac{\pi}{n}\right) = -\Delta_2\left(z_n(x), x, \frac{\pi}{n}\right) = -\Delta_2\left(S_n, x - \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right). \tag{22}$$

Mais en utilisant le procédé $\cos\frac{\pi u}{2}$, on obtient aussi

$$\frac{1}{2}\left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)\right] - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - f(x) = -\left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En comparant à (19) et (22), il vient

$$S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x) = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x + \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right) + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$\Delta_2\left(S_n^{\cdot}, x, \frac{\pi}{n}\right) = \Delta_2\left(S_n, x + \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right) + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Il reste à prouver que

$$f_n^{\cdot} - S_n^{\cdot} = z_n(x) = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(z_n, x, \frac{\pi}{n}\right),$$

à $O\left[\omega\left(\frac{1}{\pi}\right)\right]$ près, ou, ce qui revient au même,

$$z_n(x) = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(z_n, x, \frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

Posons

$$\zeta_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin t}\cos nt\,dt.$$

Changeons t en $t - \frac{\pi}{n}$; comme ci-dessus, on obtient

$$\zeta_n(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x + 2t - \frac{2\pi}{n}\right) - f\left(x - 2t + \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(t - \frac{\pi}{n}\right)}\cos nt\,dt.$$

Dans cette dernière intégrale, on remplace $\sin\left(t-\frac{\pi}{n}\right)$ par $\sin t$, on change t en $t+\frac{\pi}{n}$, puis t en $t-\frac{\pi}{n}$ et par combinaison linéaire, il vient

$$\zeta_n(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{2\pi}{n}\right)-\Delta_2\left(f, x-2t, \frac{2\pi}{n}\right)}{\sin t}\cos nt\,dt+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où

$$z_n(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{2\pi}{2n+1}\right)-\Delta_2\left(f, x-2t, \frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\sin t}\cos(2n+1)t\,dt$$
$$+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'après (21 a)

$$z_n(x)=\frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n^{\cdot}, x, \frac{\pi}{4}\right)+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{1}{4}\Delta_2\left(z_n, x, \frac{\pi}{n}\right)+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Ce dernier résultat achève de démontrer les égalités (14), (15,) (16), (17). L'égalité (13) a été obtenue dans un travail antérieur ([5], p. 78).

Conséquences. — 1. De 13), on conclut que $\sigma_n^{\cdot}-f_n^{\cdot}=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$; cette égalité précise la convergence de $\sigma_n^{\cdot}$ quand f est continue.

2. Théorème 9. — *Si pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\frac{S_n'(x)}{n}\to 0$ uniformément en x pour $n\infty$, la série de Fourier de f continue, converge uniformément sur tout segment intérieur à (α, β). Réciproquement, si la série de Fourier de f continue, converge uniformément sur (α, β), $\frac{S_n'(x)}{n}\to 0$ uniformément sur tout segment intérieur à (α, β).*

En comparant (13) et (16), on voit que si pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\frac{S_n'(x)}{n}\to 0$ uniformément en x pour $n\infty$, $S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)-f(x)\to 0$, uniformément en x. Mais

$$S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)-S_n(x)=\frac{\pi}{2}S_n'\left(x+\frac{\theta\pi}{2n}\right)\qquad(0<\theta<1).$$

Donc $S_n(x)-f(x)\to 0$ uniformément en x sur tout segment intérieur à (α, β).

Réciproquement si $S_n(x)$ converge uniformément vers f, sur (α, β), le procédé $1-u^2$ donne

$$S_n-f=-\frac{S_n''}{n^2}+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et prouve que $\frac{S_n''(x)}{n^2}\to 0$ uniformément pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$.

On a alors

$$
\begin{aligned}
S_n(x) - f(x) &= \frac{S'_n(x)}{n} - \left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - S_n(x)\right] \\
&= \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{S'_n(x)}{n} + \frac{\pi}{2n}\left[S'_n(x) - S'_n\left(x + \frac{\theta\pi}{2n}\right)\right] \\
&= \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\frac{S'_n(x)}{n} - \frac{\theta\pi^2}{4n2}S''_n\left(x + \frac{\theta\theta'\pi}{2n}\right) \qquad (0 < \theta,\ \theta' < 1).
\end{aligned}
$$

D'où l'on conclut que sur tout segment intérieur à (α, β), $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$ uniformément.

