CLAUDE CHABAUTY

# Sur les minima arithmétiques des formes

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 66 (1949), p. 367-394
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__367_0>

SUR

# LES MINIMA ARITHMÉTIQUES DES FORMES

PAR M. CLAUDE CHABAUTY.

## I. — Introduction.

Soit $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ une *forme positivement homogène* $[f(tx) = t^d f(x)$ pour tout $t > 0]$ sur l'espace numérique réel à $n$ dimensions $R^n$, à valeurs $\geqq 0$ et prenant éventuellement la valeur $+\infty$. Soit G un *réseau* de $R^n$ de *masse* $m(G)$ [i. e. un sous-groupe du groupe additif de $R^n$, engendré par $n$ vecteurs linéairement indépendants, $m(G)$ étant la mesure du parallélotope que définissent ces vecteurs]. Les « *minima* (¹) *arithmétiques* » de $f$ par rapport à G sont les $n$ nombres $\mu_h$, $0 \leqq \mu_h \leqq +\infty$, $h = 1, 2, \ldots, n$, ainsi définis : $\mu_h$ est la borne inférieure des nombres $\mu$ tels qu'il y ait au moins $h$ éléments linéairement indépendants de G pour lesquels $f \leqq \mu$.

Notons $\Gamma$ l'ensemble des réseaux de $R^n$. Posons

$$\gamma(f) = \sup_{G \in \Gamma} \mu_1(f, G)\,(m(G))^{-\frac{d}{n}},$$

$$\rho(f) = \sup_{G \in \Gamma} \prod_{h=1}^{n} \mu_h(f, G)\,(m(G))^{-d}.$$

Nous appellerons $\gamma(f)$ la *constante d'Hermite* de $f$(²). On a évidemment $\rho(f) \geqq (\gamma(f))^n$. Pour l'étude de $\gamma(f)$ et de $\rho(f)$ on peut toujours se ramener au cas où *le degré d'homogénéité de f est égal à* 1 ce que nous supposerons dans la suite, et nous dirons simplement *forme* pour forme positivement homogène de degré 1, sauf mention contraire.

(¹) Nous disons *minima* suivant l'usage, quoique les bornes inférieures dont il s'agit ne soient pas nécessairement atteintes. Ce sont bien des minima si $f$ est *régulière* (définie et continue).

(²) Si $f$ est une forme quadratique définie positive à $n$ variables $\gamma(f)$ est alors ce qu'on appelle classiquement « la constante d'Hermite » pour la dimension $n$.

Supposons que la forme $f$ soit une *norme* sur $R^n$, i. e. une forme définie positive $[f(x) > 0$ pour $x \neq 0]$, symétrique $[f(-x) = f(x)]$, convexe $[f(x+y) \leqq f(x) + f(y)]$, à valeurs finies. Les résultats classiques de Minkowski sont alors en posant $J = \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \leqq 1)$ :

(I) $$\gamma(f) \leqq 2\,(\mathrm{mes}(J))^{-\frac{1}{n}} \quad (^3),$$

(II) $$\rho(f) \leqq 2^n(\mathrm{mes}(J))^{-1} \quad (^4),$$

et dans le cas d'une *norme euclidienne* (racine carrée d'une forme quadratique définie positive)

(III) $$\rho(f) = (\gamma(f))^n \quad (^5).$$

L'inégalité (I) n'est évidemment qu'un cas particulier de (II) mais la démonstration de (I) est presque triviale et non celle de (II). D'autre part, Minkowski a donné une démonstration simple d'une forme affaiblie de l'inégalité (II), suffisante pour certaines applications :

(II′) $$\rho(f) \leqq 2^n n!\,(\mathrm{mes}(J))^{-1} \quad (^6).$$

Pour toute forme posons $\alpha(f) = \rho(f)(\gamma(f))^{-n}$. Nous appellerons $\alpha(f)$ l'*anomalie* de $f$; c'est un nombre évidemment toujours $\geqq 1$. L'inégalité (III) de Minkowski dit que *l'anomalie des normes euclidiennes est égale à* 1. Nous établirons le résultat intéressant, de démonstration très simple, et qui semble avoir échappé à l'attention jusqu'ici, que *l'anomalie d'une forme arbitraire est bornée par une constante ne dépendant que du nombre n des variables* ([6 bis]). *Ainsi, quand on sait majorer le premier minimum d'une forme pour tous les réseaux, on sait majorer automatiquement le produit de ses n premiers minima sur tout réseau.* Plus précisément nous établirons qu'on a toujours $\alpha(f) \leqq 2^{\frac{n-1}{2}}$, qu'il existe des formes de $R^n$ d'anomalie *égale* à $2^{\frac{n-1}{2}}$, que pour toute valeur $\geqq 1$ et $< 2^{\frac{n-1}{2}}$ il existe des formes définies et *continues* sur $R^n$ dont l'anomalie a cette valeur et cela pour chaque valeur de l'entier $n$.

La majoration sur l'anomalie peut encore s'énoncer sous la forme suivante : *Étant donnée une forme f sur* $R^n$, *dont la constante d'Hermite est* $\gamma(f)$, *quel que*

---

([3]) Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Chap. 3, § 30).
([4]) Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Chap. 5, § 50).
([5]) Minkowski, *Geometrie der Zahlen* (Chap. 5, § 51).
([6]) Minkowski, *Ges. Abh.*, I, p. 293-315 (lemme 1, p. 297).
([6 bis]) Nous avons donné ce résultat dans un Cours de Théorie des Nombres, à l'Université de Strasbourg en mars 1948 et nous l'avons signalé dans une Note aux *C. R. Acad. Sc.* d'octobre 1948, *cf.* ([13]).

*soit $c > 0$ sur chaque réseau G on peut trouver n éléments linéairement indépendants $p_1, \ldots, p_n$ tels que*

$$\prod_{h=1}^{n} f(p_h) \leqq (1+c)\, 2^{\frac{n-1}{2}} (\gamma(f))^n\, m(G).$$

Par une méthode analogue nous avons une majoration relative au produit des $k$ premiers minima d'une forme à $n$ variables, qui, dans certaines applications développées ailleurs, permet d'employer des formes auxiliaires d'anomalie quelconque presque aussi commodément que si leur anomalie était égale à 1.

Nous donnons aussi quelques résultats sur l'anomalie de formes particulières; ainsi nous démontrons que pour une forme dont le groupe des transformations linéaires en elle-même a des propriétés convenables $\left[\text{et dont l'exemple le plus simple est } f(x) = |x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n|^{\frac{1}{n}}\right]$ l'anomalie est égale à 1.

Introduisons le *coefficient de convexité* $\omega(f)$ d'une forme $f$ symétrique

$$\omega(f) = \sup f(x+y)\,(f(x)+f(y))^{-1}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

On a alors avec la mesure de Lebesgue en posant $S(f) = \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \leqq 1)$ :

$$\gamma(f) \leqq 2\,\omega(f)\,(\eta(f))^{\frac{1}{n}} (\text{mes int}\, S(f))^{-\frac{1}{n}},$$

$$\rho(f) \leqq 2^{\frac{3n-1}{2}} (\omega(f))^n \eta(f)\,(\text{mes int}\, S(f))^{-1},$$

$\eta(f)$ étant le « coefficient d'empilement » de $S(f)$, coefficient qui est toujours $\leqq 1$.

Si $f$ est une norme, $\omega(f) = 1$ et la majoration de $\rho(f)$ obtenue en remplaçant $\eta(f)$ par 1 est moins forte que l'inégalité (II) de Minkowski, mais plus forte que son inégalité affaiblie (II') et de démonstration plus simple. Il n'est pas exclu qu'il existe des normes avec $\eta < 2^{\frac{1-n}{2}}$ pour lesquelles l'inégalité avec $\eta$ serait meilleure que (II).

Les résultats précédents permettent aussi de majorer le produit des valeurs d'une forme aux points d'une *base* convenablement choisie d'un réseau G, en fonction de $\omega(f)$, mes int $S(f)$, $m(G)$ et du nombre de dimensions de l'espace, généralisant ainsi un résultat connu pour les normes [7], et de donner un résultat reliant le « *problème homogène et le problème non homogène* » relatifs à $f$ [généralisant des théorèmes de Kintchine [8] et Mahler [9]].

---

([7]) Le résultat pour les normes euclidiennes remonte à HERMITE, *Œuvres*, t. I, p. 103; pour les normes quelconques, *cf.* MAHLER, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 41, 1938, p. 634-637 (théorème 1).

([8]) KINTCHINE, *Math. Annal.*, t. 113, 1936, p. 398-415.

([9]) MAHLER, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 41, 1938, p. 634-637.

En outre si $\varphi$ est une *forme algébrique définie* de degré $d$ à $n$ variables, nous montrons qu'elle est arithmétiquement équivalente à une forme dont les coefficients satisfont à des majorations simples ne faisant intervenir que $n$, $d$, $\omega\left(|\varphi|^{\frac{1}{d}}\right)$ et mes$\left(\underset{x}{\mathcal{E}}(|\varphi(x)|\leqq 1)\right)$. D'où des résultats de finitude du nombre des classes pour des formes à *coefficients entiers*.

Nous entendrons dans la suite par ensemble *étoilé* un ensemble étoilé par rapport à l'origine ($x\in S$ entraîne $tx\in S$ pour $0\leqq t\leqq 1$) ([10]). On peut (*cf.* § II) définir directement pour un ensemble étoilé des quantités $\mu_h(S, G)$, $\gamma(S)$, $\rho(S)$, $\alpha(S)$, analogues à celles définies plus haut. La considération de l'ensemble étoilé le plus général n'apporte rien de nouveau par rapport à la considération des formes. En effet, à tout ensemble étoilé S on peut associer une forme $f$, l'*indicatrice* de S, qui est définie par la condition

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x)<1)\subset S\subset \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x)\leqq 1)$$

et l'on verra que pour tout réseau G tous les ensembles étoilés de même indicatrice ont mêmes $\mu_h(h=1, 2, \ldots, n)$ qui sont égaux aux $\mu_h(f, G)$. Néanmoins nous trouverons le plus souvent commode dans les démonstrations qui suivent de parler en termes d'ensembles. De ce point de vue nous sommes amenés à signaler que certaines inégalités obtenues peuvent en un certain sens se généraliser à des *ensembles arbitraires*, et à utiliser un coefficient de convexité défini pour tout ensemble.

Les premiers résultats obtenus sur les minima successifs d'une forme (ou ensemble) non convexe sont dus à Jarnik ([11]) qui a aussi publié à ce sujet avec Knichal ([12]). Ces auteurs (dont nous ne connaissons les résultats que par les comptes rendus des *Math. Reviews*) considèrent uniquement le problème des solutions de $f(x-y)<$ const. en $x$ et $y$ tels que $x-y\in G$, c'est-à-dire des minima pour un ensemble étoilé T donné comme *vectoriel* d'un ensemble étoilé $S\left[T=\underset{z}{\mathcal{E}}(z=x-y,\ x\in S,\ y\in S)\right]$ et établissent des inégalités du type $\rho(T)\leqq c(n)(\text{mes}\,\text{int}\,S)^{-1}$ et ne semblent pas s'être occupés de la notion que nous avons appelée anomalie. Nous avons indiqué un certain nombre de nos résultats dans deux Notes aux *C. R. Ac. Sc.* ([13]). Au moment où nous donnons ce travail à l'impression paraît un article de Rogers ([14]) qui cite la première de

---

([10]) Dans beaucoup de travaux de Géométrie des nombres en langue anglaise, en particulier dans ceux de Mahler, « star domain » a une signification plus restreinte, l'indicatrice étant supposée continue.

