ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SHMUEL AGMON

Sur les séries de Dirichlet

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 263-310

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__263_0>

SUR LES SÉRIES DE DIRICHLET

PAR M. SHMUEL AGMON.

INTRODUCTION.

Dans ce travail nous ne considérons que des séries de Dirichlet de la forme

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}, \tag{1}$$

où $0 \leqq \lambda_n \uparrow \infty$ et $0 < h \leqq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leqq H < \infty$. Nous supposons aussi, sauf dans les cas où l'on précise le contraire, que l'abscisse de convergence de la série (1) est égale à zéro. C'est-à-dire qu'on a $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \dfrac{\log|d_n|}{\lambda_n}=0$. Remarquons que la condition $\lambda_{n+1}-\lambda_n \leqq H$ ne constitue pas une vraie restriction, nous l'introduisons uniquement pour la commodité. En effet, on peut la satisfaire toujours en ajoutant dans (1) des coefficients égaux à zéro.

On sait que les séries (1) possèdent des propriétés analogues à celles des séries de Taylor, en particulier elles ont l'abscisse de convergence simple, de convergence absolue et d'holomorphie identiques.

Ce travail se compose de cinq chapitres [1]. Dans le premier nous énonçons et démontrons notre théorème fondamental. Nous introduisons dans le même chapitre l'importante notion d'une suite de coefficients principaux $\{d_{n_k}\}$ ($k=1, 2, \ldots$) de la série (1) (Déf. B, § 6).

Dans les Chapitres II, III et IV nous donnons des applications du théorème fondamental à la recherche des points singuliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire.

Dans le Chapitre II nous démontrons un théorème qui précise le théorème de Fatou-Pólya. Un autre théorème que nous démontrons (théorème VIII)

[1] Les trois premiers Chapitres seulement sont publiés ici. Les deux derniers Chapitres seront publiés ultérieurement. Remarquons aussi que quelques résultats obtenus ici ont été énoncés par nous, dans le cas des séries de Taylor, dans quatre Notes des *Comptes rendus* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1497-1499, 1673-1674, 1786-1787 et 1875-1876).

contient comme un cas particulier le *petit théorème* de Fabry sur les séries lacunaires. En effet, nous remplaçons les conditions sur les lacunes par des conditions plus générales.

Enfin, nous donnons dans ce chapitre un critère général pour que le point $s = 0$ soit un point singulier de $f(s)$.

Dans le Chapitre III, nous généralisons un théorème de M. Pólya pour la classe des séries (1) dont les coefficients $\{d_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ forment une suite quasi-régulière. Nous donnons aussi un théorème dans l'ordre d'idées de celui de M. Mandelbrojt, donnant une relation entre la *largeur des lacunes* et la *densité* de distribution des singularités sur l'axe imaginaire.

Dans le Chapitre IV ([1]), nous généralisons un théorème de M. Szegö sur les séries de Taylor dont les coefficients ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Nous traitons ensuite des séries dont les coefficients satisfont à quelque conditions de régularité et des séries dont les exposants satisfont à quelques conditions arithmétiques. Enfin, nous utilisons le théorème fondamental pour les problèmes de séparation de singularités.

Dans le dernier chapitre ([1]), nous nous occupons du comportement des sommes partielles de la série (1) dans le voisinage de l'axe imaginaire, Nous précisons, ainsi, le théorème de Fatou-Riesz sur la convergence des séries de Dirichlet (1), avec $\lim_{n=\infty} d_n = 0$, en chaque point régulier de l'axe imaginaire, et nous donnons la rapidité de cette convergence. Nous traitons ensuite la question de l'ultra-convergence d'une classe de séries lacunaires sur l'axe imaginaire. Enfin nous donnons des précisions sur le théorème de Jentsch.

J'exprime toute ma gratitude à M. Mandelbrojt, qui a bien voulu s'intéresser à mon travail, me permettant de venir le présenter à Paris et à qui je ne saurai jamais assez dire toute ma reconnaissance pour ses conseils éclairés et sa chaude amitié.

Je veux également remercier M. Denjoy de sa bienveillante introduction et M. Montel de la confiance qu'il a bien voulu me montrer. J'ai été infiniment sensible à l'excellent accueil que m'ont réservé M. Valiron et M. Favard.

Je ne saurais terminer sans profiter de cette occasion pour assurer de toute ma gratitude mes Maîtres de Jérusalem, M. Fekete et M. Amira dont les encouragements m'ont toujours été si précieux.

CHAPITRE I.

