ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

Sur les théorèmes inverses des procédés sommation des séries divergentes (premier mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 67 (1950), p. 99-160
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__99_0>

SUR LES

THÉORÈMES INVERSES DES PROCÉDÉS DE SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

(PREMIER MÉMOIRE.)

PAR M. HUBERT DELANGE.

Introduction.

Les procédés usuels de sommation des séries divergentes peuvent être ramenés à la forme générale suivante :

A la série $\sum_0^{+\infty} u_n$, on associe une fonction $s(t)$ définie comme suit pour $t \geqq 0$: $\{\lambda_n\}$ étant une suite de nombres réels satisfaisant à

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty,$$

on pose

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t = 0, \\ \sum_{\lambda_n \leq t} u_n & \text{pour} \quad t > 0, \end{cases}$$

(la somme $\sum_{\lambda_n \leq t} u_n$ étant prise égale à zéro s'il n'y a aucun λ_n au plus égal à t).

On considère ensuite une intégrale de l'une des formes

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t) \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt,$$

où φ ou ψ est une certaine fonction de t et du paramètre x (la première forme correspond à la méthode dite des « facteurs de convergence », la seconde à la méthode dite des « moyennes »).

Si l'intégrale est convergente pour x appartenant à un certain ensemble $\mathcal{E}$ et tend vers une limite finie S quand x tend vers une certaine valeur x_0 en restant sur $\mathcal{E}$, on attribue à la série $\sum_0^{+\infty} u_n$ la somme généralisée S.

Ainsi, le procédé de sommation est déterminé par la donnée de la suite $\{\lambda_n\}$, de la fonction φ ou ψ, de l'ensemble $\mathcal{E}$, et de x_0.

Tous les procédés sont assujettis à la « condition de permanence », à savoir que toute série convergente soit sommable et que sa somme généralisée soit égale à sa somme ordinaire.

Autrement dit, *si la fonction $s(t)$ est supposée nulle pour $t=0$, et pour $0<t<\lambda_0$ si $\lambda_0>0$, et constante pour $\lambda_n \leqq t < \lambda_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$, et pour $0<t<\lambda_1$ si $\lambda_0=0$ ou pour $\lambda_0 \leqq t < \lambda_1$ si $\lambda_0>0$*, toutes les fois que $s(t)$ tend vers une limite finie quand t tend vers $+\infty$, l'intégrale considérée est convergente pour x appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ et tend vers la même limite quand x tend vers x_0 en restant sur $\mathcal{E}$.

En fait, lorsque l'intégrale est de la première forme, cette propriété subsiste toujours sous la seule hypothèse que $s(t)$ est nulle pour $t=0$ et à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$; lorsque l'intégrale est de la deuxième forme, la propriété subsiste toujours sous la seule hypothèse que $s(t)$ est mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$.

Le fait que la condition de permanence est satisfaite, est donc, dans les deux cas, une conséquence d'un théorème plus général relatif à l'intégrale considérée.

De même, les théorèmes inverses apparaissent comme corollaires de théorèmes du type suivant :

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ $\left(\text{ou } \int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt\right)$, où $s(t)$ est nulle pour $t=0$ et à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ (ou mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$), est convergente pour x appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ et tend vers une limite finie S quand x tend vers x_0 en restant sur $\mathcal{E}$, *et si la fonction $s(t)$ satisfait à une hypothèse supplémentaire convenable*, $s(t)$ tend vers S quand t tend vers $+\infty$.

Un tel théorème entraîne que, si une série est sommable par le procédé considéré, et si la fonction $s(t)$ associée à cette série satisfait à la condition mentionnée, que nous appellerons « condition de convergence », elle est aussi convergente.

J. Karamata a publié [9] (¹) une étude générale des théorèmes de ce genre, avec des méthodes générales de démonstration.

(¹) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article (que nous n'avons pas cherché à faire complète, étant donnée l'abondance de la littérature sur ces questions).

Ces théorèmes se divisent en deux groupes suivant que leur démonstration est, ou non, de caractère élémentaire.

Les conditions de convergence sont déterminées par une fonction réelle $\Lambda(t)$ dépendant du procédé de sommation considéré et qui est continue et croissante pour $t \geqq 0$ et tend vers $+\infty$ avec t.

$V(t)$ étant la fonction inverse de $\Lambda(t)$, on pose

$$T(t, \lambda) = V[\lambda\Lambda(t)].$$

Dans les théorèmes élémentaires, la condition de convergence est

$$(1) \qquad \lim_{t \to +\infty} \left\{ \operatorname*{Sup}_{t \leq t' \leq T(t, \lambda)} |s(t') - s(t)| \right\} = 0.$$

Lorsque t est supposée à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, cette condition est équivalente à

$$(2) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\Lambda(x)} \int_0^x \Lambda(t)\, ds(t) = 0.$$

Les théorèmes non élémentaires, dont la démonstration peut être basée sur l'unicité de la solution d'une certaine équation intégrale, correspondent aux conditions de convergence suivantes :

$$(3) \qquad \lim_{\lambda \to 1+0} \left\{ \overline{\lim_{t \to +\infty}} \left(\operatorname*{Sup}_{t \leq t' \leq T(t, \lambda)} |s(t') - s(t)| \right) \right\} = 0$$

et

$$(4) \qquad \lim_{\lambda \to 1+0} \left\{ \underline{\lim_{t \to +\infty}} \left(\operatorname*{Inf}_{t \leq t' \leq T(t, \lambda)} [s(t') - s(t)] \right) \right\} = 0.$$

Nous nous proposons de reprendre complètement, dans ce Mémoire et dans un autre qui lui fera suite, l'étude de ces différents théorèmes.

D'une part, nous verrons que, pour chaque procédé de sommation, chacun des théorèmes inverses correspondant aux conditions de convergence indiquées plus haut est en fait un corollaire d'un théorème qui, avec une condition plus générale, donne une limitation, pour t infiniment grand, de la différence $\Psi[\xi(t)] - s(t)$, où $\Psi(x)$ désigne la valeur de l'intégrale qui sert à définir le procédé de sommation considéré, et $\xi(t)$ une certaine fonction de t dont la valeur appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ et qui tend vers x_0 quand t tend vers $+\infty$ [2].

En particulier, le théorème inverse relatif à la condition (1) est un corollaire d'un théorème du type suivant :

---

[2] Nous supposons, comme Karamata, que $\varphi(0, x) = 1$ ou $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, dt = 1$. Ceci ne restreint pas la généralité de nos résultats, car on peut toujours se ramener à ce cas en divisant $\varphi(t, x)$ par $\varphi(0, x)$ ou $\psi(t, x)$ par $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, dt$, ce qui ne modifie pas le procédé de sommation considéré (ou plus exactement, le remplace par un procédé équivalent).

Des généralisations d'un autre genre ont été données par H. R. Pitt ([10] et [11]).

Il existe une constante τ telle que, si l'on a pour tout λ supérieur à 1

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\{ \sup_{t\leq t'\leq T(t,\lambda)} |s(t')-s(t)| \right\} \leq \omega \log \lambda,$$

on a

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |\Psi[\xi(t)]-s(t)| \leq \tau\omega.$$

Le théorème inverse relatif à la condition (2), qui résulte d'ailleurs de celui relatif à la condition (1), est aussi un corollaire d'un théorème du type suivant :

Il existe une constante $\tau^\star$ telle que l'on ait toujours

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |\Psi[\xi(t)]-s(t)| \leq \tau^\star \overline{\lim_{x\to+\infty}} |\delta(x)|,$$

où

$$\delta(x) = s(x) - \frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^x s(t)\, d\Lambda(t),$$

quantité qui est égale à $\frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^x \Lambda(t)\, ds(t)$ dans le cas où $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini [0, L] et nulle pour $t=0$ $\Big[$ce qu'il faut obligatoirement supposer si l'on considère un procédé de sommation défini par l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)\Big]$ (³).

On pourrait établir les deux théorèmes cités en prenant exactement les mêmes hypothèses que Karamata pour le théorème inverse relatif à la condition (1). Nous utiliserons ici des hypothèses un peu plus restrictives (⁴), mais qui sont satisfaites pour la plupart des procédés usuels, et cela nous permettra de déterminer exactement les valeurs les plus petites possibles pour τ et $\tau^\star$.

On verra que, tandis que, dans les théorèmes qui donnent comme corollaires les théorèmes inverses relatifs aux conditions (1) et (2), on ne suppose rien sur le comportement de $\Psi(x)$, ceux qui donnent comme corollaires les théorèmes inverses relatifs aux conditions (3) et (4) contiennent une hypothèse qui exprime une certaine régularité dans ce comportement, pour x tendant vers x_0.

D'autre part, nous donnerons des énoncés qui comportent une condition unilatérale correspondant à (1) de la même façon que (4) correspond à (3), à savoir

$$\lim_{t\to+\infty} \left\{ \inf_{t\leq t'\leq T(t,\lambda)} [s(t')-s(t)] \right\} = 0 \quad (^5).$$

(³) Des résultats de ce genre ont été établis pour le procédé d'Abel par Aurel Wintner [15], H. Hadwiger [4], Philip Hartman [5], et R. P. Agnew [1].

(⁴) Du moins, nos hypothèses sont plus restrictives que celles de Karamata si l'on se limite, comme lui, au cas où $\varphi(t, x)$ est réelle et fonction non croissante de t, ou bien où $\psi(t, x)$ est réelle ≥ 0. Mais nous supposons en général $\varphi(t, x)$ ou $\psi(t, x)$ réelle ou complexe, ainsi que $s(t)$.

(⁵) Ici le noyau $\varphi(t, x)$ ou $\psi(t, x)$ est supposé réel ainsi que $s(t)$. Des résultats du même genre ont été donnés par Ramaswami ([12] et [13]).

Nous réservons pour notre deuxième Mémoire les théorèmes dont la démonstration fait appel à la propriété d'unicité mentionnée plus haut pour la solution d'une certaine équation intégrale, ou à une propriété liée à celle-là, théorèmes que nous appellerons « de type non élémentaire ».

Nous n'énoncerons en détail que les théorèmes correspondant au cas où $\Lambda(t) = t$ et $\xi(t) = t$ ou $\frac{t}{\alpha}$, $\mathcal{E}$ étant l'ensemble des nombres réels supérieurs à un nombre a positif ou nul, et x_0 étant égal à $+\infty$, cas que nous appellerons le « cas canonique ». Nous indiquerons simplement, à la fin du deuxième Mémoire, comment les énoncés plus généraux s'en déduisent.

Par contre, nous donnerons, comme application de nos résultats, quelques énoncés particuliers où figurera la série $\sum_{0}^{+\infty} u_n$ au lieu de la fonction $s(t)$.

Nous ne nous attacherons pas à obtenir les énoncés les plus généraux possibles, mais plutôt à donner des méthodes de démonstration.

Quelques résultats de ce Mémoire ont été donnés, sous une forme un peu plus générale, dans notre Note [3] ([6]), et quelques résultats de notre second Mémoire ont été donnés, dans un cas particulier, dans notre Note [2].

I. — Préliminaires.

1.1. Pour éviter toute ambiguïté, nous précisons une fois pour toutes les points suivants :

Il est entendu que toutes les intégrales ordinaires (c'est-à-dire autres que des intégrales de Stieltjes) que nous considérerons s'entendent au sens de Lebesgue.

a et b étant finis, avec $a < b$, si $f(t)$ est une fonction complexe définie sur l'intervalle $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est définie à l'aide des intégrales des parties réelle et imaginaire de $f(t)$, obtenues par le procédé de Lebesgue. L'intégrale $\int_b^a f(t)\,dt$ est définie comme égale à $-\int_a^b f(t)\,dt$.

On pose

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est définie comme limite pour L infini de $\int_a^{\mathrm{L}} f(t)\,dt$. Quand cette limite existe, l'intégrale est dite *convergente*. La fonction $f(t)$ est

([6]) Signalons en passant que, dans cette Note, la formule donnée pour $\tau^*(\alpha)$ au théorème 2 donne en réalité la valeur de $\tau^*(\alpha) - 1$.

dite *sommable* sur l'intervalle $(a, +\infty)$ si elle est sommable sur tout intervalle fini (a, L) (de sorte que $|f(t)|$ l'est aussi) et si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est convergente. On sait que la sommabilité de $f(t)$ sur l'intervalle $(a, +\infty)$ entraîne la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

Pour les intégrales de Stieltjes, les définitions élémentaires suivantes nous suffiront :

$f(t)$ étant continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et $g(t)$ à variation bornée sur cet intervalle, et ces deux fonctions pouvant être réelles ou complexes, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ se définit comme limite pour $\mathrm{Max}(x_i - x_{i-1})$ tendant vers zéro de :

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

avec

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad \text{et} \qquad x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i.$$

$\int_b^a f(t)\,dg(t)$ se définit comme égale à $-\int_a^b f(t)\,dg(t)$.

On pose

$$\int_a^a f(t)\,dg(t) = 0.$$

$f(t)$ étant continue pour $t \geqq a$ et $g(t)$ à variation bornée sur tout intervalle fini $[a, L]$, et ces deux fonctions pouvant être réelles ou complexes, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ se définit comme limite pour L infini de $\int_a^L f(t)\,dg(t)$. Lorsque cette limite existe, l'intégrale est dite *convergente*.

1.1.1. Rappelons les faits bien connus suivants :

a. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ ou $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ ne sont pas modifiées si l'on ajoute une constante à $g(t)$.

b. Pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b dg(t) = g(b) - g(a).$$

c. Si $g(t)$ est à variation bornée sur $[a, b]$ et si $\theta(u)$ est réelle et continue sur $[\alpha, \beta]$ et croît de a à b quand u croît de α à β, la fonction $\gamma(u)$ définie par

$\gamma(u)=g[\theta(u)]$ est à variation bornée sur $[\alpha, \beta]$ et l'on a, quelle que soit $f(t)$ continue sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)\,dg(t)=\int_\alpha^\beta f[\theta(u)]\,d\gamma(u).$$

d. Comme conséquence de cela, si $g(t)$ est définie pour $t \geqq a$ et à variation bornée sur tout intervalle fini $[a, \mathrm{L}]$, et si $\theta(u)$ est une fonction réelle continue pour $u \geqq \alpha$ et qui croît de a à $+\infty$ quand u croît de α à $+\infty$, de sorte que la fonction $\gamma(u)$ définie par $\gamma(u)=g[\theta(u)]$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[\alpha, \Lambda]$, alors, $f(t)$ étant une fonction quelconque continue pour $t \geqq a$, toutes les fois que l'une des intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ et $\int_\alpha^{+\infty} f[\theta(u)]\,d\gamma(u)$ est convergente, l'autre l'est aussi et lui est égale.

e. Si $\gamma(t)$ est sommable sur (a, b), la fonction $g(t)$ définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$ par $g(t)=\int_a^t \gamma(u)\,du$ est à variation bornée sur cet intervalle et, quelle que soit $f(t)$ continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t)\,dg(t)=\int_a^b f(t)\,\gamma(t)\,dt.$$

De plus, la variation totale de $g(t)$ sur $[a, b]$ est égale à $\int_a^b |\gamma(u)|\,du$.

f. $f(t)$ étant continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et $g(t)$ à variation bornée sur cet intervalle, la fonction $h(t)$ définie sur $[a, b]$ par $h(t)=\int_a^t f(u)\,dg(u)$ est à variation bornée sur $[a, b]$ et, si $\varphi(t)$ est une autre fonction continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b \varphi(t)\,dh(t)=\int_a^b \varphi(t) f(t)\,dg(t).$$

g. Si $\varphi(t)$ est sommable sur (a, b) et si $f(t)$ satisfait sur l'intervalle fermé $[a, b]$ à $f(t)=\int_a^t \varphi(u)\,du+\text{const.}$, [de sorte que $f(t)$ est continue sur cet intervalle], quelle que soit $g(t)$ à variation bornée sur $[a, b]$, on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\,dg(t)=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\int_a^b \varphi(t)\,g(t)\,dt.$$

h. Les nombres $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ formant une suite croissante, si une fonction $g(t)$ définie sur l'intervalle fermé $[x_0, x_n]$ garde une valeur constante g_i dans chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ (de sorte qu'elle est à variation bornée sur $[x_0, x_n]$), on a, quelle que soit $f(t)$ continue sur $[x_0\, x_n]$,

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = [g_1 - g(x_0)]f(x_0) + \sum_{i=1}^{i=n-1} [g_{i+1} - g_i]f(x_i) + [g(x_n) - g_n]f(x_n).$$

1.1.2. $f(t)$ satisfaisant pour $t \geqq a$ à $f(t) = \int_a^t \varphi(u)\,du +$ const., avec $\varphi(t)$ sommable sur tout intervalle fini (a, L), et $g(t)$ étant à variation bornée sur tout intervalle fini $[a, \mathrm{L}]$, l'égalité

$$\int_a^{\mathrm{L}} f(t)\,dg(t) = f(\mathrm{L})\,g(\mathrm{L}) - f(a)\,g(a) - \int_a^{\mathrm{L}} \varphi(t)\,g(t)\,dt \tag{5}$$

montre que, *si le produit* $f(t)\,g(t)$ *tend vers zéro pour* t *infini*, la convergence de l'une des intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ et $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,g(t)\,dt$ entraîne celle de l'autre, avec

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t) = -f(a)\,g(a) - \int_a^{+\infty} \varphi(t)\,g(t)\,dt. \tag{6}$$

Il faut noter que, *si* $\varphi(t) \leqq 0$, *de sorte que* $f(t)$ *est non croissante, et si* $f(t)$ *tend vers zéro pour* t *infini*, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ suffit à entraîner que $f(t)\,g(t)$ tende vers zéro pour t infini, de sorte que *dans ce cas la convergence de* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ *entraîne celle de* $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,g(t)\,dt$, *avec la formule ci-dessus*.

Nous pouvons écarter de suite le cas où $f(t) = 0$ pour t supérieur ou égal à un certain t_0, auquel cas il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc $f(t) > 0$ quel que soit $t \geqq 0$.