([11]) Jarnik, *Vestnik Kralovske Ceske Spolecnosti Nauk* (*Trida Matemat.*, Prirodoved, 1941.

([12]) Jarnik et Knichal, *Rospravy II Tridy Ceske Akad.*, t. 53, n° 43, 1943; les auteurs considèrent un ensemble arbitraire, mais c'est en réalité l'ensemble étoilé engendré qui est étudié.

([13]) Chabauty, *C. R. Ac. Sc.*, t. 227, 1948, p. 747 et t. 228, 1949, p. 796.

([14]) Rogers, *Kon. Nederland Akad. Wet.*, vol. 11, 1949, p. 256-263.

ces Notes $\left(\alpha \leqq 2^{n-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}}\right)$ et obtient le résultat plus précis $\alpha \leqq 2^{\frac{n-1}{2}}$, démontré dans notre seconde Note, et certains des résultats relatifs à des ensembles arbitraires qui sont donnés ici et qui ne figuraient pas dans ces Notes. Depuis est paru un article de Mahler ([14 bis]) où il démontre que $2^{\frac{n-1}{2}}$ est la meilleure majoration possible pour l'anomalie, résultat figurant dans notre seconde Note. [Les résultats de Rogers et de Mahler ont été communiqués à l'Académie des Sciences néerlandaise avant notre seconde Note, mais ont paru après elle.]

## II. — Majoration de l'anomalie.

Soit dans $R^n$ un ensemble *arbitraire* A; nous dirons qu'un réseau G de $R^n$ est *permis* si l'intersection de G et de A est vide ou se réduit à l'origine et nous poserons $\delta(A) = \inf m(G)$ pour les réseaux G permis [s'il n'y en a pas, on pose $\delta(A) = +\infty$]. Évidemment $\delta(\mathfrak{T}(A)) = |\det(\mathfrak{T})|\delta(A)$ pour toute transformation linéaire homogène $\mathfrak{T}$ et $\delta(A) \geqq \delta(B)$ si $A \supset B$.

Pour un ensemble $E \subset R^n$ nous noterons dim(E) la *dimension linéaire* de E, c'est-à-dire la dimension de la variété linéaire homogène engendrée par E. Nous noterons $\lambda A$ pour tout $\lambda \geqq 0$ l'homothétique de A par rapport à O dans le rapport $\lambda$.

Lemme. — *Soit* A *un ensemble tel que* $0 < \delta(A) < +\infty$; *soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *des nombres de l'intervalle* $]0, +\infty[$ *et tels que l'on ait*

(1) $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ *entier pour* $h = 1, 2, \ldots, n-1$,

(2) $\dim(G \cap \lambda_h A) \leqq h - 1 \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$.

*On a alors*

$$\delta(A) \prod_{h=1}^{n} \lambda_h \leqq 1.$$

Si $g \in G \cap \lambda_h A$, alors $g \in G \cap \lambda_k A$ pour $k \geqq h$ en vertu de (1), donc si $L_h$ est la variété linéaire homogène engendrée par $G \cap \lambda_h A$, $L_h \subset L_{h+1}$. On peut toujours se ramener au cas où $\lambda_1 = 1$ (les $\lambda_h$ sont alors des entiers dont chacun divise le suivant), où $G = Z^n$ (réseau des points à coordonnées entières) et où les $L_h$ sont définis par des équations $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_{h'} = 0$.

Soit H le réseau se déduisant de $Z^n$ par la transformation

$$x_h \to \lambda_n \lambda_h^{-1} x_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

---

([14 bis]) Mahler, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, vol. 11, 1949, fasc. 3, p. 633-642.

C'est un sous-réseau de $Z^n$ de masse égale à $\lambda_n^n \prod_{h=1}^{n} \lambda_h^{-1}$. Soit $p \in$ H et $\neq 0$, soit $j$ le plus petit entier tel que les coordonnées de $p$ d'indice $> j$ soient toutes nulles. L'entier $\lambda_n \lambda_j^{-1}$ divise l'entier $\lambda_n \lambda_h^{-1}$ pour tout $h \leqq j$ donc $q = \lambda_n^{-1} \lambda_j p$ appartient à $Z^n$. Par conséquent si $p \in \lambda_n$A on a $q \in \lambda_j$A, ce qui est contraire à l'hypothèse que tous les points de $Z^n \cap \lambda_j$A sont dans $L_j$ et ont donc leur coordonnée d'indice $j$ nulle. H est donc permis par rapport à $\lambda_n$A et l'on a

$$\partial(\lambda_n A) \leqq m(H) = \lambda_n^n \prod_{h=1}^{n} \lambda_h^{-1},$$

d'où résulte immédiatement l'assertion de l'énoncé.

*Anomalie des ensembles étoilés.* — Soit dans $R^n$ un ensemble étoilé S; nous poserons pour tout réseau G :

$$\mu_h(S, G) = \sup \lambda \{ \lambda \geqq 0, \dim(S \cap \lambda G) \leqq h-1 \} = \inf \lambda \{ \lambda \geqq 0, \dim(S \cap \lambda G) \geqq h \}.$$

Les $\mu_h$ sont des nombres de l'intervalle $[0, +\infty]$ et forment une suite croissante [au sens large] avec l'indice $h = 1, 2, \ldots, n$. $\Gamma$ étant l'ensemble des réseaux de $R^n$, posons :

$$\gamma(S) = \sup_{G \in \Gamma} (m(G))^{-\frac{1}{n}} \mu_1(S, G),$$

$$\rho(S) = \sup_{G \in \Gamma} (m(G))^{-1} \prod_{h=1}^{n} \mu_h(S, G),$$

$$\alpha(S) = \rho(S) (\gamma(S))^{-n} \text{ sera } l'anomalie \text{ de } S.$$

On prendra $\prod \mu_h = 0$ si $\mu_1 = 0$ et $\mu_n = +\infty$, $\alpha = 1$ si $\rho = \gamma = 0$, de sorte que les quantités introduites sont toujours définies et en particulier l'anomalie $\alpha$ est un nombre toujours $\geqq 1$.

On a évidemment

$$\mu_h(tS, t'G) = t^{-1} t' \mu_h(S, G);$$

$$(\gamma(\mathfrak{G}(S)))^n = |\det(\mathfrak{G})|^{-1} (\gamma(S))^n, \qquad \rho(\mathfrak{G}(S)) = |\det(\mathfrak{G})|^{-1} \rho(S), \qquad \alpha(\mathfrak{G}(S)) = \alpha(S),$$

pour des homothéties $x \to tx$, $x \to t'x$, et des transformations linéaires homogènes non singulières $x \to \mathfrak{G}(x)$. D'autre part $(\gamma(S))^n = (\partial(S))^{-1}$ car d'après la définition des $\mu_h$ la borne inférieure des masses des réseaux homothétiques à G et permis par rapport à S est $m(G) \mu_1^{-n}(S, G)$. Si $S \supset T$ (étoilé aussi) : $\gamma(S) \leqq \gamma(T)$.

Soit $f$ l'indicatrice de S, de sorte que

$$S' = \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) < 1) \subset S \subset S'' = \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \leqq 1),$$

on a pour tout $c>0$, $S' \subset S'' \subset (1+c)S'$. Donc pour tout réseau G les $\mu_h$ de S′ et ceux de S″ (et *a fortiori* ceux de tous les ensembles étoilés d'indicatrice $f$) sont égaux à $\mu_h(f, G)$ pour tout $h$. Les ensembles de même indicatrice ont donc même $\gamma$ et même anomalie. Si $f$ est continue, S′ est ouvert, S″ fermé, et ces ensembles « comprennent » l'intérieur et l'adhérence de S. Donc un ensemble étoilé d'indicatrice continue a même $\gamma$ et même anomalie que son intérieur et que son adhérence.

Soit $\psi(n)$ le plus petit nombre $>0$ tel que pour toute suite $x_h$ ($h=1, 2, \ldots, n$), $0<x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n < +\infty$, et pour tout nombre $c>0$ il existe une suite $y_h$ ($h=1, 2, \ldots, n$) avec $0<y_h<x_h$ ($h=1, 2, \ldots, n$) et $y_{h+1}y_h^{-1}$ entier ($h=1, 2, \ldots, n-1$) telle que

$$\prod_{h=1}^{n} x_h y_h^{-1} \leqq \psi(n)(1+c).$$

Il est évident que $\psi(n)$ est fini : par exemple en définissant $y_h = 2^{r_h} x_1(1-c)$ avec $r_h = \log_2(x_h x_1^{-1})$ on voit que $\psi(n) \leqq 2^{n-1}$. Nous démontrerons tout à l'heure que $\psi(n) = 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Théorème. — *L'anomalie d'un ensemble étoilé de* $R^n$ *est* $\leqq \psi(n)$.

Soit G un réseau de $R^n$. Nous écrirons $\mu_h$ pour $\mu_h(S, G)$. Supposons $\mu_1>0$, $\mu_n<+\infty$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ un système de $n$ nombres $>0$. Si l'on suppose $\lambda_h < \mu_h$ ($h=1, 2, \ldots, n$) on peut affirmer que $\dim(G \cap \lambda_h S) < h$; si l'on suppose en outre $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ entier ($h=1, 2, \ldots, n-1$) on peut appliquer le lemme précédent et par conséquent

$$\prod \mu_h = \prod \lambda_h \times \prod \mu_h \lambda_h^{-1} \leqq (\delta(S))^{-1} m(G) \prod \mu_h \lambda_h^{-1},$$

donc d'après la définition de $\psi(n)$

$$\prod \mu_h \leqq (\delta(S))^{-1} m(G) \psi(n)(1+c),$$

pour tout $c>0$ donc

$$\prod_{h=1}^{n} \mu_h(S, G) \leqq (\gamma(S))^n \psi(n)\, m(G). \tag{1}$$

Si maintenant $\mu_1>0$, $\mu_n=+\infty$, on peut choisir des nombres $\lambda_h>0$ avec $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ entier et $\lambda_h<\mu_h$ ayant un produit $\prod \lambda_h$ arbitrairement grand; donc en vertu du lemme on a $\delta(S)=0$ i. e. $\gamma(S)=+\infty$; l'inégalité (1) est donc automatiquement vérifiée puisque le second membre est égal à $+\infty$. Si $\mu_1=0$, $\mu_n<+\infty$, l'inégalité (1) est aussi vérifiée puisque son premier membre est nul. Enfin si $\mu_1=0$, $\mu_n=+\infty$ $\prod \mu_h$ est conventionnellement pris égal à zéro, donc (1) est toujours vérifiée, ce qui équivaut à l'énoncé du théorème.