Le théorème fondamental.

1. Commençons par rappeler deux notions connues qui nous serviront fréquemment dans ce travail. Soit $\{\lambda_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ une suite croissante de

---

([1]) *Voir* la note précédente.

nombres non négatifs, $\lambda_n \uparrow \infty$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n > 0$. Soit $\{C_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ une suite infinie de nombres réels où C_n peut être égal à $-\infty$, mais où il est fini pour une suite croissante d'entiers non négatifs $n = n_j (j = 1, 2, \ldots,)$ avec $n_1 = 0$. Supposons que l'on a :

a. $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{C_n}{\lambda_n} = 0$. Il existe donc une fonction concave $C(x)$, définie pour $\lambda_0 \leqq x < \infty$, appelée la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n = (\lambda_n, C_n)$ caractérisée par les propriétés suivantes :

α. $C(x) \geqq 0$ et $C(\lambda_n) \geqq C_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.
β. Si $C_1(x)$ est une autre fonction concave satisfaisant à α, on a

$$C_1(x) \geqq C(x) \qquad \text{pour} \quad \lambda_0 \leqq x < \infty.$$

On démontre aisément, par une méthode géométrique, l'existence et l'unicité de $C(x)$. D'après *a*, α et β on obtient facilement :

b. $\lim\limits_{x_1=\infty} \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$ $(x_2 > x_1)$, et en particulier :

b'. $\lim\limits_{x=\infty} \frac{C(x)}{x} = 0$.

Il est évident, d'après la définition, que la courbe $y = C(x)$ est une ligne polygonale dont les sommets sont tous des points $P_{n_k} = (\lambda_{n_k}, C_{n_k})$. Or, dans le cas où $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} C_n = \infty$, on trouve $C(x) \uparrow \infty$. Si l'on tient compte de *b'*, on peut conclure que $y = C(x)$ possède un nombre infini de sommets. Donc, d'après ce qui précède, $C(\lambda_{n_k}) = C_{n_k}$ pour une suite infinie d'entiers positifs $\{n_k\}$.

2. $\{\lambda_n\}$ et $\{C_n\}$ étant les suites définies plus haut, supposons qu'au lieu de satisfaire à *a* la suite $\{C_n\}$ satisfasse à la condition suivante :

c. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{C_n}{\lambda_n} = -\infty$. Dans ce cas, il existe une fonction concave $C(x)$, définie pour $\lambda_0 \leqq x < \infty$, appelée la plus petite enveloppe concave de points $P_n = (\lambda_n, C_n)$, caractérisée par les propriétés suivantes :

α'. $C(\lambda_n) \geqq C_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.
β'. Si $C_1(x)$ est une autre fonction concave satisfaisant à α', on a

$$C_1(x) \geqq C(x) \qquad \text{pour} \quad \lambda_0 \leqq x < \infty.$$

L'existence et l'unicité de cette fonction $C(x)$ est aussi facile à démontrer. En effet, $y = -C(x)$ n'est autre que le polygone de Newton de points $P_n = (\lambda_n - C_n)$ et il possède un nombre infini de sommets qui sont tous des points P_n. Enfin, remarquons que la fonction $-C(x)$ a été introduite dans l'étude de fonctions entières par M. G. Valiron.

3. Énonçons ici un cas particulier du théorème fondamental dont la démonstration est très simple. Le théorème plus général sera donné ultérieurement.

Dans notre démonstration nous employons un artifice dû à M. M. Riesz [1] qui lui a servi à démontrer et généraliser un théorème de Fatou. La méthode de M. Riesz donne le théorème I dans le cas particulier où les coefficients sont bornés. En faisant intervenir un autre artifice nous obtenons notre théorème dans le cas général.

Théorème I. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$. Supposons que, pour $\mathcal{R}(s) > 0$, $f(s)$ soit représentée par la série* (1). *Soit $C(x)$ la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n = (\lambda_n, \log|d_n|)$. Posons*

$$q_n = e^{C(\lambda_n)}, \qquad f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}.$$

Dans ces conditions, dans tout domaine borné et fermé $\bar{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$, on a

$$\max_{s \in \bar{\Delta}} \left| \frac{f(s) - f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} \right| = O(1) \quad \text{pour} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Démonstration. — Posons

$$\eta_n = \frac{C(\lambda_{n+1}) - C(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