Si l'on pose

$$\int_a^t f(u)\,dg(u) = h(t),$$

on a pour $t > a$

$$g(t) - g(a) = \int_a^t dg(u) = \int_a^t \frac{1}{f(u)}\,dh(u).$$

Comme on a, pour $t \geqq a$,

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{f(a)} + \int_a^t \frac{-\varphi(u)}{[f(u)]^2}\,du \quad (^7), \tag{7}$$

---

(7) En effet, si $t > a$, la fonction $\frac{1}{f(u)}$ est absolument continue sur l'intervalle $[a, t]$ et a presque partout sur cet intervalle une dérivée égale à $\frac{-\varphi(u)}{[f(u)]^2}$. [Plus précisément, ceci a lieu partout où $f'(u)$ existe et est égale à $\varphi(u)$.]

on obtient par intégration par parties :

$$g(t)-g(a)=\frac{h(t)}{f(t)}+\int_a^t \frac{\varphi(u)\,h(u)}{[f(u)]^2}\,du,$$

d'où

$$f(t)\,g(t)=f(t)\,g(a)+h(t)+f(t)\int_a^t \frac{\varphi(u)\,h(u)}{[f(u)]^2}\,du. \tag{8}$$

La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ équivaut au fait que $h(t)$ tend vers une limite finie I quand t tend vers $+\infty$. En tenant compte de (7), (8) peut s'écrire

$$f(t)\,g(t)=f(t)\,g(a)+h(t)+f(t)\left[\frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(t)}\right]\mathrm{I}+f(t)\int_a^t \frac{\varphi(u)\,[h(u)-\mathrm{I}]}{[f(u)]^2}\,du.$$

Pour t infini, le premier terme du second membre tend vers zéro, le second vers I, le troisième vers $-$I. Il reste à montrer que le dernier tend vers zéro :

Posons pour simplifier :

$$\mathrm{F}(t)=\int_a^t \frac{\varphi(u)\,[h(u)-\mathrm{I}]}{[f(u)]^2}\,du.$$

Quel que soit $t_0 \geqq a$, on a pour $t \geqq t_0$,

$$|\,\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(t_0)\,| \leqq \operatorname*{Sup}_{u\geq t_0} |\,h(u)-\mathrm{I}\,| \int_{t_0}^t \frac{|\,\varphi(u)\,|}{[f(u)]^2}\,du$$

ou

$$|\,\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(t_0)\,| \leqq \left[\frac{1}{f(t)}-\frac{1}{f(t_0)}\right] \operatorname*{Sup}_{u\geq t_0} |\,h(u)-\mathrm{I}\,|,$$

d'où

$$|\,f(t)\,\mathrm{F}(t)\,| \leqq \left[1-\frac{f(t)}{f(t_0)}\right] \operatorname*{Sup}_{u\geq t_0} |\,h(u)-\mathrm{I}\,| + |\,f(t)\,\mathrm{F}(t_0)\,|.$$

On a donc, quel que soit $t_0 \geqq a$,

$$\varlimsup_{t\to+\infty} |\,f(t)\mathrm{F}(t)\,| \leqq \operatorname*{Sup}_{u\geq t_0} |\,h(u)-\mathrm{I}\,|,$$

et, comme le second membre tend vers zéro quand t_0 tend vers $+\infty$, ceci donne

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)\,\mathrm{F}(t)=0.$$

La continuité absolue sur $[a, t]$ résulte de ce que, si $a \leqq t' < t'' \leqq t$,

$$\left|\frac{1}{f(t'')}-\frac{1}{f(t')}\right| = \frac{f(t')-f(t'')}{f(t')f(t'')} \leqq \frac{\displaystyle\int_{t'}^{t''} |\,\varphi(u)\,|\,du}{[f(t)]^2}.$$

1.2. Dans un autre ordre d'idées, nous aurons à utiliser plusieurs fois les remarques simples suivantes :

a. $f(x)$ étant une fonction réelle définie pour x réel supérieur à a, si de toute suite de nombres réels supérieurs à a, appartenant à un certain ensemble E *et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite partielle $\{x_n\}$ telle que $f(x_n)$ tende vers une limite l au plus égale à un nombre fixe* M, *on a*

$$\varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x) \leqq \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x) \leqq M.$$

De même, si de toute suite ayant les propriétés indiquées on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $f(x_n)$ tende vers une limite supérieure ou égale à un nombre fixe m, on a

$$\varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x) \geqq \varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x) \geqq m.$$

Ceci résulte simplement de ce qu'il existe toujours deux suites $\{\xi_n\}$ et $\{\xi'_n\}$ tendant vers $+\infty$, formées de nombres de E, et telles que $f(\xi_n)$ tende vers $\varlimsup\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x)$ et $f(\xi'_n)$ vers $\varliminf\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x)$, et que toute suite extraite de l'une des suites $\{f(\xi_n)\}$ ou $\{f(\xi'_n)\}$ tend vers la même limite que celle-ci.

b. $f(x)$ étant une fonction réelle ou complexe définie pour x réel $> a$, si de toute suite de nombres réels supérieurs à a, appartenant à un certain ensemble E, *et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $f(x_n)$ tende vers une certaine limite* L, *alors $f(x)$ tend vers* L *quand x tend vers $+\infty$ sur l'ensemble* E.

On le voit en appliquant la première partie de la remarque a à la fonction $|f(x) - L|$, avec M positif quelconque.

1.3. Nous aurons aussi à utiliser les lemmes suivants :

Lemme 1. — *Soit $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ une suite de fonctions réelles sommables sur un même intervalle (a, b), fini ou non.*

S'il existe une fonction positive ou nulle $G(t)$ sommable sur (a, b) et telle que l'on ait, quel que soit n et quel que soit t appartenant à (a, b), $|f_n(t)| \leqq G(t)$, on a

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt \leqq \int_a^b \Big[\varlimsup_{n \to +\infty} f_n(t) \Big]\, dt.$$

Lemme 2. — *Soit $f_x(t)$ une fonction réelle sommable sur l'intervalle (a, b), fini ou non, et dépendant du paramètre x qui parcourt l'ensemble des nombres réels supérieurs à un certain nombre* A.

S'il existe une fonction positive ou nulle $G(t)$ *sommable sur* (a, b) *et telle que l'on ait, quel que soit* x *supérieur à* A *et quel que soit* t *appartenant à* (a, b), $|f_x(t)| \leqq G(t)$, *alors, quelle que soit la fonction réelle* $g(t)$ *sommable sur* (a, b) *et satisfaisant à* $g(t) \geqq \overline{\lim}_{x \to +\infty} f_x(t)$, *on a*

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} \int_a^b f_x(t)\, dt \leqq \int_a^b g(t)\, dt \quad (^8).$$

Plus généralement, E *étant un ensemble de nombres réels supérieurs à* A, *non borné supérieurement, quelle que soit la fonction* $g(t)$ *sommable sur* (a, b) *et satisfaisant à* $g(t) \geqq \overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f_x(t)$, *on a*

$$\overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \int_a^b f_x(t)\, dt \leqq \int_a^b g(t)\, dt.$$

Pour établir le lemme 1, il suffit de remarquer que l'on a

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t), \qquad \text{avec} \quad \varphi_n(t) = \operatorname*{Sup}_{n' \geqq n} f_{n'}(t).$$

$\varphi_n(t)$ est mesurable sur (a, b) comme borne supérieure d'une famille dénombrable de fonctions mesurables, et elle est sommable parce que $|\varphi_n(t)| \leqq G(t)$.

Comme $f_n(t) \leqq \varphi_n(t)$, on a

$$\int_a^b f_n(t)\, dt \leqq \int_a^b \varphi_n(t)\, dt.$$

D'après le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe $\int$, le second membre tend pour n infini vers $\int_a^b \left[\overline{\lim}_{n \to +\infty} f_n(t)\right] dt$, et l'on obtient ainsi l'inégalité indiquée.

Pour le lemme 2, il suffit d'établir la deuxième partie, puisque la première n'est qu'un cas particulier de celle-ci, obtenu en prenant E égal à l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à A.

On remarque que, quelle que soit la suite $\{x_n\}$ formée de nombres de E et tendant vers $+\infty$, on a

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} f_{x_n}(t) \leqq g(t),$$

de sorte que le lemme 1 donne

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} \int_a^b f_{x_n}(t)\, dt \leqq \int_a^b g(t)\, dt.$$

---

(8) Nous ne pouvons pas écrire $\overline{\lim}_{x \to +\infty} \int_a^b f_x(t)\, dt \leqq \int_a^b \left[\overline{\lim}_{x \to +\infty} f_x(t)\right] dt$ parce que rien ne prouve que $\overline{\lim}_{x \to +\infty} f_x(t)$ soit une fonction mesurable.

Or on peut choisir la suite $\{x_n\}$ de façon que $\int_a^b f_{x_n}(t)\,dt$ tende vers

$$\varlimsup_{\substack{x\to+\infty \\ x\in E}} \int_a^b f_x(t)\,dt.$$

Il est clair que l'on peut remplacer dans les énoncés ci-dessus les $\varlimsup$ par des $\varliminf$, en changeant le sens des inégalités.

1.4. Indiquons également deux autres lemmes que nous aurons aussi à utiliser plusieurs fois :

Lemme 3. — *$f(t)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, définissons une fonction $g(t)$ pour $t \geqq 1$ par $g(t) = \int_t^{+\infty} f(u)\,du$.*

Si $f(t)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$, le produit $g(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini, $\frac{g(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$, et l'on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt.$$

Lemme 4. — *$f(t)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle $(0, 1)$, définissons une fonction $g(t)$ pour $0 \leqq t \leqq 1$ par $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$.*

Si $f(t)\log\frac{1}{t}$ est sommable sur $(0, 1)$, le produit $g(t)\log\frac{1}{t}$ tend vers zéro avec t, $\frac{g(t)}{t}$ est sommable sur $(0, 1)$, et l'on a

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_0^1 f(t)\log\frac{1}{t}\,dt.$$

Les deux lemmes se démontrent de façon semblable, nous donnerons la démonstration seulement pour le premier.

Il faut noter tout d'abord que la fonction $\frac{g(t)}{t}$ est continue pour $t \geqq 1$.

a. Ceci étant, traitons pour commencer le cas où $f(t) \geqq 0$, de sorte qu'il en est de même de $g(t)$.

En premier lieu, on peut écrire

$$g(t)\log t = \int_t^{+\infty} f(u)\log t\,du \leqq \int_t^{+\infty} f(u)\log u\,du,$$

et l'on voit ainsi que $g(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini.

D'autre part, comme $g(t)=\int_1^t -f(u)\,du+\text{const.}$, on a par intégration par parties :

$$\int_1^L \frac{g(t)}{t}\,dt = g(L)\log L + \int_1^L f(t)\log t\,dt.$$

Quand L tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $\int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt$.

La fonction $\frac{g(t)}{t}$ étant positive ou nulle, ceci montre qu'elle est sommable sur $(1, +\infty)$ et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt.$$

b. Pour le cas général, posons

$$\int_t^{+\infty} |f(u)|\,du = G(t).$$

D'après ce que l'on vient de démontrer, $G(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini et $\frac{G(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

L'inégalité $|g(t)| \leqq G(t)$ montre alors que $g(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini et que $\frac{g(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

Le calcul fait plus haut montre encore que

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt.$$

II. — Préliminaires (*suite*).

2.1. A chaque fonction réelle ou complexe $s(t)$ définie pour t réel $\geqq 0$ et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, nous associerons un certain nombre de fonctions définies comme nous allons l'indiquer.

Il est entendu que λ désignera toujours une variable réelle supérieure à 1 et E un ensemble variable de nombres réels positifs, supposé non borné supérieurement.

2.2. Nous posons d'abord

$$W_s(t, \lambda) = \operatorname*{Sup}_{t \leq t' \leq \lambda t} |s(t') - s(t)|,$$

$$w_s(\lambda) = \varlimsup_{t \to +\infty} W_s(t, \lambda),$$

$$w_s(E, \lambda) = \varlimsup_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}} W_s(t, \lambda).$$

Il est clair que $W_s(t, \lambda)$, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ sont essentiellement positives ou nulles. Mais, tandis que $W_s(t, \lambda)$ a une valeur finie, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ peuvent prendre la valeur $+\infty$.

Dans tous les cas, on a quel que soit E : $w_s(E, \lambda) \leqq w_s(\lambda)$.

D'autre part, $W_s(t, \lambda)$, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ ne peuvent décroître quand λ croît.

Par suite, chacune des fonctions $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$, si elle n'est pas constamment égale à $+\infty$, a une valeur finie pour λ voisin de 1 et tend vers une limite finie positive ou nulle quand λ tend vers 1. Si elle est constamment égale à $+\infty$, on peut dire qu'elle tend vers $+\infty$ quand λ tend vers 1. Dans tous les cas, nous désignerons par $w_s(1+0)$ et $w_s(E, 1+0)$ les limites de $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ pour λ tendant vers 1.

2.2.1. *On voit aisément que l'on a, quels que soient λ_1 et $\lambda_2 > 1$,*

$$w_s(\lambda_1\lambda_2) \leqq w_s(\lambda_1) + w_s(\lambda_2). \tag{9}$$

Cette inégalité n'a besoin d'être démontrée que si $w_s(\lambda_1) < +\infty$ et $w_s(\lambda_2) < +\infty$.

Soit ε un nombre positif quelconque. Il existe un nombre positif t_0 tel que, pour $t \geqq t_0$,

$$W_s(t, \lambda_1) \leqq w_s(\lambda_1) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad W_s(t, \lambda_2) \leqq w_s(\lambda_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quel que soit t positif, si $t \leqq t' \leqq \lambda_1 t$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leqq W_s(t, \lambda_1) \leqq W_s(t, \lambda_1) + W_s(\lambda_1 t, \lambda_2),$$

et, si $\lambda_1 t < t' \leqq \lambda_1\lambda_2 t$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leqq |s(\lambda_1 t) - s(t)| + |s(t') - s(\lambda_1 t)| \leqq W_s(t, \lambda_1) + W_s(\lambda_1 t, \lambda_2).$$

On a donc

$$W_s(t, \lambda_1\lambda_2) \leqq W_s(t, \lambda_1) + W_s(\lambda_1 t, \lambda_2).$$

Si $t \geqq t_0$, le second membre est au plus égal à $w_s(\lambda_1) + w_s(\lambda_2) + \varepsilon$.

Par conséquent

$$w_s(\lambda_1\lambda_2) \leqq w_s(\lambda_1) + w_s(\lambda_2) + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitrairement petit, on a bien l'inégalité annoncée.

2.2.2. — Il résulte de là que *l'une des deux circonstances suivantes se présente nécessairement :*

ou bien $w_s(\lambda) = +\infty$ quel que soit λ;
ou bien $w_s(\lambda) < +\infty$ quel que soit λ.

Il suffit d'observer que, si $w_s(\lambda_0) < +\infty$, on a quel que soit λ : $w_s(\lambda) < +\infty$.

En effet, il résulte de l'inégalité (9) que l'on a pour p entier $\geqq 1$

$$(10) \qquad \varpi_s(\lambda_0^p) \leqq p\varpi_s(\lambda_0).$$

Quel que soit λ, il existe un entier p tel que $\lambda_0^p \geqq \lambda$, et l'on a

$$\varpi_s(\lambda) \leqq \varpi_s(\lambda_0^p) \leqq p\varpi_s(\lambda_0) < +\infty.$$

2.2.3. — Notons que, *dans le cas où* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *il existe deux constantes positives* A *et* B *telles que l'on ait quel que soit* λ

$$(11) \qquad \varpi_s(\lambda) \leqq A \log \lambda + B.$$

En effet, si dans le raisonnement qui précède on prend pour p le plus petit entier satisfaisant à l'inégalité indiquée, on obtient

$$\varpi_s(\lambda) \leqq \varpi_s(\lambda_0)\left[1 + \frac{\log \lambda}{\log \lambda_0}\right].$$

2.2.4. — D'autre part, on voit facilement que, *lorsque* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *il existe deux nombres positifs* H *et* K *tels que l'on ait quels que soient* t *et* t' *positifs*

$$(12) \qquad |s(t') - s(t)| \leqq H\left|\log \frac{t'}{t}\right| + K.$$

Il est clair que l'on peut supposer sans inconvénient $t < t'$.

On voit d'abord que, pour λ fixé, $W_s(t, \lambda)$ est borné indépendamment de t. En effet $W_s(t, \lambda)$ est manifestement borné sur tout intervalle fini tel que $[0, a]$ et sa plus grande limite pour t infini a une valeur finie.

Si l'on pose

$$\operatorname*{Sup}_{t>0} W_s(t, \lambda) = W_s(\lambda),$$

on voit que l'on a quels que soient λ_1 et $\lambda_2 > 1$

$$W_s(\lambda_1 \lambda_2) \leqq W_s(\lambda_1) + W_s(\lambda_2),$$

car, quel que soit t positif, si $t \leqq t' \leqq \lambda_1 t$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leqq W_s(\lambda_1) \leqq W_s(\lambda_1) + W_s(\lambda_2),$$

et, si $\lambda_1 t < t' \leqq \lambda_1 \lambda_2 t$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leqq |s(\lambda_1 t) - s(t)| + |s(t') - s(\lambda_1 t)| \leqq W_s(\lambda_1) + W_s(\lambda_2).$$

Il résulte de là que, quels que soient λ et $p \geqq 1$,

$$W_s(\lambda^p) \leqq p W_s(\lambda).$$

Choisissons une valeur λ_0 pour λ. Alors, t et t' étant deux nombres positifs quelconques satisfaisant à $t < t'$, si p est le plus petit entier tel que $\lambda_0^p t \geqq t'$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leqq W_s(\lambda_0^p) \leqq p\, W_s(\lambda_0) < W_s(\lambda_0) \left[\frac{\log \frac{t'}{t}}{\log \lambda_0} + 1 \right].$$

Notons que, si l'on fait $t' = 1$ dans (12), on obtient

$$|s(t) - s(1)| \leqq H\,|\log t| + K,$$

d'où

$$|s(t)| \leqq H\,|\log t| + K', \qquad \text{avec} \quad K' = K + |s(1)|.$$

L'hypothèse $w_s(\lambda) < +\infty$ *entraîne donc*

$$s(t) = O[\log t] \textit{ pour } t \textit{ tendant vers } +\infty.$$

2.2.5. Remarquons enfin que, si l'on a pour une valeur de λ : $w_s(\lambda) = 0$, il en est de même pour toutes les autres valeurs de λ.

En effet, si $w_s(\lambda_0) = 0$, (10) montre que pour p entier $\geqq 1$ $w_s(\lambda_0^p) = 0$. Comme on l'a dit plus haut, quel que soit λ, il existe un entier p tel que $\lambda_0^p \geqq \lambda$ et l'on voit que $w_s(\lambda) = 0$.

Il résulte de là que *l'on a ou bien* $w_s(\lambda) > 0$ *quel que soit* λ *ou bien* $w_s(\lambda) = 0$ *quel que soit* λ.

2.3. Dans le cas où $s(t)$ est supposée réelle, nous posons encore

$$-\Pi'_s(t, \lambda) = \operatorname*{Inf}_{t \leq t' \leq \lambda t} [s(t') - s(t)],$$

$$\Pi''_s(t, \lambda) = \operatorname*{Sup}_{\frac{t}{\lambda} \leq t' \leq t} [s(t') - s(t)],$$

$$\varpi'_s(E, \lambda) = \varlimsup_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}} \Pi'_s(t, \lambda),$$

$$\varpi''_s(E, \lambda) = \varlimsup_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}} \Pi''_s(t, \lambda).$$

Il est clair que $\Pi'_s(t, \lambda)$, $\Pi''_s(t, \lambda)$, $\varpi'_s(E, \lambda)$, $\varpi''_s(E, \lambda)$ sont essentiellement positifs ou nuls et ne peuvent décroître quand λ croît. $\Pi'_s(t, \lambda)$ et $\Pi''_s(t, \lambda)$ ont une valeur finie, mais $\varpi'_s(E, \lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda)$ peuvent avoir une valeur finie ou la valeur $+\infty$.