Remarquons que les ensembles pour lesquels la convention relative à $0\times\infty$ peut avoir à jouer, sont de nature très particulière : en effet $\mu_n=+\infty$ entraîne que $\complement$S contient une famille partout dense de droites passant par l'origine, donc S est un ensemble frontière; si en outre $\mu_1=0$, S doit contenir des segments issus de l'origine de longueur arbitrairement grande.

*Détermination de la valeur exacte de* $\psi(n)$. — Étant donnée une suite $x_1,\dots,x_n$, $0<x_1\leqq x_2\leqq\dots\leqq x_n<+\infty$, appelons suite auxiliaire permise [pour la suite $(x_1,\dots,x_n)$] toute suite $z_1,\dots,z_n$ telle que $0<z_h\leqq x_h$ $(h=1,2,\dots,n)$ et que $z_{h+1}z_h^{-1}$ soit entier $(h=1,2,\dots,n-1)$. Nous noterons $[a]$ le plus grand entier $\leqq a$ et nous poserons

$$r(p,q)=[\log_2(x_q x_p^{-1})] \qquad \text{pour} \quad 1\leqq p\leqq q\leqq n;$$
$$r(p,q)=-r(q,p)-1 \qquad \text{pour} \quad 1\leqq q<p\leqq n;$$
$$z_h^{(k)}=2^{r(k,h)}x_k \qquad (h,k=1,2,\dots,n).$$

Autrement dit $r(k,h)$ est le plus grand des exposants entiers $\rho$ positifs ou négatifs tels que $2^\rho x_k$ soit $\leqq x_h$ si $h\geqq k$ et que $2^\rho x_k$ soit $<x_h$ si $h<k$. Donc la suite $z_h^{(k)}$ pour $k$ fixe est une suite auxiliaire permise pour la suite $x_1,\dots,x_n$.

Posons

$$\varphi_k=\varphi_k(x_1,\dots,x_n)=\prod_{h=1}^{n} x_h(z_h^{(k)})^{-1}=x_k^{-n}\prod_{h=1}^{n} x_h\times\prod_{n=1}^{n} 2^{-r(k,h)}.$$

On a

$$\prod_{k=1}^{n}\varphi_k=\prod_{k=1}^{n}\prod_{h=1}^{n}2^{-r(k,h)}=\prod_{h<k}2^{-r(k,h)-r(h,k)}=2^{n\frac{n-1}{2}},$$

de sorte qu'au moins un des $\varphi_k$, soit $\varphi_{k_0}$, est $\leqq 2^{\frac{n-1}{2}}$. Donc si nous prenons

$$y_h=z_h^{(k_0)}(1+c)^{-1} \qquad (c>0)$$

on a

$$0<y_h<x_h, \qquad y_{h+1}y_h^{-1} \ \text{entier}, \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{n}x_h y_h^{-1}\leqq 2^{\frac{n-1}{2}}(1+c)^n$$

pour tout $c>0$, donc $\psi(n)\leqq 2^{\frac{n-1}{2}}$.

D'autre part l'ensemble des suites auxiliaires permises pour une suite $x_1,\dots,x_n$ donnée [considérées comme des points de $R^n$] est un ensemble compact. Il y a au moins une de ces suites qui réalise le minimum de $\prod x_h z_h^{-1}$ et pour une telle suite extrême on a évidemment $z_h=x_h$ pour au moins une valeur de $h$. Considérons la suite $x_h=2^{\frac{h-1}{n}}$ $(h=1,2,\dots,n)$. Parmi les suites auxiliaires permises pour $x_h$ et telles que $z_k = x_k$ il y en a une qui donne à $\prod x_h z_h^{-1}$ sa moindre valeur; c'est évidemment la suite $t_h^{(k)} = \frac{x_k}{2}$ pour $h < k$, $t_h^{(k)} = x_k$ pour $h \geqq k$, alors

$$\prod_h t_h^{(k)} = x_k^n 2^{-k+1} = 1.$$

Donc pour toutes ces suites

$$\prod_h (t_h^{(k)})^{-1} x_h = \prod_h x_h = 2^{\frac{n-1}{2}}$$

et par conséquent le minimum de $\prod x_h z_h^{-1}$ pour toutes les suites auxiliaires permises par rapport à la suite $x_h$ considérée est $2^{\frac{n-1}{2}}$. En raisonnant comme plus haut il en résulte que $\psi(n) \geqq 2^{\frac{n-1}{2}}$. Finalement on a donc $\psi(n) = 2^{\frac{n-1}{2}}$.

## III. — Construction d'ensembles étoilés d'anomalie maxima.

Lemme. — *Soient* A *et* B *deux réseaux dans* $R^n$ *et supposons que pour tout* $y \in B$ *il existe un nombre réel* $t$ *et un* $x \in A$ *tels que* $y = tx$. *Alors il existe un réseau* $E \subset A$ *et un nombre réel* $\lambda$ *tels que* $E = \lambda B$.

En effet, soient $b_1, \ldots, b_n$ les éléments d'une base de B; on peut trouver des nombres réels $\lambda_h$ et des éléments $a_h \in A$ tels que $b_h = \lambda_h a_h$. On a

$$b_1 + b_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

mais aussi $b_1 + b_2 = \rho c = \rho\alpha_1 a_1 + \rho\alpha_2 a_2$, $c$ étant un élément convenable de A, $\rho$ un nombre réel, $\alpha_1$, $\alpha_2$ des entiers tous deux $\neq 0$; donc $\lambda_1 = \rho\alpha_1$, $\lambda_2 = \rho\alpha_2$, et $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ est un nombre rationnel. On démontrerait de même que tous les $\lambda_h\lambda_1^{-1}$ sont rationnels. Soit $\tau$ un entier tel que tous les $\tau\lambda_h\lambda_1^{-1}$ soient entiers. On voit immédiatement que si l'on prend $\lambda = \tau\lambda_1^{-1}$, $E = \lambda B$ est bien un réseau contenu dans A.

Corollaire. — *Sur chaque droite joignant l'origine à un point du réseau* A *il y a des points du réseau* B.

En effet puisque E est un réseau contenu dans le réseau A, E est un sous-groupe d'indice fini de A $\left[\text{l'indice est } j = \frac{m(E)}{m(A)}\right]$. Soit $a \in A$; parmi les éléments $a, 2a, \ldots, (j+1)a$ il y en a nécessairement deux distincts qui sont congrus mod(E). Donc il y en a un qui appartient à E.

Il résulte immédiatement du corollaire que si $a_1, \ldots, a_n$ *est une base de* A, *il existe une base* $b_1, \ldots, b_n$ *de* B *telle que*

$$b_h = \lambda_{h1} a_1 + \lambda_{h2} a_2 + \ldots + \lambda_{hh} a_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

*Ensemble étoilé non borné d'anomalie* $2^{\frac{n-1}{2}}$. — Pour tout $x \in \mathrm{R}^n$ nous noterons $pj_h(x)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ ses coordonnées et $\nu(x)$ le plus petit des entiers $h$ tels que $pj_k(x) = 0$ pour tout $k > h$. Considérons le réseau $\mathrm{Z}^n$ des points à coordonnées entières dans $\mathrm{R}^n$. Soient $e_h$ les éléments de sa base canonique (vecteurs unités sur les axes). A tout élément *primitif* $z$ de $\mathrm{Z}^n$ (i. e. $\lambda \neq 0$, $\lambda z \in \mathrm{Z}^n$ implique $|\lambda| \geqq 1$) faisons correspondre la demi-droite $\mathrm{D}_z$ formée de tous les points $\lambda z$ avec $\lambda \geqq 2^{\frac{1-\nu(z)}{n}}$. Soit D la réunion de ces demi-droites et U le complémentaire de D; c'est un ensemble étoilé. On a par construction

$$\mu_h(\mathrm{U}, \mathrm{Z}^n) = 2^{\frac{h-1}{n}} \qquad (h = 1, \ldots, n).$$

Donc

$$\prod_{h=1}^{n} \mu_h(\mathrm{U}, \mathrm{Z}^n) = 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

*Nous allons établir que* $\gamma(\mathrm{U}) = 1$, *donc* $\alpha(\mathrm{U}) \geqq 2^{\frac{n-1}{2}}$ *et par conséquent* $\alpha(\mathrm{U}) = 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Si pour $h = 1, \ldots, n$, on a pour des $a_h \in \mathrm{Z}^n$ $\nu(a_h) = h$, $|pj_h(a_h)| = 1$, on peut, par une transformation linéaire homogène laissant invariants globalement les points de $\mathrm{Z}^n$ et l'indice $\nu(x)$ de tous les $x \in \mathrm{R}^n$, donc laissant U invariant, se ramener au cas où $a_h = e_h$. D'autre part chaque point $x$ de D est sur une demi-droite $\mathrm{D}_z$ bien définie. Nous noterons $x^\star$ le point primitif $z$ de $\mathrm{Z}^n$ qui correspond ainsi à $x$. Remarquons que $|pj_h(x)| \geqq 2^{\frac{1-\nu(x)}{n}} |pj_h(x^\star)| > 2^{-1} |pj_h(x^\star)|$ donc si $0 < |pj_h(x)| \leqq 1$ on a

$$|pj_h(x^\star)| = 1.$$

Soit G un réseau permis par rapport à U, G admet une base $b_1, \ldots, b_n$ telle que, pour tout $h$, $\nu(b_h) = h$. Nous poserons $b_h = \lambda_h b_h^\star$. Par construction

$$\lambda_h \geqq 2^{\frac{1-h}{n}} \qquad \text{et} \qquad m(\mathrm{G}) = \prod_h |pj_h(b_h)| = \prod_h \lambda_h |pj_h(b_h^\star)|.$$

Lemme. — *Soit $k$ le plus petit des indices $h$, s'il en existe, tels que* $|pj_h(b_h)| < 1$. *On a* $|pj_h(b_h)| \geqq 2 |pj_k(b_k)|$ *pour tout indice* $h < k$, $|pj_h(b_h)| \geqq |pj_k(b_k)|$ *pour tout indice* $h \geqq k$.

Le choix de $k$ entraine $|pj_k(b_k^\star)| = 1$. On peut donc supposer qu'on s'est ramené au cas où $b_k^\star = e_k$.

Considérons d'abord un indice $h<k$. Formons $c_h = b_k + b_h$, on a $|pj_k(c_h)| = \lambda_k$ et puisque par hypothèse $0<\lambda_k<1$, $|pj_k(c_h^*)| = 1$. Comme d'autre part $pj_h(c_h) = pj_h(b_h) \neq 0$, $|pj_h(c_h^*)|$ est un entier $r_h \neq 0$. Les projections de $c_h$ et $c_h^*$ sont proportionnelles; on a donc $\lambda_h = r_h \lambda_k$. Par hypothèse $\lambda_h \geqq 1$, $\lambda_k < 1$ donc l'entier $r_h$ est $\geqq 2$, d'où $|pj_h(b_h)| \geqq 2|pj_k(b_k)|$.