D'après la concavité de $C(x)$ et la relation b du paragraphe 1, $\eta_n \downarrow 0$. Posons ensuite

$$\varphi_n(s) = \frac{f(s + \eta_n) - f_n(s + \eta_n)}{q_n e^{-\lambda_n(s+\eta_n)}}, \tag{3}$$

$\varphi_n(s)$ étant holomorphe dans chaque domaine fermé $\bar{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$ pour $n \geq n_0 = n_0(\bar{\Delta})$, il suffit pour arriver à (2) de démontrer

$$\max_{s \in \bar{\Delta}} |\varphi_n(s)| = O(1) \quad \text{pour} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Or, tenant compte du lemme de Borel-Lebesgue, il suffit de démontrer la proposition A suivante :

A. *Chaque point $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar{\Delta}$ est le centre d'un carré $C(s_0, \delta_0) : |\sigma - \sigma| \leq \delta_0$, $|t - t_0| \leq \delta_0$, avec $\delta_0 = \delta_0(s_0) > 0$, dans lequel $\varphi_n(s)$ est holomorphe et satisfait à* (4) [*où l'on remplace $\bar{\Delta}$ par* $C(s_0, \delta_0)$].

Enfin, la proposition à démontrer peut être réduite à celle-ci :

$$|\varphi_n(s)| \leq \frac{K}{|1 - e^{-h\sigma}|} \quad \text{pour} \quad s \in \bar{\Delta}, \tag{5}$$

---

[1] M. Riesz, *Ein Konvergensatz fur Dirichletsche Reihen* (*Acta math.*, t. 40, 1916).

où h et K sont deux constantes positives. En effet, si (5) est satisfaite, A est satisfaite également. C'est évident pour $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \overline{\Delta}$ avec $\sigma_0 \lessgtr 0$. Dans le cas $\sigma_0 = 0$, $s_0 = it_0$, choisissons $0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2h}$ assez petit pour que $f(s)$ soit holomorphe dans $C(s_0, 3\delta_0)$ et posons

$$(6) \qquad \psi_n(s) = [1 - e^{-[s-i(t_0-2\delta_0)]h}][1 - e^{-[s-i(t_0+2\delta_0)]h}]\varphi_n(s).$$

La fonction $\psi_n(s)$ est holomorphe dans $C(s_0, 2\delta_0)$ et satisfait le long des côtés de ce carré, d'après (5) et (6), à l'inégalité $|\psi_n(s)| \leqq K_1$, pour $n = 1, 2, \ldots$ où K_1 est une constante qui ne dépend pas de n. Par conséquent, la dernière inégalité est vérifiée dans tout le carré. Posons $\mu = \min|1 - e^{-[s-i(t_0-2\delta_0)]h}|$ pour s_0 variant sur les côtés de $C(s_0, \delta_0)$. D'après ce qui précède, on obtient aisément $|\varphi_n(s)| \leqq \frac{K_1}{\mu^2}$ pour $s \in C(s_0, \delta_0)$. Donc, la proposition A est satisfaite pour ce cas aussi.

Revenons à la démonstration de (5) et distinguons entre deux cas :

a. Pour $s = \sigma + it \in \overline{\Delta}$ avec $\sigma > 0$, on trouve, d'après (2), (3) et la définition de $\{q_n\}$,

$$|\varphi_n(s)| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{d_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_n)(s+\eta_n)}\right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_n)(\sigma+\eta_n)} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{C(\lambda_\nu)-C(\lambda_n)-(\lambda_\nu-\lambda_n)\eta_n} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_n)\sigma}.$$

Or, d'après la concavité de $C(x)$, on peut écrire, pour $\nu \geqq n+1$,

$$\frac{C(\lambda_\nu) - C(\lambda_n)}{\lambda_\nu - \lambda_n} - \eta_n \leqq \frac{C(\lambda_{n+1}) - C(\lambda_n)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} - \eta_n = 0.$$

En portant cette dernière inégalité dans la précédente, on obtient

$$(7) \qquad |\varphi_n(s)| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_n)\sigma} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\sigma h} < \frac{1}{1 - e^{-\sigma h}},$$

[la constante positive h étant celle dont il a été question dans (1)]. Ce qui démontre (5) dans le cas étudié.

b. Pour $s = \sigma + it \in \overline{\Delta}$ avec $\sigma < 0$, $n \geqq n_0$, on a

$$(8) \qquad |\varphi_n(s)| = \left|\frac{f(s+\eta_n)}{q_n e^{-\lambda_n(s+\eta_n)}} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_n)(s+\eta_n)}\right|$$

$$\leqq \frac{M_n}{q_n e^{-\lambda_n(\eta_n+\sigma)}} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{q_\nu}{q_n} e^{(\lambda_n-\lambda_\nu)(\sigma+\eta_n)} = I_n(\sigma) + J_n(\sigma),$$

où

$$M_n = \max|f(s+\eta_n)| \qquad \text{pour} \quad s \in \overline{\Delta},\ n \geqq n_0.$$

