YVES MARTIN

Sur les séries d'interpolation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 311-366

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__311_0>

SUR

LES SÉRIES D'INTERPOLATION

PAR M. YVES MARTIN.

INTRODUCTION.

Le sujet de notre travail est l'étude des séries de polynomes d'interpolation de la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \qquad \text{avec} \quad P_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right); \qquad P_0(z) = 1.$$

Nous étudierons plus spécialement les deux cas suivants :

A. Les nombres λ_n, réels, positifs, forment une suite croissante avec

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n = +\infty.$$

B. Les nombres λ_n, réels, positifs, forment une suite décroissante avec $\lim_{n=\infty} \lambda_n = 0$, et nous supposons en outre que la série $\sum_{1}^{\infty} \lambda_n$ converge.

Le cas (A) a été étudié avec une grande précision par M. Norlund, dans ses *Leçons sur les séries d'interpolation* [1], dans les deux cas particuliers où $\lambda_n = n$ et où $\lambda_n = n^2$.

Les propriétés valables pour les suites $\{n\}$ ou $\{n^2\}$ s'étendent au cas général (A) et permettent d'établir des différences fondamentales de comportement entre les séries (1) suivant que la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge [cas (A, 1)] ou qu'elle converge [cas (A, 2)].

Une première Partie de notre travail est consacrée à l'étude du domaine de convergence des séries (1). Le comportement de ces séries aux points $z = \lambda_n$

fera généralement exception aux théorèmes que nous énoncerons et qui ne seront valables que pour $z \neq \lambda_n$. Nos résultats sont alors les suivants :

Dans le cas (A, 1), le domaine de convergence de (1) est un demi-plan $\mathcal{R}(z) > \mathcal{S}$, $\mathcal{R}(z) =$ partie réelle de z; $-\infty \leqq \mathcal{S} \leqq +\infty$.

Dans le cas (A, 2), l'ensemble des points de convergence de (1) est constitué soit par le plan entier, soit par les points $z = \lambda_n$.

La convergence absolue de (1) a lieu également dans un demi-plan [cas (A, 1)] ou, soit dans le plan tout entier, soit seulement aux points $z = \lambda_n$ [cas (A, 2)].

Nous donnons ensuite, dans le cas (A, 1), des formules permettant de déterminer l'épaisseur maximum de la bande de convergence simple en fonction des densités supérieure et inférieure de la suite $\{\lambda_n\}$. Enfin, dans (A, 1) nous déterminerons les valeurs exactes des abscisses de convergence simple ou absolue en fonction des nombres a_n et λ_n.

Nous abordons alors l'étude des conditions soit nécessaires, soit suffisantes, pour qu'une fonction $F(z)$ holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) > 0$ soit représentable par une série [A, 1]. Ces conditions portent sur la croissance de $F(z)$ quand $\lim |z| = +\infty$ et ne sont d'ailleurs pas identiques. Elles sont cependant suffisamment voisines pour délimiter d'une façon assez précise la classe des fonctions $F(z)$ representables par une série [A, 1]. Ces conditions permettent en outre d'établir certains théorèmes sur la croissance d'une fonction $F(z)$ holomorphe, dans un angle et prenant, en certains points de la bissectrice de cet angle, les mêmes valeurs qu'un polynome donné à l'avance. Ces théorèmes sont analogues à ceux énoncés par M. V. Bernstein [7] dans le cas particulier où la suite $\{\lambda_n\}$ a une densité D.

Nous passerons ensuite à l'étude des séries [A, 1] à la frontière de leur domaine de convergence. Le comportement de ces séries est alors analogue à celui des séries de Dirichlet (D)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-zS(n)}, \qquad \text{avec} \quad S(0) = 0; \qquad S(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu}.$$

Elles ont les mêmes abscisses de convergence simple ou absolue. On démontre plus :

si $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge, [A, 1] et (D) convergent pour les mêmes valeurs de z sur la droite de convergence;

si $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ diverge, il est possible de construire deux séries associées [A, 1] et (D) n'ayant qu'un seul point commun de convergence sur la droite de convergence.

Dans le cas où la suite $\{\lambda_n\}$ a une densité supérieure finie, il est possible de préciser que les séries [A, 1] et (D) représentent deux fonctions ayant mêmes points singuliers dans la bande $\mathcal{S} - h < \mathcal{R}(z) \leqq \mathcal{S}$. L'épaisseur h de cette bande est liée simplement à la densité supérieure de la suite $\{\lambda_n\}$ et la valeur ainsi trouvée pour h ne peut pas être améliorée. Il en résulte des applications multiples à l'étude des points singuliers des fonctions représentées par [A, 1], déduites de théorèmes analogues établis pour les séries de Dirichlet. On peut, en particulier, choisir les coefficients a_n de telle façon que la somme de la série [A, 1] soit holomorphe sur la droite de convergence (théorème d'Aronszajn.).

Enfin l'étude des séries (B) montre qu'elles présentent des analogies profondes avec les séries de Taylor. Nous obtiendrons ainsi, soit par des méthodes directes, soit indirectement, des théorèmes d'une part sur la convergence des séries (B) sur le cercle de convergence et d'autre part des théorèmes sur la position des singularités des fonctions représentées par les séries (B) (théorèmes d'Abel et réciproques, de M. Riesz, M. Landau et M. Fejer).

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à M. G. Valiron pour les précieux conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me donner pendant la préparation de ce travail.

Je tiens également à adresser tous mes remerciements à M. Paul Montel qui a bien voulu accepter de faire paraître ce travail aux *Annales de l'École Normale Supérieure*.

PREMIÈRE PARTIE.

ETUDE DES SÉRIES $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$.

CHAPITRE I.

Domaine de convergence.

Dans cette première Partie, nous allons étudier les séries (1) où les a_n sont des coefficients numériques réels ou imaginaires et $P_n(z)$ un polynome de degré n

$$(1)\quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \qquad \text{avec} \quad P_0(z) = 1; \qquad P_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

les nombres λ_ν formant une suite croissante de nombres positifs tendant vers l'infini.

Avant de voir comment on peut calculer les coefficients a_n de la série (1) à partir des valeurs $F(\lambda_\nu)$ de la fonction $F(z)$, nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Si* $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ *converge et si la série* (1) *converge pour* $z = z_0 \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *la série* (1) *converge pour toute valeur de* z.

Posons, en effet, $a_n P_n(z_0) = b_n$ et $\frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} = c_n$. On a, en utilisant la transformation d'Abel,

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu P_\nu(z) = \sum_{\nu=n}^{m-1} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sum_{s=n}^{\nu} b_s + c_m \sum_{\nu=n}^{m} b_\nu.$$

Puisque la série (1) converge pour $z = z_0$, on peut déterminer un nombre n_0 tel que $\left| \sum_n^m b_\nu \right| < \varepsilon$ pour $m > n \geqq n_0$, $(\varepsilon > 0)$.

D'où l'on tire

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} a_\nu P_\nu(z) \right| < \varepsilon \left(\sum_{\nu=n}^{m-1} |c_\nu - c_{\nu+1}| + |c_m| \right). \tag{2}$$

Or, $|c_m|$ est borné puisque le produit infini $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$ converge absolument et que z_0 est différent de λ_i. D'autre part,

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| = |c_\nu| \left| 1 - \frac{\lambda_{\nu+1} - z}{\lambda_{\nu+1} - z_0} \right| < \frac{2\,|c_\nu|\,|z - z_0|}{\lambda_{\nu+1}}, \tag{2'}$$

dès que $\lambda_{\nu+1} > 2|z_0|$. Le dernier membre de l'inégalité (2′) est le terme général d'une série absolument convergente, donc le coefficient de ε dans (2) est borné pour z donné, m et n étant quelconques. La série $\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(z)$ converge donc quel que soit z. Il résulte même de la démonstration que la convergence est uniforme dans tout domaine borné du plan. Il est évident d'autre part que la convergence de la série (1) pour $z = \lambda_i$ n'entraîne pas la convergence de la série pour toute valeur de z. Le domaine de convergence est constitué ou bien, par la suite des points $z = \lambda_i$ (cas trivial), ou bien par le plan tout entier, et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que la série $F(0) = \sum_{n=0}^\infty a_n$ converge.

THÉORÈME 2. — *Si* $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ *diverge et si la série* (1) *converge pour* $z = z_0 \neq \lambda_i$, *elle* *converge uniformément pour z appartenant au secteur* (S) *défini par* $z = z_0 + re^{i\varphi}$ *avec* $0 \leqq r \leqq R$, *quel que soit* $R > 0$, $|\varphi| \leqq \frac{\pi}{2} - \eta$, $(\eta > 0)$.

En utilisant les mêmes notations que pour le théorème 1, il suffit de démontrer que le coefficient de ε dans (2) est uniformément borné, quel que soit z dans le secteur (S).

Soit σ_0 la partie réelle de z_0; S_0, M_0, M et L_n les images des nombres σ_0, z_0, z et λ_n. Pour $n \geqq n_1$, on a les inégalités entre angles compris entre zéro et π

$$\widehat{M_0ML_n} > \frac{\pi}{2} + \frac{\eta}{2} \qquad \text{et} \qquad \widehat{M_0L_nS_0} < \frac{\eta}{2}.$$

Donc, en écrivant que la projection de L_nM_0 sur L_nM est inférieure ou égale à L_nM_0, on obtient

$$|\lambda_n - z_0| \geqq |\lambda_n - z| + r\sin\frac{\eta}{2} \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n - z_0}\right| \leqq 1 - \frac{r\sin\eta}{2|\lambda_n - \sigma_0|},$$

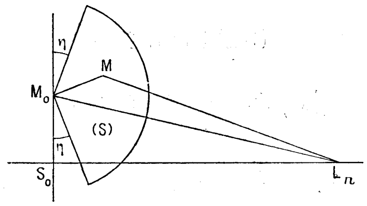

Fig. 1.

on a donc, pour $n \geqq n_2$, $n_2 \geqq n_1$ étant tel que $\lambda_{n_2} - \sigma_0 - \frac{R}{2}\sin\eta > 0$.

$$(3) \qquad |c_\nu - c_{\nu+1}| \leqq \prod_{n=1}^{n_2-1}\left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n - z_0}\right| \prod_{j=n_2}^{\nu}\left(\frac{\lambda_j - \sigma_0 - \frac{r}{2}\sin\eta}{\lambda_j - \sigma_0}\right)\frac{r}{\lambda_{\nu+1} - \sigma_0}.$$

Désignons par d_ν le second produit du second membre de (3). On a évidemment $0 < d_\nu < 1$; d'après l'égalité

$$d_\nu \frac{r}{\lambda_{\nu+1} - \sigma_0} = (d_\nu - d_{\nu+1})\frac{2}{\sin\eta}$$

on obtient

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| \leqq \frac{2C}{\sin\eta}(d_\nu - d_{\nu+1}).$$

C désignant le maximum du module du polynome $\prod_{i=1}^{n_2-1}\left(\frac{\lambda_i - z}{\lambda_i - z_0}\right)$ quand z appartient au secteur (S). Donc,

$$(4) \qquad \sum_{\nu=n}^{m-1}|c_\nu - c_{\nu+1}| \leqq \frac{2C}{\sin\eta}(d_n - d_m) \leqq \frac{2C}{\sin\eta}.$$

L'inégalité (4) entraîne que $|c_m|$ est borné puisqu'il en est ainsi pour $|c_{n_2}|$, donc aussi le coefficient de ε dans (2). Le théorème 2 est démontré.

De ce théorème, on déduit que la série (1) converge pour $\sigma = \mathcal{R}(z) > \sigma_0 = \mathcal{R}(z_0)$ et que, par conséquent, il existe un domaine de convergence constitué par un demi-plan limité à gauche par une droite $\mathcal{R}(z) = \mathfrak{S}$. Cette droite est appelée la droite de convergence de la série (1) et $\mathfrak{S}$ l'abscisse de convergence. La convergence étant uniforme dans tout domaine fermé, borné, intérieur au demi-plan $\sigma > \mathfrak{S}$, la série (1) y représente une fonction holomorphe $F(z)$.

Si $\mathfrak{S} = -\infty$, $F(z)$ est une fonction entière; si la série (1) ne converge pour aucune valeur de z autre que λ_i, nous dirons que $\mathfrak{S} = +\infty$.

Le théorème 2 nous indique plus encore; si la série (1) converge pour $z_0 = \mathfrak{S} + i\tau$, $\mathfrak{S}$ étant l'abscisse de convergence, la fonction $F(z)$ est continue au point z_0 quand z tend vers z_0 à l'intérieur du secteur (S). Ce théorème est en défaut, si $z_0 = \lambda_i$ comme nous le montrerons par des exemples.

CHAPITRE II.

Calcul des coefficients.

Soit $F(z)$ la somme de la série d'interpolation (1). Comme cette série n'a qu'un nombre fini de termes pour $z = \lambda_i$, il est facile de calculer ses coefficients en fonction des valeurs de la fonction $F(z)$ pour $z = \lambda_i$. On a, en effet,

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} F(\lambda_1) = a_0, \\ F(\lambda_2) = a_0 + a_s\left(1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F(\lambda_n) = a_0 + a_1\left(1 - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) + \ldots + a_{n-1}P_{n-1}(\lambda_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Système qui admet une seule solution $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, les a_n se déterminant de proche en proche sans impossibilité, ni indétermination, puisque dans la $n^{\text{ième}}$ équation le coefficient de a_{n-1} n'est pas nul, les λ_n étant supposés tous différents les uns des autres. Ce calcul est d'ailleurs à la base de la théorie des différences divisées, théorie exposée dans le premier Chapitre du livre de M. Norlund [1]. On pourrait ainsi croire que la représentation d'une fonction $F(z)$ par une série d'interpolation, lorsqu'elle est possible, est unique. C'est effectivement le cas lorsque $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ converge ou, si $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ diverge, lorsque $\mathfrak{S} < \lambda_1$. Mais lorsque $\mathfrak{S}$ est supérieur ou égal à λ_1, la série (1) qui converge encore pour $z = \lambda_i$ ($\lambda_i \leqq \mathfrak{S}$) n'y représente plus forcément $F(z)$; les valeurs $F(\lambda_i)$

peuvent alors être prises arbitrairement, et l'on voit que la série (1) dépend alors de p constantes arbitraires, p étant le nombre des λ_i inférieurs ou égaux à $\mathfrak{S}$. En effet, désignons par A_i les valeurs arbitraires $F(\lambda_i)$; les coefficients a_n dépendent linéairement des A_i. Nous allons montrer que les coefficients de A_i sont des séries admettant pour abscisses de convergence respectivement les nombres λ_i.

Soit $O_p(z)$ la série coefficient de A_p. Elle s'obtient en faisant $F(\lambda_i)=0$ si $i \neq p$ et $F(\lambda_p)=1$. Un calcul facile montre qu'on a alors

$$a_n = 0 \quad (0 \leqq n \leqq p-2), \qquad a_n = \frac{-1}{\lambda_{n+1} P'_{n+1}(\lambda_p)} \quad (n \geqq p-1).$$

Nous allons montrer que cette série $O_p(z)$ converge pour $\sigma > \lambda_p$ et y représente zéro, tandis qu'elle est égale à 1 pour $z=\lambda_p$. En effet, le terme général de $O_p(z)$ est égal à

$$a_n P_n(z) = \frac{-P_n(z)}{\lambda_{n+1} P'_{n+1}(\lambda_p)} \qquad (n \geqq p-1).$$

D'autre part

$$\sum_{n=p-1}^{q} a_n P_n(z) = \frac{-P_{q+1}(z)}{(\lambda_p - z) P'_{q+1}(\lambda_p)}$$

et il nous suffit de montrer que $\dfrac{P_n(z)}{P'_n(\lambda_p)}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, z étant fixé, et tel que

$$\sigma = \mathcal{R}(z) > \lambda_p.$$

Il en sera alors de même de $a_n P_n(z)$. Cela résulterait aussi de ce que

$$\lim_{n=\infty} \frac{P'_{n+1}(\lambda_p)}{P'_n(\lambda_p)} = 1.$$

Négligeons le quotient des $(p-1)$ premiers termes du numérateur par ceux du dénominateur, ce quotient restant borné quel que soit z dans un domaine borné. Il vient

$$(z-\lambda_p) \prod_{j=p+1}^{n} \left(\frac{\lambda_j - z}{\lambda_j - \lambda_p} \right),$$

expression qui tend vers zéro comme cela résulte du comportement asymptotique de $P_n(z)$ pour z fixe et n tendant vers l'infini (*voir* Chapitre III).

Ainsi, les séries $O_p(z)$ qui convergent pour $\sigma > \lambda_p$ et aussi pour $z=\lambda_i$ ont pour somme zéro pour $\sigma > \lambda_p$ et $z=\lambda_j$ $(j \leqq p-1)$ et 1 pour $z=\lambda_p$.

On obtient ainsi des séries dont la somme n'est pas continue dans le secteur (S) de sommet λ_p. Ces séries ne satisfont pas au théorème 2 d'Abel. Elles constituent l'exception que nous avions signalée à la fin du paragraphe précédent.

Il est évident que, réciproquement, si l'on impose à une fonction $F(z)$ d'être nulle pour $z = \lambda_n (n \geqq p+1)$ sa série d'interpolation, qui ne représente peut-être pas $F(z)$, est de la forme $\sum_{j=1}^{p} A_j O_j(z)$ et représente zéro pour $\sigma > \lambda_r$, $O_r(z)$ étant la fonction d'ordre r le plus élevé dont le coefficient n'est pas nul.