Soit maintenant un indice $h>k$. Si $|pj_h(b_h)|<1$, alors $|pj_h(b_h^*)| = 1$, $\lambda_h < 1$, et l'on peut supposer $b_h^* = e_h$. Considérons $c_h = b_h + b_k$; on a alors $|pj_h(c_h)| = \lambda_h$, $|pj_k(c_h)| = \lambda_k$; comme $0<\lambda_h<1$, $0<\lambda_k<1$, on a $|pj_h(c_h^*)| = 1 = |pj_k(c_h^*)|$ d'où $\lambda_h = \lambda_k$ et $|pj_h(b_h)| = |pj_k(b_k)|$. Si $|pj_h(b_h)| \geqq 1$, il n'y a rien à démontrer. Il résulte donc du lemme que : ou

$$|pj_h(b_h)| \geqq 1 \quad \text{pour tout } h \qquad \text{donc} \qquad \prod |pj_h(b_h)| \geqq 1,$$

ou sinon il existe un plus petit indice $k$ pour lequel $|pj_k(b_k)| < 1$ et alors :

$$\prod |pj_h(b_h)| \geqq 2^{k-1}\lambda_k^n \geqq 2^{k-1}\left(2^{\frac{1-k}{n}}\right)^n = 1.$$

Finalement on a démontré que $m(G) \geqq 1$ pour tout réseau permis, donc $\gamma(U) \geqq 1$, et comme $Z^n$ est permis $\gamma(U) = 1$.

*Ensemble borné d'anomalie* $2^{\frac{n-1}{2}}$. — Posons

$$\|x\| = \max |pj_h(x)|, \qquad P_r = \underset{x}{\mathcal{E}}(\|x\| < r) \qquad \text{et} \qquad V_r = U \cap P_r.$$

*Quand la constante $r$ est assez grande $V_r$ a même $\gamma$ que* U [U est « réductible à un ensemble borné » au sens de Mahler ([15])] *et mêmes minima que* U *par rapport à $Z^n$ et par conséquent une anomalie aussi égale à* $2^{\frac{n-1}{2}}$.

En effet prenons $r > n\,2^{2n}$. $V_r$ contient le pavé $P_{\frac{1}{2}}$ de mesure 1. Soit G un réseau permis par rapport à $V_r$ et de masse $\leqq 1$. Il existe donc un système de $n$ éléments linéairement indépendants de G, $a_1, \ldots, a_n$, tels que

$$\|a_h\| \geqq \frac{1}{2}, \qquad \prod \|a_h\| \leqq 2^n$$

[d'après l'inégalité (II) de Minkowski ([16])] et par conséquent

$$\|a_h\| \leqq 2^{2n-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Il existe une base de G formée d'éléments $b_1, \ldots, b_n$ tels que leurs coordon-

---

([15]) Mahler, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 49, p. 298-309.

([16]) On pourrait aussi bien, en prenant une valeur un peu plus grande de $r$, utiliser l'inégalité

$$\prod \|a_h\| \leqq 2^{\frac{3n-1}{2}}$$

qui résulte du paragraphe V.

nées relatives à $a_1, \ldots, a_n$ soient comprises entre zéro et 1, donc $\|b_h\| \leqq n\, 2^{2n-1}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Les points $a_h$, $b_h$, $b_i + b_j$ appartiennent donc à $P_r \cap \complement V_r$ donc à $\complement U$, il en résulte que $b_i = \rho_i z_i$, $z_i \in Z^n$, et que les $\rho_i \rho_j^{-1}$ sont des nombres rationnels, G est donc homothétique à un réseau $H \subset Z^n$. En outre si $x \in G$, $\nu(x) = h$ et si $|pj_h(x)|$ (nécessairement $\neq 0$) est $< 1$, le point primitif de $Z^n$ porté par la demi-droite joignant $x$ à l'origine, soit $x^\star$, est tel que $|pj_h(x^\star)| = 1$. C'est évident si $\|x\| < r$. Sinon il existe $y \in G$ avec $\nu(y) < h$ tel que $\|y - x\| < r$ puisque $P_r$ contient une base du sous-groupe de G formé des éléments $y \in G$ avec $\nu(y) < h$; on a alors $|pj_h((x-y)^\star)| = 1$ donc $|pj_h(x^\star)| = 1$.

Les remarques qui précèdent indiquent qu'on peut démontrer que $m(G) \geqq 1$ (donc $= 1$) et par conséquent $\gamma(V_r) = 1$ par les mêmes raisonnements qui ont permis de démontrer $\gamma(U) = 1$ dans l'alinéa précédent. D'où le résultat annoncé puisque $\mu_h(V_r, Z^n) = \mu_h(U, Z^n)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

*Ensemble étoilé régulier d'anomalie comprise entre* 1 *et* $2^{\frac{n-1}{2}}$. — Nous appellerons ici ensemble étoilé *régulier* un ensemble étoilé dont l'indicatrice est une forme continue définie [$f(x) = 0$ pour $x = 0$ seulement]. Un tel ensemble est en particulier borné et contient un voisinage de l'origine. L'ensemble $V_r$ défini ci-dessus a ces dernières propriétés mais n'est pas régulier car son indicatrice n'est évidemment pas continue.

Mais on peut aisément former *une famille d'ensembles étoilés* réguliers « tendant » vers U et *dont l'anomalie est arbitrairement voisine de* $2^{\frac{n-1}{2}}$; on peut s'arranger pour que l'anomalie des ensembles de cette famille *prenne toutes les valeurs* $\geqq 1$ et $< 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Soient A une des demi-droites avec lesquelles on a construit D, $s$ son origine, $k = \nu(s)$, soit $t \in [0, +\infty]$ et soit $A_t$ le cône engendré par les demi-droites d'origine $s$ qui percent l'hyperplan $pj_k(x) = 2pj_k(s)$ en des points $y$ tels que $|pj_j(y - 2s)| \leqq t$ pour tout $j \neq k$. Soit $D_t$ la réunion de tous les ensembles $A_t$ et $W_t = \complement D_t$. $W_0$ est identique à U, $W_\infty$ est le pavé

$$|pj_h(x)| < 2^{\frac{1-h}{n}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Tous les $W_t$ sont des ensembles étoilés ouverts, ils sont emboités ($t > t'$ entraine $W_t \subset W_{t'}$, en particulier, pour tout $t$, $W_t \supset W_\infty$) et $U = \bigcup_t W_t$. Il en résulte [17] que $\lim_{t \to 0} \gamma(W_t) = \gamma(U)$. Comme pour tout $t$, $\mu_h(W_t, Z^n) = 2^{\frac{1-h}{n}}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ on voit donc que $\lim_{t \to 0} \alpha(W_t) = 2^{\frac{n-1}{2}}$.

---

[17] D'après le « lemme d'approximation » du paragraphe VI.

Démontrons maintenant que $W_t$ est un ensemble *étoilé régulier* pour tout $t > 0$. En effet adjoignons à $R^n$ un hyperplan à l'infini F; les points à l'infini des A sont partout denses dans F. Les intérieurs $\mathring{A}_t$ des cônes $A_t$ ($t$ fixe $> 0$) ont pour traces sur F des ensembles ouverts dans F et non vides. Comme F est compact il suffit de prendre un nombre fini d'entre eux pour recouvrir F. Considérons les cônes correspondants $A_{ti}$, $i \in I$ fini. $W'_t = \complement \bigcup_{i \in I} \mathring{A}_{ti}$ est un fermé dans $R^n \cup F$, qui ne rencontre pas F; c'est donc une partie bornée de $R^n$. $W'_t$ contient l'adhérence $\overline{W}_t$ de $W_t$, $\overline{W}_t$ est donc borné et contient les sommets $s$ d'un nombre fini de cônes $A_t$, $D_t$ est donc identique à la réunion d'un nombre fini d'ensembles $A_t$ et $W_t$ est un domaine polyédral borné, limité par un nombre fini de faces hyperplanes qui ne passent pas par l'origine et même dont la distance à l'origine est pour $t \leq t_0 < +\infty$ supérieure à une constante $> 0$. Son indicatrice est bien une fonction finie, définie et continue.

Écrivons l'équation de la frontière de $W_t(t > 0)$ en coordonnées « polaires » $\rho = f(\theta, t)$; on montre aisément que $f$ est continu en $t$ uniformément par rapport à $\theta$. Donc à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta(t)$ tel que $|t' - t| \leq \eta$ entraîne $(1 - \varepsilon) W_t \subset W_{t'} \subset (1 + \varepsilon) W_t$; il en résulte que les minima de $W_t$ par rapport à *tout* réseau fixe varient continûment avec $t$ par conséquent l'anomalie de $W_t$ est aussi fonction continue de $t$. Comme $\alpha(W_\infty) = 1$ et $\lim_{t \to 0} \alpha(W_t) = 2^{\frac{n-1}{2}}$, l'anomalie des $W_t$ prend toutes les valeurs intermédiaires quand $t$ parcourt l'intervalle $[\infty, 0]$.

Nous pouvons donc résumer les résultats sur l'anomalie de la façon suivante :

THÉORÈME. — *Dans* $R^n$ *tout ensemble étoilé a une anomalie* $\leq 2^{\frac{n-1}{2}}$; *il existe des ensembles étoilés bornés d'anomalie* $= 2^{\frac{n-1}{2}}$; *il existe des ensembles étoilés réguliers dont l'anomalie prend toute valeur* $\geq 1$ *et* $< 2^{\frac{n-1}{2}}$.

## IV. — Anomalie de certains ensembles.

Appelons *jauge* tout ensemble étoilé dont l'indicatrice $f$ est une norme; elle sera dite *euclidienne* si la norme $f$ est la racine carrée d'une forme quadratique définie positive. L'indicatrice étant alors continue nous pouvons nous borner dans les démonstrations a la considération des jauges *ouvertes*. Le résultat de Minkowski donné par la relation (II) du paragraphe I peut donc s'énoncer : *L'anomalie de toute jauge euclidienne* K *est égale à* 1.

Reproduisons la brève démonstration de Minkowski. On peut toujours se ramener au cas où le réseau considéré dans $R^n$ est le réseau des points à coordonnées entières $Z^n$, les minima de $f$ (ou de K), $\mu_h = \mu_h(f, Z^n) = \mu_h(K, Z^n)$

atteints pour des points $p_h$ tels que $pj_h(p_h) \neq 0$, $pj_k(p_h) = 0$ pour tout $k > h$, et $f^2$ mise sous la forme $\sum X_i^2$ où les $X_i = \sum_j a_{ij} x_j$ sont des formes linéaires indépendantes avec $a_{ii} \neq 0$, $a_{ij} = 0 (j > i)$, de déterminant égal à 1. Posons $f'^2 = \sum X_h^2 \mu_h^{-2}$. On a, pour tout $x \in Z^n$ tel que $pj_h(x) \neq 0$, $pj_k(x) = 0$ pour tout $k > h$, $f(x) \geqq \mu_h$ donc

$$f'^2(x) = \sum_{i=1}^{h} X_i^2 \mu_i^{-2} \geqq \mu_h^{-2} \sum f^2(x) \geqq 1.$$

Donc $Z^n$ est permis par rapport à la jauge $\underset{x}{\mathcal{E}}(f'(x) < 1)$ qui se déduit de la première par une transformation linéaire homogène de déterminant $\prod \mu_h$.

Donc on a toujours

$$\prod \mu_h(K, Z^n) \leqq (\gamma(K))^n \quad \text{donc } \alpha(K) = 1.$$

D'autre part le résultat suivant est probablement bien connu quoique nous ne lui connaissions pas de référence :

*Pour toute jauge* J *dans* $R^2$ *l'anomalie est égale à* 1.