3. THÉORÈME 10. — *$f(x)$ étant continue, tout segment de longueur $\frac{2\pi}{n}$ contient au moins un point x tel que $|S_n(x) - f(x)| < A\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, A étant une constante absolue et $\omega(h)$ le module de continuité de $f(x)$.*

En effet

$$
\begin{aligned}
S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x) &= \frac{S'_n(x)}{n}, \\
- S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) + f(x) &= \frac{S'_n(x)}{n}, \\
S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) &= \frac{2S'_n(x)}{n},
\end{aligned}
$$

à $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ près. D'après (13) et (15)

$$
S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2}\left[S_n\left(x + \frac{3\pi}{2n}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - 2S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right)\right],
$$

$$
S_n\left(x + \frac{3\pi}{2n}\right) - S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].
$$

D'où

$$
\frac{\pi}{n}S'_n(x + \xi_n) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad -\frac{\pi}{2n} < \xi_n < \frac{3\pi}{2n}
$$

et

$$
S_n\left(x + \frac{\pi}{2n} + \xi_n\right) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]
$$

ou

$$
S_n(x + \alpha_n) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad \frac{\pi}{n} < \alpha_n < \frac{3\pi}{n}.
$$

Ce résultat qui concerne les fonctions continues périodiques est à rapprocher des théorèmes de Rogosinski [6]. Ceux-ci, pour une fonction continue, sont presque triviaux. Le théorème 10 montre qu'à tout point x on peut associer une suite $\{\alpha_n\}$, $\frac{\pi}{n} < \alpha_n < \frac{3\pi}{n}$, telle que $S_n(x + \alpha_n) \to f(x)$ en fournissant de f une approximation de l'ordre de $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$.

II. — Étude de l'approximation de $f^{\cdot}$ par $\sigma_n^{\cdot}$.

Nous décomposons ce paragraphe en deux parties. Dans la première nous utilisons $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, dans la seconde nous supposons que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. On vient de voir que $f_n^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Or en tout point x où $f^{\cdot}$ existe, on a

$$f^{\cdot}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x) - 2t)] \operatorname{cotg} t\, dt.$$

Donc

$$f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t\, dt.$$

Dans la dernière intégrale on peut remplacer $\operatorname{cotg} t$ par $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{2n}$ et ne commettre qu'une erreur $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. D'où

$$(23) \qquad f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Dans cette égalité, $\omega(h)$ *est le module de continuité de* $f(x)$.

Ce résultat contient des résultats connus : théorème de Privaloff (si $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, $f^{\cdot} \in \operatorname{Lip}\alpha$ aussi), théorème d'Alexits $\left[\text{si } f \in \operatorname{Lip} 1,\ f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Nous en donnerons une application nouvelle. En termes volontairement imprécis, on peut dire que l'égalité (23) permet de construire des fonctions « peu continues » et dont la série de Fourier converge uniformément.

Soit $f(x)$ une fonction continue, nulle pour $x = 0$, impaire, qui au voisinage de O est égale à $\omega(x) = \frac{1}{\log\frac{1}{x}\log_2\frac{1}{n}\cdots\left(\log_p\frac{1}{x}\right)^{1+\alpha}}$ (p entier fixe, $\alpha > 0$) et qui ailleurs possède par exemple une dérivée bornée. Un calcul facile montre que

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t}{t}\, dt = \frac{1}{(\log_p n)^\alpha}.$$

Donc

$$f^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} = \frac{1}{\pi(\log_p n)^\alpha} + o\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

La série de Fourier de f converge uniformément et $\tilde{f}$ est continue.

De l'identité

$$\tilde{\sigma}_n = \tilde{S}_n - \frac{S'_n}{n}$$

on conclut que, $\frac{S'_n}{n}$ tendant uniformément vers zéro parce que S_n converge uniformément vers f (th. 9).

On peut aussi remarquer que

$$\tilde{f} - 2\tilde{\sigma}_{2n} + \tilde{\sigma}_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2n}} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt.$$

Comme $\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$,

$$\tilde{f} - 2\tilde{\sigma}_{2n} + \tilde{\sigma}_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt.$$

Or on sait [4] que

$$E_{2n}(\tilde{f}) \leq \max_x |\tilde{f} - 2\tilde{\sigma}_{2n} + \tilde{\sigma}_n| \leq 4E_n(\tilde{f}).$$

On peut donc pour de telles fonctions obtenir l'ordre de grandeur de la meilleure approximation à partir de $f(x)$. Nous énoncerons :

Théorème 11. — *$f(x)$ étant continue, nulle pour $x = 0$, impaire, égale au voisinage de 0, à* $\frac{1}{\log\frac{1}{x}\log_2\frac{1}{x}\cdots\left(\log_p\frac{1}{x}\right)^{1+\alpha}}$ *(p entier > 0, $\alpha > 0$), admettant ailleurs un module de continuité $\omega(h)$ tel que $\omega\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$, la série conjuguée de f converge uniformément et l'ordre de grandeur de la meilleure approximation $E_n(\tilde{f})$ est* $\max_x \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt.$