Une fonction représentable par une série (1) peut donc avoir une infinité de représentations, les séries obtenues différant entre elles par des développements de o. On peut ainsi agrandir parfois le domaine de convergence de la série (1) en y ajoutant un développement de o convenable, à condition que $F(z)$ soit holomorphe dans un demi-plan plus grand que le domaine de convergence de la série initiale, et que l'abscisse de convergence initiale soit un des nombres λ_i.

On peut, par exemple, représenter la fonction $F(z) = \frac{1}{z - z_0}$, z_0 étant un nombre quelconque réel ou complexe. Le calcul des coefficients peut se faire par la méthode des différences divisées, mais il resterait à montrer que la série obtenue représente bien $F(z)$. Nous opérerons plus rapidement de la façon suivante :

Soit

$$\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z).$$

En multipliant les deux membres par $z - z_0$, on obtient l'égalité

$$-1 + (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = 0,$$

valable pour $z \neq z_0$ et en particulier pour $\sigma > \sigma_0$ et où le premier membre est une série d'interpolation aux points z_0 et λ_i.

L'introduction du nombre z_0 ne modifie pas le résultat trouvé plus haut pour les développements $O_p(z)$ et l'on obtient ainsi l'égalité, valable pour $\sigma > \sigma_0$

$$(6) \qquad \frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z), \qquad a_n = \frac{1}{\lambda_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} \left(1 - \frac{z_0}{\lambda_j}\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La fonction qui admet le point z_0 pour pôle simple ne peut être représentée par la série (1) dans un domaine plus grand. A ce développement, on peut ajouter des développements de o d'abscisse de convergence inférieure à σ_0 sans rien changer aux résultats obtenus pour $\sigma > \sigma_0$.

Lorsque $z_0 = \lambda_p$ le développement précédent n'a plus de sens; il suffit alors de remplacer le développement (6) par celui de $\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{\lambda_p - z_0} O_p(z)$ et de faire tendre z_0 vers λ_p.

En désignant par $S_n(z)$ le produit $\prod_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n+1}\left(1-\frac{z}{\lambda_j}\right)$ on obtient

$$
(7)\quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}\displaystyle\prod_{j=1}^{n+1}\left(1-\frac{\lambda_p}{\lambda_j}\right)} & (0 \leqq n \leqq p-2), \\[2ex] a_n = \dfrac{\lambda_p S'_n(\lambda_p)}{\lambda_{n+1} S_n^2(\lambda_p)} & (n \geqq p-1); \end{cases}
$$

$$
(7')\qquad \frac{1}{z-\lambda_p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z).
$$

L'égalité (7′) étant valable pour $z = \lambda_i$ ($i \leqq p-1$) et $\sigma > \lambda_p$.

En dérivant l'égalité (6) par rapport à z_0 on obtient des formules permettant de représenter par sa série d'interpolation un élément simple quelconque $\frac{1}{(z-z_0)^p}$, le domaine de validité de la représentation étant le demi-plan $\sigma > \sigma_0$. Une fonction rationnelle z est donc représentable par sa série d'interpolation pour toute valeur de z telle que $\sigma > \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ étant la plus grande des abscisses des pôles de la fonction. Ce résultat n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de théorèmes que nous démontrerons au Chapitre VI.

CHAPITRE III.

Convergence absolue.

C'est un fait bien connu (Norlund [1], p. 108) que les séries d'interpolation peuvent converger dans un domaine à deux dimensions, sans y converger absolument, ce qui ne se présente pas pour les séries de Taylor (séries d'interpolation pour lesquelles $\lambda_i = 0$). Pour mettre ces faits en évidence dans le cas général nous allons établir quelques théorèmes analogues à ceux démontrés par Bendixson [2] dans le cas où $\lambda_n = n$. Et d'abord, nous étudierons le comportement asymptotique du polynome $P_n(z)$, pour z fixe et n tendant vers l'infini.

Comportement de $|P_n(z)|$ *quand* $n \to \infty$. — Supposons que z reste dans un domaine (D) fermé et borné, laissant à l'extérieur les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, naturellement en nombre fini. On pourra prendre, par exemple, pour (D) l'intérieur du cercle $|z| \leqq R$ privé des cercles $|z-\lambda_i| \leqq \rho_i$ centrés aux points λ_i tels que $\lambda_i \leqq R$. Déterminons un nombre n_0 tel que, ε étant un nombre positif donné à l'avance, on ait les inégalités $\lambda_n \geqq 2R$ et $\lambda_n \geqq \frac{2R^2}{\varepsilon}$ pour $n \geqq n_0$. Alors

$$
\left|\log\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)+\frac{z}{\lambda_n}\right| \leqq \left|\frac{z^2}{2\lambda_n^2}\right|\left(1+\left|\frac{z}{\lambda_n}\right|+\ldots\right) \leqq \left|\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2\lambda_n}.
$$

On a donc

$$e^{(-\sigma-\varepsilon)\left(\frac{1}{\lambda_{n_0}}+\frac{1}{\lambda_{n_0+1}}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\right)} < \left|\frac{P_n(z)}{P_{n_0-1}(z)}\right| < e^{(-\sigma+\varepsilon)\left(\frac{1}{\lambda_{n_0}}+\frac{1}{\lambda_{n_0+1}}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}\right)}.$$

Or, quand z reste dans (D), la quantité

$$|P_{n_0-1}(z)|\, e^{(\sigma\pm\varepsilon)\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{n_0-1}}\right)}$$

reste comprise entre deux nombres positifs M_1 et M_2, qui ne dépendent que de (D), de ε et naturellement de la suite $\{\lambda_n\}$. On a donc, dans (D),

$$(8)\qquad \begin{cases} M_1 e^{-(\sigma-\varepsilon)S(n)} < |P_n(z)| < M_2 e^{(-\sigma+\varepsilon)S(n)}, \\ S(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu} \qquad (n \geqq 1). \end{cases}$$

En particulier $P_n(z)$ tend vers l'infini avec n pour $\sigma < 0$ et vers zéro pour $\sigma > 0$.

Dans le cas où la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, on peut améliorer l'inégalité (8) en faisant $\varepsilon = 0$ comme on le voit facilement en modifiant légèrement notre démonstration. Nous allons donner à l'inégalité (8) une autre forme qui nous sera plus commode par la suite.

Soit $\lambda(x)$ une fonction de x définie pour $x \geqq 1$ continue croissante et telle que $\lambda(n) = \lambda_n$; posons

$$I(x) = \int_1^x \frac{dx}{\lambda(x)}.$$

On a, puisque les nombres $\frac{1}{\lambda_n}$ forment une suite décroissante de nombres positifs,

$$I(n) \leqq S(n) \leqq I(n) + \frac{1}{\lambda_1}.$$

Si bien que dans (8) on peut remplacer $S(n)$ par $I(n)$ en modifiant éventuellement les constantes M_1 et M_2. En définitive, on a pour z dans (D)

$$(9)\qquad \frac{1}{M} e^{(-\sigma-\varepsilon)I(n)} < |P_n(z)| < M\, e^{(-\sigma+\varepsilon)I(n)}.$$

M constante > 1, ne dépendant que de (D) et de ε. Dans (9) il est possible de faire $\varepsilon = 0$ si $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge. Le comportement asymptotique de $P_n(z)$ montre d'abord que le rapport $\left|\frac{P_n(z)}{P_n(z_0)}\right|$ est borné supérieurement lorsque $\sigma > \sigma_0$. Donc si une série (1) converge absolument pour $z = z_0 \neq \lambda_i$, elle converge absolument pour toute valeur de z telle que $\sigma > \sigma_0$.

Le domaine de convergence absolue est donc un demi-plan $\sigma > \mathfrak{S}_a$. Dans le cas où la série (1) converge absolument en un point de la droite $\sigma = \mathfrak{S}_a$ et où $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, il y a convergence absolue sur toute la droite $\sigma = \mathfrak{S}_a$. Il peut donc se faire, dans certains cas, que la série (1) converge simplement pour $\mathfrak{S} < \sigma < \mathfrak{S}_a$. Nous montrerons alors :

THÉORÈME. — *La bande de convergence simple de la série* (1) *a une largeur maximum* δ, *égale à l'exposant de convergence de la suite* $e^{-\mathrm{I}(n)}$ *et qui satisfait à la double inégalité*

$$\frac{1}{D_s} \leqq \delta \leqq \frac{1}{D_i}, \tag{10}$$

D_i *et* D_s *étant les densités inférieure et supérieure de la suite* $\{\lambda_n\}$.

On sait que l'on définit ces densités par

$$D_i = \varliminf_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} \qquad \text{et} \qquad D_s = \varlimsup_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

En effet, si la série (1) converge pour z_0 et si δ est l'exposant de convergence de la suite $e^{-\mathrm{I}(n)}$, on a

$$|a_n P_n(z_0)| < C, \qquad \text{donc pour} \quad z = z_0 = \delta + 3\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$
$$|a_n P_n(z)| < CM^2 e^{-(\delta+\varepsilon)\mathrm{I}(n)},$$

terme général d'une série convergente, M étant la constante de l'inégalité (9) correspondant à ε.

D'autre part, la suite $\{\lambda_n\}$ étant fixée, il est possible de choisir les coefficients a_n tels que la série converge pour $z = z_0$ et ne converge pas absolument pour $z = z_0 + \delta - 4\varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Il suffit pour cela de prendre

$$a_n P_n(z_0) = (-1)^n e^{-\varepsilon \mathrm{I}(n)}.$$

La série (1) converge pour $z = z_0$ puisque c'est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers zéro en décroissant. Or,

$$|a_n P_n(z)| > \frac{1}{M^2} e^{(-\delta+\varepsilon)\mathrm{I}(n)},$$

terme général d'une série divergente, d'après la définition de δ.

La première partie du théorème est démontrée. Il reste à prouver les inégalités (10).

Supposons d'abord que D_i et D_s ne soient ni nuls ni infinis. Il existe un nombre n_0 tel que pour tout $n \geqq n_0$ on ait $\frac{n}{\lambda_n} < D_s + \varepsilon$. On en tire immédiatement

$$\mathrm{I}(n) < (D_s + \varepsilon) \log n + K,$$

K étant indépendant de n. L'exposant de convergence de la suite $e^{-\mathrm{I}(n)}$ est donc supérieur ou égal à $\frac{1}{D_s+\varepsilon}$. D'où résulte la première inégalité. Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer qu'à partir d'un certain rang, on a, pour $0<\varepsilon<D_i$, $\frac{n}{\lambda_n}>D_i-\varepsilon$.

Dans le cas où la suite $\{\lambda_n\}$ est mesurable, c'est-à-dire lorsque $\frac{n}{\lambda_n}$ a une limite D quand $n\to\infty$, les inégalités (10) nous donnent la valeur exacte de δ. Il en est de même si l'on a $D_i=\infty$ (auquel cas $\delta=0$) ou $D_s=0$ (auquel cas $\delta=\infty$); ainsi, si $\lambda_n=An$, $\delta=A$; si $\lambda_n=n^\alpha(0<\alpha<1)$, $\delta=0$, il ne peut pas y avoir de bande de convergence simple. Si $\lambda_n=(n+1)\log(n+1)$, $D=0$, $\delta=\infty$. Il existe effectivement des séries qui convergent dans tout le plan et ne convergent absolument nulle part (sauf pour $z=\lambda_i$). Prenons par exemple,

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \qquad (0<\alpha<1).$$

Pour $z=\sigma$ réel quelconque, $P_n(z)$ est réel et garde un signe constant à partir d'un certain rang puisque $1-\frac{\sigma}{\lambda_n}$ est positif pour $\lambda_n>\sigma$,

$$I(n)=\log\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]$$

$$\frac{1}{M}\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]^{-\sigma}<|P_n(z)|<M\left[\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right]^{-\sigma}.$$

La série (1) alternée converge quel que soit σ puisque la valeur absolue du terme général tend vers zéro en décroissant; d'autre part la série (1) ne peut converger absolument nulle part (sauf pour $z=\lambda_i$) puisque son terme général est en valeur absolue supérieur à $\frac{K_1}{n^\alpha\log^\sigma(n+1)}$ terme général d'une série divergente.

Par contre, si l'on prend la même suite $\{\lambda_n\}$ mais $a_n=\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}$, la série (1) qu'on obtient admet pour domaine de convergence simple et absolue le demi-plan $\sigma>0$, le terme général pour $z=\sigma$ étant de signe constant à partir d'un certain rang et de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n\log^{1+\sigma}n}$ $(n\geq 2)$.

Nous allons montrer maintenant que les inégalités (10) ne peuvent pas être améliorées. D'après sa définition, $I(x)$ est une fonction croissante dont la dérivée positive continue tend vers zéro en décroissant. De plus, $\lambda_n=I'(n)$.

Nous ferons la démonstration dans le cas qui présente le plus de difficultés où

$$D_i=0, \qquad D_s=\infty \tag{11}$$

et construirons une fonction satisfaisant à

$$\begin{cases} \underline{\lim}_{n=\infty}\, nI'(n)=0, \\ \overline{\lim}_{n=\infty}\, nI'(n)=\infty, \end{cases} \tag{12}$$

et à l'une des trois conditions

$$(13) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\mathrm{I}(n)} = \delta \qquad (\delta > 0),$$

$$(13') \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\mathrm{I}(n)} = 0,$$

$$(13'') \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\mathrm{I}(n)} = \infty.$$

Pour cela, dessinons deux axes de coordonnées Ox et Oy rectangulaires et marquons sur Ox les points A_p d'abscisse $a_p = p^{p^2}$, et B_p d'abscisse $b_p = pa_p$ (p entier $\geqq 3$). Les segments A_pB_p ne se recouvrent pas; soit (C) la courbe d'équation $y = \log x$. Marquons sur (C) les points M_p d'abscisse a_p et N_p d'abscisse b_p. Définissons les points M'_p et N'_p d'abscisse respectivement

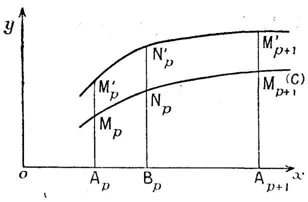

Fig. 2.

égale à a_p et b_p situés sur la courbe (Γ) d'équation $Y = Y(x)$, leurs ordonnées étant définies de proche en proche par

$$\begin{aligned}
Y(a_3) &= \log a_3,\\
Y(b_3) - Y(a_3) &= \frac{2}{\log 3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
Y(a_p) - Y(b_{p-1}) &= \log a_p - \log b_{p-1}\\
Y = (b_p) - Y(a_p) &= \frac{p-1}{\log p} \qquad (p \geqq 4).
\end{aligned}$$

Joignons les points $M'_pN'_p$ par des arcs de paraboles d'axe parallèle à Oy, ayant des tangentes en M'_p et N'_p de pente respectivement égale à $\frac{3}{2a_p \log p}$ et $\frac{1}{2a_p \log p}$, ce qui est possible puisque la pente de la corde $M'_pN'_p$ est précisément moyenne arithmétique des pentes des tangentes en M'_p et N'_p. Joignons N'_p à M'_{p+1} par la courbe déduite de l'arc correspond de (C) par la translation $\overrightarrow{N_pN'_p}$. Enfin, dans le voisinage de chaque point anguleux de la courbe ainsi obtenue, remplaçons la courbe par une courbe voisine de façon à ce que la pente de la tangente à la courbe (Γ) ainsi modifiée soit fonction continue de x et tende vers zéro en décroissant quand x tend vers l'infini.

Soit $J(x)$ la fonction ainsi représentée. Il est possible de faire les raccords de telle façon que

$$J'(a_p) < \frac{2}{a_p \log p}, \qquad J'(b_p) > \frac{1}{4 a_p \log p} = \frac{p}{4 b_p \log p}$$

et l'on a

$$\lim_{p=\infty} a_p J'(a_p) = 0, \qquad \lim_{p=\infty} b_p J'(b_p) = +\infty,$$

de plus, on a, pour $a_p \leqq x \leqq b_p$,

$$J(x) - \log x \leqq \sum_{n=3}^{p} \left(\frac{n-1}{\log n} - \log n \right) \leqq (p-1)(p-3)$$

et, pour $b_p \leqq x \leqq a_{p+1}$,

$$\frac{J(x) - \log x}{\log x} \leqq \frac{J(b_p) - \log b_p}{\log b_p} \leqq \frac{(p-1)(p-3)}{(p^2+1)\log p}.$$

En vérifiant, par un calcul facile, que pour x assez grand on a $J(x) > \log x$, on obtient

$$\lim_{x=\infty} \frac{J(x)}{\log x} = 1.$$

La fonction $I_1(x) = \frac{J(x)}{\delta}$ vérifie (12) et (13);

La fonction $I_2(x) = J(x)\log_3(Ax)$ vérifie (12) et (13');

La fonction $I_3(x) = \frac{J(x)}{\log_3(Ax)}$ vérifie (12) et (13");

A étant choisi suffisamment grand pour que les conditions imposées aux fonctions $I_2(x)$ et $I_3(x)$ soient vérifiées pour $x \geqq 1$.

A partir des fonctions $I_1(x)$, $I_2(x)$ et $I_3(x)$, il est facile de construire des séries (1) telles que $D_i = 0$; $D_s = +\infty$ et dont l'épaisseur de la bande de convergence simple soit respectivement égale à δ, zéro et $+\infty$, puisque pour les suites $\{\lambda_n\}$ correspondantes, les fonctions $I(x)$ se comportent, quand n tend vers l'infini respectivement comme

$$\frac{\log x}{\delta}, \quad \log x \log_3(Ax), \quad \frac{\log x}{\log_3(Ax)}.$$

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES ABSCISSES DE CONVERGENCE SIMPLE ET ABSOLUE A PARTIR DES COEFFICIENTS.