Or, d'après la concavité de $C(x)$, on obtient pour $0 \leqq \nu \leqq n-1$,

$$\frac{C(\lambda_n)-C(\lambda_\nu)}{\lambda_n-\lambda_\nu} \geqq \frac{C(\lambda_{n+1})-C(\lambda_n)}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = \eta_n. \tag{9}$$

En prenant (9) pour $\nu = 0$ et étant donné que $\sigma < 0$, $\eta_n \downarrow 0$, on trouve pour $I_n(\sigma)$ et n assez grand

$$I_n(\sigma) = \frac{M_n}{q_n e^{-\lambda_n(\eta_n+\sigma)}} \leqq \frac{2M e^{\lambda_n\sigma}}{e^{C(\lambda_n)-\lambda_n\eta_n}} \leqq \frac{2M e^{\lambda_n\sigma}}{e^{C(\lambda_0)-\lambda_0\eta_n}} < 2M e^{\lambda_0\eta_0}, \tag{10}$$

où $M = \operatorname{Max}|f(s)|$ pour $s \in \Delta$. D'après (9), on peut écrire

$$J_n(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{-C(\lambda_n)+C(\lambda_\nu)+(\lambda_n-\lambda_\nu)\eta_n} e^{(\lambda_n-\lambda_\nu)\sigma} \leqq \sum_{\nu=0}^{n} e^{(\lambda_n-\lambda_\nu)\sigma} < \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\sigma h} = \frac{1}{1-e^{\sigma h}}. \tag{11}$$

On tire de (8), (10) et (11) l'inégalité (5), énoncée pour $\sigma < 0$. D'après ce qui précède (5) est établi dans tous les cas et le théorème est ainsi démontré.

4. Soit $\{\lambda_n\}$ la suite dont il a été question dans (1). Soit $\{C_n\}$ une suite infinie de nombres positifs satisfaisant aux conditions suivantes :

a. $\log C_n$ est une fonction concave de λ_n.

b. $\lim_{n=\infty} \frac{\log|C_n|}{\lambda_n} = -\infty$. Posons

$$m(\sigma) = \max_{0 \leq n < \infty} C_n e^{-\lambda_n \sigma}. \tag{12}$$

Le théorème suivant est un théorème analogue au théorème I pour les séries de Dirichlet (1) représentant des fonctions entières; la condition de régularité de $f(s)$ sur le segment de l'axe imaginaire $\sigma = 0$, $|t| \leqq d$ dans le théorème I est remplacée ici par une condition portant sur la croissance de $f(s)$ dans la bande $|t| \leqq d$ ([1]).

Théorème II. — *Soit $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet* (1) *qui représente une fonction entière. C'est-à-dire* $\lim_{n=\infty} \frac{\log|d_n|}{\lambda_n} = -\infty$. *Soit* $\{C_n\}$ *une suite de nombres positifs telle que $C_n \geqq |d_n|$ et satisfaisant aux conditions a et b précisées plus haut. Supposons qu'il existe une suite décroissante $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k \downarrow -\infty$, et deux nombres positifs $d > 0$, $\delta > 0$ satisfaisant à*

$$\max_{\substack{\sigma_k-\delta \leq \sigma \leq \sigma_k \\ -d \leq t \leq d}} |f(\sigma+it)| = O[m(\sigma_k)] \qquad \text{pour} \quad k \to \infty, \tag{13}$$

([1]) Notons que le théorème II joue dans la recherche des *lignes de Julia* de séries (1) convergeant dans tout le plan, le même rôle que joue le théorème fondamental de ce travail dans la recherche des points singuliers sur l'axe imaginaire.

où $m(\sigma)$ est définie par (12). *Soit $\{n_k\}$ une suite d'entiers positifs telle que l'on ait*

$$m(\sigma_k) = C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k},$$

(on démontre aisément que $n_k \uparrow \infty$). *Soient d' et δ' deux nombres positifs quelconques tels que $0 < d' < d$, $0 < \delta' < \delta$. Posons*

$$f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}.$$

Dans ces conditions on a

$$(14) \qquad \max_{\substack{\sigma_k - \delta' \leq \sigma \\ -d' \leq t \leq d'}} \left| \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}} \right| = O(1) \qquad \text{pour} \quad k \to \infty.$$