Soient $p_1$, $p_2$ deux points réalisant les « minima » de J par rapport à un réseau G, i. e. $p_1$ (resp $p_2$) appartient à la frontière de $J_1 = \mu_1 J$ (resp $J_2 = \mu_2 J$), où $\mu_1 = \mu_1(J, G)$, $\mu_2 = \mu_2(J, G)$. Soit T une droite d'appui de $J_2$ parallèle à $Op_1$ et $t \in J_2 \cap T$. Soit $\mathcal{L}$ la transformation linéaire définie par $t \to t$, $\mu_2 \mu_1^{-1} p_1 \to p_1$ de déterminant $\mu_2^{-1}\mu_1$. Comme toute parallèle à $Op_1$ qui rencontre $J_2$ rencontre le segment joignant $t$ à son symétrique par rapport à O, on voit aisément que la jauge $J' = \mathcal{L}(J_2)$ est contenue dans $J_2$ et que G est par conséquent un réseau permis par rapport à J', d'où

$$\mu_1 \mu_2 \delta(J) = \delta(J') \leqq m(G),$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Pour un nombre de dimensions $n > 2$ ce mode de démonstration ne semble pas se généraliser tel quel ([17 bis]). En utilisant outre des transformations linéaires des transformations continues non linéaires convenables on obtient ([18]) l'inégalité de Minkowski

$$\rho(J) \leqq 2^n (\text{mes}(J))^{-1}.$$

---

([17 bis]) Il nous a permis seulement de démontrer que l'anomalie des jauges de $R^n$ est $\leqq \psi'(n) < \psi(n)$, où $\psi'(n)$ est l'analogue de $\psi(n)$ relativement à des suites $x_1, \ldots, x_n$ avec $x_{n-1} = x_n$. Par exemple *l'anomalie des jauges de* $R^3$ est $\leqq 2^{\frac{2}{3}}$, alors qu'il y a des ensembles étoilés de $R^3$ d'anomalie égale à 2.

([18]) *Cf.* la présentation géométrique très concise de DAVENPORT, *Quart. J. of Math. Oxford ser.*, vol. 10, 1939, p. 119-121.

Mais le théorème de Hlawka ([19]) montre que pour tout ensemble quarrable A, $\varepsilon(A) = \text{mes}(A)(\delta(A))^{-1}$ est toujours $\geqq 1$. Les améliorations de ce théorème pour une jauge générale ([20]) permettent seulement de remplacer $1$ par une constante $c$ plus grande ($c = 4{,}59$ pour $n$ assez grand). On peut donc tirer de là une majoration de l'anomalie pour les jauges :

$$\alpha(J) \leqq 2^n(\text{mes}(J))^{-1}(\gamma(J))^{-n} \leqq 2^n c^{-1},$$

mais elle est *moins forte que celle que nous avons établie pour l'ensemble étoilé le plus général.*

Évidemment les jauges pour lesquelles $\gamma(J) = 2(\text{mes}(J))^{-\frac{1}{n}}$ ont d'après l'inégalité (II) de Minkowski une anomalie égale à $1$. Ce sont comme on sait les jauges J telles qu'il existe un réseau G ayant la propriété suivante : les ensembles $J + g$, $g \in G$ « *pavent* » l'espace, c'est-à-dire forment une partition de $R^n$ à un ensemble de mesure nulle près; exemple :

$$J = \underset{x}{\mathcal{E}}(\,|pj_h(x)| < 1).$$

Remarquons que les jauges particulières dont nous avons parlé : jauges euclidiennes et jauges de « pavage », qui ont l'anomalie $1$, sont les seules dont on connaisse l'anomalie, et qu'*on ignore s'il existe des jauges d'anomalie* $> 1$.

On peut utiliser les résultats précédents pour majorer non trivialement $\left(\text{c'est-à-dire mieux que par } 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$ l'anomalie de certaines jauges ou de certains ensembles étoilés S, par exemple quand l'ensemble est compris entre deux jauges euclidiennes « suffisamment voisines ». Soit $\pi(S)$ la borne inférieure des valeurs absolues des déterminants des transformations linéaires homogènes $\mathcal{L}$ telles que, K étant une jauge euclidienne.

$$K \subset S \subset \mathcal{L}(K),$$

alors on montre aisément que $\alpha(S) \leqq \pi(S)$. (Dans le cas $n = 2$ on peut utiliser une jauge arbitraire à la place d'une jauge euclidienne.)

D'autre part si S contient une jauge euclidienne K (ou une jauge arbitraire dans le cas $n = 2$) on a évidemment la majoration

$$\alpha(S) \leqq (\gamma(K))^n(\gamma(S))^{-n}$$

qui peut être non triviale.

Exemple : *forme cubique binaire à discriminant positif.* — On peut se ramener à la forme $x_1^3 + x_2^3$. Soit C le domaine plan défini par $|x_1^3 + x_2^3| \leqq 1$. On sait

---

([19]) Hlawka, *Math. Zeits.*, t. 49, 1943, p. 285-312.

([20]) Mahler, *Duke Math. J.*, t. 13, 1946, p. 611-621; Davenport-Rogers, *Ibid.*, t. 14, 1947, p. 367-375.

[Mordell ([21])] que $(\gamma(C))^2 = \left(\frac{27}{23}\right)^{\frac{1}{6}}$. Or C contient la jauge J réunion de l'ensemble défini par $x_1x_2 \geqq 0$, $x_1^2+x_2^2 < 1$ et de l'ensemble défini par $x_1x_2 \leqq 0$, $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$. Contentons-nous de la majoration

$$(\gamma(J))^2 \leqq 4(\operatorname{mes}(J))^{-1} = 8(\pi+4)^{-1}$$

il en résulte

$$\alpha(C) \leqq 8(23)^{\frac{1}{6}}((\pi+4)\sqrt{3})^{-1} < 1,1.$$

*Anomalie des ensembles automorphes.* — Donnons maintenant un exemple d'ensemble étoilé *non borné* dont l'anomalie est égale à 1. Soit S un ensemble étoilé. Appelons *automorphisme* de S toute transformation linéaire homogène $\mathcal{L}$ de déterminant $\neq 0$ telle que $\mathcal{L}(S) = S$. On peut remarquer que si $0 < \delta(S) < +\infty$ le déterminant de $\mathcal{L}$ est nécessairement $\pm 1$, puisque

$$\delta(\mathcal{L}(S)) = |\det(\mathcal{L})|\,\delta(S) = \delta(S).$$

Appelons *automorphisme distingué* de S tout automorphisme de déterminant 1 ayant une valeur propre simple réelle et $> 1$ tandis que toutes les autres valeurs propres (dont certaines peuvent être complexes) sont en valeur absolue $< 1$. A un tel automorphisme distingué associons la droite portant le vecteur propre correspondant à la valeur propre simple $> 1$, que nous appellerons son *axe*. Si S admet un automorphisme distingué il est nécessairement non borné. Si S contient un voisinage de O il contient un segment I de l'axe A de tout automorphisme distingué $\mathcal{L}$, dont O est point interne, donc $S \supset \mathcal{L}^h(I)$ pour tout $h \in Z$ et par conséquent S contient l'axe A tout entier. On a alors le résultat suivant.

*Si l'ensemble étoilé ouvert* S *de* $R^n$, *contenant l'origine, admet n automorphismes distingués* $\mathcal{L}_h$ *dont les axes* $A_h$ *sont linéairement indépendants, l'anomalie de* S *est égale à* 1 ;

comme corollaire du résultat plus précis :

*Pour un tel ensemble* S, *quel que soit le réseau* G *on a*

$$\mu_h(S, G) \leqq \gamma(S)(m(G))^{\frac{1}{n}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

$\gamma(S)$ est $> 0$. Supposons le $< +\infty$, sinon le résultat à démontrer est trivial. Soit

$$S_t = \underset{x}{\mathcal{E}}\left(x \in S, \sum |x_h| < t\right).$$

Les $S_t (t > 1)$ sont des ensembles étoilés ouverts emboîtés ($t' > t$ entraîne

([21]) Mordell, *J. London Math. Soc.*, t. 29, 1944, p. 92-99.

$S_{t'} \supset S_t$), leur réunion est l'ouvert S contenant l'origine. Il en résulte ([22]) que $\lim_{t \to \infty} \gamma(S_t) = \gamma(S)$ et par conséquent quel que soit $c > 0$ on peut choisir $t$ de façon que pour $T = (1 + c)S_t$ on ait $\gamma(T) < \gamma(S)$. Soit G un réseau de masse $m(G) = \delta(S) = (\gamma(S))^{-n}$. On a $m(G) < \delta(T) = (\gamma(T))^{-n}$. Il existe donc dans T un point $p \in G$ et $\neq 0$, et il en est de même pour $\mathcal{L}(T)$, $\mathcal{L}$ étant n'importe quel automorphisme de S. D'autre part, pour tout $c' > 0$ on peut trouver $r$ entier positif, tel que pour tout $h = 1, 2, \ldots, n$ les points de $\mathcal{L}_h^r(T)$ satisfassent aux inégalités $|x_j| < c'$, $j \neq h$ (on suppose que les $A_h$ sont pris pour axes de coordonnées). Donc ou bien $A_h$ porte un point $\neq 0$ de G, ou bien il existe des points $p$ de G avec $|pj_j(p)|$ arbitrairement petit $j \neq h$ et $|pj_h(p)|$ arbitrairement grand situés dans des transformés de T par des automorphismes de S. Finalement on obtient donc $n$ points linéairement indépendants de G contenus dans $(1 + c)S$. Par conséquent on a bien

$$\mu_h(S, G) \leqq 1 = \gamma(S)(m(G))^{\frac{1}{n}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

On ramène l'étude d'un réseau quelconque à celle d'un réseau de masse $\delta(S)$ par une homothétie convenable, d'où le résultat annoncé.

*Remarque.* — Si l'indicatrice $f$ de S est continue, S est équivalent à son intérieur; on peut donc alors dans l'énoncé supprimer la condition que S est un ouvert (on suppose toujours qu'il contient un voisinage de l'origine).

## V. — Résultats faisant intervenir des coefficients de convexité.

Appelons *vectoriel* d'un ensemble $A \subset R^n$ et notons $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble des $x \in R^n$ tels qu'il existe $u$ et $v$ dans A avec $u - v = x$. Si A est étoilé $\mathcal{V}(A)$ aussi, la réciproque n'étant pas toujours vraie.

Posons

$$\Delta(A) = \delta(\mathcal{V}(A)), \qquad \eta(A) = \text{mes int}(A)(\Delta(A))^{-1}$$

(*coefficient d'empilement* de A). On prendra conventionnellement $\eta = 1$ si $\Delta(A) = 0$, $\text{mes int}(A) = 0$, et si $\Delta(A) = +\infty$, $\text{mes int}(A) = +\infty$. Appelons *réseau d'empilement* de A tout réseau G tel que les ensembles $A_g = A + g$ soient sans points communs deux à deux quand $g$ parcourt G. On voit que $\Delta(A) = \inf m(G)$ pour tous les réseaux d'empilement de A.