THÉORÈME. — *En utilisant les notations du Chapitre III et en posant*

$$\alpha = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \left| \sum_{0}^{n} a_\nu \right|}{I(n)} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq +\infty)$$

et lorsque $\sum_0^\infty a_\nu$ *converge*

$$\beta = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \left| \sum_n^\infty a_\nu \right|}{\mathrm{I}(n)} \qquad (-\infty \leqq \beta \leqq 0)$$

et en désignant par $\mathfrak{S}$ *l'abscisse de convergence simple de la série, on a les égalités*

$$\mathfrak{S} = \alpha \quad \text{si} \quad \mathfrak{S} \geqq 0,$$

$$\mathfrak{S} = \beta \quad \text{si} \quad \sum_0^\infty a_\nu \text{ converge.}$$

Pour démontrer ce théorème, nous étudierons d'abord le comportement de l'expression

$$\mathrm{S}(n, m) = \sum_{\nu=n}^{m-1} \frac{e^{k\mathrm{I}(\nu)}}{\lambda(\nu)} \qquad (k \text{ nombre réel quelconque}).$$

Lorsque k est négatif, les termes de cette somme vont en décroissant et l'on a immédiatement

$$\frac{1}{k}\left[e^{k\mathrm{I}(m)} - e^{k\mathrm{I}(n)}\right] \leqq \mathrm{S}(n, m) \leqq \frac{1}{k}\left[e^{k\mathrm{I}(m-1)} - e^{k\mathrm{I}(n-1)}\right].$$

Pour $k = 0$ on a visiblement

$$\mathrm{I}(m) - \mathrm{I}(n) \leqq \mathrm{S}(n, m) \leqq \mathrm{I}(m-1) - \mathrm{I}(n-1).$$

Mais, si k est positif, il n'est pas sûr que la fonction $\frac{e^{k\mathrm{I}(x)}}{\lambda(x)}$ soit croissante, ou décroissante, pour $x \geqq x_0$. Nous opérerons alors de la façon suivante :

La fonction $y(x) = \frac{e^{k\mathrm{I}(x)}}{\lambda(x)}$ définie pour $x \geqq 1$ admettra une dérivée $y'(x)$ si la fonction croissante $\lambda(x)$ interpolant les λ_n est elle-même pourvue d'une dérivée positive $\lambda'(x)$. On a alors

$$\frac{y'}{y} = \frac{k - \lambda'(x)}{\lambda(x)},$$

$\frac{y'}{y}$ est donc borné supérieurement par la quantité $\frac{k}{\lambda(x)}$ qui tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. En intégrant l'inégalité

$$\frac{y'}{y} \leqq \frac{k}{\lambda(x)} \leqq \varepsilon_1,$$

valable pour $x \geqq x_0$, ε_1 arbitrairement petit, on obtient

$$\frac{y(x_2)}{y(x_1)} \leqq e^{\varepsilon_1(x_2 - x_1)} \qquad \text{valable pour} \quad x_2 \geqq x_1 \geqq x_0.$$

Soit, alors $y(p)$ la valeur prise par la fonction $y(x)$ pour $x = p$ entier, supérieur à x_0; traçons les arcs de courbe $\mathcal{A}_p$ définis par

$$Y_p(x) = y(p)\, e^{\varepsilon_1(x-p)} \qquad (|x-p| \leqq 1).$$

Dans l'intervalle $p \leqq x \leqq p+1$, on a

$$Y_p(x) \leqq y(x) \leqq Y_{p+1}(x) \tag{14}$$

et

$$\frac{Y_{p+1}(x)}{Y_p(x)} = \frac{y(p+1)}{y(p)} e^{-\varepsilon_1} \leqq 1,$$

indépendant de x, ce qui précise la position relative des arcs $\mathcal{A}_p$.

De (14) on déduit immédiatement l'inégalité

$$\frac{e^{-\varepsilon_1}}{k}\left[e^{k\mathrm{l}(m)} - e^{k\mathrm{l}(n)}\right] \leqq S(n, m) \leqq \frac{e^{\varepsilon_1}}{k}\left[e^{k\mathrm{l}(m-1)} - e^{k\mathrm{l}(n-1)}\right] \tag{15}$$

qui va nous être utile par la suite.

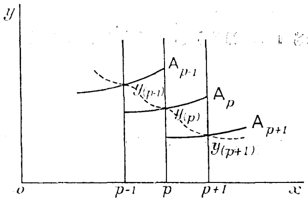

Fig. 3.

Dans une première partie, nous allons démontrer que si la série (1) converge pour $z = \sigma + i\tau \neq \lambda_i$ on a $\alpha \leqq \sigma$ si $\sigma \geqq 0$, et $\beta \leqq \sigma$ si $\sigma < 0$. Dans une seconde partie, nous montrerons que, réciproquement, la série (1) converge pour $\sigma > \alpha$ ou $\sigma > \beta$, ce qui prouvera le théorème.

1° Nous supposons que la série (1) converge pour

$$z = \sigma + i\tau \neq \lambda_i \qquad (\sigma \geqq 0).$$

Posons $a_n P_n(z) = b_n$ et appliquons la transformation d'Abel à

$$\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu + \sum_{s=n}^{m-1}\left(\frac{1}{P_{s+1}} - \frac{1}{P_s}\right)\sum_{\nu=s+1}^{\infty} b_\nu - \frac{1}{P_m}\sum_{\nu=m+1}^{\infty} b_\nu. \tag{16}$$

Or,

$$\frac{1}{P_{s+1}} - \frac{1}{P_s} = \frac{1}{P_s} \times \frac{z}{\lambda_{s+1} - z}.$$

Nous savons d'autre part que pour z fixé, on a

$$\left|\frac{1}{P_s(z)}\right| < M\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{l}(s)}.$$

Choisissons n_0 tel que pour $m \geqq n \geqq n_0$, on ait

$$\left|\sum_n^m b_\nu\right| < \eta \quad \text{et} \quad \frac{\sigma+\varepsilon}{\lambda(n)} \leqq \varepsilon_1.$$

On a alors

$$\left|\sum_n^m a_\nu\right| < \eta\left[\mathrm{M}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)} + \mathrm{M}_1 \sum_{s=n}^{m-1} \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(s)}}{\lambda(s)} + \mathrm{M}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)}\right],$$

où M et M_1 sont indépendants de η.

Faisons $n = n_0$; le premier terme du crochet est fixe, le second est majoré par $\dfrac{e^{\varepsilon_1}}{\sigma+\varepsilon}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)}$ donc,

$$\left|\sum_{n_0}^m a_\nu\right| < \mathrm{M}_2 \eta\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)},$$

ou enfin,

$$\lim_{m=\infty} \frac{\displaystyle\sum_0^m a_\nu}{e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(m)}} = 0. \tag{17}$$

Dans le cas où $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge, on peut remplacer (17) par

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{m=\infty} \frac{\displaystyle\sum_0^m a_\nu}{e^{\sigma\mathrm{I}(m)}} = 0 \qquad (\sigma > 0), \\ &\lim_{m=\infty} \frac{\displaystyle\sum_0^m a_\nu}{\mathrm{I}(m)} = 0 \qquad (\sigma = 0), \end{aligned}\right. \tag{17'}$$

Supposons maintenant que la série (1) converge pour $z = \sigma + i\tau\,(\sigma < 0)$ et soit ε tel que $0 < \varepsilon < -\sigma$. La série $\displaystyle\sum_0^\infty a_\nu$ est alors convergente; on peut faire tendre m vers l'infini dans (16) et pour $n \geqq n_0$ on a

$$\left|\sum_n^\infty a_\nu\right| < \eta\left[\mathrm{M}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)} - \frac{\mathrm{M}_1}{\sigma+\varepsilon}\, e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n-1)}\right],$$

d'où l'on tire

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_n^\infty a_\nu}{e^{(\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(n)}} = 0.$$

Si $\mathfrak{S}$ désigne l'abscisse de convergence de la série (1), on a donc

$$\alpha \leqq \mathfrak{S} \quad \text{si } \mathfrak{S} \geqq 0, \qquad \beta \leqq \mathfrak{S} \quad \text{si } \mathfrak{S} < 0. \tag{18}$$

2° Réciproquement, supposons α fini, positif ou nul, on a alors

$$\sum_{s=n}^{m} a_s \mathrm{P}_s(z) = \sum_{s=n}^{m-1} (\mathrm{P}_s - \mathrm{P}_{s+1}) \sum_0^s a_\nu - \mathrm{P}_n \sum_0^{n-1} a_\nu + \mathrm{P}_m \sum_0^m a_\nu.$$

Or,

$$|\mathrm{P}_s(z)| < \mathrm{M} e^{(-\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(s)},$$

$$|\mathrm{P}_s - \mathrm{P}_{s+1}| = |\mathrm{P}_s| \frac{|z|}{\lambda_{s+1}} < \mathrm{M}_1 \frac{e^{(-\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(s)}}{\lambda(s)}.$$

Par hypothèse, on a

$$\left| \sum_0^s a_\nu \right| < \mathrm{C} e^{(\alpha+\varepsilon)\mathrm{I}(s)} \qquad (\varepsilon > 0),$$

donc,

$$\left| \sum_n^m a_s \mathrm{P}_s \right| < \mathrm{CM}_1 \sum_n^m \frac{e^{(\alpha+2\varepsilon-\sigma)\mathrm{I}(s)}}{\lambda(s)} + \mathrm{MC}\left[e^{(\alpha+2\varepsilon-\sigma)\mathrm{I}(m)} + e^{(\alpha+2\varepsilon-\sigma)\mathrm{I}(n)} \right].$$

Ce qui prouve que la série (1) converge pour $\sigma = \alpha + 3\varepsilon$.

D'autre part, si $\sum_0^\infty a_\nu$ converge et si β est fini négatif, la série (1) converge pour $\sigma > \beta$. En effet, on a

$$\sum_{s=n}^{m} a_s \mathrm{P}_s = \sum_{n+1}^{m} (\mathrm{P}_s - \mathrm{P}_{s-1}) \sum_s^\infty a_\nu + \mathrm{P}_n \sum_n^\infty a_\nu - \mathrm{P}_m \sum_{m+1}^\infty a_\nu.$$

Or,

$$|\mathrm{P}_s - \mathrm{P}_{s-1}| < \mathrm{M}_1 \frac{e^{(-\sigma+\varepsilon)\mathrm{I}(s)}}{\lambda(s)}$$

et

$$\left| \sum_s^\infty a_\nu \right| < \mathrm{C} e^{(\beta+\varepsilon)\mathrm{I}(s)} \qquad (\varepsilon > 0),$$

d'où

$$\left| \sum_n^m a_s \mathrm{P}_s \right| < \mathrm{CM}_1 \sum_{n+1}^m \frac{e^{(\beta+2\varepsilon-\sigma)\mathrm{I}(s)}}{\lambda(s)} + \mathrm{MC} e^{(\beta+2\varepsilon-\sigma)\mathrm{I}(n)} + \mathrm{MC} e^{(\beta+2\varepsilon-\sigma)\mathrm{I}(m)},$$

expression qui tend vers o pour $\sigma = \beta + 3\varepsilon$ quand n tend vers l'infini. On en déduit (19) $\mathfrak{S} \leqq \beta$. En comparant (18) et (19) on obtient le théorème annoncé.

Abscisse de convergence absolue. — Pour déterminer l'abscisse $\mathfrak{S}_a$ de convergence absolue de la série (1), il suffit de remarquer que pour n assez grand et z réel, $\mathrm{P}_n(z)$ est réel et a un signe bien déterminé. Il en résulte que $\mathfrak{S}_a$ est l'abscisse de convergence de la série $\sum_0^\infty |a_n| \mathrm{P}_n(z)$. Donc, en posant

$$\alpha' = \varlimsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_0^n |a_\nu|}{\mathrm{I}(n)} \qquad (0 \leqq \alpha' \leqq + \infty),$$

et lorsque $\sum_0^\infty |a_\nu|$ converge

$$\beta' = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\frac{\log \sum_n^\infty |a_\nu|}{n}}{\mathrm{I}(n)} \qquad (-\infty \leqq \beta' \leqq 0).$$

On a

$$\mathfrak{S}_a = \alpha' \qquad \text{si} \quad \mathfrak{S}_a \geqq 0$$

et

$$\mathfrak{S}_a = \beta' \qquad \text{si} \quad \sum_1^\infty |a_\nu| \text{ converge.}$$

CHAPITRE V.

Conditions nécessaires de représentation.

Soit une série (1) qui converge pour $\mathcal{R}(z) = \sigma > \mathfrak{S}$. La convergence de la série étant uniforme dans tout domaine fermé, borné, complètement intérieur au demi-plan de convergence $\sigma > \mathfrak{S}$, la série (1) représente une fonction $F(z)$ holomorphe pour $\sigma > \mathfrak{S}$. Nous allons voir en outre que la croissance de $F(z)$, quand z tend vers l'infini dans le domaine de convergence est limitée par la donnée de la suite $\{\lambda_n\}$ et de l'abscisse de convergence. Dans le Chapitre suivant, nous donnerons des conditions suffisantes pour qu'une fonction $F(z)$ soit représentée par sa série d'interpolation. Les conditions nécessaires et suffisantes que nous donnerons ne sont pas absolument identiques, mais s'écartent peu les unes des autres, si bien que l'on délimite ainsi avec une assez grande précision l'ensemble des fonctions $F(z)$ représentables par les séries (1). Dans cette étude, nous introduirons une fonction $\Phi(r, \theta)$ définie pour $r > 0$ et $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, que nous appellerons la fonction indicatrice de la suite $\{\lambda_n\}$ et qui jouera un grand rôle dans les inégalités que nous établirons.

Étude du maximum de $|P_n(z)|$ *pour z fixe, n variable.* — Supposons la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ divergente. Nous désignerons par $\lambda(x)$ une fonction définie pour $x \geqq 1$, admettant une dérivée positive, continue, telle que $\lambda(n) = \lambda_n$. Nous désignerons par $x(\lambda)$ la fonction inverse de la précédente, définie pour $\lambda \geqq \lambda_1$. Soit enfin

$$\mathrm{I}(x) = \int_1^x \frac{dx}{\lambda(x)}.$$

Les résultats que l'on obtient sont très différents suivant que $\mathcal{R}(z) = \sigma$ est soit négative ou nulle, soit positive. En effet, si l'on a $\sigma \leqq 0$, chaque facteur de $P_n(z)$ a un module supérieur à 1. Si $\sigma < 0$, $|P_n(z)|$ tend vers l'infini, puisque, dans ces conditions, on a l'inégalité $\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| \geqq 1 - \frac{\sigma}{\lambda_n}$ $(\sigma < 0)$ et que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ est supposée divergente.

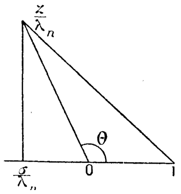

Fig. 4.

Lorsque $\sigma = 0$ le module de $P_n(z)$ est une fonction croissante de n qui a une limite finie ou infinie quand n tend vers l'infini, suivant que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2}$ converge ou non. En effet, dans ces conditions, on a

$$|P_n(z)|^2 = \prod_1^n \left(1 + \frac{|z|^2}{\lambda_\nu^2}\right).$$

Considérons, enfin, le cas où σ est positif et posons

$$z = re^{i\theta} = \sigma + i\tau \qquad \left(r > 0,\ |\theta| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Les nombres $\frac{z}{\lambda_n}$ ont pour argument θ et pour module $\frac{r}{\lambda_n}$ avec

$$\lim_{n=\infty} \frac{r}{\lambda_n} = 0.$$

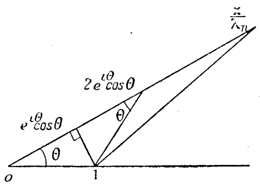

Fig. 5.

Tant que $\frac{r}{\lambda_n} \geqq 2\cos\theta$ on a $\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| \geqq 1$, mais pour $\frac{r}{\lambda_n} < 2\cos\theta$ on a $\left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| < 1$. Le module de $P_n(z)$ est donc maximum pour l'indice n tel que

$$\frac{r}{\lambda_n} \leqq 2\cos\theta, \qquad \frac{r}{\lambda_{n+1}} > 2\cos\theta.$$

En utilisant la fonction continue $\lambda(x)$ définie plus haut, on voit que la fonction continue $\log\left|1-\frac{z}{\lambda(x)}\right|$ s'annule pour une certaine valeur ξ' de x définie par $\lambda(\xi')=\frac{r}{2\cos\theta}$. Soit ξ l'entier inférieur ou égal à ξ'. La valeur exacte de ξ' dépend du choix de la fonction d'interpolation $\lambda(x)$, mais ce choix ne peut faire varier ξ' que dans l'intervalle $\xi\leqq\xi'<\xi+1$ puisque pour toutes les fonctions $\lambda(x)$ possibles, les valeurs $\lambda(\xi)$ et $\lambda(\xi+1)$ sont imposées, et que, par hypothèse, $\lambda(\xi)\leqq\frac{r}{2\cos\theta}$ et $\lambda(\xi+1)>\frac{r}{2\cos\theta}$.