On voit immédiatement que, λ étant fixé, si l'on a $\Pi'_s(t, \lambda) \leqq k$ pour $t \geqq t_0$, l'on a $\Pi''_s(t, \lambda) \leqq k$ pour $t \geqq \lambda t_0$, et, si l'on a $\Pi''_s(t, \lambda) \leqq k$ pour $t \geqq t_0$, on a aussi $\Pi'_s(t, \lambda) \leqq k$ pour $t \geqq t_0$. Il en résulte que, lorsque E est l'ensemble de tous les nombres positifs, $\varpi'_s(E, \lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda)$ ont la même valeur. Nous désignerons cette valeur commune par $\varpi_s(\lambda)$.

Puisque $\varpi_s(\lambda)$ est la valeur de $\varpi'_s(E, \lambda)$ pour un E particulier, $\varpi_s(\lambda)$ est $\geqq 0$ et ne peut décroître quand λ croît.

D'autre part, comme $\Pi'_s(t, \lambda) \leqq W_s(t, \lambda)$, on a toujours $\varpi_s(E, \lambda) \leqq w_s(E, \lambda)$ et par suite $\varpi_s(\lambda) \leqq w_s(\lambda)$.

De plus, il est clair que, quel que soit E, $\varpi'_s(E, \lambda) \leqq \varpi_s(\lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda) \leqq \varpi_s(\lambda)$.

Chacune des fonctions $\varpi_s(\lambda)$, $\varpi'_s(E, \lambda)$, $\varpi''_s(E, \lambda)$, si elle n'est pas constamment égale à $+\infty$, a une valeur finie pour λ voisin de 1 et tend vers une limite finie $\geqq 0$ quand λ tend vers 1. Si elle est constamment égale à $+\infty$, on peut dire qu'elle tend vers $+\infty$ quand λ tend vers 1. Dans tous les cas, nous désignerons par $\varpi_s(1+0)$, $\varpi'_s(E, 1+0)$ et $\varpi''_s(E, 1+0)$ les limites de $\varpi_s(\lambda)$, $\varpi'_s(E, \lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda)$ pour λ tendant vers 1.

2.3.1. On voit, par des raisonnements tout à fait semblables à ceux des paragraphes 2.2.1 à 2.2.5, que *l'on a nécessairement ou bien* $\varpi_s(\lambda) = +\infty$ *quel que soit* λ, *ou bien* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ *quel que soit* λ, et aussi que *l'on a nécessairement ou bien* $\varpi_s(\lambda) > 0$ *quel que soit* λ *ou bien* $\varpi_s(\lambda) = 0$ *quel que soit* λ.

On voit également que, *lorsque* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *il existe deux constantes positives* H *et* K *telles que l'on ait, quels que soient t et t' satisfaisant à* $0 < t < t'$,

$$s(t') - s(t) \geqq -H \log\frac{t'}{t} - K. \tag{13}$$

2.4. On peut aussi associer à chaque fonction réelle ou complexe $s(t)$ définie pour t réel $\geqq 0$ et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, des fonctions analogues aux précédentes et qui dépendent en outre d'une fonction réelle $\Lambda(t)$ continue et dérivable pour $t \geqq 0$ et qui croît de 0 à $+\infty$ quand t croît de 0 à $+\infty$.

On définit d'abord, à partir de $\Lambda(t)$, une fonction T des deux variables réelles positives t et α par $T(t, \alpha) = V[\alpha\Lambda(t)]$, où V est la fonction inverse de Λ. On pose ensuite

$$W_{s,\Lambda}(t, \lambda) = \sup_{t \leq t' \leq T(t,\lambda)} |s(t') - s(t)|,$$

$$w_{s,\Lambda}(\lambda) = \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, W_{s,\Lambda}(t, \lambda),$$

$$w_{s,\Lambda}(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}}\, W_{s,\Lambda}(t, \lambda),$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$-\Pi'_{s,\Lambda}(t, \lambda) = \inf_{t \leq t' \leq T(t,\lambda)} [s(t') - s(t)],$$

$$\Pi''_{s,\Lambda}(t, \lambda) = \sup_{T\left(t, \frac{1}{\lambda}\right) \leq t' \leq t} [s(t') - s(t)],$$

$$\varpi'_{s,\Lambda}(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}}\, \Pi'_{s,\Lambda}(t, \lambda),$$

$$\varpi''_{s,\Lambda}(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}}\, \Pi''_{s,\Lambda}(t, \lambda).$$

On voit de suite que, si l'on pose $\sigma(t) = s[V(t)]$, on a

$$W_{s,\Lambda}(t, \lambda) = W_\sigma[\Lambda(t), \lambda],$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\Pi'_{s,\Lambda}(t,\lambda)=\Pi'_{\sigma}[\Lambda(t),\lambda] \quad \text{et} \quad \Pi''_{s,\Lambda}(t,\lambda)=\Pi''_{\sigma}[\Lambda(t),\lambda].$$

Par suite, on a

$$w_{s,\Lambda}(\lambda)=w_{\sigma}(\lambda), \quad w_{s,\Lambda}(E,\lambda)=w_{\sigma}[\Lambda(E),\lambda],$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\varpi'_{s,\Lambda}(E,\lambda)=\varpi'_{\sigma}[\Lambda(E),\lambda] \quad \text{et} \quad \varpi''_{s,\Lambda}(E,\lambda)=\varpi''_{\sigma}[\Lambda(E),\lambda]$$

[$\Lambda(E)$ désignant l'ensemble des valeurs de $\Lambda(t)$ pour t appartenant à E].

Dans le cas où $s(t)$ est réelle, on voit que, si E est l'ensemble de tous les nombres réels positifs, de sorte qu'il en est de même de $\Lambda(E)$, $\varpi'_{s,\Lambda}(E,\lambda)$ et $\varpi''_{s,\Lambda}(E,\lambda)$ ont la même valeur $\varpi_{\sigma}(\lambda)$.

Par une convention analogue à celle faite plus haut pour $\varpi'_{s}(E,\lambda)$ et $\varpi''_{s}(E,\lambda)$, nous désignerons par $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)$ la valeur commune de $\varpi'_{s,\Lambda}(E,\lambda)$ et $\varpi''_{s,\Lambda}(E,\lambda)$ pour E égal à l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

On a encore

$$\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=\varpi_{\sigma}(\lambda).$$

Ces différentes relations montrent que les fonctions définies dans ce paragraphe possèdent les mêmes propriétés que celles définies précédemment. En particulier, elles sont liées entre elles par les inégalités correspondant à celles écrites plus haut, on a nécessairement ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)=+\infty$ quel que soit λ, ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)<+\infty$ quel que soit λ, et, de même, ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)>0$ quel que soit λ, ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)=0$ quel que soit λ; lorsque $s(t)$ est réelle, on a nécessairement ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=+\infty$ quel que soit λ, ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)<+\infty$ quel que soit λ, et aussi ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)>0$ quel que soit λ, ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=0$ quel que soit λ.

Les fonctions définies dans ce paragraphe se réduisent d'ailleurs à celles définies précédemment si $\Lambda(t)=t$.

Les conditions de convergence (1), (3) et (4) indiquées dans l'Introduction peuvent s'écrire respectivement : $w_{s,\Lambda}(\lambda)=0$, $w_{s,\Lambda}(1+0)=0$ et $\varpi_{s,\Lambda}(1+0)=0$. La condition unilatérale que nous avons indiquée comme correspondant à (1) de la même manière que (4) correspond à (3) peut s'écrire $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=0$.

2.5. Si la fonction $s(t)$ est non seulement bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, mais mesurable, on peut encore lui associer la fonction $\partial_s(t)$ définie pour $t>0$ par

$$\partial_s(t)=s(t)-\frac{1}{t}\int_0^t s(u)\,du.$$

Lorsque $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, on voit, par une intégration par parties, que

$$\partial_s(t)=\frac{1}{t}\int_0^t u\,ds(u).$$

Nous allons voir que *l'hypothèse* $w_s(\lambda) < +\infty$ *équivaut à* $\delta_s(t) = O[1]$ *pour* t *infini, et l'hypothèse* $w_s(\lambda) = 0$ *équivaut à* $\delta_s(t) = o[1]$ (9).

Ceci est une conséquence immédiate des résultats suivants :

1° *Si* $w_s(\lambda) < +\infty$, *on a*

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_s(t)| \leq \int_0^1 w_s\left(\frac{1}{u}\right) du. \tag{14}$$

2° *Si* $\delta_s(t) = O[1]$ *pour* $t \to +\infty$, *on a*

$$w_s(\lambda) \leq [2 + \log\lambda] \overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_s(t)|. \tag{15}$$

Pour établir le premier, nous remarquons que l'on a

$$\delta_s(t) = \int_0^1 [s(t) - s(vt)]\, dv.$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe 2.2.4, on a quel que soit $t > 0$ et quel que soit v compris entre 0 et 1 :

$$|s(t) - s(vt)| \leq H \log\frac{1}{v} + K.$$

D'autre part, comme $|s(t) - s(vt)| \leq W_s\left(vt, \frac{1}{v}\right)$, on a

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |s(t) - s(vt)| \leq w_s\left(\frac{1}{v}\right).$$

La fonction $w_s\left(\frac{1}{v}\right)$ est sommable sur $(0, 1)$ puisque, d'après le paragraphe 2.2.3,

$$w_s\left(\frac{1}{v}\right) \leq A \log\frac{1}{v} + B.$$

Le lemme 2 du paragraphe 1.3 donne alors (14).

Pour établir le second résultat, nous remarquons d'abord que, si l'on pose

$$S(t) = \int_0^t s(u)\, du,$$

quels que soient t et t' positifs, on a par intégration par parties :

$$\int_t^{t'} \frac{s(u)}{u} du = \frac{S(t')}{t'} - \frac{S(t)}{t} + \int_t^{t'} \frac{S(u)}{u^2} du.$$

---

(9) Ces deux faits ont été établis par Karamata ([7] et [8]), le second dans le cas où $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, le premier dans le cas où elle est la fonction associée à une série comme il a été dit dans l'introduction. Le second avait déjà été établi dans ce dernier cas par M. Riesz ([14], § 3, p. 357).

En tenant compte de ce que $S(t) = t[s(t) - \delta_s(t)]$, ceci donne

$$(16) \qquad s(t') - s(t) = \delta_s(t') - \delta_s(t) + \int_t^{t'} \frac{\delta_s(u)}{u}\, du \quad [10].$$

Supposons alors $\delta_s(t) = O[1]$ et posons

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_s(t)| = \omega.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif $t_0(\varepsilon)$ tel que, pour $t \geqq t_0(\varepsilon)$,

$$|\delta_s(t)| \leqq \omega + \varepsilon.$$

(16) montre alors que, pour $t \geqq t_0(\varepsilon)$ et $t \leqq t' \leqq \lambda t$,

$$|s(t') - s(t)| \leqq (\omega + \varepsilon)\left[2 + \log\frac{t'}{t}\right] \leqq (\omega + \varepsilon)(2 + \log\lambda).$$

Autrement dit, pour $t \geqq t_0(\varepsilon)$, on a

$$W_s(t, \lambda) \leqq (\omega + \varepsilon)(2 + \log\lambda).$$

On a donc, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$w_s(\lambda) \leqq (\omega + \varepsilon)(2 + \log\lambda) \quad [11].$$

2.5.1. $s(t)$ étant encore mesurable, et $\Lambda(t)$ étant, comme au paragraphe 2.4, une fonction réelle continue et dérivable pour $t \geqq 0$, et qui croît de 0 à $+\infty$ quand t croît de 0 à $+\infty$, nous définirons une nouvelle fonction $\delta_{s,\Lambda}(t)$, pour $t > 0$, par

$$\delta_{s,\Lambda}(t) = s(t) - \frac{1}{\Lambda(t)}\int_0^t s(u)\Lambda'(u)\, du.$$

Lorsque $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ on voit, par une intégration par parties, que

$$\delta_{s,\Lambda}(t) = \frac{1}{\Lambda(t)}\int_0^t \Lambda(u)\, ds(u).$$

---

[10] Nous aurons encore à utiliser cette formule au paragraphe 3.6.

[11] Notons que le facteur $(2 + \log\lambda)$ dans (15) ne peut être remplacé par un plus petit. On le voit en considérant la fonction $s(t)$ définie par

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 1 \\ 1 + \log t - 2\log[1.\,3.\,\ldots.\,(2n-1)] & \text{pour } (2n-1)! \leqq t < (2n)! \\ -(1 + \log t) + 2\log(2.\,4.\,\ldots.\,2n) & \text{pour } (2n)! \leqq t < (2n+1)! \end{cases}$$

Pour cette fonction, $|\delta_s(t)| = 1$ pour $t \geqq 1$ et $w_s(\lambda) = 2 + \log\lambda$.

On voit immédiatement que l'on a toujours

$$\delta_{s,\Lambda}(t) = \delta_\sigma[\Lambda(t)],$$

où $\sigma(t)$ est définie comme au paragraphe 2.4.

Il en résulte que *l'hypothèse* $w_{s,\Lambda}(\lambda) < +\infty$ *équivaut à* $\delta_{s,\Lambda}(t) = O[1]$ *pour* t *infini, et* $w_{s,\Lambda}(\lambda) = 0$ *équivaut à* $\delta_{s,\Lambda}(t) = o[1]$.

III. — Théorèmes de type élémentaire, dans le cas canonique.

3.1. Pour abréger les énoncés des théorèmes, nous convenons une fois pour toutes que, dans tout ce Chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes, qui resteront sous-entendues :

1° *Pour chaque valeur de* x *réelle et supérieure à un certain nombre* a *positif ou nul,* $\psi(t, x)$, *qui est réelle ou complexe, est une fonction de* t *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *et l'on a*

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, dt = 1. \tag{17}$$

2° $\varphi(t, x)$ *est la fonction définie pour* $x > a$ *et* $t \geqq 0$ *par*

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du. \tag{18}$$

3° *Il existe une fonction positive ou nulle* $F(t)$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et telle que l'on ait, quel que soit* $x > a$ *et quel que soit* $t > 0$,

$$|x\psi(xt, x)| \leqq F(t). \tag{19}$$

4° *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $x\psi(xt, x)$ *tend vers une fonction limite* $N(t)$.

5° $s(t)$ *est une fonction réelle ou complexe, définie pour* $t \geqq 0$, *mesurable et bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$, [de sorte que, pour $x > a$, l'intégrale

$$\int_0^L \psi(t, x)\, s(t)\, dt$$

existe toujours quel que soit $L > 0$] [12].

---

[12] Notons que les hypothèses indiquées pour $\psi(t, x)$ sont satisfaites en particulier si l'on prend $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, avec $N(t)$ sommable sur $(0, +\infty)$ et $\int_0^{+\infty} N(t)\, dt = 1$. [On peut prendre $a = 0$, $F(t) = |N(t)|$]. On a dans ce cas

$$\varphi(t, x) = K\left(\frac{t}{x}\right), \qquad \text{avec} \quad K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)\, du.$$

3.1.1 On voit immédiatement que :

1° $\varphi(0, x) = 1$ *et, pour* x *fixé,* $\varphi(t, x)$ *est une fonction de* t *continue pour* $t \geqq 0$ *et qui tend vers zéro pour* t *infini.*

2° $N(t)$ *est sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et l'on a*

$$\int_0^{+\infty} N(t)\, dt = 1, \tag{20}$$

car, en remplaçant t par xt dans (17), on obtient

$$\int_0^{+\infty} x\psi(xt, x)\, dt = 1.$$

3° *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $\varphi(xt, x)$ *tend vers la fonction* $K(t)$ *définie par*

$$K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)\, du,$$

car on a

$$\varphi(xt, x) = \int_{xt}^{+\infty} \psi(u, x)\, du = \int_t^{+\infty} x\psi(ux, x)\, du.$$

$K(0) = 1$ *et* $K(t)$ *est continue pour* $t \geqq 0$ *et tend vers zéro pour* t *infini.*

4° *Quel que soit* $\alpha > 0$, *on a* $\left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \right| \leqq \alpha F(\alpha t)$ *et* $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ *tend vers* $\alpha N(\alpha t)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$, car on peut écrire

$$x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \alpha \frac{x}{\alpha} \psi\left(\frac{x}{\alpha} \alpha t, \frac{x}{\alpha}\right).$$

$\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ *tend vers* $K(\alpha t)$, car

$$\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\alpha} \alpha t, \frac{x}{\alpha}\right).$$

3.1.2. Il faut noter d'autre part que *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ *est certainement convergente pour* $x > a$ *si* $s(t)$ *est bornée.*

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.1.2, *si* $s(t)$ *est en outre à variation bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$ *et nulle pour* $t = 0$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x) ds(t)$ *est aussi convergente pour* $x > a$ *et égale à la précédente,* puisque

$$\varphi(t, x) = \int_0^t - \psi(u, x)\, du + 1$$

et le produit $\varphi(t, x) s(t)$ tend vers zéro pour t infini.

Si $s(t)$ tend vers une limite finie S quand t tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ tend vers S quand x tend vers $+\infty$.

En effet, pour $x > a$,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt - S = \int_0^{+\infty} \psi(t, x) [s(t) - S] \, dt = \int_0^{+\infty} x\psi(xt, x) [s(xt) - S] \, dt.$$

On a

$$|x\psi(xt, x)[s(xt) - S]| \leqq F(t) \operatorname{Sup} |s(t) - S|,$$

et, quand x tend vers $+\infty$, $x\psi(xt, x)[s(xt) - S]$ tend vers zéro pour tout $t > 0$.

On peut donc définir un procédé de sommation au moyen de l'une des intégrales $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) dt$ ou $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x) ds(t)$, avec $\mathcal{E}$ égal à l'ensemble des nombres réels $> a$ et $x_0 = +\infty$ [13].

3.2. Dans plusieurs paragraphes nous supposerons que $F(t) \log t$ est sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$. Indiquons dès maintenant quelques conséquences de cette hypothèse :

a. Pour $x > a$, $\psi(t, x) \log t$ *est une fonction de* t *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$.