Nous appellerons *lemme de Minkowski* ([23]) le résultat suivant : *Le coefficient d'empilement est toujours* $\leqq 1$.

---

([22]) D'après le « lemme d'approximation » du paragraphe VI.

([23]) Le résultat est implicite dans Minkowski quand il démontre son inégalité (I) ([3]), il est contenu dans un résultat plus général de BLICHFELDT, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 15, 1914, p. 227-235.

Soit G un réseau d'empilement de A, B un ensemble fermé contenu dans A, P un domaine fondamental mesurable de $R^n$ par rapport à G (par exemple un parallélotope fondamental) et posons $P_g = P + g$, $B_g = B + g$, $g \in G$. Les ensembles $C_g = B_g \cap P$ sont sans points communs deux à deux et si l'on pose $D_g = B \cap P_g$ on a $C_g = D_{-g} + g$. Les $D_g$ forment une partition dénombrable de B en ensembles mesurables; on a donc

$$\operatorname{mes} B = \sum \operatorname{mes} D_g = \sum \operatorname{mes} C_g \leqq \operatorname{mes} P = m(G).$$

Comme on peut prendre B tel que

$$\operatorname{mes} B > (1 - c) \operatorname{mes} \operatorname{int}(A) \qquad \text{et} \qquad m(G) < (1 + c)\, \Delta(A),$$

pour tout $c > 0$, on voit qu'en résulte la propriété annoncée.

Définissons un premier *coefficient de convexité* $\Omega(A)$ par $(\Omega(A))^n = \inf |\det(\mathcal{L})|$ pour toutes les transformations linéaires homogènes $\mathcal{L}$ telles que $\mathfrak{W}(A) \subset \mathcal{L}(A)$, en posant $\mathfrak{W}(A) = \frac{1}{2} \mathfrak{V}(A)$ (24).

Pour une jauge J, $\Omega(J) = 1$ car $\mathfrak{W}(J) = J$. Pour tout ensemble de mesure intérieure $> 0$ et $< +\infty$, on démontre aisément que $\Omega(A)$ est $\geqq 1$. Pour tout ensemble borné et contenant un voisinage de l'origine on a évidemment $1 \leqq \Omega(A) < +\infty$.

Soit K un ensemble de mesure intérieure $> 0$ et $< +\infty$ tel que $\Omega(K) = 1$; on a nécessairement $\operatorname{mes}\operatorname{int}(K) = \operatorname{mes}\operatorname{int}(\mathfrak{W}(K))$. Si K est supposé ouvert, puisque deux ouverts emboîtés ayant même mesure coïncident, on voit que $K = \mathfrak{W}(K)$, ce qui montre que K est symétrique par rapport à O [car $\mathfrak{W}(A)$ est toujours symétrique] et convexe $\left[\text{si } u \in K,\ v \in K \text{ alors } -v \in K \text{ puisque K est symétrique, d'où } \frac{u+v}{2} \in K \text{ puisque } K = \mathfrak{W}(K)\right]$. Comme en outre K a une mesure $> 0$ et $< +\infty$, c'est une jauge. Nous avons démontré plus généralement que *tout ensemble* K *de mesure intérieure* $> 0$ *et* $< +\infty$ *avec* $\Omega(K) = 1$ *est une jauge*, mais la démonstration étant un peu longue nous l'omettrons.

La connaissance du coefficient de convexité d'un ensemble étoilé S permet de *majorer* $\gamma(S)$ *et par conséquent* $\rho(S)$ *en fonction de la mesure intérieure de* S. En effet pour un ensemble A arbitraire on a

$$|\det(\mathcal{L})|\, \delta(A) = \delta(\mathcal{L}(A)) \geqq \delta(\mathfrak{W}(A)) = 2^{-n} \delta(\mathfrak{V}(A)) = 2^{-n} \Delta(A),$$

pour toutes les transformations $\mathcal{L}$ telles que $\mathfrak{W}(A) \subset \mathcal{L}(A)$. Il en résulte donc

$$(2\Omega(A))^n \delta(A) \geqq \Delta(A), \qquad i.e. \qquad \varepsilon(A) \leqq 2\Omega(A)^n \eta(A).$$

(24) *Cf.* Rado, *J. London Math. Soc.*, t. 21, 1946, p. 34-46. Généralisant une idée de Mordell et de Van der Corput, il considère des « $\mathfrak{T}$-ensembles » définis par la condition que $\mathfrak{W}(A) \subset \mathfrak{T}(A)$, $\mathfrak{T}$ étant une transformation linéaire.

Si S est un ensemble étoilé, on a donc

$$(1) \qquad \gamma(S) \leqq 2\Omega(S)(\eta(S))^{\frac{1}{n}}(\text{mes int}(S))^{-\frac{1}{n}}$$

et en appliquant le théorème de l'anomalie

$$(2) \qquad \rho(S) \leqq 2^{\frac{3n-1}{2}}(\Omega(S))^n \eta(S)(\text{mes int}(S))^{-1}.$$

En particulier s'il s'agit d'une jauge J

$$(3) \qquad \rho(J) \leqq 2^{\frac{3n-1}{2}} \eta(J)(\text{mes}(J))^{-1},$$

(1) et (2) généralisent les inégalités (I) et (II) de Minkowski à un ensemble étoilé arbitraire [naturellement elles sont triviales si $\Omega(A) = +\infty$]. L'inégalité (3) où l'on remplace $\eta(A)$ par 1 est plus faible que l'inégalité (II) de Minkowski sur les jauges, mais plus forte que son inégalité affaiblie (II′) et de démonstration plus facile.

Si l'on définit

$$\omega(A) = \inf \lambda \{\lambda > 0,\ \mathfrak{Kv}(A) \subset \lambda A\},$$

on a un *second coefficient de convexité* évidemment $\geqq \Omega(A)$.

Dans le cas d'un ensemble *étoilé* S *symétrique* par rapport à O il coïncide avec le *coefficient de convexité de la forme* $f$ [25] indicatrice de S, qu'on définira par

$$\omega(f) = \sup f(x+y)(f(x)+f(y))^{-1}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

D'après l'inégalité (3) ci-dessus pour tout $c > 0$ *on peut trouver dans chaque réseau* G *un système de* $n$ *éléments linéairement indépendants* $p_1, \ldots, p_n$ *tels que* [S désignant $\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \leqq 1)$]

$$(4) \qquad \prod_h f(p_h) \leqq (1+c)\, 2^{\frac{3n-1}{2}}(\omega(f))^n \eta(S)(\text{mes int}(S))^{-1} m(G),$$

nous supposerons les indices choisis de façon que $f(p_{h+1}) \geqq f(p_h)$ $(h = 1, \ldots, n-1)$. Il existe donc une base $a_1, \ldots, a_n$ telle que pour $h = 1, \ldots, n$ on ait

$$a_h = t_{1h}p_1 + t_{2h}p_2 + \ldots + t_{hh}p_h \qquad \text{avec} \quad 0 < t_{ih} \leqq 1 \quad (i = 1, \ldots, h).$$

Écrivons $\omega$ pour $\omega(f)$ et posons

$$\omega_h = \sup f(x_1 + \ldots + x_h)(f(x_1) + \ldots + f(x_h))^{-1},$$

on a $\omega_1 = \omega$ et l'on voit aisément [*cf.* [25]] que

$$\omega_h \leqq (k\omega^r + (h-k)\omega^{r-1})h^{-1} \leqq \omega^r,$$

---

[25] MAHLER, *Kon. Ned. Akad. Wet.*, t. 49, p. 298-309.

les entiers $k$ et $r$ étant définis en fonction de $h$ par

$$2^{r-1} < h = 2^{r-1} + k \leq 2^r.$$

On a donc en particulier

$$\omega_h \leq \omega^{1+\log_2 h}.$$

Il en résulte pour les éléments de la base mise en évidence

$$f(a_h) \leq \omega_h(f(p_1) + \ldots + f(p_h)) \leq h\,\omega_h f(p_h),$$

$$\prod_h f(a_h) \leq n! \prod_h \omega_h \prod_h f(p_h).$$

Par conséquent *pour tout* $c > 0$ *on peut trouver dans chaque réseau* G *une base* $a_1, \ldots, a_n$ *telle que*

$$(5) \qquad \prod_h f(a_h) \leq (1+c)\, 2^{\frac{3n-1}{2}}\, n!\,(\omega(f))^{2n+\log_2 n!}\,\eta(S)\,(\text{mes int}(S))^{-1}\, m(G).$$

Les inégalités établies dans ce paragraphe peuvent devenir triviales (le second membre étant infini ou indéterminé) dans certains cas. On est assuré qu'il n'en est pas ainsi quand les ensembles dont il est question sont bornés et contiennent un voisinage de l'origine puisque alors $\Omega$, $\omega$ et mes int(S) sont $> 0$ et $< +\infty$, par exemple quand $f$ est une forme continue et définie. Les quantités $\Omega$ et $\omega$ sont évidemment des invariants affines des ensembles, ou formes considérés.

Soit maintenant $f = |\varphi|^{\frac{1}{d}}$, où $\varphi$ est une forme algébrique (polynome homogène) de degré $d$, à $n$ variables, à coefficients réels, qui est supposée *définie* (toujours $> 0$ ou toujours $< 0$, en dehors de l'origine). Alors $f$ est une forme régulière; son coefficient de convexité $\omega$ est donc $> 0$ et $< +\infty$. Nous désignerons par V la mesure ($> 0$ et $< +\infty$) de l'ensemble compact $\underset{x}{\mathcal{E}}(|\varphi(x)| \leq 1)$. D'après ce qui précède il existe une transformation linéaire homogène $\mathcal{T}$, à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que pour $g = \mathcal{T}(f)$

$$\prod_h g(e_h) \leq M(n, d, \omega)\, V^{-1}$$

où les $e_h$ sont les vecteurs unitaires sur les axes.

Soit $a = \inf f(x)$ pour $x \in Z^n$ ($x \neq 0$); $a$ est $> 0$ et par construction on a

$$a = g(e_1) = \inf g(x) \qquad \text{pour} \quad x \in Z^n \quad (x \neq 0).$$

Donc

$$g(e_h) \leq a^{-n+1}\, M(n, d, \omega)\, V^{-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

et pour tout $x$ tel que $|x_h| \leq 1$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) :

$$g(x) \leq \omega_n(g(e_1) + \ldots + g(e_n)) \leq a^{-n+1}\, H(n, d, \omega)\, V^{-1}.$$

LEMME. — *Si un polynome $\psi$ à $n$ variables de degré $d$ à coefficients réels, a sa valeur absolue majorée par une constante* K *sur le cube* $|x_h| \leqq 1$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, *ses coefficients sont bornés par une même constante ne dépendant que de* $n$, $d$ *et* K.