Suivant que θ est nul ou non, la fonction $y(x)=\log\left|1-\frac{z}{\lambda(x)}\right|$ est représentée par l'un ou l'autre des deux graphiques suivants :

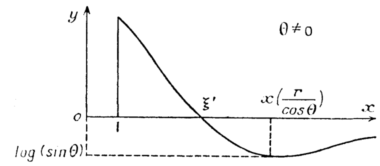

Fig. 6.

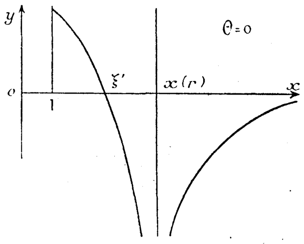

Fig. 7.

Dans le premier cas, $y(x)$ décroît pour $1\leqq x\leqq x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$, passe par un minimum égal à $\log|\sin\theta|$ pour $x=x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$, puis tend vers zéro en croissant quand x tend vers l'infini.

Dans le second cas, $y(x)$ décroît pour $1\leqq x<x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$, n'est pas définie pour $x=x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$ et croît dans l'intervalle $x>x\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$ avec $\lim_{x=\infty}y(x)=0$.

Soit $P_\xi(z)$ le polynome d'indice ξ ayant, pour z donné, le plus grand module. On a, en supposant $\xi>1$, c'est-à-dire $r>2\lambda_1\cos\theta$,

$$\log|P_\xi(z)|=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\xi}\log\left(1-\frac{2\sigma}{\lambda_\nu}+\frac{r^2}{\lambda_\nu^2}\right),$$

d'où l'on tire la double inégalité suivante, la fonction $y(x)$ étant décroissante dans l'intervalle $1\leqq x\leqq\xi'$

$$0\leqq\log|P_\xi(z)|-\frac{1}{2}\int_1^{\xi'}\log\left(1-\frac{2\sigma}{\lambda(x)}+\frac{r^2}{\lambda^2(x)}\right)dx\leqq\log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right|.$$

En intégrant par parties et en remarquant que par définition $y(\xi')=0$, on obtient une nouvelle expression de cette intégrale où l'on peut prendre $u=\frac{\lambda(x)}{r}$ pour nouvelle variable, ce que conduit aux importantes inégalités

$$(20) \qquad -\log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right| \leqq \log|P_\xi(z)| - \Phi(r,\theta) \leqq 0,$$

avec

$$\Phi(r,\theta)=\int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}} \frac{(1-u\cos\theta)\,x(ru)\,du}{u(u^2-2u\cos\theta+1)},$$

valables pour

$$r \geqq 2\lambda_1\cos\theta, \qquad |\theta|<\frac{\pi}{2}.$$

Nous allons calculer effectivement les fonctions $\Phi(r,\theta)$ correspondant à quelques suites $\{\lambda_n\}$.

Si $\lambda_n=n^p (0<p\leqq 1)$ on peut prendre $\lambda(x)$ égale à x^p et l'on a

$$\Phi(r,\theta)=r^{\frac{1}{p}}\int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1-u\cos\theta)\,du}{u^2-2u\cos\theta+1},$$

expression que l'on peut calculer lorsque p est rationnel. Le calcul pour p irrationnel s'obtiendrait alors par passage à la limite.

Exemple. — 1° $\lambda_n=n$.

$$\Phi(r,\theta)=r[\cos\theta\log(2\cos\theta)+\theta\sin\theta]-\varepsilon(r,\theta), \qquad 0\leqq\varepsilon(r,\theta)\leqq 4 \qquad \text{pour} \quad r\geqq 2.$$

M. Norlund [1] pour la même distribution $\{\lambda_n\}$ et en utilisant une méthode différente basée sur l'étude de la fontion eulérienne $\Gamma(z)$ a donné une majoration de $\log|P_\xi(z)|$ un peu plus précise puisqu'on l'obtient en remplaçant $\varepsilon(r,\theta)$ par $\frac{1}{2}\log r$. Notre méthode a cependant l'avantage de permettre de ramener la détermination de l'indicatrice $\Phi(r,\theta)$ dans les cas les plus généraux au calcul d'une seule intégrale, la différence entre la borne inférieure de $\log|P_\xi(z)|$ et la borne supérieure trouvées n'étant que de l'ordre de $\log\left|1-\frac{z}{\lambda_1}\right|$.

2° $\lambda_n=\sqrt{n}$.

$$\Phi(r,\theta)=r^2\left[\cos 2\theta\log(2\cos\theta)+\theta\sin 2\theta-\frac{1}{2}\right]-\varepsilon(r,\theta),$$
$$0\leqq\varepsilon(r,\theta)\leqq 2 \qquad \text{pour} \quad r\geqq 2.$$

Remarquons que lorsque $\lambda_n=n$ la quantité $\Phi(r,\theta)$ reste bornée quand, r restant constant, θ tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$; alors qu'il n'en est plus de même dans le second exemple. Nous verrons plus loin de ce phénomène est lié à la nature de la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{2}{\nu}}}$.

Enfin, nos méthodes restent valables dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ converge, à condition, lorsque $\cos\theta$ est négatif ou nul, de remplacer dans l'expression de $\Phi(r, \theta)$ la limite supérieure d'intégration par $+\infty$. Ainsi lorsqu'on a $\lambda_n = n^2$, on a, pour $\cos\theta \geqq 0$

$$\Phi(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}\log\left(\sqrt{\cos\theta} + \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\sin\frac{\theta}{2}\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right] - \varepsilon(r, \theta),$$
$$0 \leqq \varepsilon(r, \theta) \leqq 8 \quad \text{pour} \quad r \geqq 2,$$

et, pour $\cos\theta \leqq 0$

$$\Phi(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}}\pi\sin\left|\frac{\theta}{2}\right| - \varepsilon(r, \theta), \qquad 0 \leqq \varepsilon(r, \theta) \leqq 3 \qquad \text{pour} \quad r \geqq 2.$$

Ces fonctions avaient également été calculées par M. Norlund [1] au moyen de la fonction $\Gamma(z)$.

D'une façon générale, dans le cas où $\lambda_n = n^p (p > 0)$ on obtient

$$\Phi(r, \theta) = r^{\frac{1}{p}}\psi_p(\theta) - \varepsilon(r, \theta),$$

avec

si $\cos\theta > 0$,

$$\psi_p(\theta) = \int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1 - u\cos\theta)\,du}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}, \qquad 0 \leqq \varepsilon(r, \theta) \leqq 4p \quad (r \geqq 2);$$

si $\cos\theta \leqq 0$ *et* $p > 1$

$$\psi_p(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1 - u\cos\theta)\,du}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}, \qquad 0 \leqq \varepsilon(r, \theta) \leqq \frac{3p}{2} \quad (r \geqq 2).$$

En effet, pour $r \geqq 2$ on a

$$0 \leqq \varepsilon(r, \theta) = r^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{1}{r}} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1 - u\cos\theta)\,du}{u^2 - 2u\cos\theta + 1} \leqq \begin{cases} \dfrac{3p}{2} & \text{si} \quad \cos\theta \leqq 0 \\ 4p & \text{si} \quad \cos\theta > 0 \end{cases} \qquad (r \geqq 2),$$

puisque dans les conditions indiquées on a

$$0 < 1 - u\cos\theta \leqq 1 \quad \text{pour} \ \cos\theta > 0, \qquad 1 \leqq 1 - u\cos\theta \leqq \frac{3}{2} \quad \text{pour} \ \cos\theta \leqq 0,$$

et d'autre part

$$u^2 - 2u\cos\theta + 1 \geqq \sin^2\theta \geqq \frac{3}{4} \qquad \text{si} \quad \cos\theta \leqq \frac{1}{2},$$
$$u^2 - 2u\cos\theta + 1 \geqq \frac{5}{4} - \cos\theta \geqq \frac{1}{4} \qquad \text{si} \quad \cos\theta \geqq \frac{1}{2},$$
$$u^2 - 2u\cos\theta + 1 \geqq 1 \qquad \text{si} \quad \cos\theta \leqq 0.$$

Enfin, toujours dans le cas où la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}$ converge, $P_\infty(z)$ définit une fonction entière de z que nous désignerons par $E(z)$ et la même méthode nous montre par un calcul simple que pour $\frac{\pi}{2} \leq |\theta| \leq \pi$ on a

$$-\log\left|1 - \frac{z}{\lambda_1}\right| \leq \log|E(z)| - H(r, \theta) \leq 0,$$

avec

$$H(r, \theta) = \int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{+\infty} \frac{(1 - u\cos\theta)\, x(ru)\, du}{u(u^2 - 2u\cos\theta + 1)}.$$

Pour $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ la fonction $E(z)$ s'annule pour $z = \lambda_i$ et, pour $0 < \alpha \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ on a

$$2\log\sin\alpha - \log\left|1 - \frac{z}{\lambda_1}\right| \leq \log|E(z)| - H(r, \theta) \leq -2\log\sin\alpha.$$

En particulier, si $\lambda_n = n^p (p > 1)$ le terme principal de $H(r, \theta)$ c'est-à-dire $\int_0^{\infty} \frac{(1 - u\cos\theta)(ru)^{\frac{1}{p}}\, du}{u(u^2 - 2u\cos\theta + 1}$ se calcule par la méthode des résidus et donne

$$\log|E(z)| \sim r^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{p}\right), \qquad \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha.$$

On en déduit, en particulier, que les fonctions $E(z)$ sont d'ordre $\frac{1}{p}$ et de type $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$, résultat qui est d'ailleurs bien connu.

Étude de la fonction $\Phi(r, \theta)$. — Nous avons défini la fonction indicatrice $\Phi(r, \theta)$ pour $r > r(\theta)$, $r(\theta)$ étant le plus grand des deux nombres 0 et $2\lambda_1 \cos\theta$ quand la série $\sum^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}$ est convergente ; on pourra convenir de prendre $\Phi(r, \theta) = 0$ pour $0 \leq r \leq r(\theta)$ puisque alors $\log|P_m(z)|$ est négatif ou nul quel que soit m. D'après sa construction même, $\Phi(r, \theta)$, fonction continue de r et θ prenant la même valeur pour deux valeurs opposées de $\theta (-\pi \leq \theta \leq \pi)$ est, à θ constant, une fonction croissante de r et, à r constant, une fonction croissante de $|\theta|$.

Quand la série $\sum^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}$ diverge, la fonction $\Phi(r, \theta)$ n'est définie que pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ et $r \geq 0$ [on prendra $\Phi(r, \theta) = 0$ pour $r \leq 2\lambda_1 \cos\theta$]. C'est encore une fonction paire de θ, continue par rapport aux deux variables r et θ.

A θ constant, $\Phi(r, \theta)$ est fonction croissante de r.

A r constant, $\Phi(r, \theta)$ est fonction croissante de $|\theta|$.

Quand, à r constant, θ tend vers $\pm \frac{\pi}{2}$ la fonction $\Phi(r, \theta)$ tend vers une limite finie ou infinie, suivant que la série $\sum^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge ou diverge. Cela résulte de l'étude des polynomes $P_n(z)$ pour $|z| = r$ et $\lim \theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ou bien de l'expression même de $\Phi(r, \theta)$, comme nous allons le montrer.

Reprenons l'expression de l'indicatrice

$$\Phi(r, \theta) = \int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}} \frac{(1 - u\cos\theta)\, x(ru)\, du}{u(u^2 - 2u\cos\theta + 1)},$$

Quand θ tend vers $\pm \frac{\pi}{2}$, l'existence de la limite de $\Phi(r, \theta)$ est liée à l'existence de l'intégrale $\int^{\infty} \frac{x(ru)\, du}{u^3}$ puisque dans l'intervalle d'intégration on a

$$\frac{1}{2u(u^2+1)} \leq \frac{1 - u\cos\theta}{u(u^2 - 2u\cos\theta + 1)} \leq \frac{1}{u^3}.$$

Il nous suffit donc de démontrer que, $\lambda(x)$ étant une fonction positive, croissante, de x, et $x(\lambda)$ sa fonction inverse, les quantités $\sum^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ et $\int^{\infty} \frac{x(\lambda)\, d\lambda}{\lambda^3}$ convergent ou divergent simultanément.

Il est bien connu que, dans les conditions énoncées, $\sum^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ et $\int^{\infty} \frac{dx}{\lambda^2(x)}$ convergent ou divergent simultanément. Or

$$\int \frac{dx}{\lambda^2(x)} = \frac{x}{\lambda^2(x)} + 2\int \frac{x(\lambda)\, d\lambda}{\lambda^3}.$$

Il suffit donc de montrer que l'existence de $\int^{\infty} \frac{x(\lambda)\, d\lambda}{\lambda^3}$ ou celle de $\int^{\infty} \frac{dx}{\lambda^2(x)}$ entraîne que

$$\lim_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2(x)} = 0.$$

Supposons donc que $\int^{\infty} \frac{dx}{\lambda^2(x)}$ converge. On a évidemment $\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2(x)} = 0$; sinon, on aurait, à partir d'un certain nombre, $\frac{x}{\lambda^2} > K$ et l'intégrale $\int^{\infty} \frac{dx}{\lambda^2(x)}$ n'aurait pas de sens. Montrons qu'on ne peut pas avoir $\overline{\lim}_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2(x)} = 3a > 0$. En effet, si cela était, il existerait une suite de nombres x_j augmentant indéfiniment pour lesquels on aurait $\frac{x}{\lambda^2} > 2a$ et une suite intercalée x'_k (en supprimant au besoin des x_j) telle que $\frac{x}{\lambda^2} < a$. Supposons la numérotation faite de telle sorte que

$$x_{j-1} < x'_j < x_j,$$

$\lambda^2(x)$ étant une fonction croissante de x, on a

$$\frac{x'_j}{a} \leqq \lambda^2(x'_j) < \lambda^2(x_j) \leqq \frac{x_j}{2a}\cdot$$

d'où l'on tire $x_j > 2x'_j$ et par suite

$$\int_{x'_j}^{x_j} \frac{dx}{\lambda^2(x)} > (x_j - x'_j)\frac{1}{\lambda^2(x_j)} > a,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse quand on fait augmenter j indéfiniment. On a donc $a = 0$ et $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2(x)} = 0$. La convergence de $\int^\infty \frac{dx}{\lambda^2(x)}$ entraîne celle de $\int^\infty \frac{x(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^3}$.

Réciproquement, supposons que l'intégrale $\int^\infty \frac{x(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^3}$ converge; montrons que l'on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2(x)} = 0.$$

On a d'abord $\underline{\lim}_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2} = 0$, car si $\frac{x}{\lambda^2(x)}$ restait supérieur à un nombre positif K on aurait

$$\int^\beta \frac{x\,d\lambda}{\lambda^3} > \mathrm{K}\int^\beta \frac{d\lambda}{\lambda},$$

et cette intégrale tend vers l'infini en même temps que β. Supposons que $\overline{\lim}_{x=\infty} \frac{x}{\lambda^2} = 3a > 0$. Il existe alors une suite de nombres λ_j augmentant indéfiniment tel que $\frac{x}{\lambda^2} < a$ et une autre suite intercalée λ'_k telle que $\frac{x}{\lambda^2} > 2a$ et l'on peut supposer la numérotation de chacune de ces suites faite de telle façon que

$$\lambda_{j-1} < \lambda'_j < \lambda_j.$$

La fonction $x(\lambda)$ étant croissante, on a les inégalités

$$2a\lambda_j'^2 \leqq x'_j < x_j \leqq a\lambda_j^2,$$

d'où $\frac{\lambda_j}{\lambda'_j} > \sqrt{2}$ et

$$\int_{\lambda'_j}^{\lambda_j} \frac{x(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^3} > \frac{a}{2}\cdot$$

En faisant tendre j vers l'infini, on arrive à une contradiction si $a \neq 0$. On a donc $a = 0$ et l'existence de l'intégrale $\int^\infty \frac{x(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^3}$ entraîne bien celle de $\int^\infty \frac{dx}{\lambda^2(x)}\cdot$

Il résulte de là que si la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge, l'indicatrice $\Phi(r, \theta)$ est, à r constant, une fonction continue de θ pour $|\theta| \leqq \frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$\Phi\left(r, \pm \frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{+\infty} \frac{x(ru)\,du}{u(u^2+1)}.$$

Propriétés asymptotiques de l'indicatrice. — L'expression même de $\Phi(r, \theta)$ montre que, à θ constant, le comportement de $\Phi(r, \theta)$ lorsque r tend vers l'infini ne dépend que du comportement asymptotique de la fonction $x(\lambda)$ c'est-à-dire de la répartition asymptotique des nombres λ_n. Cette remarque sera utile dans les applications des théorèmes du Chapitre VI. Donnons un exemple. Supposons que la suite $\{\lambda_n\}$ ait une densité positive et finie D, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D$; on a aussi $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x}{\lambda(x)} = D$, donc pour $\lambda \geqq A$, on a

$$(D - \varepsilon)\lambda \leqq x(\lambda) \leqq (D + \varepsilon)\lambda \qquad (0 < \varepsilon < D).$$

Décomposons l'intégrale $\Phi(r, \theta)$ de la façon suivante :

$$\Phi(r, \theta) = \int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{A}{r}} + \int_{\frac{A}{r}}^{\frac{1}{2\cos\theta}}. \tag{21}$$

Quand r augmente indéfiniment, la première intégrale reste bornée puisque la quantité $\frac{(1 - u\cos\theta)\,x(ru)}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}$ est bornée et que $\int_{\frac{\lambda_1}{r}}^{\frac{A}{r}} \frac{du}{u} = \log\frac{A}{\lambda_1}$ est indépendant de r. Dans la seconde intégrale, on a $ru \geqq A$, donc la fonction $x(ru)$ vérifie les inégalités (20) et l'on déduit immédiatement

$$(D - \varepsilon)\,r\psi(\theta) - C(r, \theta) \leqq \Phi(r, \theta) \leqq (D + \varepsilon)\,r\psi(\theta) + C(r, \theta),$$
$$\psi(\theta) = \cos\theta\log(2\cos\theta) + \theta\sin\theta.$$

La fonction $C(r, \theta)$ restant bornée quand r tend vers l'infini $\left(|\theta| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$. D'une façon générale, on voit que si, pour $\lambda \geqq A$, la suite λ_n est soumise à certaines conditions d'inégalité, on pourra décomposer $\Phi(r, \theta)$ en deux intégrales comme dans (21); la première intégrale restera bornée quand r tend vers l'infini; la seconde sera évaluée en fonction des conditions asymptotiques imposées à la suite $\{\lambda_n\}$.