2. Dans la première partie de ce paragraphe nous avons donc donné l'approximation de $\tilde{f}$ par $\tilde{\sigma}_n$ en fonction de $f(x)$ alors que les résultats précédents la donnaient en fonction de $\tilde{f}$. Cependant le module de continuité de $f(x)$ est trop imprécis dans les cas où l'on suppose seulement $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$. C'est l'étude que nous nous proposons de faire maintenant par une méthode qui ne s'écarte pas sensiblement de celle dont nous avons déjà usé. Un résultat plus général peut être obtenu en supposant qu'il existe une suite $\{\rho_n\}$ de nombres positifs tendant vers zéro, tels que $P_n - f = O(\rho_n)$ et $P''_n = O(n^2\rho_n)$, mais le cas où $\rho_n = \frac{1}{n}$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$ est le plus intéressant.

THÉORÈME 12. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$a. \qquad \int_0^h \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt = f(x+h) - f(x) + O(h) \quad ou \quad o(h);$$

$$b. \qquad \frac{h}{\pi}\int_h^{+\infty} \frac{f^\cdot(x+t) + f^\cdot(x-t) - 2f^\cdot(x)}{t^2}\,dt + f(x+h) - f(x) = O(h) \quad ou \quad o(h);$$

$$c. \qquad f^\cdot(x) - \sigma_n^\cdot(x) = f(x+h) - f(x) + O(h) \quad ou \quad o(h),$$

où $n = \left[\frac{1}{h}\right]$ $\left(\textit{partie entière de } \frac{1}{h} > 0.\right)$

Soit

$$f^\cdot - \sigma_n^\cdot = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt$$

et soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs tels que $\frac{A}{n} < \varepsilon_n < \frac{B}{n}$, où A, B sont des constantes absolues, positives, finies.

Si $E_n = E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $E_n(f^\cdot) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{\Delta_2(f, x, t)}{t} = O(1)$ ou $o(1)$ uniformément en x. Soit P_n un polynôme trigonométrique d'ordre n tel que $P_n - f = O(E_n)$. Alors $P''_n = O(n^2 E_n)$. Écrivons

$$f^\cdot - \sigma_n^\cdot = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon_n} + \frac{1}{n\pi}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt.$$

Or

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt} - 1 + 1\right]dt.$$

Comme $\frac{\sin nt}{nt} - 1 = t^2 O(n^2)$, si dans $\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt} - 1\right]dt$ on remplace f par P_n, l'erreur commise est

$$O(E_n)\int_0^{\varepsilon_n} t\,O(n^2)\,dt = O(E_n).$$

D'ailleurs

$$P_n(x+t) - P_n(x-t) = 2t\,P'_n(x) + t^2 O(n^2 E_n).$$

D'où

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt} - 1\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{2t\,P'_n(x)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt} - 1\right]dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{t^2 O(n^2 E_n)}{t}\,t^2 O(n^2)\,dt$$
$$= \frac{2P'_n(x)}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\left[\frac{\sin nt}{nt} - 1\right]dt + O(E_n).$$

On a donc

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt = O(E_n) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt + \frac{2P'_n(x)}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\left[\frac{\sin nt}{nt} - 1\right]dt.$$

Étudions maintenant

$$u_n = \frac{1}{n\pi} \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{\Delta_1(t)}{t^2} \sin nt \, dt.$$

Si l'on remplace f par P_n, l'erreur commise est $O(E_n)$.

Intégrons par parties

$$\begin{aligned} u_n = O(E_n) &+ [P_n(x+\varepsilon_n) - P_n(x-\varepsilon_n)] \frac{\cos n\varepsilon_n}{\pi n^2 \varepsilon_n^2} \\ &+ \frac{1}{\pi n^2} \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{P'_n(x+t) - P'_n(x-t)}{t^2} \cos nt \, dt \\ &- \frac{2}{\pi n^2} \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{P_n(x+t) - P_n(x-t)}{t^3} \cos nt \, dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties une fois de plus, on obtient pour u_n la somme des termes suivants :

$$(\alpha) \qquad [P_n(x+\varepsilon_n) - P_n(x-\varepsilon_n)] \frac{\cos n\varepsilon_n}{\pi n^2 \varepsilon_n^2},$$

$$(\beta) \qquad -[P'_n(x+\varepsilon_n) + P'_n(x-\varepsilon_n)] \frac{\sin n\varepsilon_n}{\pi n^3 \varepsilon_n^2},$$

$$(\gamma) \qquad 2[P_n(x+\varepsilon_n) - P_n(x-\varepsilon_n)] \frac{\sin n\varepsilon_n}{\pi n^3 \varepsilon_n^3},$$

$$(\delta) \qquad \frac{1}{n^3\pi} \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \left\{ \frac{4}{t^3} [P'_n(x+t) + P'_n(x-t)] - \frac{6}{t^4} [P_n(x+t) - P_n(x-t)] \right\} \sin nt \, dt,$$

$$(\eta) \qquad -\frac{1}{n^3\pi} \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \left[\frac{P''_n(x+t) - P''_n(x-t)}{t^2} \right] \sin nt \, dt.$$

Comme $P''_n = O(n^2 E_n)$, le terme (η) vaut $O(E_n)$.