En effet soient $p_1, \ldots, p_n$ les $n$ premiers nombres premiers et $x^{(k)}$ le point de $R^n$ de coordonnées $p_1^k, \ldots, p_n^k$ ($k$ entier rationnel). Les monomes à $n$ variables de degré $\leqq d$ étant désignés par $X_1, \ldots, X_m$ $(m = m(n, d))$ à tout point $x$ de $R^n$ correspond dans $R^m$ le point X dont les coordonnées sont les valeurs des monomes $X_h$ quand les variables y ont pour valeurs les coordonnées de $x$. Aux points $x^{(k)}$ correspondent ainsi les points $X^{(k)}$ de $R^m$. On a

$$\psi(x) = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_m X_m.$$

Écrivons les égalités

$$\alpha_1 X_1^{(k)} + \ldots + \alpha_m X_m^{(k)} = \psi(x^{(k)}) \qquad (k = 0, -1, -2, \ldots, -m+1).$$

On peut les considérer comme un système de $m$ équations linéaires à $m$ inconnues $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ (les coefficients de $\psi$). Le déterminant $\det(X_h^{(k)}) = D(n, d)$ des coefficients des inconnues est par construction un déterminant de Van der Monde, qui est $\neq 0$ car $X_h^{(-1)} \neq X_g^{(-1)}$ si $g \neq h$. D'où, par une majoration évidente, $|\alpha_h| \leqq m!\, |D(n, d)|^{-1} K$.

Les résultats du début de ce paragraphe et le lemme montrent donc que $\varphi$ *est arithmétiquement équivalente à une forme $\psi$ dont les coefficients satisfont aux inégalités suivantes :* $\alpha_i^*$ désignant les coefficients des monomes à une seule variable dans $\psi$, avec $\alpha_1^* \leqq \alpha_2^* \leqq \alpha_3^* \leqq \ldots$ et $\alpha_j$ les autres coefficients

$$\prod_i \alpha_i^* \leqq A(n, d, \omega) V^{-d}, \tag{6}$$

$$\alpha_j (\alpha_1^*)^{n-1} \leqq B(n, d, \omega) V^{-d}; \tag{7}$$

A et B étant des fonctions des *seules* quantités $n$, $d$ et $\omega$.

Si en outre les coefficients de $\varphi$ sont supposés *entiers*, $|\varphi(x)| \geqq 1$ pour $x \in Z^n$ $(x \neq 0)$ et l'on voit que $\varphi$ est équivalente à une forme dont les coefficients sont bornés par une constante ne dépendant que de $n$, $d$, $\omega$, V. En particulier *il n'y a qu'un nombre fini de formes algébriques définies à coefficients entiers inéquivalentes pour lesquelles* $n + d + \omega + V^{-1} <$ const., car A et B sont bornés si $n$, $d$ et $\omega$ le sont.

C. Jordan ([25bis]) a démontré des résultats analogues, sans se restreindre aux formes définies, mais ses majorations sont moins simples.

---

([25bis]) C. JORDAN, *Journ. Éc. Polyt.*, t. 29, cahier 48, 1880, p. 111-150.

## VI. — Applications.

*Relation entre le « problème homogène » et le « problème non homogène » relatifs à une forme.* — Soit $f$ une forme symétrique. Nous supposerons le coefficient de convexité $\omega = \omega(f)$ fini et nous appellerons V la mesure intérieure de l'ensemble S associé, supposée $> 0$. Soit G un réseau; prenons encore $n$ éléments linéairement indépendants $p_1, \ldots, p_n$ rendant $\prod f(p_h)$ voisin de sa borne inférieure.

Soit $y$ un point quelconque de $\mathrm{R}^n$, $y = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n$. Soit $\lambda'_h$ l'entier le plus voisin de $\lambda_h$, de sorte que $|\lambda_h - \lambda'_h| \leqq \frac{1}{2}$. Soit $x = \lambda'_1 p_1 + \ldots + \lambda'_n p_n$; c'est un élément de G et

$$f(x-y) \leqq 2^{-1}\, \omega_n (f(p_1) + \ldots + f(p_n)) \leqq 2^{-1}\, n\, \omega_n f(p_n).$$

Mais la majoration du produit des $f(p_h)$ donne

$$(f(p_1))^{n-1} f(p_n) \leqq (1+\varepsilon)\, 2^{\frac{3n-1}{2}}\, \omega^n\, \mathrm{V}^{-1}\, m(\mathrm{G}).$$

Donc

$$f(x-y)\,(f(p_1))^{n-1} \leqq (1+\varepsilon)\, \mathrm{L}(f, \mathrm{G})$$

où

$$\mathrm{L}(f, \mathrm{G}) = n\, 2^{\frac{3n-3}{2}}\, \omega^{n+1+\log_2 n}\, \mathrm{V}^{-1}\, m(\mathrm{G}).$$

En nous ramenant à $\mathrm{G} = \mathrm{Z}^n$ comme on peut toujours le faire nous avons le résultat suivant :

Théorème. — *Soit $f$ une forme symétrique sur* $\mathrm{R}^n$, $\omega$ *son coefficient de convexité supposé fini et* $\mathrm{V} = \operatorname{mes\,int}\big(\underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) \leqq 1)\big)$ *supposé* $> 0$. *Soit* C *n'importe quelle constante* $> n\, 2^{\frac{3n-3}{2}}\, \omega^{n+1+\log_2 n}\, \mathrm{V}^{-1}$. *S'il existe* $y \in \mathrm{R}^n$ *tel que l'équation* $f(x-y) \leqq k$ *n'ait pas de solution en* $x \in \mathrm{Z}^n$, *alors l'équation* $f(x) \leqq (\mathrm{C}k^{-1})^{\frac{1}{n-1}}$ *a une solution en* $x \in \mathrm{Z}^n$ *et* $\neq 0$.

*Si l'équation* $f(x) \leqq m$ *n'a pas de solution en* $x \in \mathrm{Z}^n$ *et* $\neq 0$ *alors pour tout* $y \in \mathrm{R}^n$ *l'équation* $f(x-y) \leqq \mathrm{C}m^{-n+1}$ *a une solution en* $x \in \mathrm{Z}^n$.

C'est une généralisation du théorème d'alternative de Kintchine ([26]) pour les formes linéaires et de Mahler ([26]) pour les normes. Dans le cas des normes, on peut en tenant compte de l'inégalité (II) de Minkowski, améliorer la constante figurant dans le théorème ci-dessus par le facteur $2^{-\frac{n-1}{2}}$. Cette constante est plus petite que celle qui figure dans l'énoncé de Mahler.

---

([26]) Références au paragraphe I ([8]) et ([9]).

*Lemme de sélection et lemme d'approximation.* — Nous avons utilisé dans les paragraphes III et V un résultat sur la limite du coefficient $\delta$ de certains ensembles, qui se déduit aisément du lemme de sélection de Mahler. Démontrons ces résultats *ab initio* grâce aux inégalités que nous avons établies au paragraphe précédent.

Étant donnés un réseau G et une *suite de réseaux* $G_r$ dans $R^n$, nous dirons que la suite $(G_r)$ *converge* vers le réseau G si l'on peut choisir une base $b_1, \ldots, b_n$ de G et des bases $b_{1r}, \ldots, b_{nr}$ des $G_r$ de façon que $\lim\limits_{r\to\infty} b_{hr} = b_h$ $(h = 1, \ldots, n)$. On a alors évidemment, $m(G) = \lim\limits_{r\to\infty} m(G_n)$.

Du lemme de Bolzano-Weierstrass résulte alors facilement :

*Si pour une suite* $(G_r)$ *de réseaux, de bases* $b_{1r}, \ldots, b_{nr}$, *il existe* $m > 0$ *et* $M < +\infty$ *tels que* $m(G_r) \geqq m$, $\|b_{hr}\| \leqq M$ *pour tout* $r$ *et* $h$, *on peut extraire de* $(G_r)$ *une suite convergente.*

On en déduit le :

Lemme de sélection de Mahler ([27]). — *Si* $(G_r)$ *est une suite de réseaux permis par rapport à un même voisinage* U *de l'origine et de masses* $m(G_r)$ *uniformément bornées, on peut en extraire une suite convergente.*

En effet pour un $t > 0$ convenable $\underset{x}{\mathcal{E}}(\|x\| < t)$ est contenu dans U. D'après les résultats du paragraphe précédent il existe pour chaque $G_r$ une base $b_{1r}, \ldots, b_{nr}$ telle que

$$\prod_h \|b_{hr}\| \leqq c\, m(G_r),$$

$c$ étant une constante finie.

Par construction $\|b_{hr}\| \geqq t$ pour tout $r$ et tout $h$; donc puisque $m(G_r) \leqq M < +\infty$, les $\|b_{hr}\|$ sont uniformément bornés et le lemme résulte de l'énoncé précédent.

Lemme d'approximation ([28]). — *Soient* $A_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ *des ensembles ouverts emboîtés* ($r' > r$ *entraîne* $A_{r'} \supset A_r$) *dont la réunion* A *contient l'origine. Alors* $\lim\limits_{r\to\infty} \delta(A_r) = \delta(A)$.

Pour toute paire d'ensembles B, C, avec $B \subset C$ on a $\delta(B) \leqq \delta(C)$ donc $\delta(A_r)$ est une suite croissante qui a nécessairement une limite $\lambda$, finie ou infinie. Supposons $\delta(A) > 0$ (sinon le résultat annoncé est trivial) et $\lambda < \delta(A)$

---

([27]) Mahler, *Proc. Roy. Soc. London*, série A, t. 187, 1946, p. 151-187.

([28]) On trouve un énoncé analogue relatif aux ensembles étoilés d'indicatrice continue dans Mahler, *J. London Math. Soc.*, t. 18, 1943, p. 233-238.

(donc $\lambda < +\infty$) et soit $\theta$ un nombre $> \lambda$ et $< \delta(A)$. Pour chaque $r$ il existe un réseau $G_r$ permis pour $A_r$ et de masse $\theta$. Comme A contient l'origine, pour $r > r_0$ convenable, les $A_r$ contiennent O, donc contiennent un même voisinage de l'origine. Les $G_r$, pour $r > r_0$ satisfont donc aux conditions du lemme précédent, et l'on peut en extraire une suite qui converge vers un réseau G, de masse $\theta$. G est permis pour A. En effet si $p \in G$, on peut choisir dans chaque $G_r$ un élément $p_r$ de façon que $\lim p_r = p$; si $p$ appartenait aussi à A il serait contenu dans $A_r$ pour $r > r_1$, donc $p_r$ serait aussi dans $A_r$ pour $r$ assez grand et serait donc identique à O. Or G permis pour A est en condradiction avec l'hypothèse $m(G) = \theta < \delta(A)$. Le lemme est donc démontré.

*Remarques.* — Si l'ouvert A n'était pas supposé contenir O la conclusion tomberait; exemple : dans $R^2$,

$$A = \underset{x}{\mathcal{E}}(|x_1 x_2| < 1,\ x_2 > 1), \qquad A_r = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in A,\ x_2 < r).$$

On montre aisément que $\delta(A_r) = 0$ pour tout $r$, et que $\delta(A) = \delta(\underset{x}{\mathcal{E}}(|x_1 x_2| < 1)) > 0$ en utilisant le fait que $\underset{x}{\mathcal{E}}(|x_1 x_2| < 1)$ est un ensemble automorphe au sens du paragraphe IV.