Enfin, il nous sera égalenent utile pour la suite de connaître la propriété suivante :

La fonction indicatrice croît plus vite que le logarithme de tout polynome. — Et effet, d'après les inégalités (20), on a

$$\Phi(r,\theta) \geqq \log|P_\xi(z)|,$$

ξ étant le plus grand entier inférieur ou égal à $x\left(\frac{r}{2}\right)$. Quand r tend vers l'infini le degré ξ du polynome augmente indéfiniment et l'on a, en désignant par $Q(z)$ un polynome quelconque, mais fixe

$$\lim_{r=\infty} Q(z)\, e^{-\Phi(r,\theta)} = 0, \qquad z = re^{i\theta} \qquad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Après cette étude rapide de la fonction indicatrice de la suite $\{\lambda_n\}$, nous allons revenir à l'étude qui est le but de ce Chapitre, à savoir : quelles sont les inégalités vérifiées par une fonction $F(z)$ représentée par une série (1) en supposant que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ diverge ?

La série (1) peut ne pas converger absolument pour $\sigma > \mathcal{S}$, la convergence absolue pouvant même n'avoir lieu pour aucune valeur de z. Il convient donc de remplacer la série (1) par une nouvelle série absolument convergente, nous permettant d'utiliser les quantités $\sum_0^n a_\nu$ (pour $\mathcal{S} \geqq 0$) et $\sum_n^\infty a_\nu$ (pour $\mathcal{S} < 0$) dont la croissance est liée simplement à l'abscisse de convergence de la série (1) et à la fonction $I(n)$ par les relations (18) et (19).

Plaçons-nous dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ diverge, et supposons que la série

$$F(z) = \sum_0^\infty a_\nu P_\nu(z) \tag{1}$$

converge pour $z = \sigma + i\tau$ $(\sigma > \mathcal{S} \geqq 0)$. On a, en utilisant la transformation d'Abel,

$$\sum_0^m a_\nu P_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (P_\nu - P_{\nu+1}) \sum_{s=0}^{\nu} a_s + P_m \sum_0^m a_\nu.$$

Quand m tend vers l'infini, le terme $P_m \sum_0^m a_\nu$ tend vers zéro pour $\sigma = \mathcal{S} + \varepsilon$ d'après les inégalités établies au paragraphe précédent et portant sur $|P_n(z)|$ et $\left|\sum_0^n a_\nu\right|$.

Donc, pour $\sigma > \mathcal{S} \geqq 0$, on a bien

$$F(z) = z \sum_{\nu=0}^\infty \frac{b_\nu}{\lambda_{\nu+1}} P_\nu(z), \qquad b_\nu = \sum_{s=0}^{\nu} a_s. \tag{22}$$

Supposons maintenant l'abscisse de convergence de la série (1) négative. On sait que dans ces conditions, la série $\sum_0^\infty a_\nu$ converge, et toujours en utilisant la transformation d'Abel, on a

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu P_\nu(z) = \sum_0^\infty a_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} (P_\nu - P_{\nu-1}) \sum_{s=\nu}^{\infty} a_s - P_m \sum_{m+1}^{\infty} a_\nu.$$

Pour $\sigma > \mathfrak{S}$, le dernier terme tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, et l'on a

$$(23) \qquad F(z) = c_0 - z \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} P_{\nu-1}(z), \qquad c_\nu = \sum_{s=\nu}^{\infty} a_s.$$

Il est facile de constater que les séries (22) et (23) convergent absolument pour $\sigma > \mathfrak{S}$. En effet, dans le premier cas, on a

$$|b_\nu| < C e^{(\mathfrak{S}+\delta)l(\nu)}, \qquad |P_n(z)| < M e^{(-\sigma+)l\varepsilon(\nu)}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \delta > 0,$$

et le terme général de la série est inférieur en module à

$$\frac{CMr}{\lambda_\nu} e^{(\mathfrak{S}+\varepsilon+\delta-\sigma)l(\nu)},$$

terme général d'une série convergente, pour $\sigma > \mathfrak{S} + \varepsilon + \delta$.

Pour (23), on a de même

$$|c_\nu| < C e^{(\mathfrak{S}+\delta)l(\nu)}, \qquad |P_\nu(z)| < M e^{(-\sigma+\varepsilon)l(\nu)}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \delta > 0,$$

et le terme général de (23) est majoré en module par

$$\frac{CMr}{\lambda_\nu} e^{(\mathfrak{S}+\varepsilon+\delta-\sigma)l(\nu)},$$

terme général d'une série convergente pour

$$\sigma > \mathfrak{S} + \varepsilon + \delta.$$

On vérifie aisément que l'égalité (23) est encore valable lorsque la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ converge. Nous voyons donc que dans tous les cas $F(z)$ est représentable par une série absolument convergente pour $\sigma > \mathfrak{S}$. Cette série est d'ailleurs également une série d'interpolation, à un facteur z près. Nous avons donc, en désignant par μ un nombre supérieur à $\mathfrak{S}$ et aussi voisin que l'on veut de $\mathfrak{S}$,

$$(24) \qquad |F(z)| < rC_0 + rC \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\mu l(\nu)}}{\lambda(\nu)} |P_\nu(z)|,$$

C_0 et C étant deux constantes indépendantes de z. Ayant en vue l'étude de conditions suffisantes de représentation de $F(z)$ valables dans le demi-plan $\sigma > 0$, nous nous bornerons à étudier $|F(z)|$ pour $\sigma \geqq A$ $(A > 0)$, A étant déterminé à partir de l'abscisse de convergence $\mathfrak{S}$, laissant de côté l'étude de $|F(z)|$ pour z situé dans la bande $\mathfrak{S} < \sigma < A$.

Le cas le plus simple à étudier est celui où $\mathfrak{S}$, donc μ, est négatif. Dans ce cas, en effet, la série $\sum_1^\infty \frac{e^{\mu I(\nu)}}{\lambda(\nu)}$ est une série numérique convergente. Or, pour tout n et $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, on a $|P_n(z)| \leqq e^{\Phi(r,\theta)}$, $z = re^{i\theta}$, et par conséquent,

$$|F(z)| < Cr\, e^{\Phi(r,\theta)}. \tag{25}$$

Cette inégalité pourrait d'ailleurs être légèrement améliorée. En effet, quand r tend vers l'infini, le rang ξ du polynome de module maximum de la suite $P_n(z)$ augmente indéfiniment et le coefficient de ce polynome, soit $\frac{e^{\mu I(\xi)}}{\lambda(\xi)}$, tend vers zéro, puisque μ est négatif.

Examinons maintenant le cas où $\mathfrak{S} \geqq 0$, donc $\mu > 0$. Pour chaque valeur de z, la série au deuxième membre de (24) converge bien, mais le coefficient de $P_n(z)$ peut tendre vers l'infini avec n. En effet, si nous prenons, par exemple, $\lambda_n = n$, l'on a

$$\frac{e^{\mu I(n)}}{\lambda(n)} = n^{\mu-1},$$

expression qui tend vers l'infini avec n pour $\mu > 1$. D'autre part, la série $\sum_1^\infty \frac{e^{\mu I(\nu)}}{\lambda(\nu)}$ est certainement divergente, si bien qu'il faudra partager la série (24) en trois parties

$$\sum_0^{\nu_0-1} + \sum_{\nu_0}^{\nu_1} + \sum_{\nu_1+1}^{+\infty} = S_0 + S_1 + S_2. \tag{26}$$

ν_0 est déterminé par la condition que $\mu \leqq \lambda(\nu_0)$, et est donc indépendant de z.

ν_1 est le plus petit nombre entier tel que $\lambda(\nu_1) \geqq \frac{r}{2\cos\theta}(1+\varepsilon)$ et dépend de z $(\varepsilon > 0)$.

Dans ces conditions, S_0 se comporte comme un polynome de degré fixe quand r tend vers l'infini, et par conséquent, on a, comme nous l'avons montré plus haut,

$$\lim_{r=\infty} S_0\, e^{-\Phi(r,\theta)} = 0.$$

Pour évaluer S_1, nous remarquons que pour r suffisamment grand, on a

$\nu_0 < \xi \leqq \nu_1$. On peut donc dans S_1 majorer $|P_n(z)|$ par $|P_\xi(z)|$ ou encore par $e^{\Phi(r,0)}$. Donc, en vertu de (15), on a

$$(27) \qquad S_1 < C r\, e^{\Phi(r,0)} \sum_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{e^{\mu I(\nu)}}{\lambda(\nu)} < \frac{C_1 r}{\mu} e^{\Phi(r,0)+\mu I(\nu_1)} \qquad (C_1 = eC).$$

Dans le cas où l'on peut faire $\mu = 0$ $\left(\text{c'est-à-dire si } \mathfrak{S} = 0 \text{ et si } \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n^2} \text{ converge}\right)$ on remplacera (27) par

$$(27') \qquad S_1 < C_1 r\, e^{\Phi(r,0)} I(\nu_1).$$

Occupons-nous maintenant de S_2. Pour $\nu > \nu_1$, la suite $|P_\nu(z)|$ est une suite décroissante. On a même

$$\log|P_\nu| - \log|P_{\nu-1}| = \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{2\sigma}{\lambda_\nu} + \frac{r^2}{\lambda_\nu^2}\right) < \frac{-\sigma}{\lambda_\nu} + \frac{r^2}{2\lambda_\nu^2} < \frac{-\sigma\varepsilon}{(1+\varepsilon)\lambda_\nu},$$

puisque

$$\lambda_\nu \geqq \frac{r}{2\cos\theta}(1+\varepsilon),$$

d'où

$$|P_\nu| < |P_{\nu_1-1}|\, e^{\frac{-\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}\left[\frac{1}{\lambda_{\nu_1}} + \frac{1}{\lambda_{\nu_1+1}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_\nu}\right]} \leqq |P_{\nu_1}|\, e^{\frac{-\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}[I(\nu) - I(\nu_1)]},$$

et

$$S_2 < C r\, |P_{\nu_1}|\, e^{\frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon} I(\nu_1)} \sum_{\nu_1+1}^{\infty} \frac{e^{\left(\mu - \frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) I(\nu)}}{\lambda(\nu)}.$$

Supposons alors $\sigma \geqq (1+\mu)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$; la somme figurant au deuxième membre est majorée par $e \times e^{\left(\mu - \frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) I(\nu_1)}$ et l'on a

$$(28) \qquad S_2 < C_1 r\, |P_{\nu_1}|\, e^{\mu I(\nu_1)} \leqq C_1 r\, e^{\Phi(r,0) + \mu I(\nu_1)}.$$

En comparant (26), (27) et (28), nous arrivons au résultat

$$(29) \qquad |F(z)| < C r\, e^{\Phi(r,0) + \mu J\left[\frac{r(1+\varepsilon)}{2\cos\theta}\right]};$$

C, constante numérique ($\varepsilon > 0$);
$\Phi(r, \theta)$, indicatrice de la suite $\{\lambda_n\}$;
$\mu > 0$, supérieur à l'abscisse de convergence $\mathfrak{S}$ de la série (1);

$$I(\nu) = \int_1^\nu \frac{dx}{\lambda(x)}, \qquad J(\lambda) = I[\nu(\lambda)].$$

L'inégalité (29) étant valable pour

$$\sigma \geqq (\mu + 1)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

En particulier, pour la suite $\lambda_n = n$, (29) donne

$$(30)\qquad |F(z)| < C\, e^{r[\cos\theta \log(2\cos\theta)+\theta\sin\theta]}\, r^{\mu+1}\cos^{-\mu}\theta.$$

Dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ converge et en remarquant d'une part que $|P_n(z)|$ est majoré dans tout le plan par $e^{\Phi(r,0)}$ et, d'autre part, que la série $\sum_1^\infty \frac{c_\nu}{\lambda_\nu}$ converge, on obtient facilement l'inégalité

$$|F(z)| < C r e^{\Phi(r,0)},$$

valable dans tout le plan.

CHAPITRE VI.

Conditions suffisantes de représentation.

Passons maintenant à l'étude de conditions suffisantes pour qu'une fonction $F(z)$, holomorphe pour $\sigma > 0$, soit représentable par une série (1), dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ est supposée divergente. Nous allons pour cela étudier le reste de la série (1). Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, les coefficients de la série (1) calculés à l'aide des valeurs que prend la fonction $F(z)$ pour $z = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Soit

$$(31)\qquad R_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{P_n(z)}{P_n(\zeta)}\,\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

(C) étant une courbe continue, entourant les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et z, et située tout entière dans le demi plan $\sigma > 0$. On voit immédiatement que

$$R_n(z) = F(z) - \Pi_{n-1}(z),$$

$\Pi_{n-1}(z)$ étant le polynome en z de degré $(n-1)$ qui prend les mêmes valeurs que $F(z)$ pour $z = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Il suffit donc de démontrer que

$$\lim_{n=\infty} R_n(z) = 0 \qquad (\sigma > 0),$$

pour prouver d'abord que la série (1) converge, et ensuite qu'elle représente bien $F(z)$.

Choisissons alors la courbe (C) de façon à rendre le produit $\prod_{\nu=1}^{n} |\zeta - \lambda_\nu|$, maximum. D'après ce que nous avons vu, cela sera réalisé lorsque $n = \xi$, c'est-à-dire lorsque

$$\lambda_n = \lambda_\xi = \frac{\rho}{2\cos\varphi} \qquad (\zeta = \rho e^{i\varphi}).$$

Nous prendrons donc pour (C), qui varie avec n, le cercle de centre le point λ_n et de rayon λ_n. Ce cercle est tout entier dans le demi-plan $\sigma > 0$, sauf le point O qu'on pourra éviter par un petit arc de cercle (γ) si O n'est pas un point régulier de $F(z)$. Ce cercle contient bien les points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et, pour n assez grand, le point z. D'après (20) on a, sur (C),

$$|P_n(\zeta)| > \frac{e^{\Phi(\rho,\varphi)}}{\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_1}\right|}.$$

D'autre part, pour z donné, on a

$$|P_n(z)| < M\, e^{(-\sigma+\varepsilon)I(n)}, \qquad |d\zeta| = 2\lambda_n |d\varphi|.$$

Supposons alors que $F(\zeta)$ satisfasse à l'inégalité

$$(32) \qquad |F(\zeta)| < C \frac{\cos\varphi}{\rho} e^{\Phi(\rho,\varphi) + kJ\left(\frac{\rho}{2\cos\varphi}\right)} \qquad \text{pour} \quad |\zeta| \geqq A \qquad (k \geqq 0),$$

avec les notations de l'inégalité (29).

Décomposons l'intégrale R_n en deux intégrales : l'une R'_n pour laquelle $\rho \geqq A$, l'autre, R''_n, pour laquelle $\rho \leqq A$. Puisque sur le cercle (C), on a l'égalité $J\left(\frac{\rho}{2\cos\varphi}\right) = I(n)$, on obtient, en utilisant les inégalités vérifiées par $|P_n(z)|$,

$$|R'_n| < \frac{CM}{\lambda_1} \left|\frac{\zeta - \lambda_1}{\zeta - z}\right| e^{(k+\varepsilon-\sigma)I(n)},$$

$\left|\frac{\zeta - \lambda_1}{\zeta - z}\right|$ est borné pour ζ sur (C) et $n \geqq n_0(z)$. On a donc, pour $\sigma > k$,

$$\lim_{n=\infty} R'_n = 0.$$

Supposons, en outre, que $F(\zeta)$ soit bornée pour $\zeta = X + iY$, $0 \leqq X < \varepsilon$; $|Y| \leqq A$; dans ces conditions, l'intégrale R''_n tend aussi vers zéro quand n tend vers l'infini, puisqu'on a alors

$$|P_n(\zeta)| \geqq 1, \qquad |F(\zeta)| < C, \qquad |\zeta - z| > d > 0$$

et

$$|R''_n| < \frac{3ACM}{d} e^{(-\sigma+\varepsilon)I(n)}.$$

En résumé, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si une fonction* $F(z)$ *est holomorphe pour* $\sigma > 0$ *et bornée pour* $0 \leqq \sigma < \varepsilon$; $|\tau| \leqq A$, *et satisfait pour* $|z| \geqq A$ *à l'inégalité*

$$(33) \qquad |F(z)| < C \frac{\cos\theta}{r} e^{\Phi(r,\theta) + kJ\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)} \qquad \text{avec} \quad z = re^{i\theta} = \sigma + i\tau \qquad (k \geqq 0),$$

alors $F(z)$ *est représentable par une série* (1) *dont l'abscisse de convergence est au plus égale à* k.