Démonstration. — La démonstration est similaire à celle du théorème I. Posons

$$(15) \qquad \varphi_k(s') = \frac{f(s'+\sigma_k) - f_{n_k}(s'+\sigma_k)}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}(s'+\sigma_k)}}.$$

Il faut donc démontrer

$$\max_{\substack{-\delta' \leq \sigma' \\ -d' \leq t' \leq d'}} |\varphi_k(\sigma' + it')| = O(1) \qquad \text{pour} \quad k \to \infty.$$

Comme pour le théorème I, il suffit de démontrer l'inégalité

$$(16) \quad |\varphi_k(\sigma' + it')| \leq \frac{A}{|1 - e^{-\sigma' h}|} \qquad \text{pour} \quad \sigma' \geq -\delta, \qquad |t| \leq d \qquad \text{et} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

où h et A sont deux constantes positives qui ne dépendent pas de k. Posons

$$\eta_n = \frac{\log C_{n+1} - \log C_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

D'après la concavité de $\log C_n$, $\eta_n \downarrow -\infty$. Or, d'après la façon dont on a défini $m(\sigma)$ et la suite $\{n_k\}$, on obtient les inégalités

$$C_{n_k-1} e^{-\lambda_{n_k-1}\sigma_k} \leq C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k} \qquad \text{et} \qquad C_{n_k+1} e^{-\lambda_{n_k+1}\sigma_k} \leq C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k}.$$

Cela nous donne

$$\eta_{n_k} \leq \sigma_k \leq \eta_{n_k-1}.$$

En tenant compte de cette dernière inégalité et de la concavité de $\log C_n$, on obtient, pour $\nu \geq n_k + 1$,

$$(17) \qquad \frac{\log C_\nu - \log C_{n_k}}{\lambda_\nu - \lambda_{n_k}} \leq \frac{\log C_{n_k+1} - \log C_{n_k}}{\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k}} = \eta_{n_k} \leq \sigma_k,$$

et pour $0 \leq \nu \leq n_k - 1$,

$$(17') \qquad \frac{\log C_{n_k} - \log C_\nu}{\lambda_{n_k} - \lambda_\nu} \geq \frac{\log C_{n_k} - \log C_{n_k-1}}{\lambda_{n_k} - \lambda_{n_k-1}} = \eta_{n_k-1} \geq \sigma_k.$$

Dans la démonstration de (16) nous distinguons entre deux cas :

a. Soit $s' = \sigma' + it'$ avec $\sigma' > 0$. En partant de (15), de (17) et des hypothèses du théorème, on peut écrire dans ce cas

$$(18)\qquad \begin{aligned} |\varphi_k(s')| &= \left| \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} \frac{d_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})(s'+\sigma_k)} \right| \leqq \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} \frac{C_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_{n_k})(\sigma'+\sigma_k)} \\ &= \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} e^{\log C_\nu - \log C_{n_k} - \sigma_k(\lambda_\nu - \lambda_{n_k})} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_{n_k})\sigma'} \\ &\leqq \sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_{n_k})\sigma'} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\sigma' h} < \frac{1}{1-e^{-\sigma' h}}, \end{aligned}$$

la constante positive h étant celle dont il a été question dans (1).

b. Soit maintenant $s' = \sigma' + it'$ avec $-\delta \leqq \sigma' < 0$, $|t'| \leqq d$. Dans ce cas, on peut écrire

$$(19)\qquad \begin{aligned} |\varphi_k(s')| &= \left| \frac{f(s'+\sigma_k)}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}(s'+\sigma_k)}} - \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{d_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_{n_k})(s'+\sigma_k)} \right| \\ &\leqq \frac{|f(s'+\sigma_k)|\, e^{\lambda_{n_k}\sigma'}}{C_{n_k} e^{-\lambda_{n_k}\sigma_k}} + \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{C_\nu}{C_{n_k}} e^{-(\lambda_\nu-\lambda_{n_k})(\sigma'+\sigma_k)} = I_k(s') + J_k(\sigma'). \end{aligned}$$

Or, d'après notre hypothèse (13) et d'après la définition de $m(\sigma)$ et de la suite $\{n_k\}$, on a

$$(20)\qquad I_k(s') = \frac{|f(s'+\sigma_k)|}{m(\sigma_k)} e^{\lambda_{n_k}\sigma'} \leqq \frac{|f(s'+\sigma_k)|}{m(\sigma_k)} \leqq B,$$

B étant une constante qui ne dépend pas de s' et de k.