Puisque

$$P'_n(x+\varepsilon_n) + P'_n(x-\varepsilon_n) = 2P'_n(x) + O(n^2 E_n \varepsilon_n),$$

(β) vaut

$$-\frac{2P'_n(x) \sin n\varepsilon_n}{\pi n^3 \varepsilon_n^2} + O(E_n).$$

Dans les termes (α), (γ) on peut à nouveau remplacer P_n par f et ne commettre qu'une erreur $O(E_n)$.

Enfin le terme δ, où l'on écrit $P_n(x+t) - P_n(x-t) = 2tP'_n(x) + t^2 O(n^2 E_n)$, vaut

$$\frac{1}{\pi n^3} \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \left\{ \frac{4}{t^3} [P'_n(x+t) + P'_n(x-t) - 2P'_n(x)] - \frac{4}{t^3} P'_n(x) + \frac{1}{t^2} O(n^2 E_n) \right\} \sin nt \, dt;$$

et comme $\Delta_2(P'_n, x, t) = O(tn^2 E_n)$, ce terme se réduit à

$$O(E_n) - \frac{4P'_n(x)}{\pi n^3} \int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{\sin nt}{t^3} dt.$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot} = {} & \mathrm{O}(\mathrm{E}_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt \\
& +\frac{2\,\mathrm{P}'_n(x)}{\pi n}\left\{n\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\sin nt}{nt}\,dt-n\,\varepsilon_n-\frac{\sin n\,\varepsilon_n}{n^2\,\varepsilon_n^2}-\frac{2}{n^2}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\right\} \\
& +\Delta_1(\varepsilon_n)\left[\cos n\,\varepsilon_n+\frac{2\sin n\,\varepsilon_n}{n\,\varepsilon_n}\right]\frac{1}{\pi n^2\,\varepsilon^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot} = {} & \mathrm{O}(\mathrm{E}_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt \\
& +\frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi^2 n^2\,\varepsilon_n^2}\left[\cos n\,\varepsilon_n+\frac{2\sin n\,\varepsilon_n}{n\,\varepsilon_n}\right] \\
& +\frac{2\,\mathrm{P}'_n(x)}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}-n\,\varepsilon_n-\frac{\cos n\,\varepsilon_n}{n\,\varepsilon_n}-\frac{2\sin n\,\varepsilon_n}{n^2\,\varepsilon_n^2}\right].
\end{aligned}
$$

Dans le troisième terme de (24) remplaçons f par P_n; l'erreur commise est $\mathrm{O}(\mathrm{E}_n)$ et $\mathrm{P}_n(x+\varepsilon_n)-\mathrm{P}_n(x-\varepsilon_n)=2\,\varepsilon_n\mathrm{P}'_n(x)+\mathrm{O}(n^2\,\varepsilon_n^2\,\mathrm{E}_n)$. Ce terme vaut donc

$$\frac{2\,\mathrm{P}'_n(x)}{\pi n^2\,\varepsilon_n}+\mathrm{O}(\mathrm{E}_n).$$

D'où deux autres formes

$$(25)\quad f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=\mathrm{O}(\mathrm{E}_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt+\frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi n^2\,\varepsilon_n^2}\cos n\,\varepsilon_n+\frac{2\,\mathrm{P}'_n(x)}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}-n\,\varepsilon_n-\frac{\cos n\,\varepsilon_n}{n\,\varepsilon_n}\right],$$

$$(26)\quad f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=\mathrm{O}(\mathrm{E}_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt+\frac{2\,\mathrm{P}'_n(x)}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}-n\,\varepsilon_n\right].$$

Or $2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)=\mathrm{O}(\mathrm{E}_n)$, donc

$$\mathrm{P}_n-2\sigma_{2n}+\sigma_n=\mathrm{O}(\mathrm{E}_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}'_n-2\sigma'_{2n}+\sigma'_n=\mathrm{O}(n\mathrm{E}_n).$$