Dans la majoration de $F(z)$, nous avons dû introduire le facteur $\frac{\cos\theta}{r}$ et l'on pourrait craindre que cela n'entraîne que la fonction $F(z)$ tende vers zéro le long de Oy. Il n'en est rien en général, car le terme $J\left(\frac{r}{\cos\theta}\right)$ croît suffisamment vite pour que le deuxième membre de (83) ne tende pas vers zéro quand $\cos\theta$ tend vers zéro. Il existe cependant des cas où le phénomène se produit. Par exemple, si l'on prend la suite $\lambda_n = (n+1)\log(n+1)$, on a

$$I(n) = \log\left(\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right).$$

D'autre part, puisque la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge, la fonction $\Phi(r, \theta)$ reste bornée pour $|\theta| = \frac{\pi}{2}$ et le deuxième membre de (33) tend vers zéro en même temps que $\cos\theta$. Une autre séparation de l'intégrale (31) n'a pas pu, dans ce cas, nous fournir de renseignements plus précis, et il semble bien que ce phénomène, qui se présente lorsque la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu}$ diverge très lentement, tient à la nature même du problème.

Conséquences. — Supposons qu'une fonction $F(z)$ holomorphe pour $\sigma \geqq 0$ s'annule pour $z = \lambda_n$; si l'inégalité (33) est vérifiée, alors, comme les coefficients de la série (1) sont tous nuls, $F(z)$ est identiquement nulle, puisqu'elle est représentée par sa série d'interpolation. En particulier, supposons qu'on prenne $\lambda_n = n^p$ $(0 < p < 1)$. Pour θ fixe différent de $\pm\frac{\pi}{2}$, on voit que $J\left(\frac{r}{2\cos\theta}\right)$ est de l'ordre de grandeur de $r^{\frac{1}{p}-1}$ et est négligeable devant la fonction indicatrice $\Phi(r, \theta)$ qui est de l'ordre de $r^{\frac{1}{p}}$. Pour $p = 1$, on a $J(\lambda) = \log\lambda$ et $\Phi(r, \theta)$ est de l'ordre de r; et les résultats précédents sont donc encore valables. Supposons que la fonction $F(z)$ soit d'ordre $\frac{1}{p}$ $(0 < p \leqq 1)$, et posons

$$h_p(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log|F(re^{i\theta})|}{r^{\frac{1}{p}}},$$

$$\psi_p(\theta) = \int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}} \frac{u^{\frac{1}{p}-1}(1 - u\cos\theta)\,du}{u^2 - 2u\cos\theta + 1}.$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème

Théorème. — *Si une fonction holomorphe pour $\sigma \geqq 0$ est d'ordre égal à $\frac{1}{p}$ $(0 < p \leqq 1)$ et si, pour $|\theta| \leqq \frac{\pi}{2}$,*

$$h_p(\theta) < \psi_p(\theta),$$

alors cette fonction $F(z)$ *ne peut s'annuler pour* $z = n^p$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *sans être identiquement nulle.*

Dans ce théorème, on peut évidemment remplacer la fonction $F(z)$ par la fonction $F(z) - P(z)$, $P(z)$ étant un polynome donné quelconque; comme d'autre part, deux fonctions prenant les mêmes valeurs pour $z = \lambda_i$ $(i \geqq n_0)$ ont des développements (1) qui ne diffèrent que par un développement de O, on voit qu'on obtient le théorème suivant analogue à celui obtenu par M. Bernstein [7] dans le cas où la suite $\{\lambda_n\}$ est à densité maxima finie.

THÉORÈME. — *Si une fonction* $F(z)$, *holomorphe pour* $\sigma \geqq 0$ *est telle que*

1° $$F(n_p) = P(n^p) \qquad (\textit{pour tout } n \geqq n_0);$$

2° $$h_p(\theta) < \psi_p(\theta) \qquad \left[\textit{pour tout } \theta, \left(|\theta| \leqq \frac{\pi}{2}\right)\right];$$

alors on a

$$F(z) \equiv P(z) \qquad [P(z) \textit{ polynome arbitraire donné}].$$

Ce théorème peut encore être généralisé grâce aux remarques que nous avons faites sur le calcul de la fonction $\Phi(r, \theta)$ lorsque la suite $\{\lambda_n\}$ satisfaisait à certaines conditions asymptotiques. Le théorème précédent prend alors la forme suivante :

THÉORÈME. — *Si une fonction* $F(z)$ *est holomorphe pour* $\sigma \geqq 0$ *et vérifie les conditions*

1° $$F(\lambda_n) = P(\lambda_n) \qquad (\textit{pour tout } n \geqq n_0);$$

2° $$h_p(\theta) < \frac{1}{K^{\frac{1}{p}}} \psi_p(\theta) \qquad \left(\textit{pour tout } \theta, |\theta| \leqq \frac{\pi}{2}\right);$$

les nombres λ_n *vérifiant* $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lambda_n}{n^p} \leqq K$, $P(z)$ *étant un polynome donné à l'avance et* p *un nombre fixe vérifiant* $0 < p \leqq 1$, *alors on a*

$$F(z) \equiv P(z).$$

On voit, par le même raisonnement, que la série (1), quand elle converge, fournit la fonction $F(z)$ de croissance minimum prenant pour $z = \lambda_\nu$ certaines valeurs A_ν données à l'avance. La fonction $F(z)$ est donc déterminée uniquement par les nombres A_ν d'indice supérieur à un nombre donné arbitrairement grand. Ainsi, lorsque nous cherchions les fonctions $O_p(z)$ s'annulant pour $z = \lambda_\nu$ $(\nu \neq p)$ avec $O_p(\lambda_p) = 1$, leur développement (1) ne pouvait représenter que la fonction zéro et leur abscisse de convergence ne pouvait être inférieure à λ_p, puisque pour $z = \lambda_p$ nous imposions une valeur $O_p(\lambda_p)$ différente de celle imposée par la suite des valeurs $O_p(\lambda_\nu)$ $(\nu > p)$, suite qui, à elle seule, suffisait à déterminer la fonction.

Ces résultats s'étendent facilement aux fonctions définies dans l'angle $|\theta| \leqq \alpha < \pi$, moyennant la transformation $Z = z^{\frac{\pi}{2\alpha}}$ et nous fournissent ainsi des théorèmes relatifs aux fonctions définies dans un angle donné, et dont les valeurs sont connues, en certains points de la bissectrice de cet angle.

Les résultats qui précèdent ont été obtenus, moyennant l'hypothèse que la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu}$ était divergente. Il est facile de voir que cette condition est nécessaire; en effet, si la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ converge, il est possible de construire une fonction s'annulant pour $z = \lambda_\nu$, bornée dans le demi-plan $\sigma \geqq 0$ et non identiquement nulle. Il suffit de considérer le produit de Blaschke [4]

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(\frac{z-\lambda_\nu}{z+\lambda_\nu}\right).$$

Fonction qui répond bien aux conditions imposées et reste inférieure ou égale à 1 en module pour $\sigma \geqq 0$.

CHAPITRE VII.

Dans ce Chapitre, nous nous intéresserons au comportement de la série

$$(1) \qquad F(z) = \sum_0^\infty a_n P_n(z), \qquad P_0(z) = 1, \qquad P_n(z) = \prod_1^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right);$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} \lambda(n) = +\infty,$$

avec

$$S(0) = 0, \qquad S(n) = \sum_1^n \frac{1}{\lambda_\nu}, \qquad \lim_{n=\infty} S(n) = +\infty,$$

sur sa droite de convergence et à l'étude des points singuliers de sa somme $F(z)$.

Théorème. — *Si la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge, la série*

$$(1) \qquad F(z) = \sum_0^\infty a_n P_n(z)$$

et la série de Dirichlet associée

$$(2) \qquad D(z) = \sum_0^\infty a_n e^{-zS(n)}$$

convergent simultanément.

Supposons, en effet, que la série (1) converge, et posons

$$a_n P_n = b_n, \qquad e^{zS(n)} P_n(z) = \frac{1}{c_n}.$$

En utilisant la transformation d'Abel, nous avons

$$\sum_m^p a_n e^{-zS(n)} = \sum_m^p b_n c_n = \sum_m^{p-1} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sum_m^\nu b_s + c_p \sum_m^p b_s.$$

Comme la série (1) converge, on a, pour $\nu \geqq m \geqq n_0$

$$\left| \sum_m^\nu b_s \right| < \varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$\left| \sum_m^p a_n e^{-zS(n)} \right| < \varepsilon \left(|c_p| + \sum_m^{p-1} |c_\nu - c_{\nu+1}| \right). \tag{3}$$

Or,

$$-\log |c_q| = \sum_1^q \log \left| 1 - \frac{z}{\lambda_\nu} \right| + \sigma S(q). \tag{4}$$

Quand z est fixe, différant de λ_i, le membre de droite de (4) a une limite, quand q tend vers l'infini, puisque la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge. Donc $|c_q| < C$. D'autre part, dans les mêmes conditions, on a

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| = |c_\nu| \left| 1 - \frac{e^{-\frac{z}{\lambda_{\nu+1}}}}{1 - \frac{z}{\lambda_{\nu+1}}} \right| < C_1 \left| 1 - \frac{z}{\lambda_{\nu+1}} - e^{-\frac{z}{\lambda_{\nu+1}}} \right| < \frac{C_2}{\lambda_{\nu+1}^2}.$$

Par suite, le coefficient de ε dans (3) est borné quel que soit p pour z fixe. La série (2) est donc convergente.

Réciproquement, supposons la série (2) convergente, et posons, cette fois, $a_n e^{-zS(n)} = b_n$ et $e^{zS(n)} P_n = c_n$. Par hypothèse, il existe un nombre $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour $p \geqq m \geqq n_0(\varepsilon)$ on ait $\left| \sum_m^p b_s \right| < \varepsilon$. Appliquons encore la transformation d'Abel

$$\sum_m^p a_n P_n = \sum_m^{p-1} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sum_m^\nu b_s + c_p \sum_m^p b_s,$$

donc

$$\left| \sum_m^p a_n P_n \right| < \varepsilon \left(|c_p| + \sum_m^{p-1} |c_\nu - c_{\nu+1}| \right), \tag{5}$$

analogue à (3), mais avec des notations différentes. Or, on a $|c_q| < C$ puisque

$$\log |c_q| = \sum_1^q \log \left| 1 - \frac{z}{\lambda_\nu} \right| + \sigma S(q)$$

et que cette somme a une limite lorsque q tend vers l'infini $\left(\text{la série } \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu^2} \text{ étant}\right.$

$\left.\text{convergente et } z \text{ fixe}\right)$. D'autre part,

$$|c_\nu - c_{\nu+1}| = |c_\nu| \left| 1 - \left(1 - \frac{z}{\lambda_{\nu+1}}\right) e^{\frac{z}{\lambda_{\nu+1}}} \right| < \frac{C_1}{\lambda_{\nu+1}^2},$$

Le coefficient de ε dans (5) restant borné pour z fixe, la série (1) est bien convergente.

La démonstration de ce théorème a nécessité la convergence de la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$. Nous allons voir que, inversement, si la série $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ est divergente, on peut construire des séries associées (1) et (2) qui n'ont sur la droite de convergence qu'un seul point de convergence commun.

Considérons, en effet, la suite des nombres définis par les égalités

$$a'_n = e^{-\sqrt{\sum_1^n \frac{1}{\lambda_k^2}}},$$

on a

$$\lim_{n=\infty} a'_n = 0.$$

Extrayons de cette suite, une suite partielle de nombres a'_{n_k} tels que l'on ait $a'_{n_k} \leqq \frac{1}{k^2}$; la série $\sum_{k=1}^\infty a'_{n_k}$ converge. Posons alors

$$a_n = 0 \quad \text{si } n \neq n_k \qquad \text{et} \qquad \alpha_{n_k} = a'_{n_k}.$$

La série (2) converge normalement pour $\sigma = 0$. Quant à la série (1) elle converge pour $z = 0$, mais diverge pour $z = i\tau$, $\tau \neq 0$. En effet

$$|P_{n_k}(i\tau)|^2 > C^2(\tau)\, e^{\frac{\tau^2}{2}\sum_1^{n_k} \frac{1}{\lambda_\nu^2}}, \qquad \text{avec} \quad C(\tau) > 0 \qquad \text{pour} \quad \tau \neq 0,$$

puisque pour y réel, compris entre zéro et un, on a $\log(1 + \;) \geqq \frac{y}{2}$. Donc

$$|P_{n_k}(i\tau)| > C(\tau)\, e^{\frac{\tau^2}{4}\sum_1^{n_k} \frac{1}{\lambda_\nu^2}}$$

et

$$|a_{n_k} P_{n_k}(i\tau)| > C(\tau)\, e^{\frac{\tau^2}{4}\sum_1^{n_k} \frac{1}{\lambda_\nu^2} - \sqrt{\sum_1^{n_k} \frac{1}{\lambda_\nu^2}}},$$

quantité qui augmente indéfiniment quand k augmente indéfiniment, τ restant fixe et non nul.

En ce qui concerne les points singuliers des fonctions $F(z)$ et $D(z)$ définies par les séries (1) et (2) pour $\sigma > \mathfrak{S}$, nous pouvons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si les séries* (1) *et* (2) *convergent pour* $\sigma > \mathfrak{S}$ *et si la densité supérieure de la suite* $\{\lambda_m\}$ *est finie, les fonctions* $F(z)$ *et* $D(z)$ *définies par les séries* (1) *et* (2) *ont mêmes points singuliers sur la droite de convergence, sauf peut-être pour* $z = \lambda_i$ *si* $\mathfrak{S} = \lambda_i$. *Dans ce dernier cas, si* $z = \lambda_i$ *est un point régulier pour* $D(z)$, *il l'est aussi pour* $F(z)$, *la réciproque pouvant ne pas être vraie.*

Supposons donc qu'on ait

$$\frac{n}{\lambda_n} < K \qquad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

K étant un nombre positif arbitraire, plus grand que la densité supérieure D_s de la suite $\{\lambda_n\}$. La série $\sum \frac{1}{\lambda_n^2}$ est convergente, et le produit infini de Weierstrass

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{z}{\lambda_\nu}}$$

définit une fonction entière $E_0(z)$; posons, d'une façon générale,

$$E_n(z) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{z}{\lambda_\nu}},$$

on a alors l'égalité valable pour $n \geqq 0$

(6) $$E_0(z) a_n e^{-zS(n)} = a_n P_n(z) E_n^{*}(z).$$

Étudions les fonctions $E_n(z)$; pour z fixe, on voit que $\lim\limits_{n=\infty} E_n(z) = 1$. Plus précisément, supposons $|z| < C$ et choisissons un nombre $n_1 \geqq n_0$ tel que pour $n \geqq n_1$ on ait $\lambda_n > 2C$.

De l'inégalité

(7) $$\left| \log(1-y) + y + \frac{y^2}{2} \right| \leqq \frac{|y|^3}{3} + \frac{|y|^4}{4} + \ldots \leqq \frac{2}{3}|y|^3,$$

valable pour $|y| \leqq \frac{1}{2}$, nous déduisons, en posant $\frac{z}{\lambda_\nu} = y$ et en ajoutant les inégalités obtenues pour $\nu = n+1, n+2, \ldots$

(8) $$\left| \log E_n(z) + \frac{z^2}{2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \right| \leqq \frac{2}{3} |z|^3 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^3}$$

ou bien

(9) $$E_n(z) = e^{-\frac{z^2}{2} \sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} + \theta(z,n) \sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^3}},$$

$\theta(z, n)$ étant une fonction qui reste bornée dans les conditions indiquées plus haut, ($|z| < C$ et $n \geqq n_1$). Comme on a

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} < K^2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \frac{K^2}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^3} < \frac{C}{n^2},$$

on en déduit

$$E_n(z) = 1 - \frac{z^2}{2} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} + \theta_1(z, n) \frac{1}{n^2},$$

$\theta_1(z, n)$ restant bornée dans les mêmes conditions.

En faisant successivement, $n = 0, 1, 2, \ldots$ dans les égalités (6) et en ajoutant membre à membre, il vient

$$E_0(z) D(z) - F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n [E_n(z) - 1], \tag{10}$$

valable au moins pour $\sigma > \mathfrak{S}$.

Il suffit donc de démontrer que la série au second membre de (10) converge uniformément pour $\sigma > \mathfrak{S} - \delta$ et $|\tau| < C$ ($\delta > 0$) pour établir le théorème énoncé plus haut. Étudions les séries

$$\sum_{0}^{\infty} a_n P_n \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \tag{11}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n P_n}{n^2} \right|. \tag{12}$$

Nous savons que, pour $\sigma < \mathfrak{S} + \varepsilon$ et $n > n_0$

$$\left| \frac{P_n(z)}{P_n(\mathfrak{S} + \varepsilon)} \right| < M^2 e^{(-\sigma + \mathfrak{S} + \varepsilon) S(n)} < M_1 e^{(-\sigma + \mathfrak{S} + \varepsilon) K \log n}.$$

Donc,

$$\left| \frac{P_n(z) \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}}{P_n(\mathfrak{S} + \varepsilon)} \right| < M_1 K^2 n^{(\mathfrak{S} + \varepsilon - \sigma) K - 1},$$

puisque, pour $n \geqq n_0$, on a

$$S(n) < K \log n + K_1 \qquad (K_1, \text{ indépendant de } n).$$

Enfin

$$\frac{P_{n+1}(z)}{P_{n+1}(\mathfrak{S} + \varepsilon)} \sum_{n+2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} - \frac{P_n(z)}{P_n(\mathfrak{S} + \varepsilon)} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$$
$$= \frac{P_n(z)}{P_n(\mathfrak{S} + \varepsilon)} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \left[\frac{\lambda_{n+1} - z}{\lambda_{n+1} - \mathfrak{S} - \varepsilon} - 1 \right] - \frac{P_{n+1}(z)}{P_{n+1}(\mathfrak{S} + \varepsilon)} \frac{1}{\lambda_{n+1}^2},$$

où les deux termes du second membre sont majorés par $C_1 n^{(\mathcal{S}+\varepsilon-\sigma)K-2}$, C_1 étant indépendant de n.