En effet, en remplaçant t par $\frac{t}{x}$ dans (19), on obtient

$$|\psi(t, x)| \leqq \frac{1}{x} F\left(\frac{t}{x}\right),$$

d'où

$$|\psi(t, x) \log t| \leqq \frac{1}{x} F\left(\frac{t}{x}\right) \left|\log \frac{t}{x}\right| + \frac{1}{x} |\log x| \, F\left(\frac{t}{x}\right),$$

et chacun des termes du second membre est une fonction de t sommable sur $(0, +\infty)$ puisque $F(t) |\log t|$ et $F(t)$ le sont.

b. D'après les lemmes 3 et 4 (§ 1.4), *ceci entraîne que, pour* x *fixe* $> a$, $\varphi(t, x) \log t$ *tend vers zéro quand* t *tend vers* $+\infty$ *et* $[1 - \varphi(t, x)] \log \frac{1}{t}$ *tend vers zéro quand* t *tend vers zéro.*

$$\left[\text{On a } 1 - \varphi(t, x) = \int_0^t \psi(u, x) \, du\right].$$

c. Il résulte de *a* que *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) dt$ *est certainement convergente pour* $x > a$ *toutes les fois que* $s(t) = O[\log t]$ *pour* t *infini, en particulier si* $w_s(\lambda) < +\infty$ (*cf.* § 2.2.4).

---

(13) Il faut noter que nous n'avons pas utilisé, pour établir ce fait, l'hypothèse (4).

Il résulte de b que, si, en plus de cette condition, $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ *et nulle pour $t=0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est aussi convergente pour $x > a$ et égale à la précédente.*

d. $N(t)\log t$ *est sommable sur* $(0, +\infty)$ puisque $|N(t)| \leq F(t)$. Par suite, *quel que soit $\alpha > 0$, $N(\alpha t)\log t$ est sommable sur* $(0, +\infty)$.

e. D'après les lemmes 3 et 4, il résulte de là que, *quel que soit $\alpha > 0$,* $[1 - K(\alpha t)]\log\frac{1}{t}$ *tend vers zéro avec t,* $K(\alpha t)\log t$ *tend vers zéro pour t infini,* $\frac{1 - K(\alpha t)}{t}$ *est sommable sur* $(0, 1)$ et $\frac{K(\alpha t)}{t}$ *est sommable sur* $(1 + \infty)$.

En effet, on a

$$1 - K(\alpha t) = \int_0^{\alpha t} N(u)\,du = \int_0^t \alpha N(\alpha u)\,du \quad \text{et} \quad K(\alpha t) = \int_{\alpha t}^{+\infty} N(u)\,du = \int_t^{+\infty} \alpha N(\alpha u)\,du.$$

f. Quel que soit $\alpha > 0$, pour x fixé $> \alpha a$, le produit $\left[1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\right]\log\frac{1}{t}$ tend vers zéro avec t, le produit $\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\log t$ tend vers zéro pour t infini, la fonction $\frac{1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}$ est sommable sur $(0, 1)$ et la fonction $\frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

En effet,

$$1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \int_0^{xt} \psi\left(u, \frac{x}{\alpha}\right) du = \int_0^t x\psi\left(xu, \frac{x}{\alpha}\right) du,$$

$$\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \int_{xt}^{+\infty} \psi\left(u, \frac{x}{\alpha}\right) du = \int_t^{+\infty} x\psi\left(xu, \frac{x}{\alpha}\right) du.$$

D'autre part, $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, car, comme

$$\left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \right| \leq \alpha F(\alpha t),$$

on a

$$\left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\log t \right| \leq \alpha F(\alpha t)\,|\log \alpha t| + \left|\log\frac{1}{\alpha}\right| F(\alpha t).$$

Les lemmes 3 et 4 donnent alors les résultats annoncés.

3.3. Donnons encore des formules qui joueront un rôle important dans la suite :

Supposons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\,s(t)\,dt$ convergente pour $x > a$.

D'abord, il est clair que, quel que soit $\alpha > 0$, on a pour $x > \alpha a$

$$\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) s(xt)\, dt. \tag{21}$$

De même, en remplaçant t par xt, dans $\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) dt = 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) dt = 1.$$

En retranchant membre à membre de (21) cette égalité multipliée par $s(x)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) [s(xt) - s(x)]\, dt. \tag{22}$$

3.4. Ces préliminaires terminés, nous établirons en premier lieu le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons* $F(t)\log t$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *et soit* α *un nombre positif quelconque. Si l'on a* $w_s(\lambda) < +\infty$ [*ou* $\delta_s(t) = O[1]$ *pour* t *infini*], de sorte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$, *alors,* E *étant un ensemble quelconque de nombres réels* $> \alpha a$, *supposé non borné supérieurement, quelle que soit la fonction réelle positive* $g(u)$ *telle que* $N(\alpha u)\, g(u)$ *soit sommable sur* $(0, +\infty)$ *et que l'on ait pour tout* $u > 0$

$$\overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}}\ |s(ut) - s(t)| \leq g(u), \tag{23}$$

on a

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} \left| \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) \right| \leq \int_0^{+\infty} \alpha\, |N(\alpha u)|\, g(u)\, du. \tag{24}$$

Nous poserons, pour simplifier,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt = \Psi(x).$$

La formule (22) donne alors

$$\left| \Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \right| |s(xt) - s(x)|\, dt. \tag{25}$$

En tenant compte de (12), on voit que la fonction sous le signe $\int$ au second membre de (25) est au plus égale à $\alpha F(\alpha t)[H|\log t| + K]$, qui est une fonction sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

D'autre part, comme $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ tend vers $\alpha N(\alpha t)$ quand x tend vers $+\infty$, (23) donne

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} \left\{ \left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \right| \, |s(xt) - s(x)| \right\} \leqq \alpha \, |N(\alpha t)| \, g(t).$$

Le lemme 2 du paragraphe 1.3 donne alors (24).

3.4.1. Comme cas particulier, le théorème 1 donne le suivant :

THÉORÈME 1 *a*. — $F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *si l'on a* $w_s(\lambda) < +\infty$, *on a quel que soit* $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\,dt - s(x) \right| \leqq \int_0^1 \alpha \, |N(\alpha u)| \, w_s\left(\frac{1}{u}\right) du + \int_1^{+\infty} \alpha \, |N(\alpha u)| \, w_s(u)\,du. \tag{26}$$

On obtient immédiatement ce théorème à partir du théorème 1 en prenant pour E l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à αa et pour $g(u)$ la fonction définie par

$$g(u) = \begin{cases} w_s\left(\frac{1}{u}\right) & \text{pour} \quad u < 1, \\ 0 & \text{pour} \quad u = 1, \\ w_s(u) & \text{pour} \quad u > 1. \end{cases}$$

Ceci est légitime car, d'une part, cette fonction est évidemment mesurable sur tout intervalle fini $[0, L]$ et, comme $w_s(\lambda)$ est $\geqq 0$ et satisfait à (11), on a

$$0 \leqq g(u) \leqq A \, |\log u| + B,$$

de sorte que $g(u)N(\alpha u)$ est sommable sur $(0, +\infty)$; d'autre part, les inégalités

$$|s(ut) - s(t)| \leqq W_s(t, u) \qquad \text{pour} \quad u > 1$$

et

$$|s(ut) - s(t)| \leqq W_s\left(ut, \frac{1}{u}\right) \qquad \text{pour} \quad u < 1,$$

montrent que

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \, |s(ut) - s(u)| \leqq g(u).$$

3.4.2. Ce théorème entraîne à son tour comme corollaire le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — $F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *si* *l'on a* $w_s(\lambda) = 0$, *ou, ce qui est équivalent,* $\delta_s(t) = o[1]$ *pour* t *infini, on a quel que soit* $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) \right] = 0.$$

3.5. Un autre corollaire immédiat est le suivant :

$F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur* $(0, +\infty)$, *si l'on a* $w_s(\lambda) \leqq \omega \log \lambda$, *on a, quel que soit* $\alpha > 0$,

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) \right| \leqq \omega \int_0^{+\infty} \alpha \,|\, N(\alpha u) \log u \,|\, du.$$

Nous allons voir que l'on peut, par un raisonnement plus subtil, obtenir avec les mêmes hypothèses une inégalité meilleure.

Nous établirons en effet le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — $F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur* $(0, +\infty)$, *si l'on a* $w_s(\lambda) \leqq \omega \log \lambda$, *on a pour chaque* $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) \right| \leqq \omega \tau(\alpha), \tag{27}$$

où $\tau(\alpha)$ *est la constante définie par*

$$\tau(\alpha) = \int_0^1 \frac{|1 - K(\alpha u)|}{u}\, du + \int_1^{+\infty} \frac{|K(\alpha u)|}{u}\, du. \tag{28}$$

Notons d'abord que, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2*e*, les intégrales qui figurent dans l'expression de $\tau(\alpha)$ ont bien un sens.

D'autre part, on a toujours

$$\tau(\alpha) \leqq \int_0^{+\infty} \alpha \,|\, N(\alpha u) \log u \,|\, du, \tag{29}$$

l'égalité n'ayant lieu que si $N(t)$ garde presque partout un argument constant sur chacun des intervalles $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ et $\left(\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$.

En effet, l'égalité

$$1 - K(\alpha t) = \int_0^{\alpha t} N(u)\, du = \int_0^t \alpha N(\alpha u)\, du$$

entraîne

$$|1 - K(\alpha t)| \leqq \mathfrak{N}_\alpha(t), \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{N}_\alpha(t) = \int_0^t \alpha \,|\, N(\alpha u) \,|\, du.$$

Mais, d'après le lemme 4 du paragraphe 1.4, $\frac{\mathfrak{N}_\alpha(t)}{t}$ est sommable sur $(0, 1)$ et

$$\int_0^1 \frac{\mathfrak{N}_\alpha(t)}{t}\,dt = \int_0^1 \alpha\,|\mathrm{N}(\alpha t)|\log\frac{1}{t}\,dt.$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{|1-\mathrm{K}(\alpha t)|}{t}\,dt \leqq \int_0^1 \alpha\,|\mathrm{N}(\alpha t)|\log\frac{1}{t}\,dt. \tag{30}$$

De même, l'égalité

$$\mathrm{K}(\alpha t) = \int_{\alpha t}^{+\infty} \mathrm{N}(u)\,du = \int_t^{+\infty} \alpha\,\mathrm{N}(\alpha u)\,du$$

entraîne

$$|\mathrm{K}(\alpha t)| \leqq \mathfrak{N}_\alpha^\star(t), \qquad \text{avec} \quad \mathfrak{N}_\alpha^\star(t) = \int_t^{+\infty} \alpha\,|\mathrm{N}(\alpha u)|\,du,$$

et, comme, d'après le lemme 3, $\frac{\mathfrak{N}_\alpha^\star(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$ et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathfrak{N}_\alpha^\star(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \alpha\,|\mathrm{N}(\alpha t)|\log t\,dt,$$

on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\mathrm{K}(\alpha t)|}{t}\,dt \leqq \int_1^{+\infty} \alpha\,|\mathrm{N}(\alpha t)|\log t\,dt. \tag{31}$$

(30) et (31) donnent (29) et l'on voit qu'il ne peut y avoir égalité dans (29) que s'il y a égalité dans (30) et (31).

En raison de la continuité de $\frac{1-\mathrm{K}(\alpha t)}{t}$ pour $0 < t \leqq 1$ et de $\frac{\mathrm{K}(\alpha t)}{t}$ pour $t \geqq 1$, ceci n'est possible que si l'on a

$$|1-\mathrm{K}(\alpha t)| = \mathfrak{N}_\alpha(t), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left|\int_0^t \alpha\,\mathrm{N}(\alpha u)\,du\right| = \int_0^t |\alpha\,\mathrm{N}(\alpha u)|\,du,$$

pour tout t satisfaisant à $0 < t \leqq 1$, et

$$|\mathrm{K}(\alpha t)| = \mathfrak{N}_\alpha^\star(t), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left|\int_t^{+\infty} \alpha\,\mathrm{N}(\alpha u)\,du\right| = \int_t^{+\infty} |\alpha\,\mathrm{N}(\alpha u)|\,du,$$

pour tout t supérieur ou égal à 1.

Ceci a lieu si $\mathrm{N}(\alpha t)$ a presque partout un argument constant sur chacun des intervalles $(0, 1)$ et $(1, +\infty)$, et seulement dans ce cas [14].

---

[14] Cela résulte du lemme suivant :

$f(t)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle (a, b) fini ou non, pour que l'on ait

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

il faut et il suffit qu'il existe un θ tel que $e^{i\theta}f(t)$ soit réel et $\geqq 0$ presque partout sur (a, b).

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.

a. Étudions d'abord la famille des fonctions $g_x(t)$ définies pour $t \geqq 0$ par $g_x(t) = s(xt) - s(x)$.

Nous observons en premier lieu que, comme $w_s(\lambda) < +\infty$, $s(t)$ satisfait à (12) et l'on a, quels que soient x et t positifs,

$$|g_x(t)| \leqq H\,|\log t| + K. \tag{32}$$

D'autre part, on a, pour t et t' positifs quelconques et x positif quelconque,

$$g_x(t') - g_x(t) = s(xt') - s(xt),$$

et par suite

$$|g_x(t') - g_x(t)| \leqq \begin{cases} W_s\left(xt, \dfrac{t'}{t}\right) & \text{si } t < t', \\ W_s\left(xt', \dfrac{t}{t'}\right) & \text{si } t > t'. \end{cases}$$

La condition est suffisante car, si elle est satisfaite, on a presque partout sur (a, b):

$$|f(t)| = |e^{i\theta} f(t)| = e^{i\theta} f(t) \quad \text{ou} \quad f(t) = e^{-i\theta} |f(t)|,$$

et par suite

$$\int_a^b f(t)\,dt = e^{-i\theta} \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Pour montrer qu'elle est nécessaire, remarquons d'abord que, si $\int_a^b |f(t)|\,dt = 0$, elle est satisfaite avec θ arbitraire car $f(t) = 0$ presque partout.

Si maintenant $\int_a^b |f(t)|\,dt > 0$, on voit que, si l'on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

le point $\int_a^t f(u)\,du$ du plan complexe est situé, quel que soit t satisfaisant à $a < t < b$, sur le segment de droite joignant l'origine au point $\int_a^b f(t)\,dt$. En effet, si pour t_0 satisfaisant à $a < t_0 < b$ le point $\int_a^t f(u)\,du$ n'était pas sur ce segment de droite, on aurait

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| < \left|\int_a^{t_0} f(u)\,du\right| + \left|\int_{t_0}^b f(u)\,du\right|, \quad \text{d'où} \quad \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| < \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

On voit de même que, quels que soient t et t' satisfaisant à $a < t < t' < b$, le point $\int_a^{t'} f(u)\,du$ doit se trouver sur le segment joignant le point $\int_a^t f(u)\,du$ au point $\int_a^b f(u)\,du$.

Au total, on voit que, si l'on appelle $-\theta$ l'un des arguments du nombre complexe $\int_a^b f(t)\,dt$, la fonction $e^{i\theta} \int_a^t f(u)\,du$ est réelle $\geqq 0$ et non décroissante pour $a < t < b$. Il en résulte que, partout où sa dérivée existe, elle ne peut être que réelle $\geqq 0$. Or, on sait que presque partout cette dérivée existe et est égale à $e^{\theta i} f(t)$.

Ceci entraîne que, quelle que soit la suite de nombres positifs x_n tendant vers $+\infty$, on a pour t et t' positifs avec $t \neq t'$

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \,|g_{x_n}(t') - g_{x_n}(t)| \leqq \begin{cases} \varpi_s\left(\dfrac{t'}{t}\right) & \text{si } t < t', \\ \varpi_s\left(\dfrac{t}{t'}\right) & \text{si } t > t'. \end{cases}$$

Comme $\varpi_s(\lambda) \leqq \omega \log \lambda$, on peut écrire simplement

$$(33) \qquad \overline{\lim_{n \to +\infty}} \,|g_{x_n}(t') - g_{x_n}(t)| \leqq \omega \left| \log \frac{t'}{t} \right|.$$

Les inégalités (32) et (33) vont nous permettre de montrer que, *de toute suite de nombres réels positifs tendant vers* $+\infty$, *on peut extraire une suite* $\{x_n\}$ *telle que la suite des fonctions* $g_{x_n}(t)$ *converge pour* $t > 0$ *vers une certaine fonction continue* $\sigma(t)$.

(32) montre d'abord que l'on peut extraire de la suite donnée une suite partielle $\{x_n\}$ telle que, pour une valeur positive donnée de t, $g_{x_n}(t)$ tende vers une limite finie.

Par un raisonnement bien connu, on en déduit que l'on peut trouver une suite partielle $\{x_n\}$ telle que $g_{x_n}(t)$ converge pour chaque valeur rationnelle positive de t vers une limite finie $\sigma(t)$.

La fonction $\sigma(t)$ ainsi définie pour t rationnel positif est uniformément continue pour $t \geqq \varepsilon$, avec ε positif quelconque, car (33) montre que pour t et t' rationnels positifs quelconques

$$(34) \qquad |\sigma(t') - \sigma(t)| \leqq \omega \left| \log \frac{t'}{t} \right|.$$

On peut donc prolonger cette fonction sur l'ensemble de tous les nombres positifs de façon à obtenir une fonction continue sur cet ensemble.

On voit alors que $g_{x_n}(t)$ converge vers la fonction $\sigma(t)$ ainsi obtenue, non seulement pour les valeurs rationnelles positives de t, mais pour toutes les valeurs positives.

En effet, considérons un t irrationnel positif quelconque.

Quel que soit t' rationnel positif, on a

$$|g_{x_n}(t) - \sigma(t)| \leqq |g_{x_n}(t') - g_{x_n}(t)| + |g_{x_n}(t') - \sigma(t')| + |\sigma(t') - \sigma(t)|,$$

d'où en tenant compte de (33)

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \,|g_{x_n}(t) - \sigma(t)| \leqq \omega \left| \log \frac{t'}{t} \right| + |\sigma(t') - \sigma(t)|.$$

Si l'on fait tendre t' vers t, le second membre tend vers zéro.

Ajoutons les remarques suivantes :

On a $\sigma(1) = 0$, *car, quel que soit* x, $g_x(1) = 0$.

(33) *montre que l'on a* (34) *pour* t *et* t' *positifs quelconques.*

En faisant $t'=1$, (34) montre que *l'on a quel que soit t positif*

$$|\sigma(t)| \leqq \omega |\log t|.$$

b. Ceci étant, nous poserons encore

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt = \Psi(x)$$

et nous montrerons que, de toute suite de nombres réels supérieurs à αa et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\left|\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) - s(x_n)\right)$ tende vers une limite au plus égale à $\omega\tau(\alpha)$. (27) en résultera grâce à la première remarque du paragraphe 1.2.

Notons d'abord que (22) donne

$$\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) g_x(t)\, dt.$$

De toute suite de nombres réels supérieurs à αa et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $g_{x_n}(t)$ tende pour $t>0$ vers une fonction $\sigma(t)$ ayant les propriétés indiquées plus haut.

$x_n\psi\left(x_n t, \frac{x_n}{\alpha}\right) g_{x_n}(t)$ tend alors vers $\alpha \mathrm{N}(\alpha t)\sigma(t)$.