Or (N.12) et (N.15) donnent $\sigma'_n=n(f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot})+\mathrm{O}(n\mathrm{E}_n)$. Donc

$$
\begin{aligned}
2\sigma'_{2n}-\sigma'_n &= 4n(f^{\cdot}-\sigma_{2n}^{\cdot})-n(f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot})+\mathrm{O}(n\mathrm{E}_n) \\
&= n[2(f^{\cdot}-2\sigma_{2n}^{\cdot}+\sigma_n^{\cdot})]+n(f^{\cdot}-\sigma_u^{\cdot})+\mathrm{O}(n\mathrm{E}_n).
\end{aligned}
$$

Il en résulte que

$$\mathrm{P}'_n(x)=n[f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)]+\mathrm{O}(n\mathrm{E}_n),$$

(26) donne alors

$$f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)=\frac{1}{2n\,\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt+\mathrm{O}(\mathrm{E}_n).$$

Et en vertu de $\Delta_1(t)+\Delta_1(-t)=\mathrm{O}(t)$ ou $o(t)$

$$(26\,a)\qquad f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)=\frac{1}{n\,\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt+\mathrm{O}(\mathrm{E}_n).$$

Si dans (24) on considère des termes en $\cos n\varepsilon_n$ et si l'on remplace $\Delta_1(\varepsilon_n)$

par $2\varepsilon_n P'_n(x)$, ces termes disparaissent et comme $P'_n = n(f^{\cdot} - \sigma^{\cdot}_n) + O(E_n)$, il vient

$$(27)\qquad \frac{2}{\pi}(f^{\cdot} - \sigma^{\cdot}_n)\left(n\,\varepsilon_n + \frac{2\sin n\,\varepsilon_n}{n^2\,\varepsilon_n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt + \frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi n^2\,\varepsilon_n^2}\left(\frac{2\sin n\,\varepsilon_n}{n\,\varepsilon_n}\right) + O(E_n).$$

De même en groupant les termes en $\sin n\varepsilon_n$

$$(28)\qquad \frac{2}{\pi}(f^{\cdot} - \sigma^{\cdot}_n)\left(n\,\varepsilon_n + \frac{\cos n\,\varepsilon_n}{n\,\varepsilon_n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt + \frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi n^2\,\varepsilon_n^2}\cos n\,\varepsilon_n.$$

Si dans (27) on prend $\varepsilon_n = \frac{\pi}{2n}$, on trouve

$$(f^{\cdot} - \sigma^{\cdot}_n)\left(1 + \frac{16}{\pi^3}\right) = O(E_n) + \frac{32}{\pi^4}\left[f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\,dt.$$

Et d'après (26 *a*)

$$f^{\cdot} - \sigma^{\cdot}_n = \frac{2}{\pi}\left[f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] + O(E_n).$$

Enfin (N.4) donne

$$\sigma^{\cdot}_n - f^{\cdot} = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(f^{\cdot}, x, t)}{t^2}\,dt + O(E_n).$$

Dans le théorème 12, on obtient *a* et *b* en remarquant que le module de continuité de f et $f^{\cdot}$ est $O\left(h\log\frac{1}{h}\right)$ et en considérant pour h donné, l'entier n tel que $\frac{\pi}{2n+2} \leq h < \frac{\pi}{2n}$.

Enfin lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} - [f(x+h) - f(x)] = O(h) \quad \text{ou} \quad o(h) \qquad ([5], \text{ p. 53, th. 4}).$$

On a donc avec $\lambda = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{2}{\pi}\left[f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et parce que $\omega(h) = O\left(h\log\frac{1}{h}\right)$, on peut remplacer $\frac{1}{n}$ par h, ce qui achève de prouver *c*.

Conséquences. — Démontrons d'abord les théorèmes suivants :

THÉORÈME 13. — *r étant > 0, si $S_n - f = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, on a aussi $S^{\cdot}_n - f^{\cdot} = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $S_n^{(k)}(x) = o(n^{k-r})$ pour au moins un entier $k > r$.*

Nous avons prouvé ce résultat avec O au lieu de *o* ([5], p. 81, 84). La démonstration est tout à fait semblable. Si $r>1$ et si $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, $E_n(f')=o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$. Il suffit donc encore d'étudier le cas $0<r\leqq 1$.