En tenant compte de (17′), on obtient

$$(21)\qquad \begin{aligned} J_k(\sigma') &= \sum_{\nu=0}^{n_k} e^{\log C_\nu - \log C_{n_k} - (\lambda_\nu - \lambda_{n_k})\sigma_k} e^{(\lambda_{n_k}-\lambda_\nu)\sigma'} \leqq \sum_{\nu=0}^{n_k} e^{(\lambda_{n_k}-\lambda_\nu)\sigma'} < \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu\sigma' h} \\ &= \frac{1}{1-e^{\sigma' h}} < \frac{B_1}{|1-e^{-\sigma' h}|}. \end{aligned}$$

On tire de (19), (20) et (21), l'inégalité (16) pour $-\delta \leqq \sigma' < 0$. D'après ce qui précède, l'inégalité (16) est établie dans tous les cas et le théorème est donc démontré.

5. Définition A. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ *une suite croissante de nombres non négatifs* $0 \leqq \lambda_n \uparrow$, *où* $0 < h \leqq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leqq H < \infty$. *Nous désignons par* $Q\{\lambda_n\}$ *la classe des suites de nombres positifs* $\{q_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *satisfaisant aux conditions suivantes :*

a. $$\lim_{n=\infty} \frac{\log q_{n+1} - \log q_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

b. $\dfrac{\log q_n}{\Gamma(\lambda_n+1)}$ *est une fonction concave de* λ_n *pour* n *assez grand.* [$\Gamma(x)$ étant la fonction Gamma de Euler].

On voit, en particulier, que la condition b est satisfaite si $\log q_n$ est une fonction concave de λ_n pour n assez grand. D'une manière plus générale, $\{q_n\}$ appartient à la classe $Q\{\lambda_n\}$ si la suite $\{q_n\}$ satisfait à la condition a et où la condition b est remplacée par la condition plus restrictive suivante :

$$b'. \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{2\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_{n-1}}\left(\frac{\log q_{n+1}-\log q_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} - \frac{\log q_n - \log q_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right) < 1.$$

Ce qu'on démontre aisément en tenant compte des développements asymptotiques de $\Gamma(x)$ et de ses dérivées.

Remarquons enfin que si $q_n = q(\lambda_n)$, où $q(x)$ est une fonction positive ayant les deux premières dérivées satisfaisant à $\lim\limits_{x=\infty}[\log q(x)]' = 0$ et $\lim\limits_{x=\infty} x[\log q(x)]'' = 0$, les deux suites $\{q_n\}$ et $\left\{\dfrac{1}{q_n}\right\}$ appartiennent à la classe $Q\{\lambda_n\}$.

6. Définition B. — *Soit* $f(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Une suite partielle de coefficients* $\{d_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *sera appelée suite de coefficients principaux et la suite croissante d'entiers positifs* $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *suite d'indices principaux, s'il existe une suite* $\{q_n\}$ *appartenant à la classe* $Q\{\lambda_n\}$, *telle que*

a. $q_n \geqq |d_n|$ $(n = 0, 1, \ldots)$.
b. $|q_{n_k}| \leqq C|d_{n_k}|$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$ *et où* $1 \leqq C < \infty$ *est une constante.*

7. Définition C. — *Soit* $f(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Nous disons que :*

a. La suite de coeffficients $\{d_n\}$ *est une suite régulière, si la suite d'entiers* $\{n\}$ *pour* $n \geqq n_0$ *est une suite d'indices principaux* (Déf. B).
a'. La suite de coefficients $\{d_n\}$ *est une suite quasi-régulière, s'il existe une suite d'indices principaux* $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *telle que* $n_{k+1} - n_k = O(1)$ *pour* $k \to \infty$.

Pour démontrer que chaque série (1) possède des suites de coefficients principaux, nous nous servirons du lemme suivant.

8. Lemme I. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *la suite croissante introduite dans le paragraphe* 5. *Soit* $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *une suite de nombres non négatifs, telle que* $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} \dfrac{\log a_n}{\lambda_n} = 0$. *Il existe une suite croissante de nombres positifs* $\{p_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *possédant les propriétés suivantes :*

a. $\log p_n$ *est une fonction concave de* λ_n *et l'on a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log p_{n+1} - \log p_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0$$

(*La suite* $\{p_n\}$ *appartient donc à la classe* $Q\{\lambda_n\}$).

b. La suite $\left\{\frac{1}{p_n}\right\}$ *appartient aussi à la classe* $Q\{\lambda_n\}$.

c. $\overline{\lim_{n=\infty}} p_n a_n = \infty$.