Comme, d'après (32), $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) g_x(t)$ est, pour $x > \alpha a$, de module au plus égal à $\alpha \mathrm{F}(\alpha t)[\mathrm{H}|\log t| + \mathrm{K}]$, qui est une fonction sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$, on voit que $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) - s(x_n)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{N}(\alpha t)\sigma(t)\, dt$ et $\left|\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) - s(x_n)\right|$ tend vers $\left|\int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{N}(\alpha t)\sigma(t)\, dt\right|$.

Il ne reste qu'à montrer que

$$\left|\int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{N}(\alpha t)\sigma(t)\, dt\right| \leqq \omega\tau(\alpha). \tag{35}$$

Pour celà, nous remarquons d'abord que (34) entraîne que $\sigma(t)$ est absolument continue pour $t>0$. Elle possède donc une dérivée presque partout sur $(0, +\infty)$.

De plus, on a $|\sigma'(t)| \leqq \frac{\omega}{t}$, de sorte que $[1-\mathrm{K}(\alpha t)]\sigma'(t)$ est sommable sur $(0, 1)$ et $\mathrm{K}(\alpha t)\sigma'(t)$ l'est sur $(1, +\infty)$ (*cf.* § 3.2 *e*).

Comme $1 - \mathrm{K}(\alpha t) = \int_0^t \alpha \mathrm{N}(\alpha u)\, du$, quel que soit ε positif et inférieur à 1, on peut écrire par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 \alpha \mathrm{N}(\alpha t)\sigma(t)\, dt = -[1-\mathrm{K}(\alpha\varepsilon)]\sigma(\varepsilon) - \int_\varepsilon^1 [1-\mathrm{K}(\alpha t)]\sigma'(t)\, dt.$$

Le premier terme du second membre tend vers zéro avec ε puisque $|\sigma(\varepsilon)| \leqq \omega \log \frac{1}{\varepsilon}$ (*cf.* § 3.2 *e*); donc, quand ε tend vers zéro, cette égalité donne à la limite

$$\int_0^1 \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = -\int_0^1 [1 - K(\alpha t)]\sigma'(t)\,dt.$$

De même, comme $K(\alpha t) = \int_0^t -\alpha N(\alpha u)\,du + 1$, on a quel que soit $L > 1$

$$\int_1^L \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = K(\alpha L)\sigma(L) + \int_1^L K(\alpha t)\sigma'(t)\,dt.$$

Quand L tend vers $+\infty$, le premier terme du second membre tend vers zéro puisque $|\sigma(L)| \leqq \omega \log L$ (*cf.* § 3.2 *e*); on a donc à la limite

$$\int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = \int_1^{+\infty} K(\alpha t)\sigma'(t)\,dt.$$

En définitive, on a

$$\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = -\int_0^1 [1 - K(\alpha t)]\sigma'(t)\,dt + \int_1^{+\infty} K(\alpha t)\sigma'(t)\,dt,$$

d'où

$$\left|\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt\right| \leqq \int_0^1 |[1 - K(\alpha t)]\sigma'(t)|\,dt + \int_1^{+\infty} |K(\alpha t)\sigma'(t)|\,dt,$$

et, comme $|\sigma'(t)| \leqq \frac{\omega}{t}$, ceci donne (35).

3.5.1. Le théorème 3 donne comme conséquence le théorème suivant :

Théorème 4. — *Supposons* $F(t)\log t$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et soit une suite de nombres réels* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *satisfaisant à*

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1.$$

Quelle que soit la suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *satisfaisant à*

$$u_n = O\left[\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right] \qquad (\textit{pour } n \textit{ infini}),$$

les séries $\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)u_n$ *et* $\sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]S_n$, *où* $S_n = \sum_0^n u_j$, *sont convergentes pour* $x > a$ *et ont la même somme.*

Si l'on désigne celle-ci par $S(x)$, *on a pour chaque* $\alpha > 0$

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} \left| S\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x} u_n \right| \leq \tau(\alpha) \overline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n|, \tag{36}$$

où $\tau(\alpha)$ *est la constante définie par* (28).

Considérons la fonction $s(t)$ définie pour $t \geq 0$ par

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ \displaystyle\sum_{\lambda_n \leq t} u_n & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

$\left(\text{la somme } \sum_{\lambda_n \leq t} u_n \text{ étant prise égale à 0 s'il n'y a aucun } \lambda_n \text{ au plus égal à } t\right)$.

On voit que, si l'on pose

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n| = \omega,$$

on a

$$w_s(\lambda) \leq \omega \log \lambda.$$

En effet, soit ε positif quelconque. Il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$,

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \leq e^{\varepsilon} \quad \text{et} \quad |u_n| \leq (\omega + \varepsilon) \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} < (\omega + \varepsilon) \log \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

On en conclut que, pour $t \geq \lambda_{n_0-1}$ et $t' > t$,

$$|s(t') - s(t)| < (\omega + \varepsilon) \left[\log \frac{t'}{t} + \varepsilon \right].$$

En effet, s'il n'y a aucun λ_n satisfaisant à $t < \lambda_n \leq t'$, on a

$$|s(t') - s(t)| = 0.$$

S'il y en a un, soit λ_{n_1}, on a, puisque $n_1 \geq n_0$,

$$|s(t') - s(t)| = |u_{n_1}| < (\omega + \varepsilon) \log \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_1-1}} \leq (\omega + \varepsilon)\varepsilon;$$

s'il y en a plusieurs, $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_2}$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leq \sum_{n_1}^{n_2} |u_n| < \sum_{n_1}^{n_2} (\omega + \varepsilon) \log \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \leq (\omega + \varepsilon) \left[\varepsilon + \log \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} \right].$$

On a donc

$$W_s(t, \lambda) < (\omega + \varepsilon)[\log \lambda + \varepsilon] \quad \text{pour} \quad t \geq \lambda_{n_0-1},$$

et par suite

$$w_s(\lambda) \leq (\omega + \varepsilon)[\log \lambda + \varepsilon].$$

En faisant tendre ε vers zéro, on trouve $w_s(\lambda) \leq \omega \log \lambda$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2c, comme $F(t)\log t$ est supposée sommable sur $(0, +\infty)$, le fait que $\mathfrak{w}_s(\lambda) < +\infty$ entraîne la convergence pour $x > a$ de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$, et, $s(t)$ étant de plus à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t=0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ est aussi convergente et égale à la précédente.

Comme

$$\sum_0^N [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] S_n = \int_0^{\lambda_{N+1}} \psi(t, x) s(t)\, dt$$

et

$$\sum_0^N \varphi(\lambda_n, x) u_n = \int_0^{\lambda_N} \varphi(t, x)\, ds(t),$$

les deux séries indiquées dans l'énoncé du théorème sont convergentes et égales à $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$.

Le théorème 3 donne alors le résultat annoncé.

3.5.2. Il faut noter que, *dans le théorème 4, quelle que soit la suite* $\{\lambda_n\}$ *possédant les propriétés indiquées, la constante* $\tau(\alpha)$ *ne peut être remplacée par une plus petite et le signe* $\leqq$ *dans* (36) *ne peut être remplacée par* $<$ [15], car, α étant fixé, on peut former une suite $\{u_n\}$ telle que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n| = 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{x\to+\infty}} \left| S\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leqq x} u_n \right| = \tau(\alpha).$$

On voit de suite que, pour prouver qu'une suite $\{u_n\}$ possède ces propriétés, il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n| \leqq 1,$$

et qu'il existe une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ supérieurs à αa et tendant vers $+\infty$, telle que $\left| S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leqq x_p} u_n \right|$ tende vers $\tau(\alpha)$.

Nous déterminerons la suite $\{u_n\}$ comme suit :

Définissons d'abord la fonction $sg(z)$ pour z complexe quelconque par

$$sg(z) = \frac{z}{|z|} \quad \text{si } z \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \text{ si } z = 0,$$

---

(15) Pour $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$, $\lambda_n = n$, l'existence d'une constante $\tau(\alpha)$ telle que l'on ait (36) a été établie pour $\alpha = 1$ par A. Wintner [13], la valeur la plus petite possible pour $\tau(1)$ a été déterminée par H. Hadwiger [4] et Ph. Hartman [5], et R. P. Agnew [1] a traité le cas de α quelconque.

de sorte que l'on a toujours

$$z\,sg(z) = |z|.$$

Puis définissons une fonction $\rho(t)$ pour t réel $\geqq 0$ de la façon suivante :

Pour $0 \leqq t \leqq 1$,

$$\rho(t) = sg[\mathrm{K}(\alpha t) - 1],$$

et pour $t > 1$,

$$\rho(t) = sg[\mathrm{K}(\alpha t)].$$

Il est clair que cette fonction est mesurable. D'autre part, $|\rho(t)|$ est toujours égal à 0 ou 1.

Choisissons, d'autre part, une suite croissante d'entiers positifs $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telle que $\lambda_{n_2} > \alpha a$ et que $\frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tende vers $+\infty$.

Puis définissons une fonction $\mu(t)$ pour $t \geqq 0$ par

$$\mu(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t < \lambda_{n_1}$$

et

$$\mu(t) = \rho\left(\frac{t}{\lambda_{n_{2p}}}\right) \qquad \text{pour} \quad \lambda_{n_{2p-1}} \leqq t < \lambda_{n_{2p+1}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ceci étant, prenons $u_0 = 0$ et, pour $n \geqq 1$,

$$u_n = \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{\mu(t)}{t}\,dt.$$

D'abord, comme $|\mu(t)| \leqq 1$, on a pour $n \geqq 2$,

$$|u_n| \leqq \log \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

Par suite

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n| \leqq 1.$$

D'autre part, nous allons montrer que, si l'on pose $\lambda_{n_{2p}} = x_p$, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \left[\mathrm{S}\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leqq x_p} u_n \right] = \tau(\alpha).$$

a. Pour cela, montrons en premier lieu que, $s(t)$ étant la fonction définie à partir de la suite $\{u_n\}$ comme il a été dit au paragraphe précédent, quand p tend vers $+\infty$, $s(x_p t) - s(x_p)$ converge, pour $t > 0$, vers la fonction $\sigma_0(t)$ définie par

$$\sigma_0(t) = \int_1^t \frac{\rho(u)}{u}\,du.$$

Considérons à cet effet une certaine valeur positive de t et appelons n'_p l'entier déterminé par

$$n'_p = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda_{n_{2p}} t < \lambda_0,$$
$$\lambda_{n'_p} \leqq t \lambda_{n_{2p}} < \lambda_{n'_p + 1} \qquad \text{si} \quad \lambda_{n_{2p}} t \geqq \lambda_0.$$

On a

$$s(x_p t)-s(x_p)=s(\lambda_{n'_p})-s(\lambda_{n_{2p}})=\int_{\lambda_{n_{2p}}}^{\lambda_{n'_p}}\frac{\mu(u)}{u}\,du.$$

Mais, puisque $\frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tend vers $+\infty$ avec p, on a pour p assez grand $n_{2p-1}\leqq n'_p\leqq n_{2p+1}$ et par suite

$$\int_{\lambda_{n_{2p}}}^{\lambda_{n'_p}}\frac{\mu(u)}{u}\,du=\int_{\lambda_{n_{2p}}}^{\lambda_{n'_p}}\rho\left(\frac{u}{\lambda_{n_{2p}}}\right)\frac{du}{u}=\int_{1}^{\theta_p}\frac{\rho(u)}{u}\,du=\sigma_0(\theta_p),\qquad \text{avec}\quad \theta_p=\frac{\lambda_{n'_p}}{\lambda_{n_{2p}}}.$$

Pour p infini, θ_p tend vers t, puisque les inégalités qui définissent n'_p donnent $\left(\frac{\lambda_{n'_p}}{\lambda_{n'_p+1}}\right)t<\theta_p\leqq t$, et par suite $\sigma_0(\theta_p)$ tend vers $\sigma_0(t)$.

b. Ceci étant, on voit, en raisonnant comme au paragraphe 3.5, en *b*, que, pour p infini, $\int_0^{+\infty}\psi\left(t,\frac{x_p}{\alpha}\right)s(t)\,dt-s(x_p)$, qui est égal à $S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right)-\sum_{\lambda_n\leq x_p}u_n$, tend vers $\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\sigma_0(t)\,dt$, et que ceci est égal à

$$-\int_0^1[1-K(\alpha t)]\sigma'_0(t)\,dt+\int_1^{+\infty}K(\alpha t)\sigma'_0(t)\,dt.$$

Comme on a presque partout $\sigma'_0(t)=\frac{\rho(t)}{t}$, on voit en se reportant à la définition de $\rho(t)$, que ceci est égal à $\tau(\alpha)$.

3.5.3. Remarquons que ce que nous venons d'établir prouve en même temps que *dans le théorème* 3 *la constante* $\tau(\alpha)$ *ne peut être remplacée par une plus petite et le signe* $\leqq$ *dans* (27) *ne peut être remplacé par* $<$.

3.5.4. La formule qui donne $\tau(\alpha)$ peut s'écrire, en remplaçant u par $\frac{u}{\alpha}$,

$$\tau(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{|1-K(u)|}{u}\,du+\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{|K(u)|}{u}\,du.$$

On voit que $\tau(\alpha)$ possède une dérivée par rapport à α égale à

$$\frac{|1-K(\alpha)|-|K(\alpha)|}{\alpha}.$$

Cette dérivé est du signe de $\frac{1}{2}-\mathcal{R}[K(\alpha)]$, où $\mathcal{R}[\quad]$ désigne la partie réelle de la quantité entre crochets.

Il en résulte que, *dans le cas où* $\mathcal{R}[N(t)]\geqq 0$, *de sorte que* $\mathcal{R}[K(t)]$ *est non croissante*, $\tau(\alpha)$ *prend la valeur la plus petite possible pour* $\mathcal{R}[K(\alpha)]=\frac{1}{2}$.

Remarquons d'autre part que, *lorsque* $K(t)$ *est réel et satisfait à* $0 \leqq K(t) \leqq 1$, *on peut écrire*

$$\tau(\alpha)=\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,|\log t|\,dt.$$

En effet, on a dans ce cas

$$|1-K(\alpha t)|=1-K(\alpha t) \qquad \text{et} \qquad |K(\alpha t)|=K(\alpha t),$$

et les lemmes 3 et 4 du paragraphe 1.4 donnent

$$\int_0^1 \frac{1-K(\alpha t)}{t}\,dt=\int_0^1 \alpha N(\alpha t)\log\frac{1}{t}\,dt$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{K(\alpha t)}{t}\,dt=\int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\log t\,dt,$$

puisque

$$1-K(\alpha t)=\int_0^{\alpha t} N(u)\,du=\int_0^t \alpha N(\alpha u)\,du$$

et

$$K(\alpha t)=\int_{\alpha t}^{+\infty} N(u)\,du=\int_t^{+\infty} \alpha N(\alpha u)\,du.$$

3.6. Nous avons donné le théorème 2 comme corollaire du théorème 1*a*. Il est aussi un corollaire du théorème suivant :

THÉORÈME 5. — $F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *si l'on a* $\delta_s(t)=O[1]$ *pour* t *tendant vers* $+\infty$ [*ce qui équivaut à* $w_s(\lambda)<+\infty$], *on a pour chaque* α *réel positif*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_0^{+\infty}\psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right)s(t)\,dt-s(x)\right|\leqq\tau^*(\alpha)\,\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|\delta_s(t)|, \tag{37}$$

où $\tau^*(\alpha)$ *est la constante définie par la formule*

$$\tau^*(\alpha)=1+\int_0^1\left|\alpha N(\alpha t)+\frac{K(\alpha t)-1}{t}\right|dt+\int_1^{+\infty}\left|\alpha N(\alpha t)+\frac{K(\alpha t)}{t}\right|dt \quad (^{16}). \tag{38}$$

Nous poserons, comme précédemment,

$$\int_0^{+\infty}\psi(t, x)\,s(t)\,dt=\Psi(x).$$

---

[16] L'existence d'une constante $\tau^*(\alpha)$ telle que l'on ait (37) résulte de l'inégalité (15) du paragraphe 2.5 et du théorème 1*a*. Mais la valeur que l'on obtient ainsi pour $\tau^*(\alpha)$ est en général plus grande que celle donnée ici. $\left[\text{Il y a égalité si l'on a } N(t) \text{ réel} \geqq 0 \text{ presque partout et } N(t)=0\right.$ presque partout sur l'intervalle $\left.\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)\right]$.

a. Nous allons montrer d'abord que l'on a pour $x > \alpha a$

$$(39)\quad \Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) = -\delta_s(x) + \int_0^1 \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} \right] \delta_s(xt)\, dt$$
$$+ \int_1^{+\infty} \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t} \right] \delta_s(xt)\, dt.$$

En remplaçant dans (16) t par x et t' par xt, on obtient

$$s(xt) - s(x) = \delta_s(xt) - \delta_s(x) + \Delta_s(x, t),$$

avec

$$\Delta_s(x, t) = \int_x^{xt} \frac{\delta(u)}{u}\, du = \int_1^t \frac{\delta(xu)}{u}\, du.$$

La fonction sous le signe $\int$ au second membre de (22) peut donc s'écrire

$$x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) [\delta_s(xt) - \delta_s(x) + \Delta_s(x, t)].$$

Puisque $\delta_s(t)$ est manifestement bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, l'hypothèse $\delta_s(t) = O[1]$ pour t infini entraîne qu'il existe un nombre positif M tel que, pour t positif quelconque, $|\delta_s(t)| \leqq M$.

Ceci entraîne que, quels que soient x et t positifs,

$$|\Delta_s(x, t)| \leqq M |\log t|.$$

On voit alors que, pour x fixé $> \alpha a$, $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\delta_s(xt)$, $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\delta_s(x)$ et $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, t)$ sont des fonctions de t sommables sur l'intervalle $(0, +\infty)$, car les deux premières sont de module au plus égal à $M\alpha F(\alpha t)$ et la troisième de module au plus égal à $M\alpha F(\alpha t)|\log t|$.

On peut donc écrire (22) sous la forme

$$\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \delta_s(xt)\, dt - \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \delta_s(x)\, dt$$
$$+ \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \Delta_s(x, t)\, dt.$$

La seconde intégrale est égale à $\delta_s(x)$. Pour obtenir (39), il suffira de montrer que

$$(40)\quad \int_0^1 x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \Delta_s(x, t)\, dt = \int_0^1 \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} \delta_s(xt)\, dt,$$

et

$$(41)\qquad \int_1^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}\,\delta_s(xt)\,dt.$$

Nous pouvons observer de suite que, comme $|\delta_s(xt)| \leqq M$, $\dfrac{\varphi\left(xt\, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t}\delta_s(xt)$ est sommable sur l'intervalle $(0, 1)$ et $\dfrac{\varphi\left(xt\, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}\delta_s(xt)$ est sommable sur $(1, +\infty)$ (*Cf.* 3.2 *f*).