Si l'on cherche la condition pour que $S_n-f=o\left(\frac{1}{n}\right)$, il est nécessaire de supposer que $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $0<r<1$, en vertu de $\sigma_n=S_n+\frac{S_n^{\cdot\prime}}{n}$, $S_n-f=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ si et seulement si $S_n^{\cdot\prime}=o(n^{1-r})$. D'après le théorème 4, $S_n-f+\frac{S_n''}{n^2}=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, donc $S_n-f=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, si et seulement si, $S_n''=o(n)$. Or $S_n^{\cdot\prime}=o(n^{1-r})$ entraîne $S_n^{\cdot\prime\prime}=o(n^{2-r})$, donc $S_n^{\cdot}-f^{\cdot}=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $r=1$, on a $S_n-f+\frac{S_n''}{n^r}, =o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $S_n-f=o\left(\frac{1}{n}\right)$, si et seulement si $S_n''=o(n)$. Or $\sigma_n^{\cdot\cdot}=S_n^{\cdot\cdot}-\frac{S_n''}{n}$; donc $\sigma_n^{\cdot\cdot}-S_n^{\cdot\cdot}=o(1)$ et $\sigma_n^{\cdot\cdot\prime\prime}-S_n^{\cdot\cdot\prime\prime}=o(n)$. Comme $\sigma_n^{\cdot\prime\prime}=o(n)$ (lemme II), $S_n^{\cdot\prime\prime}=o(n)$, donc $S_n^{\cdot}-f^{\cdot}=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour prouver que $S_n''=o(n^{2-r})$ équivaut à $S_n^{(k)}=o(n^{k-r})$ $(k>2)$, il suffit de considérer le procédé $1-u^k$ et de remarquer que $S_n^{(k)}=-(S_n^{\cdot})^{\cdot(k)}$.

THÉORÈME 14. — *Soit u_p le terme de rang p d'une série telle que*

$$\sum_1^n p\,u_p=O(n^\alpha) \qquad (\alpha>0).$$

Si $\beta>\alpha-1$, la série $\sum\frac{u_p}{p^\beta}$ converge.

Posons $\lambda_n=\sum_1^n pu_p$, $u_n=\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{n}$. On a

$$\sum_m^n\frac{u_p}{p^\beta}=\frac{\lambda_n}{n^{\beta+1}}-\frac{\lambda_{m-1}}{m^{\beta+1}}+\sum_m^n\lambda_p\left(\frac{1}{p^{1+\beta}}-\frac{1}{(p+1)^{1+\beta}}\right)$$
$$=O(m^{\alpha-\beta-1})+O(n^{\alpha-\beta-1})+\sum_m^n p^\alpha O\left(\frac{1}{p^{2+\beta}}\right)=o(1).$$

Si u_p est une fonction continue de x et si $\frac{1}{n^\alpha}\sum_1^n pu_p(x)\to 0$ pour $n\infty$, uniformément en x pour $a\leqq x\leqq b$, $\sum\frac{u_p}{p^\beta}$ converge uniformément pour $a\leqq x\leqq b$.

En particulier soit

$$\text{(T)}\qquad \sum_1^\infty A_p(x), \qquad A_p(x)=a_p\cos px+b_p\sin px,$$

une série trigonométrique et soit $S_n(x)=\sum_1^n A_p(x)$.

Si $\lim\limits_{n\infty} \frac{S'_n(x)}{n} = 0$, $\sum\limits_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$ converge au point x.

Si sur un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure positive, $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$, $\sum\limits_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$ converge sur $\mathcal{E}$ et d'après le théorème de Cantor-Lebesgue : $a_p = o(p)$, $b_p = o(p)$.

Si $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$ uniformément en x, $\sum\limits_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$ converge uniformément.

Nous passons maintenant à quelques applications.

Théorème 15. — *Soit* (T) *une série trigonométrique*

$$\sum_1^\infty a_p \cos px + b_p \sin px, \qquad S_n(x) = \sum_1^n a_p \cos px + b_p \sin px.$$

a. Si $\frac{S'_n(x)}{n} = O(1)$ *ou* $o(1)$ *uniformément en* x $\left(\text{en particulier si } \sum\limits_1^n p(|a_p| + |b_p| = O(n) \text{ ou } o(n)\right)$,

$$S_n(x) - \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = O(1) \quad ou \quad o(h),$$

uniformément en x; $n = \left[\frac{1}{h}\right]$, $F(x) = C - \sum\limits_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$.

Si $\frac{S'_n(x)}{n} = o(1)$, F′ *existe un ensemble* $\mathcal{E}$ *partout dense et sur* $\mathcal{E}$, S_n *converge vers* F′.

b. Si (T) *est la série de Fourier de f sommable et si* $\frac{S'_n}{n} = o(1)$ *uniformément en* x, (T) *converge vers f en tout point où f est la dérivée de son intégrale* (¹).

En effet si $\frac{S'(x)}{n} = o(1)$ par exemple, $C - \sum\limits_1^\infty \frac{A'_p}{p}$ converge uniformément, définit F et d'après le théorème 13,

$$\left| C - \sum_1^n \frac{A'_p}{p} - F \right| = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(¹) D'après le théorème 13, on peut remplacer la condition $\frac{S'_n(x)}{n} = O(1)$ où $o(1)$ par $\frac{S_n^{(k)}(x)}{n^k} = O(1)$ ou $o(1)$, ce qui donne alors comme condition particulière $\sum\limits_1^n p^m(|a_p| + |b_p|) = O(n^m)$ ou $o(n^m)$ et pour le théorème 16 : $\sum\limits_1^p n_k^m = O(n_p^m)$.