Si les ensembles emboîtés $A_r$, dont la réunion est A, n'étaient pas supposés ouverts, la conclusion tomberait (même si l'on supposait que les $A_r$ contiennent un même voisinage de l'origine). Exemple : soient dans R, $A = \underset{x}{\mathcal{E}}(|x| < 2)$;

$$A_r = \underset{x}{\mathcal{E}}\left(|x| \leqq 1 \qquad \text{ou} \qquad 1 + \frac{1}{r} < |x| < 2\right)$$

On a

$$\delta(A) = 2, \qquad \delta(A_r) = 1 \quad \text{pour tout } r.$$

## VII. — Quelques autres majorations.

*Majoration relative aux $k$ premiers minima.* — Soit toujours S un ensemble étoilé dans $R^n$, G un réseau de masse $m(G)$ et soit $k$ un entier $1 \leqq k \leqq n$. Supposons les $\mu_h(S, G) > 0$ et $< +\infty$. Soit $c$ une constante $> 0$ et $< 1$; définissons la suite $\lambda_h$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) par $\lambda_k = (1-c)\mu_k(S, G)$, $\lambda_h = \lambda_k$ pour $h > k$ et $\lambda_h = 2^{-r_h}\lambda_k$ pour $h < k$, $r_h$ étant le plus petit entier $> \log_2(\lambda_k(\mu_h(S, G))^{-1})$. Les $\lambda_h$ forment une suite de nombres $> 0$ tels que $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ soit entier pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$, et que $\lambda_h < \mu_h$ pour $h = 1, 2, \ldots, n$. En appliquant le lemme du paragraphe II comme dans le théorème du même paragraphe on a

$$\prod_{h=1}^{n} \lambda_h \leqq (\gamma(S))^n m(G).$$

Par construction $\mu_h < 2\lambda_h$ $(h = 1, 2, \ldots, k-1)$, d'où

$$(\mu_k(S, G))^{n-k+1} \prod_{h=1}^{k-1} \mu_h(S, G) \leqq 2^{k-1} \prod_{h=1}^{n} \lambda_h (1-c)^{-n+k-1}.$$

On a donc en faisant tendre $c$ vers zéro l'inégalité

$$(\mu_k(S, G))^{n-k+1} \prod_{h=1}^{k-1} \mu_h(S, G) \leqq 2^{k-1} (\gamma(S))^n m(G).$$

Cette inégalité pourra être utile pour majorer l'invariant $\gamma(T)$ d'un ensemble étoilé T grâce à un ensemble étoilé auxiliaire $S \subset T$; on a trivialement $\gamma(T) \leqq \gamma(S)$. Supposons mis en évidence un réseau G *critique* pour T, c'est-à-dire un réseau limite de réseaux permis pour T et de masse minima $m(G) = \delta(T) = (\gamma(T))^{-n}$.

Si S a pour anomalie 1 on a

$$\gamma(T) = (m(G))^{-\frac{1}{n}} \leqq \gamma(S) \left( \prod_{h=1}^{n} \mu_h(S, G) \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Quand on ne sait pas majorer non trivialement l'anomalie de S on peut écrire seulement

$$\gamma(T) \leqq 2^{\frac{n-1}{2n}} \gamma(S) \prod_{h=1}^{n} (\mu_h(S, G))^{-\frac{1}{n}}.$$

Mais il peut arriver que l'on ait des renseignements sur les $k$ premiers $\mu_h$, $k$ étant un entier $< n$ et qu'il soit plus profitable d'utiliser la majoration de $\gamma(T)$ qui résulte de l'inégalité démontrée dans ce paragraphe

$$\gamma(T) \leqq 2^{\frac{k-1}{n}} \gamma(S) (\mu_k(S, G))^{-\frac{n-k+1}{n}} \left( \prod_{h=1}^{k-1} \mu_h(S, G) \right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Supposons qu'on étudie une famille d'ensembles $T_n$ définis pour chaque valeur de la dimension $n$, à l'aide des ensembles auxiliaires $S_n$ et qu'on ait mis en évidence des réseaux $G_n$ critiques pour le $T_n$ correspondant, de façon que $\dim(G_n \cap \lambda S_n) \leqq k(n)$, $\lambda$ étant une constante $> 1$ et indépendante de $n$ et $k(n)$ un entier tel que $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-1} k(n) = 0$; on aura alors

$$\gamma(T_n) \leqq (1 + c(n)) \gamma(S_n) \lambda^{-n} \qquad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} c(n) = 0,$$

majoration meilleure que la majoration triviale $\gamma(T_n) \leqq \gamma(S_n)$ et presque aussi bonne que celle qu'on aurait si l'on avait pu affirmer que les $S_n$ ont une anomalie égale à 1.

Nous avons utilisé ailleurs ([29]) ce principe pour majorer $\gamma(P_n)$ où

$$P_n = \underset{x}{\mathcal{E}}\left(\prod |x_i| < 1\right).$$

avec comme ensemble auxiliaire $S_n = \underset{x}{\mathcal{E}}\left(\sum |x_i| < n\right)$.

*Généralisation à des ensembles non étoilés.* — Soit maintenant A un ensemble *quelconque* dans $R^n$, G un réseau; la variété linéaire homogène engendrée par $G \cap \lambda A$ n'est plus fonction croissante de $\lambda$, non plus que sa dimension (quoi qu'il en soit encore ainsi quand on considère une suite $\lambda_j$ de valeurs de $\lambda$ telle que $\lambda_{j+1}\lambda_j^{-1}$ soit toujours un entier; c'est ce que nous avons fait pour démontrer le lemme du début du paragraphe II). On est donc amené à définir *deux* suites de nombres associés à A et G (qui sont confondues avec la suite des $\mu_h$ définie au paragraphe II quand A est étoilé) :

$$\overset{(+)}{\mu}_h = \sup \lambda \{\lambda \geqq 0, (\dim(G \cap \lambda A) \leqq h-1)\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\overset{(-)}{\mu}_h = \inf \lambda \{\lambda \geqq 0, (\dim(G \cap \lambda A) \geqq h) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

On a évidemment

$$\overset{(-)}{\mu}_h \leqq \overset{(-)}{\mu}_{h+1}, \qquad \overset{(+)}{\mu}_h \leqq \overset{(+)}{\mu}_{h+1} \qquad \text{et} \qquad \overset{(-)}{\mu}_h \leqq \overset{(+)}{\mu}_h$$

et

$$\sup_{G \in \Gamma} \overset{(+)}{\mu}_1(A, G)(m(G))^{-\frac{1}{n}} = (\delta(A))^{-\frac{1}{n}}.$$

Si les $\lambda_h$ ($h = 1, 2, \ldots, n$) sont des nombres tels que $0 < \lambda_h < \overset{(-)}{\mu}_h$ et que $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ soit entier ($h = 1, 2, \ldots, n-1$), la condition $\lambda_h < \overset{(-)}{\mu}_h$ entraîne que dim $(G \cap \lambda_h A) \leqq h-1$ et le lemme du début du paragraphe II montre alors que $\delta(A)\prod_{h=1}^{n}\lambda_h \leqq 1$. Donc d'après l'étude de $\psi(n)$ on a

$$\delta(A)\prod_{h=1}^{n}\overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leqq 2^{\frac{n-1}{2}} m(G).$$

On peut obtenir une inégalité analogue, où l'un des $\overset{(-)}{\mu}$ est remplacé par le $\overset{(+)}{\mu}$ de même indice. D'après la définition de $\overset{(+)}{\mu}_k$ pour tout $c > 0$ il existe $\lambda_k$ tel

([29]) Chabauty, *C. R. Ac. Sc.*, t. 228, 1949, p. 1361.

que $\overset{(+)}{\mu}_k(1-c) \leqq \lambda_k \leqq \overset{(+)}{\mu}_k$ et que $\dim(G \cap \lambda_k A) \leqq k-1$. Définissons $\lambda_h = 2^{r(h)}\lambda_k$ avec

$$r(h) = \text{le plus grand entier} < \log_2\bigl(\max(\overset{(+)}{\mu}_k, \overset{(-)}{\mu}_h)(\overset{(+)}{\mu}_k)^{-1}\bigr) \qquad (h \geqq k),$$

$$-r(h) = \text{le plus petit entier} > \log_2\bigl(\overset{(+)}{\mu}_k(\overset{(-)}{\mu}_h)^{-1}\bigr) \qquad (h < k).$$

Alors par construction $\lambda_{h+1}\lambda_h^{-1}$ est entier pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$ $\dim(G \cap \lambda_h A) \leqq h-1$ pour $h = 1, 2, \ldots, n$ et $\overset{(+)}{\mu}_k(\lambda_k)^{-1} < 1-c$, $\overset{(-)}{\mu}_h(\lambda_h)^{-1} < 2(1-c)^{-1}$, $h \neq k$ donc

$$\overset{(+)}{\mu}_k \prod_{h \neq k} \overset{(-)}{\mu}_h \leqq (1-c)^{-n}\, 2^{n-1} \prod_{h=1}^{n} \lambda_h$$

et par conséquent en vertu du lemme du paragraphe 2

$$\partial(A)\, \overset{(+)}{\mu}_k(A, G) \prod_{h \neq k} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leqq 2^{n-1} m(G).$$

Si nous écrivons ces inégalités pour les différentes valeurs de $k$ et prenons la racine $n^{\text{ième}}$ du produit, il vient

$$\partial(A)\left(\prod_{h=1}^{n} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G)\right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} \overset{(+)}{\mu}_k(A, G)\right)^{\frac{1}{n}} \leqq 2^{n-1} m(G).$$

En introduisant le coefficient de convexité $\Omega(A)$ on a donc finalement les inégalités

$$\prod_{h=1}^{n} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leqq 2^{\frac{3n-1}{2}} (\Omega(A))^n \eta(A)(\text{mes int}(A))^{-1} m(G),$$

$$\overset{(+)}{\mu}_k(A, G) \prod_{h \neq k} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G) \leqq 2^{2n-1} (\Omega(A))^n \eta(A)(\text{mes int}(A))^{-1} m(G),$$

$$\left(\prod_{h=1}^{n} \overset{(-)}{\mu}_h(A, G)\right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\prod_{h=1}^{n} \overset{(+)}{\mu}_h(A, G)\right)^{\frac{1}{n}} \leqq 2^{2n-1} (\Omega(A))^n \eta(A)(\text{mes int}(A))^{-1} m(G).$$

Posons

$$\overset{(\pm)}{\gamma} = \sup \overset{(\pm)}{\mu}_1 (m(G))^{-\frac{1}{n}}, \qquad \overset{(\pm)}{\rho} = \sup \prod \overset{(\pm)}{\mu}_h (m(G))^{-1} \qquad \text{et} \qquad \overset{(\pm)}{\alpha} = \overset{(\pm)}{\rho}(\overset{(\pm)}{\gamma})^{-n}.$$

L'étude faite pour les ensembles étoilés suggère d'étudier les valeurs prises par $\overset{(-)}{\alpha}(A)$ et $\overset{(+)}{\alpha}(A)$, $A \subset R^n$. En choisissant pour $f$ une forme linéaire par morceaux convenable on peut aisément s'arranger pour que $\overset{(-)}{\alpha}(A) = +\infty$, si $A = \underset{x}{\mathcal{E}}(f(x) = 1)$. Pour $\overset{(+)}{\alpha}$ nous n'avons pas réussi à former un exemple analogue. Mais ces considérations semblent moins intéressantes que celles se rapportant directement aux ensembles étoilés et à la théorie des formes.