Pour établir (40), nous observons d'abord que, comme

$$1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \int_0^{xt} \psi\left(u, \frac{x}{\alpha}\right)du = \int_0^t x\psi\left(xu, \frac{x}{\alpha}\right)du \qquad \text{et} \qquad \Delta_s(x, 1) = 0,$$

quel que soit ε positif et inférieur à 1, on a par intégration par parties

$$(42)\qquad \int_\varepsilon^1 x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, t)\,dt = -\left[1 - \varphi\left(x\varepsilon, \frac{x}{\alpha}\right)\right]\Delta_s(x, \varepsilon) - \int_\varepsilon^1 \frac{1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}\,\delta_s(xt)\,dt.$$

Comme $|\Delta_s(x, \varepsilon)| \leqq M \log\frac{1}{\varepsilon}$, le premier terme du second membre tend vers zéro avec ε, puisque $\left[1 - \varphi\left(x\varepsilon, \frac{x}{\alpha}\right)\right]\log\frac{1}{\varepsilon}$ tend vers zéro. Donc, quand ε tend vers zéro, (42) donne à la limite (40).

De même, comme

$$\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \int_{xt}^{+\infty} \psi\left(u, \frac{x}{\alpha}\right)du = \int_t^{+\infty} x\psi\left(xu, \frac{x}{\alpha}\right)du,$$

on a pour tout $L > 1$

$$(43)\qquad \int_1^L x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, t)\,dt = -\varphi\left(xL, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, L) + \int_1^L \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}\,\delta_s(xt)\,dt.$$

Comme $|\Delta_s(x, L)| \leqq M \log L$, le premier terme du second membre tend vers zéro pour L infini puisque $\varphi\left(xL, \frac{x}{\alpha}\right)\log L$ tend vers zéro. Donc, quand L tend vers $+\infty$, (43) donne à la limite (41).

b. La formule (39) donne

$$\left|\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x)\right| \leqq |\delta_s(x)| + \int_0^1 \left|\left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t}\right]\delta_s(xt)\right|dt + \int_1^{+\infty} \left|\left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}\right]\delta_s(xt)\right|dt.$$

Pour obtenir (37), il suffira de montrer que, si l'on pose

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \, |\delta_s(t)| = \omega,$$

on a

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \int_0^1 \left| \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} \right] \delta_s(xt) \right| dt \leq \omega \int_0^1 \left| \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t) - 1}{t} \right| dt$$

et

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \int_1^{+\infty} \left| \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t} \right] \delta_s(xt) \right| dt \leq \omega \int_1^{+\infty} \left| \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t)}{t} \right| dt.$$

Ces deux inégalités résultent du lemme 2 du paragraphe 1.3.

En effet, puisque

$$1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \int_0^{xt} \psi\left(u, \frac{x}{\alpha}\right) du = \int_0^t x\psi\left(xu, \frac{x}{\alpha}\right) du \qquad \text{et} \qquad \left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \right| \leq \alpha F(\alpha t),$$

on a

$$\left| \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} \right] \delta_s(xt) \right| \leq M \left[\alpha F(\alpha t) + \frac{1}{t} \int_0^t \alpha F(\alpha u)\, du \right].$$

Le second membre est sommable sur (0, 1) d'après le lemme 4 du paragraphe 1.4.

De plus, comme, pour x infini, $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t}$ tend vers $\alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t) - 1}{t}$, on a

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} \right] \delta_s(xt) \right| = \omega \left| \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t) - 1}{t} \right|.$$

Ceci est une fonction sommable sur (0, 1), d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2 *e*.

De même, $\left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t} \right] \delta_s(xt)$ est de module au plus égal à $M\left[\alpha F(\alpha t) + \frac{1}{t} \int_t^{+\infty} \alpha F(\alpha u)\, du \right]$, qui est une fonction sommable sur $(1, +\infty)$ d'après le lemme 3, on a

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t} \right] \delta_s(xt) \right| = \omega \left| \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t)}{t} \right|,$$

et ceci est une fonction sommable sur $(1, +\infty)$, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2 *e*.

3.6.1. Comme corollaire du théorème 5, on a le suivant :

THÉORÈME 6. — *Supposons* $F(t)\log t$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et soit* λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *une suite de nombres réels satisfaisant à*

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1.$$

Si la suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *satisfait à*

$$\sum_0^n \lambda_\nu u_\nu = O[\lambda_n] \qquad (\textit{pour } n \textit{ infini}),$$

les séries $\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x) u_n$ *et* $\sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] S_n$, *où* $S_n = \sum_0^n u_j$, *sont convergentes pour* $x > a$ *et ont la même somme.*

Si l'on désigne celle-ci par $S(x)$, *on a pour chaque* α *positif*

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| S\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x} u_n \right| \leq \tau^\star(\alpha) \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_1^n \lambda_\nu u_\nu \right|, \tag{44}$$

où $\tau^\star(\alpha)$ *est la constante définie par* (38).

On définit $s(t)$ comme au paragraphe 3.5.1. On voit alors que, pour $t > 0$,

$$t\,\delta_s(t) = \int_0^t [s(t) - s(u)]\,du = \int_0^t u\,ds(u) = \sum_{\lambda_n \leq t} \lambda_n u_n,$$

$\Big($le $\sum$ étant pris nul s'il n'y a aucun λ_n au plus égal à $t\Big)$.

On a donc pour $\lambda_n \leq t < \lambda_{n+1}$ (avec $n \geq 1$ si $\lambda_0 = 0$)

$$|\delta_s(t)| \leq \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_0^n \lambda_\nu u_\nu \right|,$$

et l'égalité a lieu pour $t = \lambda_n$.

Donc

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_s(t)| = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_0^n \lambda_\nu u_\nu \right|.$$

Ceci étant fini, on a $w_s(\lambda) < +\infty$ et les intégrales $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ sont convergentes et égales pour $x > a$.

On en conclut, comme au paragraphe 3.5.1, que les séries

$$\sum_{0}^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x) u_n \quad \text{et} \quad \sum_{0}^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] S_n$$

sont convergentes pour $x > a$ et égales à $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$.

Le théorème 5 donne alors (44).

3.6.2. Nous allons montrer que, *dans le théorème* 6, *quelle que soit la suite* $\{\lambda_n\}$ *possédant les propriétés indiquées, la constante* $\tau^\star(\alpha)$ *ne peut être remplacée par une plus petite et le signe* $\leqq$ *dans* (44) *ne peut être remplacé par* $<$ [17].

En effet, la suite $\{\lambda_n\}$ étant donnée, et α étant fixé, on peut former une suite $\{u_n\}$ satisfaisant à

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_{0}^{n} \lambda_\nu u_\nu \right| = 1,$$

et telle que

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| S\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x} u_n \right| = \tau^\star(\alpha).$$

Pour prouver qu'une suite $\{u_n\}$ possède ces propriétés, il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_{0}^{n} \lambda_\nu u_\nu \right| \leqq 1,$$

et qu'il existe une suite de nombres réels x_p supérieurs à αa tendant vers $+\infty$ et telle que

$$\lim_{p \to +\infty} \left[S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x_p} u_n \right] = \tau^\star(\alpha).$$

Nous poserons

$$\delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{0}^{n} \lambda_\nu u_\nu \qquad (\text{pour } n \geqq 1 \text{ si } \lambda_0 = 0).$$

Il est clair que l'on peut déterminer les u_n de manière à faire prendre à tous les δ_n des valeurs arbitraires.

---

(17) Pour $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$, $\lambda_n = n$, $\alpha = 1$, l'existence d'une constante $\tau^\star$ telle que l'on ait (44) a été établie par A. Wintner [15], et la valeur la plus petite possible pour cette constante a été déterminée par H. Hadwiger [4] et Ph. Hartman [5].

Nous choisirons les δ_n de la façon suivante :

Nous formons d'abord une suite d'entiers positifs croissants $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telle que $\frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tende vers $+\infty$.

D'autre part, nous définissons une fonction $G_\alpha(t)$ pour $t > 0$, par

$$G_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha N(\alpha t) + \dfrac{K(\alpha t) - 1}{t} & \text{pour} \quad t \leqq 1, \\ \alpha N(\alpha t) + \dfrac{K(\alpha t)}{t} & \text{pour} \quad t > 1. \end{cases}$$

Cette fonction est sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$, puisque les intégrales qui figurent dans la formule donnant $\tau^\star(\alpha)$ existent.

Nous definissons ensuite la fonction $H_\alpha(t)$, pour $t > 0$, par

$$H_\alpha(t) = \int_0^t G_\alpha(u)\, du.$$

Ceci étant, et $sg(z)$ étant défini comme au paragraphe 3.5.2, nous prenons

$$\delta_n = 0 \qquad \text{pour} \quad n < n_1,$$
$$\delta_n = sg\left[H_\alpha\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n_{2p}}}\right) - H_\alpha\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n_{2p}}}\right)\right] \qquad \text{pour} \quad n_{2p-1} \leqq n < n_{2p+1} \text{ et } n \neq n_{2p},$$

et

$$\delta_{n_{2p}} = -1, \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il est clair que l'on a $|\delta_n| \leqq 1$ quel que soit n, d'où

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} |\delta_n| \leqq 1.$$

Nous allons montrer que, si l'on pose $x_p = \lambda_{n_{2p}}$, $S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x_p} u_n$ tend pour p infini vers $\tau^\star(\alpha)$.

$s(t)$ étant définie comme il a été dit plus haut, on a

$$S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x_p} u_n = \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x_p}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x_p).$$

La formule (39) donne ensuite

$$\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x_p}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x_p) = 1 + \int_0^{+\infty} \Phi_\alpha(t, x_p)\, \delta_s(x_p t)\, dt,$$

avec

$$\Phi_\alpha(t, x) = \begin{cases} x\psi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right) + \dfrac{\varphi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} & \text{pour} \quad t \leqq 1, \\ x\psi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right) + \dfrac{\varphi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right)}{t} & \text{pour} \quad t > 1. \end{cases}$$

Nous devons montrer que $\int_0^{+\infty} \Phi_\alpha(t, x_p)\,\delta_s(x_p t)\,dt$ tend vers $\tau^\star(\alpha) - 1$ quand p tend vers $+\infty$.

a. Introduisons la fonction $\delta^\star(t)$ définie pour $t > 0$ par

$$\delta^\star(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \lambda_{n_1}, \\ \delta_n & \text{pour } \lambda_n \leqq t < \lambda_{n+1} \qquad (n \geqq n_1). \end{cases}$$

On voit que

$$\delta^\star(t) - \delta_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \lambda_{n_1}, \\ \dfrac{t - \lambda_n}{t}\,\delta_n & \text{pour } \lambda_n \leqq t < \lambda_{n+1} \qquad (n \geqq n_1). \end{cases}$$

Comme $|\delta_n| \leqq 1$, on a

$$|\delta^\star(t) - \delta_s(t)| \leqq 1 \qquad \text{quel que soit } t > 0$$

et

$$|\delta^\star(t) - \delta_s(t)| \leqq \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1 \qquad \text{pour } \lambda_n \leqq t < \lambda_{n+1} \qquad (n \geqq n_1).$$

Cette dernière inégalité montre que $\delta^\star(t) - \delta_s(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Phi_\alpha(t, x_p)\,\delta_s(x_p t)\,dt = {} & \int_0^{+\infty} G_\alpha(t)\,\delta^\star(x_p t)\,dt \\ & + \int_0^{+\infty} G_\alpha(t)\,[\delta_s(x_p t) - \delta^\star(x_p t)]\,dt \\ & + \int_0^{+\infty} [\Phi_\alpha(t, x_p) - G_\alpha(t)]\,\delta_s(x_p t)\,dt. \end{aligned}$$

Le second terme du premier membre tend vers zéro pour p infini, car la fonction sous le signe $\int$ est de module au plus égal à $|G_\alpha(t)|$, qui est une fonction sommable sur $(0, +\infty)$, et elle tend vers zéro pour p infini.

Il en est de même du troisième terme, car son module est au plus égal à $\int_0^{+\infty} |\Phi_\alpha(t, x_p) - G_\alpha(t)|\,dt$, qui tend vers zéro puisque la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro et est majorée en module par la fonction sommable qui vaut

$$2\alpha\left[F(\alpha t) + \frac{1}{t}\int_0^t F(\alpha u)\,du\right] \qquad \text{pour } t \leqq 1$$

et

$$2\alpha\left[F(\alpha t) + \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} F(\alpha u)\,du\right] \qquad \text{pour } t > 1.$$

Nous sommes donc ramenés à montrer que, lorsque p tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} G_\alpha(t)\delta^\star(x_p t)\,dt$ tend vers $\tau^\star(\alpha)-1=\int_0^{+\infty}|G_\alpha(t)|\,dt$.

b. En vertu d'un théorème bien connu sur le changement d'ordre des passages à la limite, il nous suffira de montrer que, quel que soient b et c positifs, avec $b<c$, $\int_b^c G_\alpha(t)\delta^\star(x_p t)\,dt$ tend pour p infini vers $\int_b^c |G_\alpha(t)|\,dt$, puisque $\int_b^c G_\alpha(t)\delta^\star(x_p t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} G_\alpha(t)\delta^\star(x_p t)\,dt$ uniformément par rapport à p quand b tend vers zéro et c vers $+\infty$.

Posons

$$\xi_n^{(p)}=\frac{\lambda_n}{x_p}=\frac{\lambda_n}{\lambda_{n_{2p}}}.$$

On voit que, pour $\xi_n^{(p)}\leqq t<\xi_{n+1}^{(p)}$, $\delta^\star(x_p t)=\delta_n$, de sorte que

$$\int_{\xi_n^{(p)}}^{\xi_{n+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^\star(x_p t)\,dt=\delta_n\left\{H_\alpha[\xi_{n+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_n^{(p)}]\right\}.$$

Par suite, pour $n_{2p-1}\leqq n<n_{2p}$ et pour $n_{2p}<n<n_{2p+1}$,

$$\int_{\xi_n^{(p)}}^{\xi_{n+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^\star(x_p t)\,dt=\left|H_\alpha[\xi_{n+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_n^{(p)}]\right|,$$

tandis que

$$\int_{\xi_{n_{2p}}^{(p)}}^{\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^\star(x_p t)\,dt=-\left\{H_\alpha[\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_{n_{2p}}^{(p)}]\right\}.$$

b et c étant fixés, soient n'_p et n''_p les entiers déterminés, pour chaque p, par

$$\lambda_{n'_p}\leqq b\lambda_{n_{2p}}<\lambda_{n'_p+1} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n''_p}<c\lambda_{n_{2p}}\leqq\lambda_{n''_p+1},$$

c'est-à-dire

$$\xi_{n'_p}^{(p)}\leqq b<\xi_{n'_p+1}^{(p)} \qquad \text{et} \qquad \xi_{n''_p}^{(p)}<c\leqq\xi_{n''_p+1}^{(p)}.$$

Comme, pour p infini, $\dfrac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tend vers $+\infty$, on a pour p assez grand $n_{2p-1}\leqq n'_p+1<n''_p<n_{2p+1}$, et l'on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\int_b^c G_\alpha(t)\,\delta^\star(x_p t)\,dt=&\left|H_\alpha\left[\xi_{n'_p+1}^{(p)}\right]-H_\alpha(b)\right|+\sum_{n'_p+1}^{n''_p-1}\left|H_\alpha[\xi_{n+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_n^{(p)}]\right|\\&+\left|H_\alpha(c)-H_\alpha\left[\xi_{n''_p}^{(p)}\right]\right|+\int_b^{\xi_{n'_p+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^\star(x_p t)\,dt+\int_{\xi_{n''_p}^{(p)}}^c G_\alpha(t)\,\delta^\star(x_p t)\,dt\\&-\left\{H_\alpha[\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_{n_{2p}}^{(p)}]\right\}-\left|H_\alpha[\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_{n_{2p}}^{(p)}]\right|\\&-\left|H_\alpha\left[\xi_{n'_p+1}^{(p)}\right]-H_\alpha(b)\right|-\left|H_\alpha(c)-H_\alpha\left[\xi_{n''_p}^{(p)}\right]\right|.\end{aligned}$$

Quand p tend vers $+\infty$, la somme des trois premiers termes du second membre tend vers la variation totale de la fonction $H_\alpha(t)$ sur l'intervalle $[b, c]$, soit $\int_b^c |G_\alpha(t)|\,dt$, puisque $H_\alpha(t)$ est continue et la longueur maxima des intervalles partiels $\left[b, \xi^{(p)}_{n'_p+1}\right]$, $[\xi^{(p)}_n, \xi^{(p)}_{n+1}]$ $(n = n'_p + 1,\ n'_p + 2,\ \ldots,\ n''_p - 1)$, et $\left[\xi^{(p)}_{n''_p}, c\right]$ tend vers zéro. Chacun des six derniers termes tend vers zéro.

3.6.3. Remarquons que, ce que nous venons d'établir prouve en même temps que dans le théorème 5 la constante $\tau^\star(\alpha)$ ne peut être remplacée par une plus petite et le signe $\leqq$ dans (37) ne peut être remplacé par $<$.

3.6.4. *Dans le cas particulier où* $N(t)$ *est réelle positive ou nulle et non croissante, on a*

$$\tau^\star(\alpha) = \tau(\alpha) + 2K(\alpha).$$

Pour le voir, nous remarquons d'abord que, du fait que l'on a pour $0 < t < u$

$$0 \leqq N(t) - N(u) \leqq N(t),$$

il résulte que

$$0 \leqq \int_0^u [N(t) - N(u)]\,dt \leqq \int_0^u N(t)\,dt \leqq 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 \leqq 1 - K(u) - uN(u) \leqq 1.$$

On en déduit que, pour α et t positifs quelconques,

$$\alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t) - 1}{t} \leqq 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t)}{t} \geqq 0.$$

La formule (38) donne alors

$$\tau^\star(\alpha) = 1 - \int_0^1 \alpha N(\alpha t)\,dt + \int_0^1 \frac{1 - K(\alpha t)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{K(\alpha t)}{t}\,dt,$$

d'où, en tenant compte de ce que $1 = \int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt$,

$$\tau^\star(\alpha) = \int_0^1 \frac{1 - K(\alpha t)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{K(\alpha t)}{t}\,dt + 2\int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt.$$

La somme des deux premiers termes du second membre est égale à $\tau(\alpha)$, puisque $1 - K(\alpha t)$ et $K(\alpha t)$ sont positifs ou nuls.

D'autre part

$$\int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt = \int_\alpha^{+\infty} N(t)\,dt = K(\alpha).$$

3.7. Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

Théorème 7. — *Supposons que* $\psi(t, x)$ *soit réelle* [de sorte qu'il en sera de même de $N(t)$ et $K(t)$].