Donc d'après le théorème 12 *c* où l'on écrit $\sigma_n = S_n - \frac{S'_n}{n}$ et où S'_n est à remplacer par $\sum_1^n A_p(x)$, on a

$$S_n(x) - \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = o(1).$$

Si $S'_n(x) = O(n)$, $S'_n(x) = O(n^{1+\varepsilon})$ aussi; d'après le théorème 14, $\sum \frac{A_p}{p}$ converge uniformément et d'après le théorème 13

$$C - \sum_1^n \frac{A_p}{p} - F = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Enfin, on sait [7] que si $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, la dérivée de f existe sur un ensemble partout dense. Ce qui achève de prouver *a*. Quant à *b*, il suffit de remarquer que la série de Fourier de l'intégrale de f, s'obtient en intégrant terme à terme celle de f.

Ce théorème généralise le théorème de Fatou et celui de M. Zygmund [7]. On remarquera que l'hypothèse $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$ uniformément, entraîne que $E_n(F) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc que les coefficients de Fourier de F, qui sont $\frac{a_n}{n}$ et $\frac{b}{n}$, valent $o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc a_n et b_n coefficients de (T) tendent vers zéro pour $n\infty$.

THÉORÈME 16. — *a. Soit* $\sum_1^\infty (a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x)$, *où* a_{n_p} *et* b_{n_p} *tendent vers zéro pour* $p\infty$. *Si* $\sum_1^p n_k = O(n_p)$, *cette série trigonométrique converge sur un ensemble partout dense.*

b. Si $f \sim \sum_1^\infty (a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x)$ *et si* $\sum_1^p n_k = O(n_p)$, *la série de Fourier de* f *converge vers* f *en tout point où* f *est la dérivée de son intégrale.*

Démonstration. — *a.* Si $\sum_1^p n_k = O(n_p)$, $\sum_1^p o(n_k) = o(n_p)$; donc pour $\sum_1^\infty (a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x)$, $\frac{S'_n}{n} \to 0$ uniformément en x. Il suffit alors de se reporter au théorème 15.

b. La seconde partie découle du théorème 15 *b*.

On remarquera que la condition $\sum_1^p n_k = O(n_p)$ est plus générale que la condition $\frac{n_{p+1}}{n_k} > q > 1$; alors $n_{q-1} < \frac{n_p}{q}$, $n_{p-2} < \frac{n_{p-1}}{q} < \frac{n_p}{q^2}$, $\cdots$; donc

$$\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}{n_p} = 1 + \frac{\frac{n_p}{q^{p-1}} + \ldots + \frac{n_p}{q}}{n_p} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{q^k} = O(1).$$

Cette condition $\sum_1^p n_k = O(n_p)$ permet de construire des séries lacunaires, qui convergeront sur un ensemble partout dense et où l'on aura cependant $\varliminf_{n\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1$.

THÉORÈME 17. — *Dans la classe des fonctions continues définies par* $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\left[\textit{ou } \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2} = o(1) \textit{ uniformément en } x \right]$, *l'existence en un point d'une dérivée seconde généralisée entraine l'existence de la dérivée seconde ordinaire et les deux dérivées sont égales.*

En effet si $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $E_n(f') = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'après le théorème 12 *a* et $\Delta_2(f', x, t) = o(t)$, on a

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{1}{2h} \int_0^h \frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{t} dt + o(1).$$

Or

$$f'(x+t) - f'(x-t) = \frac{d}{dt}(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)).$$

D'où en intégrant par parties

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_2(f, x, h)}{h} + \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2} dt\right] + o(1).$$

Donc si $\frac{\Delta_2(f, x, h)}{h^2} \to l$ quand $h \to 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ a une limite et cette limite est l.

THÉORÈME 18. — *a. Pour qu'une fonction $f(x)$ admette une dérivée continue sur (α, β), il faut et il suffit que* $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$ *tende vers zéro, uniformément en x, quand h et k tendent vers zéro de façon quelconque.*

b. Pour que $f'(x)$ admette une dérivée continue, il faut et il suffit que $\int_h^k \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2} dt$ *tende vers zéro, uniformément en x, quand h et k tendent vers zéro de façon quelconque.*

a. Il faut supposer d'abord que $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et la condition nécessaire et suffisante pour que f' existe et soit continue, est que $\sigma'_m - \sigma'_n$ tende vers zéro uniformément en x quand m et n deviennent infinis. Mais, lorsque $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma'_n = n(f - \sigma_n) + o(1)$ et le théorème 12*c* donne

$$\sigma'_m - \sigma'_n = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x+k) - f(x)}{k} + o(1),$$

où $m = \left[\frac{1}{|h|}\right]$, $n = \left[\frac{1}{|k|}\right]$.