En appliquant la transformation d'Abel à la série (11) avec

$$b_n = a_n P_n(\mathcal{S}+\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad c_n = \frac{P_n(z)}{P_n(\mathcal{S}+\varepsilon)} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

on voit que la série (11) converge uniformément pour

$$\sigma \geqq \mathcal{S} + \varepsilon - \frac{1-\eta}{K} \qquad \text{et} \qquad |\tau| < C \qquad (\eta > 0 \text{ arbitraire}).$$

La série (12) converge absolument et uniformément dans les mêmes conditions puisque, alors,

$$\left|\frac{a_n P_n(z)}{n^2}\right| < C n^{-1-\eta}.$$

Comme ε et η sont arbitrairement petits et K aussi voisins que l'on veut de la densité supérieure D_s de la suite $\{\lambda_n\}$, on voit finalement que la fonction

$$E_0(z)\,D(z) - F(z)$$

est holomorphe pour $\sigma > \mathcal{S} - \frac{1}{D_s}$, d'où résulte le théorème annoncé.

Si $\mathcal{S} = \lambda_i$ on voit que si $z = \lambda_i$ est un point régulier pour $D(z)$, il l'est aussi pour $F(z)$, mais que, réciproquement, s'il est régulier pour $F(z)$ il est soit un point régulier, soit un pôle simple pour $D(z)$. C'est ce qui se produit quand $F(z)$ est une des fonctions $O_p(z)$ étudiées plus haut. Nous allons montrer par un exemple, qu'il n'est pas possible d'améliorer le théorème précédent. Pour cela, nous allons former deux séries associées (1) et (2) telles que la fonction $E_0 D - F$ ne soit plus holomorphe pour $z = \mathcal{S} - \frac{1}{D_s}$. Prenons la suite $\{\lambda_n\}$ formée par les entiers 1, 2, ..., n, ... et $a_n = n^\alpha$, α réel, différent de zéro, non entier positif, et posons

$$G(z) = E_0(z)\,D(z) - F(z) = \sum_0^{\infty} a_n P_n(z)\,[E_n(z) - 1],$$

avec

$$E_n(z) = \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{z}{\lambda_\nu}}.$$

Les séries (1) et (2) admettent la droite $\sigma = \alpha + 1$ pour droite de convergence simple et absolue. La densité de la suite $\{\lambda_n\}$ étant égale à 1, nous allons montrer que le point $z = \alpha$ est singulier pour la fonction $G(z)$. Soit, en effet, x un nombre réel supérieur à α. A partir d'un certain rang, les polynomes $P_n(x)$

gardent un signe constant puisque les quantités $1-\frac{x}{\lambda_n}$ sont positives pour $\lambda_n > x$, et l'on a

$$|P_n(x)| > C n^{-x},$$

valable pour $\alpha \leqq x \leqq \alpha+\varepsilon$, C étant une constante positive, indépendante de x et de n, et ε un nombre positif assez petit pour que l'intervalle $(\alpha, \alpha+\varepsilon)$ ne contienne pas de nombre entier. D'autre part, un calcul facile montre que l'on a

$$1-E_n(x) > \frac{C_1}{n},$$

C_1 étant une constante positive, indépendante de n et de x, pour $n \geqq n_0$ et $\alpha \leqq x \leqq \alpha+\varepsilon$.

La fonction $G(x)$ est donc représentée par une série à termes réels de signe constant (au moins à partir d'un certain rang) et le terme général de cette série est minoré par la quantité $C_2 n^{\alpha-1-x}$, on en déduit l'inégalité

$$|G(x)| > \frac{K}{x-\alpha},$$

qui prouve que

$$\lim_{x \succ \alpha} |G(x)| = +\infty.$$

Le point $z=\alpha$ est un point singulier de la fonction $G(z)$.

En divisant les nombres λ_n et z par un même nombre D, on voit par ce même exemple, qu'il existe des séries associées (1) et (2) telles que la fonction $G(z) = E_0(z)D(z) - F(z)$ admet le point $z=\frac{\alpha}{D}$ pour point singulier, l'abscisse de convergence simple et absolue des séries (1) et (2) étant $\sigma = \frac{\alpha+1}{D}\cdot$ On ne peut donc pas dans le cas général, espérer augmenter l'épaisseur de la bande où $D(z)$ et $F(z)$ ont mêmes points singuliers.

Grâce à ce théorème, nous pourrons étudier la distribution des points singuliers de la fonction $F(z)$ représentée par la série (1) situés sur la droite de convergence de (1) si nous connaissons celle des points singuliers de la fonction $D(z)$. Tout théorème valable pour les séries de Dirichlet sera valable pour les séries d'interpolation (1), à condition que l'inégalité $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < K$ soit vérifiée, ce qui entraîne pour les exposants de la série (2) de Dirichlet

$$S(n) < K \log n + K_1.$$

En particulier, nous pouvons énoncer ce théorème dû à M. Aronszajn, dans le cas des séries de Dirichlet.

THÉORÈME. — *Si l'on a*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\lambda_n} < K \qquad (K>0),$$

on peut définir les coefficients a_n de la série (1) *de telle façon que la somme* $F(z)$ *de cette série soit holomorphe sur la droite de convergence simple et absolue de la série* (1).

Comme autre application de ce même théorème nous allons montrer que les séries d'interpolation (1) satisfont aux théorèmes taubériens valables pour les séries de Dirichlet. Nous savons déjà que, quelle que soit la suite $\{\lambda_n\}$, les séries (1) satisfont au théorème d'Abel. Réciproquement, supposons que l'on ait

$$|a_n| < \frac{M}{\lambda(n)\, S(n)} \qquad (\text{M indépendant de } n)$$

et que $F(z)$ tende vers une limite S quand z tend vers $z_0 \neq \lambda_i$ le long d'une parallèle à l'axe réel ($\sigma > 0$). Dans ces conditions, la fonction associée $D(z)$ a une limite S′ puisque $E_0 D - F$ est continue au point z_0, et un théorème taubérien dû à Littlewood [6], montre que la série (2) converge pour $z = z_0$ et que $D(z_0) = S'$. Or, puisque $\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ converge, nous savons que les séries (1) et (2) convergent simultanément. Donc, la série (1) converge pour $z = z_0$ et sa somme est égale à S, puisque la série (1) satisfait au théorème d'Abel.

Revenons, dans le cas général, à l'étude des points singuliers de $F(z)$. Il est possible d'établir pour ces séries, un théorème analogue à celui de Landau valable pour les séries de Dirichlet; d'une façon précise, nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème. — *Si l'on a $a_n \geqq 0$ pour tout $n \geqq n_0$, et si la série* (1) *a une abscisse de convergence finie $\mathfrak{S}$ le point $z = \mathfrak{S}$, est singulier pour la fonction* $F(z)$ *représentée par la série* (1) *à condition toutefois qu'on ait $\mathfrak{S} \neq \lambda_i$.*

En effet, si $\lambda_p < \mathfrak{S} < \lambda_{p+1}$, posons

$$F_1(z) = \frac{F(z) - \sum_0^{p-1} a_n P_n(z)}{P_p(z)} = a_p + a_{p+1}\left(1 - \frac{z}{\lambda_{p+1}}\right) + \ldots,$$

$F(z)$ et $F_1(z)$ admettent simultanément le point $z = \mathfrak{S}$ pour point singulier ou régulier. Il suffit donc, d'après cela, de démontrer le théorème pour $\mathfrak{S} < \lambda_1$, en changeant éventuellement la numérotation de la suite $\{\lambda_n\}$. On a

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{F^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathfrak{S}}{2}\right)}{n!}\left(z - \frac{\mathfrak{S} + \lambda_1}{2}\right)^n,$$

valable, au moins, pour

$$\left|z - \frac{\mathfrak{S} + \lambda_1}{2}\right| < \frac{\lambda_1 - \mathfrak{S}}{2}.$$

Si $z = \mathfrak{S}$ est un point régulier de $F(z)$, cette série de Taylor a un rayon de convergence supérieur à $\frac{\lambda_1 - \mathfrak{S}}{2}$ et l'on a

$$F(\mathfrak{S} - \varepsilon) = \sum_0^\infty \frac{F^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathfrak{S}}{2}\right)}{n!} \left(\frac{\mathfrak{S} - \lambda_1 - 2\varepsilon}{2}\right)^n,$$

avec

$$F^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathfrak{S}}{2}\right) = \sum_0^\infty a_p P_p^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathfrak{S}}{2}\right).$$

Or,

$$(-1)^n P_p^{(n)}\left(\frac{\lambda_1 + \mathfrak{S}}{2}\right) > 0,$$

$F(\mathfrak{S} - \varepsilon)$ est donc donné par une série double absolument convergente et, en ordonnant par rapport à p, on trouve

$$F(\mathfrak{S} - \varepsilon) = \sum_0^\infty a_n P_n(\mathfrak{S} - \varepsilon),$$

ce qui est impossible, puisque $\mathfrak{S}$ est l'abscisse de convergence de la série (1).

Si $\mathfrak{S} = \lambda_p$, le théorème est en défaut comme le montre l'exemple du développement de 0, $O_p(z)$. Dans ce cas, en effet, on vérifie bien que la fonction $F_1(z)$ admet le point $z = \lambda_p$ pour pôle simple, alors que $F(z)$ y est régulière.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES SÉRIES D'INTERPOLATION.

$$\sum_0^\infty a_n Q_n(z).$$

Étudions maintenant les séries d'interpolation

$$G(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n Q_n(z), \tag{1}$$

$$Q_0(z) = 1, \qquad Q_n(z) = \prod_1^n (z - \lambda_\nu) \qquad (n \geqq 1).$$

Les nombres λ_n réels, positifs et vérifiant

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1} > \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} \lambda_n = 0, \qquad \sum_1^\infty \lambda_n \text{ convergente.}$$

Comme précédemment, nous commencerons par l'étude du domaine de convergence des séries (1). Pour cela, étudions d'abord les polynomes $Q_n(z)$.

On a

$$\frac{Q_n(z)}{z^n} = \prod_1^n \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{z}\right) \qquad (n \neq 0)$$

et comme nous avons supposé la série $\sum_1^\infty \lambda_\nu$ convergente, nous voyons que l'on a, uniformément dans tout domaine fermé ne contenant pas l'origine,

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_n(z)}{z^n} = E\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{avec} \quad E\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{z}\right).$$

$E\left(\frac{1}{z}\right)$ étant une fonction entière de $\frac{1}{z}$ s'annulant pour $z = \lambda_\nu$ et égale à 1 pour z infini. De cette propriété, nous déduisons le

Théorème. — *Le domaine de convergence simple et absolue de la série* (1) *est le cercle* $|z| < R$, R *étant défini par*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{2}$$

La série (1) *converge normalement* (*c'est-à-dire absolument et uniformément*), *pour* $|z| \leqq R' < R$.

En effet, supposons R fini non nul et soit z un nombre non nul de module inférieur à R. On peut déterminer un nombre n_0 tel que pour $n \geqq n_0$ on ait

$$|a_n| < \left(\frac{2}{R + |z|}\right)^n,$$

d'où

$$|a_n Q_n(z)| < H \left(\frac{2|z|}{R + |z|}\right)^n, \tag{3}$$

terme général d'une série géométrique convergente, que l'on peut majorer en remplaçant dans (3) $|z|$ par R' si $|z| \leqq R'$; la série (1) converge donc absolument pour $|z| < R$ et uniformément pour $|z| \leqq R' < R$. La démonstration n'est pas valable pour $z = 0$, mais la série (1) converge uniformément sur le cercle $|z| = \frac{R}{2}$ et un théorème classique de Weierstrass permet d'affirmer que la convergence uniforme a lieu également pour $|z| \leqq \frac{R}{2}$.

D'autre part, si $|z| > R$ et $z \neq \lambda_i$, on a pour une suite infinie de nombres n_k

$$|a_{n_k} Q_{n_k}(z)| > h\left(\frac{2|z|}{R+|z|}\right)^{n_k},$$

quantité qui tend vers l'infini et la série (1) diverge pour $|z| > R(z \neq \lambda_i)$; on ne peut rien affirmer dans le cas général pour $|z| = R$.

Le calcul des coefficients a_n se fera exactement comme pour les séries étudiées au début de la première Partie, nous aurons également des représentations de 0 valables dans les cercles

$$|z| < \lambda_p.$$

Ces séries feront également exception au théorème d'Abel que nous démontrerons plus loin. Comme précédemment, dans le cas où la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu}$ était supposée divergente, deux fonctions dont les valeurs aux points $z = \lambda_\nu$ sont égales, sauf pour un nombre fini d'entre eux, doivent être considérées comme identiques. On peut même aller plus loin, puisqu'on sait que deux fonctions holomorphes pour $|z| < R(R > 0)$ ne peuvent prendre les mêmes valeurs pour une suite de valeurs λ_ν de la variable ayant le point O pour point d'accumulation sans être identiques, la différence de ces deux fonctions ayant alors un point d'accumulation de zéros à l'intérieur de son domaine d'holomorphie.

L'étude des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $G(z)$ soit représentable par une série (1) est ici très simplifiée.

1° Si la série (1) converge pour $|z| < R$, $G(z)$ est holomorphe dans le même cercle $|z| < R$.

2° Réciproquement, l'étude du reste de la série (1)

$$R_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{Q_n(z)}{Q_n(\zeta)} \frac{G(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle (C) de centre O à l'intérieur et sur la frontière duquel la fonction $G(\zeta)$ est holomorphe, montre que la série (1) converge et représente bien $G(z)$ dans le plus grand cercle de centre O dans lequel la fonction $G(z)$ est holomorphe : la série (1) a le même rayon de convergence que la série de Taylor de $G(z)$.

Une objection se présente ici, et il semblerait que les développements de 0, de rayon de convergence λ_p, fassent exception au théorème énoncé plus haut. En effet, la fonction 0 n'a pas de points singuliers et cependant la convergence de la série (1) n'a pas lieu dans tout le plan. C'est que, pour le développement $O_1(z)$ par exemple, nous fixons

$$O_1(\lambda_n) = 0 \quad \text{si } n \neq 1 \qquad \text{et} \qquad O_1(\lambda_1) = 1.$$

On doit alors considérer que $G(z)$ n'est pas la fonction entière 0, mais qu'elle présente le point singulier $z = \lambda_1$. Ainsi, lorsqu'une série (1) a un rayon de convergence R non nul, deux cas peuvent se produire.

Premier cas : $R \neq \lambda_p$. — La fonction $G(z)$ a un point singulier sur le cercle de convergence $|z| = R$ de la série (1).

Deuxième cas : $R = \lambda_p$. — Il se peut qu'en modifiant la valeur de $G(z)$ pour $z = \lambda_p$ [c'est-à-dire, en ajoutant à la série (1), un développement de 0 convenable] la nouvelle série obtenue ait un rayon de convergence supérieur à R. Le point $z = \lambda_p$ était alors un point singulier parasite de $G(z)$ introduit par un mauvais choix de $G(\lambda_p)$. Nous voyons donc, qu'en général, si l'on se donne arbitrairement, pour $G(\lambda_n)$ des nombres A_n ayant une limite lorsque n tend vers l'infini; la série (1) aura un rayon de convergence nul. Au contraire, si les nombres A_n sont les valeurs d'une fonction qu'on sait être holomorphe dans le cercle $|z| < R$ on est assuré que la série (1) converge pour $|z| < R$.

C'est là une généralisation de résultats bien connus relatifs aux séries entières.

Nous énoncerons enfin quelques théorèmes vérifiés par les séries d'interpolation (1) et qui montrent la profonde analogie de ces séries avec les séries entières.

CHAPITRE II.

Étude de la convergence des séries (1) sur le cercle de convergence.

Nous démontrerons d'abord le

Théorème d'Abel. — *Si la série d'interpolation* (1) *converge pour* $z = z_0 \neq \lambda_i$,

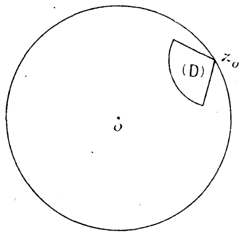

Fig. 8.

elle converge uniformément au voisinage du point z_0 *dans un angle* (D) *de sommet* z_0 *intérieur au cercle de convergence* (*fig.* 8).

Supposons donc que la série (1) converge pour $z = z_0 \neq \lambda_i$ et appliquons la transformation d'Abel à

$$\sum_0^\infty a_n Q_n(z) = \sum_0^\infty a_n Q_n(z_0) \frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)},$$

il suffit de prouver que, pour z dans (D), les quantités

$$\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}\right| \tag{4}$$

et

$$\sum_m^p \left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z_0)}\right| \tag{5}$$

sont bornées, quels que soient les entiers n, m et $p \geqq m$.