Si $s(t)$ est réelle et satisfait à $s(t)=O[1]$ pour t tendant vers $+\infty$, et $\varpi_s(\lambda)=0$, alors, en posant

$$s=\underline{\lim}_{t\to+\infty} s(t),\qquad S=\overline{\lim}_{t\to+\infty} s(t),$$

$$\psi=\underline{\lim}_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt,\qquad \Psi=\overline{\lim}_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt,$$

$$K_1=-\operatorname{Inf}K(t),\qquad K_2=\operatorname{Sup}[K(t)-1],$$

(de sorte que $K_1\geqq 0$ et $K_2\geqq 0$), on a

$$s-K_1[S-s]\leqq\psi\leqq s\leqq S\leqq\Psi\leqq S+K_2[S-s], \tag{45}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l}\psi\leqq s\leqq\psi+\dfrac{K_1}{1+K_1}[\Psi-\psi]\\ et\\ \Psi-\dfrac{K_2}{1+K_2}[\Psi-\psi]\leqq S\leqq\Psi.\end{array}\right. \tag{46}$$

Dans le cas particulier où $0\leqq K(t)\leqq 1$, ce qui a lieu par exemple si $\psi(t,x)\geqq 0$, on a

$$s=\psi,\qquad S=\Psi. \tag{47}$$

Nous poserons comme précédemment

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt.$$

a. Indiquons d'abord comment, une fois (45) établi, on en déduit (46). D'abord, si $s=S$, on obtient $\psi=\Psi=s=S$ et l'on a bien (46). Supposons maintenant $s<S$.

La fonction homographique $\dfrac{s-x}{S-x}$ étant décroissante pour $x<S$, on a

$$\frac{s-\psi}{S-\psi}\leqq\frac{s-[s-K_1(S-s)]}{S-[s-K_1(S-s)]}=\frac{K_1}{1+K_1},$$

d'où

$$s-\psi\leqq\frac{K_1}{1+K_1}[S-\psi]\leqq\frac{K_1}{1+K_1}[\Psi-\psi],$$

d'où

$$s\leqq\psi+\frac{K_1}{1+K_1}[\Psi-\psi].$$

On a donc bien la première ligne de (46).

De même, la fonction homographique $\dfrac{x-S}{x-s}$ étant croissante pour $x>s$, on

$$\frac{\Psi-S}{\Psi-s}\leqq\frac{[S+K_2(S-s)]-S}{[S+K_2(S-s)]-s}=\frac{K_2}{1+K_2},$$

d'où

$$\Psi - S \leqq \frac{K_2}{1+K_2}[\Psi - s] \leqq \frac{K_2}{1+K_2}[\Psi - \psi],$$

d'où

$$S \geqq \Psi - \frac{K_2}{1+K_2}[\Psi - \psi].$$

On a donc bien la seconde ligne de (46).

Ajoutons qu'il est évident que, si $0 \leqq K(t) \leqq 1$, on a $K_1 = K_2 = 0$ et (45) donne (47).

D'autre part, ceci a manifestement lieu si $\psi(t, x) \geqq 0$, car alors $N(t) \geqq 0$ et $K(t)$ est non croissante.

b. Pour obtenir (45), nous montrerons d'une part que

$$(48) \qquad s - K_1(S - s) \leqq \psi \leqq \Psi \leqq S + K_2(S - s),$$

et d'autre part que

$$(49) \qquad \psi \leqq s \leqq S \leqq \Psi.$$

D'après la remarque *a* du paragraphe 1.2, pour établir (48) il suffit de montrer que, de toute suite de nombres réels supérieurs à a tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n)$ tende vers une limite l satisfaisant à

$$(50) \qquad s - K_1(S - s) \leqq l \leqq S + K_2(S - s).$$

De même, pour établir (49) il suffit de montrer que, de toute suite de nombres réels positifs tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $s(x_n)$ tende vers une limite l' satisfaisant à

$$\psi \leqq l' \leqq \Psi.$$

c. Commençons par étudier la famille des fonctions $s(xt)$.

En premier lieu, on voit qu'il existe un nombre positif M tel que l'on ait, quels que soient x et t positifs,

$$(51) \qquad |s(xt)| \leqq M.$$

D'autre part, comme on a, pour $x > 0$ et $0 < t < t'$,

$$s(xt') - s(xt) \geqq -\Pi'_s\left(xt, \frac{t'}{t}\right),$$

on voit que, quelle que soit la suite de nombres positifs x_n tendant vers $+\infty$, on a pour t et t' positifs quelconques, avec $t < t'$,

$$(52) \qquad \varliminf_{n \to +\infty} [s(x_n t') - s(x_n t)] \geqq 0,$$

puisque

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \Pi'_s\left(x_n t, \frac{t'}{t}\right) \leq \varpi_s\left(\frac{t'}{t}\right).$$

(51) et (52) vont nous permettre de montrer que, *de toute suite de nombres positifs tendant vers* $+\infty$, *on peut extraire une suite* $\{x_n\}$ *telle que la suite des fonctions* $s(x_n t)$ *converge vers une fonction bornée non décroissante* $\sigma(t)$.

(51) montre d'abord que l'on peut extraire de la suite donnée une suite partielle $\{x'_n\}$ telle que, pour une valeur positive donnée de t, $s(x'_n t)$ tende vers une limite finie. Par le raisonnement bien connu auquel nous avons déjà fait allusion au paragraphe 3.5, on en déduit que l'on peut trouver une suite partielle $\{x''_n\}$ telle que $s(x''_n t)$ converge pour chaque valeur rationnelle positive de t vers une limite $\sigma^\star(t)$.

(52) montre que la fonction $\sigma^\star(t)$, ainsi définie pour t rationnel positif, est non décroissante.

Par suite, quel que soit t_0 positif, $\sigma^\star(t)$ tend vers des limites finies $\sigma^\star(t_0 - 0)$ et $\sigma^\star(t_0 + 0)$ quand t, en restant rationnel, tend vers t_0 par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures, et l'on a

$$\sigma^\star(t_0 - 0) \leq \sigma^\star(t_0 + 0).$$

De plus, l'ensemble E des valeurs de t_0 pour lesquelles il n'y a pas égalité est vide, fini ou dénombrable.

On voit que la suite des fonctions $s(x''_n t)$ est en fait convergente non seulement pour t rationnel positif, mais pour toutes les valeurs positives de t n'appartenant pas à E, la limite étant la valeur commune de $\sigma^\star(t - 0)$ et $\sigma^\star(t + 0)$. Cela résulte immédiatement de ce que, si t' et t'' sont deux nombres rationnels satisfaisant à $0 < t' < t < t''$, (52) donne

$$\sigma^\star(t') \leq \underline{\lim_{n \to +\infty}}\, s(x''_n t) \leq \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, s(x''_n t) \leq \sigma^\star(t'').$$

Si E est vide, nous prendrons $x_n = x''_n$. Sinon, on peut extraire de la suite $\{x''_n\}$ une suite $\{x_n\}$ telle que $s(x_n t)$ converge sur l'ensemble E.

Dans les deux cas, la suite des fonctions $s(x_n t)$ convergera pour toutes les valeurs positives de t. Désignons par $\sigma(t)$ la fonction limite, évidemment égale à $\sigma^\star(t)$ pour t rationnel. (51) et (52) montrent que $\sigma(t)$ est bornée et non décroissante.

d. D'après ce que nous avons dit en *b*, la démonstration de (45) sera achevée lorsque nous aurons montré que, si la suite $\{x_n\}$ tend vers $+\infty$ et est telle que $s(x_n t)$ converge vers la fonction bornée non décroissante $\sigma(t)$, d'une part $\Psi(x_n)$ tend vers une limite l satisfaisant à (50), d'autre part on a

$$\psi \leq \sigma(1) \leq \Psi \tag{53}$$

[car $s(x_n)$ tend vers $\sigma(1)$].

Reprenons la formule (21) donnée au paragraphe 3.3. Elle s'écrit

$$\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty} x\,\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) s(xt)\,dt$$

(α est un nombre positif quelconque et x est supposé $> \alpha a$).

La fonction sous le signe $\int$ est majorée en module par $M\alpha\,F(\alpha t)$.

De plus, quand x tend vers $+\infty$, $x\,\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ tend vers $\alpha\,N(\alpha t)$.

Donc, si $s(x_n t)$ tend vers $\sigma(t)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,\sigma(t)\,dt=\int_0^{+\infty} N(t)\,\sigma\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt. \tag{54}$$

En particulier, prenons $\alpha = 1$:

$$\Psi(x_n) \quad \text{tend vers} \quad l=\int_0^{+\infty} N(t)\,\sigma(t)\,dt=-\int_0^{+\infty} \sigma(t)\,dK(t).$$

Désignons par $\sigma(+0)$ et $\sigma(+\infty)$ les limites de $\sigma(t)$ pour t tendant vers zéro ou vers $+\infty$.

On a par intégration par parties

$$l=\sigma(+0)+\int_0^{+\infty} K(t)\,d\sigma(t).$$

Comme $-K_1 \leqq K(t) \leqq 1+K_2$, on a

$$-K_1[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)] \leqq \int_0^{+\infty} K(t)\,d\sigma(t) \leqq (1+K_2)[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)].$$

Par suite

$$\sigma(+0)-K_1[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)] \leqq l \leqq \sigma(+\infty)+K_2[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)]. \tag{55}$$

Mais, comme $\sigma(t)=\lim\limits_{n\to+\infty} s(x_n t)$, on a quel que soit $t>0$

$$s \leqq \sigma(t) \leqq S,$$

et par suite

$$s \leqq \sigma(+0) \leqq \sigma(+\infty) \leqq S.$$

En tenant compte de ces inégalités, (55) donne (50).

Revenons maintenant à (54) : Il en résulte que, quel que soit $\alpha>0$,

$$\psi \leqq \int_0^{+\infty} N(t)\,\sigma\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt \leqq \Psi.$$

Mais $\int_0^{+\infty} N(t)\,\sigma\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ tend vers $\sigma(0)$ si α tend vers $+\infty$ et vers $\sigma(+\infty)$ si α tend vers zéro.

On a donc $\psi \leqq \sigma(+0) \leqq \sigma(+\infty) \leqq \Psi$, d'où résulte (53).

3.7.1. Ajoutons la remarque suivante sur le théorème 7 :

D'après ce théorème, avec les hypothèses indiquées, si l'on connaît s et S, on sait que ψ et Ψ doivent satisfaire aux inégalités (45). *Nous allons voir que l'on ne peut remplacer ces inégalités par de plus serrées.*

En effet, étant donnés deux nombres réels A et B, avec $A < B$, nous pouvons former deux fonctions bornées satisfaisant à $\varpi_s(\lambda) = 0$, $s = A$, $S = B$, l'une telle que $\psi = s$ et $\Psi = S$, l'autre telle que $\psi = s - K_1(S - s)$ et $\Psi = S + K_2(S - s)$ [18]. Nous pouvons même former ces deux fonctions indépendamment du noyau $\psi(t, x)$.

Prenons d'abord

$$s(t) = \frac{A + B}{2} + \frac{B - A}{2} \sin\{\pi \log[\log(2 + t)]\}.$$

$s(t)$ est bornée et l'on a bien $\varpi_s(\lambda) = 0$, $s = A$, $S = B$. De plus, la différence $\Psi(x) - s(x)$ tend vers zéro pour x infini, car

$$\Psi(x) - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi(xt, x)[s(xt) - s(x)]\,dt$$

et la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro pour x infini et reste de module au plus égal à $[B - A]F(t)$. Par suite $\psi = s$, $\Psi = S$.

Définissons maintenant $s(t)$ de la façon suivante :

Donnons-nous une suite de nombres réels positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ satisfaisant à

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty.$$

Puis prenons

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{pour} \quad t < x_1, \\ B - (B - A)\dfrac{\log \dfrac{t}{x_n}}{\log \dfrac{x_{n+1}}{x_n}} & \text{pour} \quad x_n \leq t < x_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

$s(t)$ est bornée, on a

$$\varpi_s(\lambda) = 0, \qquad s = A, \qquad S = B.$$

Nous allons voir que l'on a

$$\psi = s - K_1(S - s) \qquad \text{et} \qquad \Psi = S + K_2(S - s).$$

---

[18] Au contraire, lorsque ψ et Ψ sont donnés, la borne supérieure donnée pour s et la borne inférieure donnée pour S, dans (46), ne sont pas en général les meilleures possibles. Les meilleures bornes possibles ne semblent pas pouvoir être déterminées simplement.

Il suffit d'observer que, pour n infini, $s(x_n t)$ tend vers la fonction $\sigma(t)$ égale à A pour $t < 1$ et à B pour $t \geqq 1$, de sorte que (54) donne

$$\lim_{n \to +\infty} \Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) = A + (B - A) K(\alpha) = s + (S - s) K(\alpha),$$

ce qui entraîne

$$\psi \leqq s + (S - s) K(\alpha) \leqq \Psi.$$

En faisant varier α, on en déduit

$$\psi \leqq s - K_1(S - s) \leqq S + K_2(S - s) \leqq \Psi,$$

ce qui, avec (45), donne le résultat annoncé.

3.8. Nous allons voir que, moyennant des hypothèses convenables sur le noyau $\psi(t, x)$, on peut remplacer par d'autres l'hypothèse $s(t) = O[1]$ du théorème 7.

Pour cela nous établirons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — *Supposons que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait*

$$(56) \qquad \int_1^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \log t \, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Alors, si $w_s(\lambda) < +\infty$ [ou $\delta_s(t) = O[1]$ pour t infini] et si

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty),$$

on a

$$s(t) = O[1] \qquad (t \to +\infty) \quad ([19]).$$

a. Observons d'abord que la sommabilité de $x\psi(xt, x)\log t$ sur l'intervalle $(1, +\infty)$ entraîne celle de $\psi(t, x)\log t$ sur tout intervalle $(A, +\infty)$, avec $A > 0$.

([19]) Il est clair que l'hypothèse faite ici sur $\psi(t, x)$ est satisfaite en particulier si $F(t)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$. Si $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, elle se traduit par le fait que $N(t)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

Lorsque $F(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$ le résultat est immédiat car, compte tenu de ce que $s(t)$ satisfait à (12), la formule (22) donne

$$\left| \int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt - s(x) \right| \leqq \int_0^{+\infty} F(t) [H |\log t| + K] \, dt.$$

Le cas particulier où $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, avec $N(t)\log t$ sommable sur $(1, +\infty)$, et de plus $N(t) \geqq 0$ et $s(t)$ à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, est contenu dans un théorème établi par Karamata [6].

Alors, si $w_s(\lambda) < +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente, puisque $w_s(\lambda) < +\infty$ entraîne $s(t) = O[\log t]$.

b. Le principe de notre démonstration sera le suivant :

Nous poserons

$$M(t) = \operatorname*{Sup}_{t' \leq t} |s(t')|.$$

On a évidemment $|s(t)| \leq M(t)$. D'autre part, $M(t)$ est non décroissante et, par suite, ne peut que tendre vers $+\infty$ ou rester bornée quand t tend vers $+\infty$.

Nous montrerons que l'on ne peut supposer que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t sans aboutir à une contradiction.

1° Il résulte de la définition de $M(t)$ que, si $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, on a

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|s(t)|}{M(t)} = 1.$$

En effet, d'une part on a toujours $\frac{|s(t)|}{M(t)} \leq 1$, d'autre part, si ε est un nombre positif quelconque inférieur à 1, il existe quel que soit t_0 positif un $t_1 > t_0$ et tel que $\frac{|s(t_1)|}{M(t_1)} \geq 1 - \varepsilon$.

On peut supposer $M(t_0) > 0$. Il existe d'abord $t_2 > t_0$ tel que $M(t_2) > \frac{M(t_0)}{1-\varepsilon}$; puis il existe un $t_1 \leq t_2$ tel que $|s(t_1)| \geq M(t_2)(1-\varepsilon)$; ceci entraîne $|s(t_1)| > M(t_0)$ et par suite $t_1 > t_0$; d'autre part, on a

$$\frac{|s(t_1)|}{M(t_1)} \geq \frac{|s(t_1)|}{M(t_2)} \geq 1 - \varepsilon.$$

2° Nous allons voir que, si l'on suppose que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, les hypothèses du théorème permettent d'en déduire que

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|s(t)|}{M(t)} = 0,$$

d'où la contradiction annoncée.

Remarquons d'abord que, si l'on pose

$$T(\alpha, x) = \int_\alpha^{+\infty} |x \psi(xt, x)| \log\frac{t}{\alpha}\, dt, \qquad (\alpha > 0,\ x > a),$$

on a, quel que soit $\alpha > 0$,

$$T[\alpha, x] = O[1] \qquad \text{pour } x \text{ tendant vers } +\infty.$$

En effet, si $\alpha \geq 1$,

$$T(\alpha, x) \leq \int_1^{+\infty} |x \psi(xt, x)| \log t\, dt,$$

et, si $\alpha < 1$,

$$T(\alpha, x) \leq \log \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\, dt + \int_{1}^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \log t \, dt.$$

D'autre part, puisque $K(t)$ tend vers 1 quand t tend vers zéro, il existe un α_0 positif tel que $K(\alpha) \neq 0$ pour tout α positif au plus égal à α_0.

Choisissons donc un α positif au plus égal à α_0.

Si l'on pose

$$\Psi(x) = \int_{0}^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt,$$

on pourra écrire

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(x) &= \int_{0}^{\alpha x} \psi(t, x)\, s(t)\, dt + s(\alpha x) \int_{\alpha x}^{+\infty} \psi(t, x)\, dt + \int_{\alpha x}^{+\infty} \psi(t, x)\, [s(t) - s(\alpha x)]\, dt, \\ &= \int_{0}^{\alpha} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt + \varphi(\alpha x, x)\, s(\alpha x) + \int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x) [s(xt) - s(\alpha x)]\, dt. \end{aligned} \right.$$

On sait que, quand x tend vers $+\infty$, $\varphi(\alpha x, x)$ tend vers $K(\alpha)$. Donc pour x assez grand, $\varphi(\alpha x, x)$ ne sera pas nul.