[On peut aussi écrire $\sigma'_m - \sigma'_n = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f(x+k) - f(x-k)}{2k} + o(1)$, parce que $\Delta_2(f, x, t) = o(t)$.]

b. On a

$$\sigma''_n = n(\sigma_n - f) + o(1) = \frac{1}{\pi}\int_h^{+\infty} \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2}\, dt + o(1),$$

où $n = \left[\frac{1}{h}\right]$, lorsque $E_n(f') = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc aussi $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'où

$$\sigma''_m - \sigma''_n = \frac{1}{\pi}\int_k^{h} \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2}\, dt + o(1).$$

On peut rattacher ce résultat à la question suivante : étant donnée une série de Fourier, construite à partir d'une fonction sommable $\varphi(x)$, reconnaître si cette série de Fourier est aussi la série de Fourier d'une fonction continue $\varphi(x)$. Il faut et il suffit évidemment que $F(x) = \int^x \varphi(t)\, dt$ (en supposant éventuellement φ à valeur moyenne nulle), ait une dérivée continue.

Le théorème 18 montre qu'il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{h}\int_0^h \Delta_2(\varphi, x, t)\, dt - \frac{1}{k}\int_0^k \Delta_2(\varphi, x, t)\, dt$$

tende uniformément vers zéro en x, quand h et k tendent vers zéro.

On peut aussi poser le problème précédent du point de vue des coefficients a_n, b_n, c'est-à-dire chercher à quelle condition doivent satisfaire les coefficients a_n, b_n pour que la série de Fourier donnée soit celle d'une fonction continue. A ce sujet nous ferons les remarques suivantes.

On a vu (th. 15*b*), que la condition $\sum_1^n p(|a_p| + |b_p|) = o(n)$ entraîne que la série de Fourier de f converge presque partout vers f.

Si au lieu de la condition $\sum_1^n p(|a_p|+|b_p|)=o(n)$, on impose aux coefficients la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_1^n p(|a_p|+|b_p|)\right)<+\infty, \tag{29}$$

alors la série trigonométrique $\sum_1^{\infty} a_p\cos px+b_p\sin px$, est uniformément sommable (C, 1), car

$$\sigma_{n+1}-\sigma_n=\frac{S_n''}{n(n+1)} \qquad \text{et} \qquad |S_n''|\leqq\sum_1^n p(|a_p|+|b_p|).$$

La condition (29) n'entraîne pas que $\sum_1^n p(|a_p|+|b_p|)=o(n)$, mais seulement que $\frac{1}{n}\sum_1^n p(|a_p|+|b_p|)$ tend approximativement vers zéro, c'est-à-dire que ε étant donné, l'inégalité $\frac{1}{n}\sum_1^n p(|a_p|+|b_p|)<\varepsilon$ est réalisée pour une suite d'entiers n_k de fréquence 1 (*Cf.* Denjoy, *Calcul des coefficients*, I[re] Partie, p. 51).

Supposons alors la condition (29) réalisée. $\sum_1^{\infty} a_p\cos px+b_p\sin px$ est alors la série de Fourier d'une fonction continue $f(x)$ et comme $\sigma_n=S_n+\frac{S_n''}{n}$, à tout $\varepsilon>0$ correspond une suite d'entiers de fréquence 1 tels que

$$|S_{n_k}-f|<\varepsilon+\varepsilon_{n_k},$$

où ε_{n_k} tend vers zéro pour $k\infty$. On peut dire que *la série de Fourier converge approximativement, de façon uniforme vers $f(x)$.*

Bibliographie.

[1] Favard, *Sur les meilleurs procédés d'approximation* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 61, 1937).
[2] Hardy et Rogosinski, *Fourier Series* (*Canbridge Tracts in mathematics*, n° 38, 1944).
[3] de Sz Nagy, *Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier* (*Hungarica Acta mathematica*, vol. 1, n° 3, 1948).
[4] de La Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation*, Gauthier-Villars, Paris, 1919.
[5] Zamansky, *Classes de saturation de certains procédés d'approximation* (*Thèse*, *Ann. Ec. Norm.*, t. 66, fasc. 1, 1949, p. 19-93).
[6] Zygmund, *Trigonometrical series* (*Monographie mathématique*, Varsovie, 1935).
[7] Zygmund, *Smooth functions* (*Duke mathematical Journal*, 1945, p. 47).