Démonstration. — Dans le cas où $\overline{\lim_{n=\infty}} a_n > 0$, la suite $p_n = \lambda_n$ possède les propriétés énoncées dans le lemme. Supposons donc qu'on ait $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. Soit $\{n_k\}(k=1, 2, \ldots)$ une suite infinie d'entiers positifs telle que $\lim_{k=\infty} \frac{\log a_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = 0$. (Une telle suite existe toujours d'après nos hypothèses.) Posons

$$\varepsilon(x) = \overline{\operatorname{borne}}_{\lambda_{n_k} \geq x} \frac{1}{\lambda_{n_k}} \log \frac{\lambda_{n_k}}{a_{n_k}} \qquad \text{pour} \quad \lambda_{n_1} \leqq x < \infty,$$

et $\varepsilon(x) = \varepsilon(\lambda_{n_1})$ pour $0 \leqq x \leqq \lambda_{n_1}$. $\varepsilon(x)$ est une fonction positive décroissante, $\varepsilon(x) \downarrow 0$.

Soit $\{\eta_n\}(n=1, 2, \ldots)$ une suite décroissante de nombres positifs, $\eta_n \downarrow 0$ avec $\eta_1 = \varepsilon(0)$ et $\sum_1^\infty \eta_n < \infty$. Faisons correspondre à $\{\eta_n\}$ une suite croissante de nombres positifs $\{x_n\}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

α. $x_{n+1} > 3x_n + 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$.
β. $\varepsilon(x) < \eta_{n+1}$ pour $x \geqq x_n (n=1, 2, \ldots)$.

Posons

$$\delta_n = \frac{\eta_n}{\log(x_{n+1} - 1) - \log x_n},$$

d'après α on obtient $0 < \delta_n < \eta_n$ et donc $\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$. Posons

$$\mu(x) = \frac{\delta_1}{x_1} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq x_1, \qquad \mu(x) = \frac{\delta_n}{x} \quad \text{pour} \quad x_n \leqq x \leqq x_{n+1} - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

et enfin

$$\mu(x) = \delta_n \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - 1} + \delta_{n+1} \frac{x + 1 - x_{n+1}}{x_{n+1}} \qquad \text{pour} \quad x_{n+1} - 1 \leqq x \leqq x_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On voit aisément que la fonction $\mu(x)$, qui est positive et continue, satisfait pour $x_n \leqq x \leqq x_{n+1}$ à l'inégalité $(x-1)\mu(x) \leqq \delta_n + \delta_{n+1}$, donc, on peut écrire

$$\lim_{x=\infty} x\mu(x) = 0. \tag{22}$$

D'après les définitions de $\mu(x)$ et de la suite $\{\delta_n\}$, on trouve

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}-1} \mu(y)\,dy = \int_{x_n}^{x_{n+1}-1} \frac{\delta_n}{y}\,dy = \eta_n \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

et

$$\int_{x_{n+1}-1}^{x_{n+1}} \mu(y)\,dy \leqq \max\{\delta_n, \delta_{n+1}\} < \eta_n \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Les dernières inégalités nous donnent

$$\int_{x_1}^{\infty} \mu(y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}-1} \mu(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n+1}-1}^{x_{n+1}} \mu(y)\,dy < 2\sum_{1}^{\infty} \eta_n < \infty.$$

Posons

$$\tau(x) = \int_x^{\infty} \mu(y)\,dy.$$

$\tau(x)$ est une fonction décroissante, $\tau(x) \downarrow 0$ et l'on a $\tau'(x) = -\mu(x)$. De plus, pour $x_{n-1} \leqq x \leqq x_n$ on peut écrire

$$\tau(x) = \int_x^{\infty} \mu(y)\,dy > \int_{x_n}^{x_{n+1}-1} \mu(y)\,dy = \eta_n > \varepsilon(x). \tag{23}$$