On aura alors

$$\begin{aligned} |s(\alpha x)| \leq \frac{1}{|\varphi(\alpha x, x)|} \Bigg\{ |\Psi(x)| &+ \left| \int_{0}^{\alpha} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt \right| \\ &+ \left| \int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)\, [s(xt) - s(\alpha x)]\, dt \right| \Bigg\}. \end{aligned}$$

Mais, en tenant compte de (19) et de la définition de $M(t)$, on a

$$\left| \int_{0}^{\alpha} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt \right| \leq M(\alpha x) \int_{0}^{\alpha} F(t)\, dt.$$

D'autre part, comme $s(t)$ satisfait à (12), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)\, [s(xt) - s(\alpha x)]\, dt \right| &\leq \int_{\alpha}^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \left[H \log \frac{t}{\alpha} + K \right] dt \\ &\leq HT(\alpha, x) + K \int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\, dt. \end{aligned}$$

En définitive, on a

$$\frac{|s(\alpha x)|}{M(\alpha x)} \leq \frac{1}{|\varphi(\alpha x)|\, M(\alpha x)} \left[|\Psi(x)| + HT(\alpha x) + K \int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\, dt + M(\alpha x) \int_{0}^{\alpha} F(t)\, dt \right].$$

Si l'on suppose que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, ceci entraînera

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{|s(\alpha x)|}{M(\alpha x)} \leq \frac{\displaystyle\int_{0}^{\alpha} F(t)\, dt}{|K(\alpha)|}.$$

On voit donc que, si $M(t)$ tendait vers $+\infty$ avec t, les hypothèses du théorème entraîneraient que, pour tout α positif au plus égal à α_0,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|s(t)|}{M(t)} \leq \frac{\int_0^{\alpha} F(t)\,dt}{|K(\alpha)|}.$$

En faisant tendre α vers zéro, ceci donnerait

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|s(t)|}{M(t)} = 0.$$

3.9. Nous allons établir maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 9. — *Supposons que la fonction $\psi(t, x)$ soit réelle positive ou nulle, que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait*

$$\int_1^{+\infty} x\psi(xt, x)\log t\,dt = O[1] \qquad \textit{pour } x \textit{ tendant vers } +\infty.$$

Alors, si $s(t)$ est réelle et satisfait à $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, et si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ est convergente pour $x > a$ et reste bornée quand x tend vers $+\infty$, on a

$$s(t) = O[1] \qquad \textit{pour } t \textit{ tendant vers } +\infty.$$

Le principe de notre démonstration sera le suivant :

Nous poserons

$$s^\star(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(t) \geqq 0, \\ -s(t) & \text{si } s(t) < 0, \end{cases}$$

puis

$$M^\star(t) = \operatorname*{Sup}_{t' \leq t} s^\star(t').$$

$M^\star(t)$ est évidemment non décroissante et par suite ne peut que tendre vers $+\infty$ ou rester bornée quand t tend vers $+\infty$. D'autre part, on a évidemment

$$s(t) \geqq -s^\star(t) \geqq -M^\star(t).$$

Nous verrons par ailleurs que, quel que soit η positif, il existe un nombre positif $A(\eta)$ tel que l'on ait, pour tout t positif,

$$s(t) \leqq A(\eta) + \eta M^\star(t).$$

Par suite, si nous montrons que $M^\star(t)$ reste bornée pour t infini, il en résultera qu'il en est de même de $s(t)$.

Or, nous montrerons que l'on ne peut supposer que $M^\star(t)$ tend vers $+\infty$ avec t sans aboutir à une contradiction.

a. Montrons d'abord que, quel que soit $\eta > 0$, il existe un nombre positif $A(\eta)$ tel que, quel que soit $t > 0$,

$$s(t) \leqq A(\eta) + \eta M^{\star}(t). \tag{58}$$

Le nombre positif η étant donné, choisissons d'abord un nombre positif m inférieur à 1, puis un nombre positif α tel que

$$K(\alpha) > m \quad \text{et} \quad \int_0^{\alpha} F(t)\,dt \leqq m\eta.$$

En tenant compte de (19) et de ce que $x\psi(xt, x) \geqq 0$ et $s(t) \geqq -M^{\star}(t)$, on a

$$\int_0^{\alpha} x\psi(xt, x)\,s(xt)dt \geqq -\int_0^{\alpha} F(t) M^{\star}(xt)\,dt \geqq -m\eta M^{\star}(\alpha x).$$

D'autre part, comme $s(t)$ satisfait à (13) pour $0 < t < t'$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)\,[s(xt) - s(\alpha x)]\,dt &\geqq -\int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)\left[H \log \frac{t}{\alpha} + K\right] dt \\ &\geqq -HT(\alpha, x) - K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt,\end{aligned}$$

$T(\alpha, x)$ ayant la même signification qu'au paragraphe 3.8 et satisfaisant encore à $T(\alpha, x) = O[1]$ pour x tendant vers $+\infty$.

Si l'on pose encore

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\,s(t)\,dt,$$

l'égalité (57) donne

$$\Psi(x) \geqq -m\eta M^{\star}(\alpha x) + \varphi(\alpha x, x)\,s(\alpha x) - HT(\alpha, x) - K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt. \tag{59}$$

Comme, quand x tend vers $+\infty$, $\varphi(\alpha x, x)$ tend vers $K(\alpha)$ tandis que $\Psi(x)$ et $T(\alpha, x)$ restent bornés, on peut trouver deux nombres positifs M et N et un nombre réel x_0 supérieur à a tels que l'on ait pour $x \geqq x_0$

$$\Psi(x) \leqq M, \qquad T(\alpha, x) \leqq N \qquad \text{et} \qquad \varphi(\alpha x, x) \geqq m.$$

L'inégalité (59) montre que pour $x \geqq x_0$

$$s(\alpha x) \leqq \frac{1}{m}\left[M + HN + K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt\right] + \eta M^{\star}(\alpha x);$$

autrement dit, pour $t \geqq \alpha x_0$,

$$s(t) \leqq \frac{1}{m}\left[M + HN + K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt\right] + \eta M^{\star}(t).$$

Il suffit de prendre $A(\eta)$ égal au plus grand des deux nombres

$$\frac{1}{m}\left[M + HN + K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt\right] \quad \text{et} \quad \sup_{t \leqq \alpha x_0} s(t)$$

pour que l'on ait (58) pour tout $t > 0$.

b. De ce que $s(t)$ satisfait à (13), il résulte que pour $0 < t < t'$

$$M^{\star}(t') - M^{\star}(t) \leqq H \log\frac{t'}{t} + K. \tag{60}$$

En effet, t et t' étant fixés, on a pour $0 \leqq t'' \leqq t$

$$s(t'') \geqq -M^{\star}(t'') \geqq -M^{\star}(t),$$

et pour $t < t'' \leqq t'$

$$s(t'') - s(t) \geqq -H\log\frac{t''}{t} - K \geqq -H\log\frac{t'}{t} - K,$$

d'où

$$s(t'') \geqq s(t) - H\log\frac{t'}{t} - K \geqq -M^{\star}(t) - H\log\frac{t'}{t} - K.$$

On a donc pour $0 \leqq t'' \leqq t'$

$$s(t'') \geqq -M^{\star}(t) - H\log\frac{t'}{t} - K,$$

d'où

$$s^{\star}(t'') \leqq M^{\star}(t) + H\log\frac{t'}{t} + K.$$

Par suite,

$$M^{\star}(t') \leqq M^{\star}(t) + H\log\frac{t'}{t} + K.$$

Remarquons que (60) entraîne que, pour t infini, $M^{\star}(t) = O[\log t]$, d'où résulte que $x\psi(xt, x)M^{\star}(xt)$ est sommable sur $(0, +\infty)$.

c. Choisissons deux nombres positifs β et γ tels que $\beta < \gamma$ et $K(\beta) - K(\gamma) > 0$, ce qui est possible puisque $K(t)$ tend vers 1 quand t tend vers zéro et vers zéro quand t tend vers $+\infty$. Nous supposerons maintenant β et γ fixés.

Nous pouvons écrire

$$\Psi(x) = \int_0^{\beta} x\psi(xt, x)\,s(xt)\,dt + \int_{\beta}^{\gamma} x\psi(xt, x)\,s(xt)\,dt + \int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt, x)\,s(xt)\,dt. \tag{61}$$

η étant un nombre positif quelconque, on a pour $0 < t < \beta$

$$s(xt) \leqq A(\eta) + \eta M^{\star}(xt) \leqq A(\eta) + \eta M^{\star}(\gamma x).$$

Par suite,

$$(62)\qquad \int_0^{\beta} x\psi(xt,\, x)\, s(xt)\, dt \leqq [\mathrm{A}(\eta) + \eta \mathrm{M}^\star(\gamma x)]\,[1 - \varphi(\beta x,\, x)].$$

De même, (58) donne

$$\int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt,\, x)\, s(xt)\, dt \leqq \mathrm{A}(\eta)\, \varphi(\gamma x,\, x) + \eta \int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt,\, x)\, \mathrm{M}^\star(xt)\, dt,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt,\, x)\, s(xt)\, dt \leqq [\mathrm{A}(\eta) + \eta \mathrm{M}^\star(\gamma x)]\, \varphi(\gamma x,\, x) + \eta \int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt,\, x)\, [\mathrm{M}^\star(xt) - \mathrm{M}^\star(\gamma x)]\, dt,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de (60),

$$(63)\qquad \int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt,\, x)\, s(xt)\, dt \leqq [\mathrm{A}(\eta) + \eta \mathrm{M}^\star(\gamma x) + \eta \mathrm{K}]\, \varphi(\gamma x,\, x) + \eta \mathrm{H} \mathrm{T}(\gamma.\, x).$$

Enfin, $s(t)$ satisfaisant à (13), on a pour $\beta \leqq t \leqq \gamma$

$$s(\gamma x) - s(xt) \geqq -\mathrm{H} \log \frac{\gamma}{t} - \mathrm{K} \geqq -\mathrm{H} \log \frac{\gamma}{\beta} - \mathrm{K},$$

d'où

$$s(xt) \leqq s(\gamma x) + \mathrm{H} \log \frac{\gamma}{\beta} + \mathrm{K},$$

et l'on voit que

$$(64)\qquad \int_{\beta}^{\gamma} x\psi(xt,\, x)\, s(xt)\, dt \leqq [\varphi(\beta x,\, x) - \varphi(\gamma x,\, x)] \left[s(\gamma x) + \mathrm{H} \log \frac{\gamma}{\beta} + \mathrm{K} \right].$$

En définitive, en tenant compte de (62), (63) et (64), l'égalité (61) donne une égalité de la forme

$$(65)\qquad \begin{aligned} \Psi(x) \leqq {} & [\varphi(\beta x,\, x) - \varphi(\gamma x,\, x)]\, s(\gamma x) \\ & + \eta[1 - \varphi(\beta x,\, x) + \varphi(\gamma x,\, x)]\, \mathrm{M}^\star(\gamma x) + \Theta(\eta,\, x), \end{aligned}$$

où $\Theta(\eta,\, x)$ est une fonction qui, pour η fixé, reste bornée quand x tend vers $+\infty$.

Comme, quand x tend vers $+\infty$, $\varphi(\beta x,\, x) - \varphi(\gamma x,\, x)$ tend vers $\mathrm{K}(\beta) - \mathrm{K}(\gamma)$, que nous avons supposé positif, on aura pour x assez grand

$$\varphi(\beta x,\, x) - \varphi(\gamma x,\, x) > 0,$$

et (65) donnera alors

$$\frac{s(\gamma x)}{\mathrm{M}^\star(\gamma x)} \geqq -\eta \frac{1 - \varphi(\beta x,\, x) + \varphi(\gamma x,\, x)}{\varphi(\beta x,\, x) - \varphi(\gamma x,\, x)} + \frac{\Psi(x) - \Theta(\eta,\, x)}{[\varphi(\beta x,\, x) - \varphi(\gamma x,\, x)]\, \mathrm{M}^\star(\gamma x)}.$$

Si l'on suppose que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, ceci entraînera que

$$\lim_{\overline{t \to +\infty}} \frac{s(t)}{M^\star(t)} = \lim_{\overline{x \to +\infty}} \frac{s(\gamma x)}{M^\star(\gamma x)} \geqq -\eta \frac{1 - K(\beta) + K(\gamma)}{K(\beta) - K(\gamma)}.$$

Comme η est un nombre positif arbitraire, on voit que l'hypothése que $M^\star(t)$ tend vers $+\infty$ avec t entraînerait

$$\lim_{\overline{t \to +\infty}} \frac{s(t)}{M^\star(t)} \geqq 0.$$

Or, en utilisant la définition de $M^\star(t)$, la même hypothèse entraînerait, par un raisonnement analogue à celui fait au paragraphe 3.8, 1°,

$$\lim_{\overline{t \to +\infty}} \frac{s(t)}{M^\star(t)} = -1,$$

d'où contradiction.

$M^\star(t)$ reste donc bornée pour t infini, et il en est de même de $s(t)$ puisque, avec η positif quelconque,

$$-M^\star(t) \leqq s(t) \leqq A(\eta) + \eta M^\star(t) \quad ({}^{20}).$$

3.10 En combinant les théorèmes 7 et 8, on obtient le suivant :

THÉORÈME 10. — *Supposons que $\psi(t, x)$ soit réelle, que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait*

$$\int_1^{+\infty} \left| x\psi(xt, x) \right| \log t \, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Si $s(t)$ est réelle et si l'on a

$$w_s(\lambda) < +\infty, \qquad \varpi_s(\lambda) = 0, \qquad et \qquad \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty),$$

alors, avec les notations du théorème 7, on a (45) et (46).

Dans le cas particulier où $0 \leqq K(t) \leqq 1$, on a (47).

3.11. En combinant les théorèmes 7 et 9, on obtient le suivant :

THÉORÈME 11. — *Supposons que la fonction $\psi(t, x)$ soit réelle positive ou nulle,*

---

(20) Cette démonstration est inspirée de Ramaswami [13] (th. I, 1, p. 410).

Dans le cas où $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, on pourrait utiliser le théorème 11 de notre second Mémoire et le théorème 8 ci-dessus. L'hypothèse faite ici sur $\psi(t, x)$ [en plus de celle que $\psi(t, x)$ est réelle $\geqq 0$] se traduit dans ce cas par le fait que $N(t)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$. Mais si $N(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, on obtient une simplification notable en utilisant les théorèmes indiqués, du fait que le théorème 8 est alors immédiat [*Cf.* note (19), p. 150].

que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait

$$\int_1^{+\infty} \psi(xt, x) \log t \, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Alors, si $s(t)$ est réelle et si l'on a

$$\varpi_s(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty),$$

on a

$$\varliminf_{t \to +\infty} s(t) = \varliminf_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt \qquad \text{et} \qquad \varlimsup_{t \to +\infty} s(t) = \varlimsup_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt \quad (^{21}).$$

3.12. Les théorèmes 10 et 11 donnent comme cas particuliers les théorèmes inverses suivants :

THÉORÈME 10*a*. — *Avec les hypothèses du théorème 10 sur $\psi(t, x)$, si $s(t)$ est réelle et satisfait à $w_s(\lambda) < +\infty$ et $\varpi_s(\lambda) = 0$, et si $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt$ tend vers une limite finie S quand x tend vers $+\infty$, alors $s(t)$ tend vers S quand t tend vers $+\infty$.*

THÉORÈME 11*a*. — *Avec les hypothèses du théorème 11 sur $\psi(t, x)$, si $s(t)$ est réelle et satisfait à $\varpi_s(\lambda) = 0$, et si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt$ est convergente pour $x > a$ et tend vers une limite finie S quand x tend vers $+\infty$, alors $s(t)$ tend vers S quand t tend vers $+\infty$.*

3.13. Remarquons que, *dans tous les énoncés des théorèmes de ce chapitre où figure l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt$, on pourrait remplacer celle-ci par $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x) \, ds(t)$, en ajoutant l'hypothèse que $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$.*

En effet, dans les théorèmes 1 à 3 et le théorème 5 figure l'hypothèse que $F(t) \log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$ et celle que $w_s(\lambda) < +\infty$ $\left[\text{ou celle que } \delta_s(t) = O[1] \text{ quand } t \to +\infty, \text{ qui lui est équivalente}\right]$.

---

(21) Dans le cas particulier où $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, ce théorème est contenu dans un théorème de Ramaswami [13] (th. 1, 2, p. 414). (Un cas particulier de ce dernier théorème se trouve déjà dans [12]).

Au contraire, nos théorèmes 7 et 10, où $\psi(t, x)$ n'est pas supposé $\geqq 0$, sont entièrement nouveaux.

Or, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2c, on sait que, lorsque $F(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, si $w_s(\lambda) < +\infty$ et si $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t=0$, non seulement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ est convergente pour $x > a$, mais l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ l'est aussi et lui est égale ([22]).

Comme ceci résulte de ce que la sommabilité de $F(t)\log t$ sur $(0, +\infty)$ entraîne celle de $\psi(t, x)\log t$ et que la sommabilité de $\psi(t, x)\log t$ sur $(1, +\infty)$ entraîne elle-même que $\varphi(t, x)\log t$ tend vers zéro pour t infini, on voit qu'il en est de même lorsque l'on suppose simplement que $\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

Dans les théorèmes 8, 10 et 10a, nous avons précisément les hypothèses que $x\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$ et $w_s(\lambda) < +\infty$.

Dans le théorème 7, on suppose que $s(t)$ est bornée. D'après ce qui a été dit au paragraphe 3.1.2, si $s(t)$ est en outre à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t=0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est convergente pour $x > a$, comme $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$, et est égale à celle-ci.

Enfin, dans les théorèmes 9, 11 et 11a figure l'hypothèse que $\psi(t, x) \geqq 0$. D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.1.2, si $\psi(t, x) \geqq 0$, si $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t=0$, et si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est convergente, $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ l'est aussi et lui est égale.

Bibliographie.

[1] R. P. Agnew, *Abel transforms and partial sums of tauberian series* (*Annals of Math.*, vol. 50, 1949, p. 110-117).

[2] H. Delange, *Théorèmes taubériens généraux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 28-31).

[3] H. Delange, *Quelques théorèmes taubériens* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1787-1790).

[4] H. Hadwiger, *Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 20, 1947, p. 319-332).

[5] Ph. Hartman, *Tauber's theorem and absolute constants* (*Amer. J. of Math.*, vol. 69, 1947, p. 599-606).

[6] J. Karamata, *Über einige Inversionsätze der Limitierungsverfahren* (*Publ. Math. Univ. de Belgrade*, t. 3, 1934, p. 153-160).

[7] J. Karamata, *Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp* (*Math. Z.*, t. 40, 1935, p. 421-425).

[8] J. Karamata, *Über einige reihentheoretische Sätze* (*Math. Z.*, t. 41, 1936, p. 67-74).

([22]) Nous avons d'ailleurs déjà utilisé ce fait aux paragraphes 3.5.1 et 3.6.1.

[9] J. Karamata, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité* (*Act. Scient. et indust.*, n° 450, Hermann, Paris 1937).

[10] H. R. Pitt, *General tauberian theorems* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 44, 1938, p. 243-288].

[11] H. R. Pitt, *General tauberian theorems II* (*J. London Math. Soc.*, t. 15, 1940, p. 97-112).

[12] Ramaswami, *Some tauberian theorems on oscillation* (*J. London Math. Soc.*, t. 10, 1935, p. 294-308).

[13] Ramaswami, *The generalized Abel-Tauber theorem* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 41, 1936, p. 408-417].

[14] M. Riesz, *Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen* (*Acta Mathem.*, t. 40, 1936, p. 349-361).

[15] A. Wintner, *On Tauber's theorem*, (*Comm. Math. Helv.*, vol. 20, 1947, p. 216-222).