Puisqu'on a uniformément, pour z dans (D),

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_n(z)}{z^n} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{z}\right),$$

on déduit pour z dans (D)

$$\left|\frac{Q_n(z)}{z^n}\right| \leqq \mathrm{H} \qquad \text{(pour tout } n\text{)}$$

et pour $z = z_0$

$$0 < h \leqq \left|\frac{Q_n(z_0)}{z_0^n}\right| \leqq \mathrm{H} \qquad \text{(pour tout } n\text{)},$$

h et H étant deux constantes indépendantes de n et z puisque aucun des polynomes $Q_n(z)$ ne s'annule pour $z = z_0 \neq \lambda_i$.

On a donc

$$\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}\right| \leqq \frac{\mathrm{H}}{h}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z_0)}\right| = \left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)}\right| \left|1 - \frac{z-\lambda_{n+1}}{z_0-\lambda_{n+1}}\right| \leqq \frac{\mathrm{H}}{h\,d}|z-z_0|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$

d étant le minimum non nul de $|z_0 - \lambda_n|$ quand n prend successivement les valeurs 1, 2, 3, ... On en déduit alors

$$\sum_m^p \left|\frac{Q_n(z)}{Q_n(z_0)} - \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z_0)}\right| \leqq \frac{\mathrm{H}}{h\,d}|z-z_0| \sum_0^\infty \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{\mathrm{H}\,|z_0|}{h\,d}\,\frac{|z-z_0|}{|z_0|-|z|}.$$

La quantité $\dfrac{|z-z_0|}{|z_0|-|z|}$ reste bornée dans le domaine (D) et le théorème est démontré.

Nous allons maintenant, pour démontrer que la série (1) satisfait à un théorème taubérien, établir un lemme qui nous fournira une nouvelle démonstration du théorème de continuité d'Abel.

Lemme. — *Si l'on a*

$$\lim_{n=\infty} |a_n z_0^n| = 0, \tag{6}$$

on a également, quand z tend vers z_0 dans l'angle (D),

$$\lim_{z \to z_0} \sum_0^\infty a_n \left[Q_n(z) - \left(\frac{z}{z_0}\right)^n Q_n(z_0) \right] = 0. \tag{7}$$

Autrement dit, la série (1) se comporte au voisinage du point z_0 comme la série entière ayant les mêmes termes que (1) pour $z = z_0$.

En effet, nous avons

$$Q_n(z) - \left(\frac{z}{z_0}\right)^n Q_n(z_0) = z^n \left[E_n\left(\frac{1}{z}\right) - E_n\left(\frac{1}{z_0}\right) \right],$$

avec

$$E_n\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_1^n \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{z}\right).$$

Or, nous avons vu que, lorsque n tend vers l'infini, la fonction $E_n\left(\frac{1}{z}\right)$ tend vers la fonction $E\left(\frac{1}{z}\right)$ uniformément dans le domaine $|z| \geqq r > 0$.

On sait que, dans ces conditions, les fonctions dérivées $E'_n\left(\frac{1}{z}\right)$ convergent uniformément vers la dérivée de $E\left(\frac{1}{z}\right)$ dans le domaine $|z| \geqq 2r$, donc, on a l'inégalité, valable pour $|z| \geqq 2r$

$$\left| E_n\left(\frac{1}{z}\right) - E_n\left(\frac{1}{z_0}\right) \right| < K\,|z - z_0|,$$

K étant une constante indépendante de z et de n. Les fonctions $E_n\left(\frac{1}{z}\right)$ satisfont à un critère d'égale continuité.

Pour $|z| < |z_0|$ les séries $\sum_0^\infty a_n Q_n(z)$ et $\sum_0^\infty a_n Q_n(z_0)\left(\frac{z}{z_0}\right)^n$ convergent puisque (6) est vérifié et l'on a

$$\left| \sum_0^\infty a_n \left[Q_n(z) - \left(\frac{z}{z_0}\right)^n Q_n(z_0) \right] \right| < K\,|z - z_0| \sum_0^N |a_n z^n| + K\,|z - z_0| \sum_{N+1}^\infty |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Choisissons N tel que, pour $n \geqq N$, on ait $|a_n z_0^n| < \varepsilon$; le deuxième terme du second membre est alors majoré par

$$\varepsilon K \frac{|z - z_0|\,|z_0|}{|z_0| - |z|} < K K_1 \varepsilon,$$

K et K_1 ne dépendant pas de ε ni de z dans (D).

N étant ainsi choisi, on peut prendre $|z - z_0|$ assez petit pour que le premier terme soit aussi petit que l'on veut, et le lemme est démontré.

Conséquences. — 1° Ce lemme nous permet de donner une nouvelle démonstration du théorème de continuité d'Abel. En effet, si la série (1) converge pour $z = z_0 \neq \lambda_i$ et a pour somme L, il en est de même de la série entière

$$(8) \qquad \sum_0^\infty a_n Q_n(z_0)\left(\frac{z}{z_0}\right)^n,$$

D'après le théorème d'Abel sur les séries entières la somme de la série (8) tend vers L quand z tend vers z_0 dans l'angle (D). D'après le lemme, il en est de même de la somme de la série (1).

2° Montrons maintenant la réciproque suivante due à Littlewood [6], dans le cas des séries entières.

Théorème. — *Si l'on a*

$$|a_n z_0^n| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (z_0 \neq \lambda_i \text{ ou non})$$

et si la somme de la série

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^\infty a_n Q_n(z_0 t) \qquad (0 < t < 1)$$

a une limite L *quand t tend vers* 1, *alors*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n Q_n(z_0) = L$$

En effet, d'après le lemme établi, si (9) a une limite quand t tend vers 1, la série entière

$$(10) \qquad \sum_0^\infty a_n Q_n(z_0)\, t^n$$

a même limite dans les mêmes conditions. On a évidemment,

$$|a_n Q_n(z_0)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et la série (10) vérifie le théorème de Littlewood. Par conséquent, elle converge pour $t = 1$ et

$$\sum_0^\infty a_n Q_n(z_0) = L,$$

le théorème est démontré.

3° Une autre conséquence du lemme précédent est le

Théorème. — *La série $\Sigma n\,|a_n z_0^n|^2$ étant supposée convergente, la série* (1) *converge en tout point z_0 du cercle de convergence pour lequel*

$$(11) \qquad \lim_{t \to 1} G(z_0 t) \text{ existe} \qquad (0 < t < 1).$$

La convergence est uniforme pour l'ensemble des points tels que (11) *ait lieu uniformément sur cet ensemble.*

Ce théorème a été démontré par M. Féjer pour les séries entières (*voir* par exemple, Landau [8], p. 65). Montrons que ce théorème est valable pour les séries (1).

Si la somme de la série

$$\sum_{0}^{\infty} a_n Q_n(z_0 t) \qquad (0 < t < 1)$$

a une limite quand t tend vers 1, il en est de même de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z_0) t^n, \tag{12}$$

puisque l'on a

$$\lim_{n=\infty} a_n Q_n(z_0) = 0.$$

La série $\Sigma n|a_n Q_n(z_0)|^2$ converge, donc (12) converge pour $t = 1$. C'est précisément ce qu'il fallait prouver.

Comme l'égalité (7) a lieu uniformément par rapport à l'argument de z_0 sur le cercle $|z_0| = R$, on déduit du théorème de Fejer l'uniformité de la convergence de la série (1) sur l'ensemble des points du cercle de convergence où (11) a lieu uniformément.

Dans le même genre d'idées, nous démontrerons un théorème analogue à celui énoncé par M. Riesz [*voir* Landau (8), p. 73], dans le cas des séries entières.

Théorème. — *Si la série* (1) *a le rayon de convergence* R *et si*

$$\lim_{n=\infty} a_n R^n = 0, \tag{13}$$

alors, la série (1) *converge en tout point du cercle de convergence, où la fonction* G(z) *est holomorphe. La convergence est uniforme sur tout arc fermé où la fonction* G(z) *est régulière.*

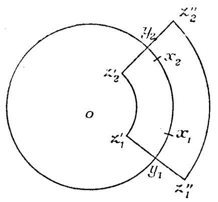

Fig. 9.

Soit $x_1 x_2$ un arc fermé sur lequel la fonction G(z) est régulière. G(z) est alors régulière sur le contour et dans le domaine (D) indiqué par la figure 9, à condition de prendre $|z_1''| = |z_2''| = R''$ assez voisins de R et $|x_1 - y_1|$, et $|x_2 - y_2|$ suffisamment petits.

Posons

$$g_n(x) = \left(\frac{R}{x}\right)^{n+1} (x - y_1)(x - y_2) \left[G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x) \right].$$

Il suffit de démontrer qu'on a

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = 0,$$

uniformément dans le domaine (D), ou seulement sur sa frontière, d'après le théorème de Weierstrass. En effet, on en déduira bien, uniformément pour x sur l'arc $x_1 x_2$

$$G(x) = \lim_{n=\infty} \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x),$$

puisque alors

$$|x - y_1| \geqq d, \qquad |x - y_2| \geqq d \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{R}{x}\right| = 1 \qquad (d > 0).$$

Désignons par ε_n le maximum de $|a_\nu R^\nu|$ pour $\nu \geqq n$. On a

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

et l'on sait que, sur toute la frontière du domaine (D), on a

$$|Q_n(x)| < H |x|^n,$$

H étant indépendant de x et de n. Posons $x = r\frac{y_1}{R}$.

1° Pour $|z_1'| \leqq r < R$, on a

$$\left| G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x) \right| \leqq \sum_{n+1}^\infty |a_\nu Q_\nu(x)| < H \varepsilon_n \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{r}{R}},$$

d'où, puisque $|x - y_1| = R - r$ et $|x - y_2| < K$,

$$|g_n(x)| < HKR\varepsilon_n,$$

où le coefficient de ε_n est indépendant de x et de n.

2° Pour $R < r \leqq R''$, on a, en désignant par M le maximum de $G(z)$ sur le contour et en posant

$$A_m = M + |a_0| + |a_1 Q_1(x)| + \ldots + |a_m Q_m(x)|,$$

$$\left| G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x) \right| \leqq A_m + \sum_{m+1}^n |a_\nu Q_\nu(x)| \leqq A_m + H\varepsilon_m \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{1}{\frac{r}{R} - 1};$$

d'où

$$|g_n(x)| \leqq \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left[A_m + H \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{\varepsilon_m}{\frac{r}{R} - 1} \right] (r - R) |x - y_2|.$$

Or $|x-y_2|<K$; donc

$$|g_n(x)| \leqq K\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(r-R)A_m + HKR\varepsilon_m.$$

Choisissons m tel que $\varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2HKR}$. Comme

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(r-R) < \frac{R}{n},$$

on a, pour tout $n \geqq \frac{2KRA_m}{\varepsilon}$,

$$|g_n(x)| < \varepsilon.$$

3° Pour x sur l'arc $z_1'' z_2''$, avec les mêmes notations, on a

$$\left|G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x)\right| \leqq A_m + H\varepsilon_m\left(1 + \left|\frac{x}{R}\right| + \ldots + \left|\frac{x}{R}\right|^n\right) \leqq A_m + H\varepsilon_m\left|\frac{x}{R}\right|^{n+1}\frac{1}{\left|\frac{x}{R}\right| - 1}.$$

Comme $|x| - R \geqq d > 0$ et

$$|x-y_1| < K \quad \text{et} \quad |x-y_2| < K,$$

on a

$$|g_n(x)| \leqq K^2\left|\frac{R}{x}\right|^{n+1}\left[A_m + \frac{HR}{d}\left|\frac{x}{R}\right|^{n+1}\varepsilon_m\right] \leqq K^2\left|\frac{R}{x}\right|^{n+1}A_m + \frac{HK^2R}{d}\varepsilon_m.$$

Choisissons m tel que $\varepsilon_m < \frac{\varepsilon d}{2HK^2R}$; alors pour tout n vérifiant $n \geqq n_0(\varepsilon)$ et $n \geqq m$, on a

$$K^2\left|\frac{R}{x}\right|^{n+1}A_m < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|g_n(x)| < \varepsilon.$$

4° Pour x sur l'arc $z_1' z_2'$, on a

$$\left|G(x) - \sum_0^n a_\nu Q_\nu(x)\right| < HR\varepsilon_n\left|\frac{x}{R}\right|^{n+1}\frac{1}{R-|x|} < \frac{HR}{d}\varepsilon_n,$$

d'où

$$|g_n(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Comme, d'autre part, on a

$$g_n(y_1) = g_n(y_2) = 0,$$

on en déduit que, uniformément dans (D),

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = 0,$$

ce qu'il fallait établir.

On peut enfin énoncer un dernier théorème, dont la démonstration s'établit facilement en utilisant la transformation d'Abel.

THÉORÈME. — *Les séries*

$$G(z) = \sum_0^\infty a_n Q_n(z) \qquad \text{et} \qquad T(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

convergent simultanément, sauf éventuellement pour $z = \lambda_\nu$.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS DE $G(z)$ SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE.

Nous avons déjà démontré que si le rayon de convergence d'une série (1) vérifiait $R \neq \lambda_\nu$, la fonction $G(z)$ représentée par cette série avait un point singulier au moins sur le cercle de convergence. Nous allons démontrer un théorème analogue à celui de Landau valable pour les séries entières.

THÉORÈME. — *Si la série* (1) *est à coefficients positifs ou nuls et si elle a le rayon de convergence* $R \neq \lambda_\nu$ *alors le point* $z = R$ *est point singulier de* $G(z)$.

Ce théorème est en défaut si $R = \lambda_\nu$, comme le montre le développement de 0, $O_\nu(z)$. Nous n'en donnerons pas la démonstration qui est, en tout point, comparable à celle donnée à la fin de la première Partie dans un cas analogue.

Nous montrerons, enfin, le

THÉORÈME. — *Les fonctions*

$$G(z) = \sum_0^\infty a_n Q_n(z) \qquad \text{et} \qquad T(z) = \sum_0^\infty a_n z^n,$$

définies pour $|z| < R$, *ont mêmes points singuliers sur le cercle de convergence* $|z| = R \neq \lambda_\nu$, *à condition que*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\log \frac{1}{\lambda_n}} < K.$$

On a, en effet, en posant

$$R_n\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{z}\right) \qquad \text{et} \qquad E\left(\frac{1}{z}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{z}\right),$$

l'égalité

$$z^n E\left(\frac{1}{z}\right) - Q_n(z) = Q_n(z)\left[R_n\left(\frac{1}{z}\right) - 1\right]. \tag{14}$$

Supposons $|z| \geqq R$ et choisissons un nombre n_0 tel que pour tout $n \geqq n_0$, on ait

$$\lambda_n < \frac{R}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_n < e^{-\frac{n}{K}}.$$

Alors, puisque

$$|\log(1-y)| \leqq 2|y| \qquad \text{pour} \quad |y| \leqq \frac{1}{2},$$

on a

$$\left|\log R_n\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{2}{|z|}\sum_{n+1}^{\infty}\lambda_\nu < \frac{2}{|z|}\,\frac{e^{-\frac{n+1}{K}}}{1-e^{-\frac{n}{K}}} < A\,e^{-\frac{n}{K}},$$

d'où

$$\left|R_n\left(\frac{1}{z}\right)-1\right| < B e^{-\frac{n}{K}},$$

A et B étant indépendants de n et z pour $|z| \geqq R$.

De (14) on tire

$$\text{(15)} \qquad E\left(\frac{1}{z}\right)T(z) - G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z)\left[R_n\left(\frac{1}{z}\right)-1\right],$$

et la série du second membre converge absolument et uniformément pour $|z| \leqq R' < Re^{\frac{1}{K}}$. Ce qui prouve que les fonctions $T(z)$ et $G(z)$ ont mêmes points singuliers pour

$$R \leqq |z| < Re^{\frac{1}{K}}, \qquad z \neq \lambda_\nu.$$

Ce théorème ne peut pas être amélioré. Il suffit pour le voir de prendre

$$a_n = (-1)^n, \qquad \lambda_n = e^{-\frac{n}{K}}.$$

La fonction $E\left(\frac{1}{z}\right)T(z) - G(z)$ n'est pas holomorphe pour $z = -e^{\frac{1}{K}}$ puisqu'on peut montrer facilement qu'elle augmente indéfiniment quand z tend vers $-e^{\frac{1}{K}}$ par valeurs supérieures.

On vérifie aisément que tous les théorèmes démontrés dans cette deuxième Partie, sauf le théorème de Landau, restent valables lorsque les nombres λ_ν sont complexes, et tels que la série $\sum_{1}^{\infty}|\lambda_\nu|$ converge.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Norlund, *Leçons sur les séries d'interpolation* (*Collection de Monographies sur la théorie des Fonctions*, 1926).

[2] Bendixson, *Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss* (*Acta Math.*, t. IX, 1887, p. 1-34).

[3] Polya, *Untersuchungen uber Lucken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Mat. Zeitschrift*, t. 29, 1929, p. 549-640).

[4] BLASCHKE, *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali uber Folgen analytischer Funktiœnen* (*Leipziger Berichte*, t. 67, 1915, p. 194).
[5] ARONSZAJN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 1931, p. 1381.
[6] LITTLEWOOD, *The converse of Abel's Theorem on power series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 9, 1911, p. 434-448].
[7] BERNSTEIN, *Leçons sur les séries de Dirichlet* (*Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*, 1933.)
[8] LANDAU, *Darstellung und Begrundüng einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (J. Springer, Berlin, 1929).
[9] VALIRON, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange* (*Bull. Soc. Math.*, 2e série, t. XLIX, 1925, p. 181-191 et 203-224).