Posons

$$\log p(x) = \int_0^{x_1} \varepsilon(y)\,dy + \int_0^x \tau(y)\,dy,$$

et définissons $p_n = p(\lambda_n)$. La suite $\{p_n\}$ ainsi définie satisfait aux conditions du lemme. En effet, on a $[\log p(x)]' = \tau(x) \downarrow 0$ pour $x \to \infty$, et $[\log p(x)]'' = -\mu(x) < 0$ et l'on en tire facilement que a est satisfaite. D'après (22) et ce qui précède, on obtient

$$\lim_{x=\infty} x\,[\log p(x)]'' = -\lim_{x=\infty} x\,\mu(x) = 0.$$

Donc, d'après la remarque faite à la fin du paragraphe 5 on conclut que b est aussi satisfaite. Enfin, en tenant compte de (23), on peut écrire

$$\log p_{n_k} = \log p(\lambda_{n_k}) = \int_0^{x_1} \varepsilon(y)\,dy + \int_0^{\lambda_{n_k}} \tau(y)\,dy \geqq \int_0^{\lambda_{n_k}} \varepsilon(y)\,dy \geqq \lambda_{n_k}\varepsilon(\lambda_{n_k})$$
$$\geqq \log\left(\frac{\lambda_{n_k}}{a_{n_k}}\right) \qquad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où la suite $\{n_k\}$ est celle dont il a été question dans la définition de $\varepsilon(x)$.

La dernière inégalité nous donne

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\,(p_n a_n) \geqq \overline{\lim_{k=\infty}}\,(p_{n_k} a_{n_k}) \geqq \overline{\lim_{k=\infty}}\,\lambda_{n_k} = \infty.$$

Ainsi la condition c est aussi remplie et le lemme est démontré.

9. **Lemme II.** — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Il existe une suite* $\{q_n\}$ *appartenant à la classe* $Q\{\lambda_n\}$ *et une suite croissante d'entiers positifs* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

a. $q_n \geqq |d_n|$ $(n=0, 1, \ldots)$.

b. $q_{n_k}=|d_{n_k}|$ *pour* $k=1, 2, \ldots$. *Si* $n_{k+1}-n_k \geqq 2$, *n étant entier, tel que* $n_k < n < n_{k+1}$, *on a*

c. $$\log q_n \leqq \frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}} \log |d_{n_k}| + \frac{\lambda_n-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}} \log |d_{n_{k+1}}|.$$

Démonstration. — Dans le cas où $\overline{\lim}_{n=\infty} |d_n|=\infty$, soit $C(x)$ la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n=(\lambda_n, \log|d_n|)$ $(n=0, 1, \ldots)$ et soit $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ la suite croissante d'entiers positifs correspondant aux sommets P_{n_k} de la ligne polygonale $y=C(x)$. Posons $\log q_n=C(\lambda_n)$. On voit aisément que les deux suites $\{q_n\}$ et $\{n_k\}$ ainsi définies satisfont aux conditions du lemme. Prenons maintenant le cas $\overline{\lim} |d_n| < \infty$. D'après le lemme I il existe une suite de nombres positifs $\{p_n\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$ et possédant les propriétés *a*, *b* et *c* du lemme I, où $a_n=|d_n|$. Posons $b_n=p_n|d_n|$ pour $n=0, 1, \ldots$.

Soit $C(x)$ la petite enveloppe concave non négative de points

$$P_n=(\lambda_n, \log b_n) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

et soit $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ la suite croissante d'entiers positifs correspondant aux sommets P_{n_k} de la ligne polygonale $y=C(x)$. Posons $q_n=\frac{e^{C(\lambda_n)}}{p_n}$.

Les deux suites $\{q_n\}$ et $\{n_k\}$ ainsi définies satisfont aux conditions du lemme. En effet, les deux suites $\{e^{C(\lambda_n)}\}$ et $\left\{\frac{1}{p_n}\right\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$, la suite $\{q_n\}$ y appartient aussi. On a

$$q_n=\frac{e^{C(\lambda_n)}}{p_n} \geqq \frac{b_n}{p_n}=|d_n|,$$

et donc la relation *a* est satisfaite. Pour $n=n_k$ on obtient

$$q_{n_k}=\frac{e^{C(\lambda_{n_k})}}{p_{n_k}}=\frac{b_{n_k}}{p_{n_k}}=|d_{n_k}|,$$

d'où l'on tire la relation *b*. Enfin, étant donnée la convexité de la suite $\log\frac{1}{p_n}$ considérée comme une fonction de λ_n (d'après la démonstration du lemme I), le caractère linéaire de $C(x)$ pour $\lambda_{n_k} \leqq x \leqq \lambda_{n_{k+1}}$ et la relation *b* du lemme déjà démontrée, on obtient la relation *c*. En particulier, on tire du lemme II les deux corollaires suivants :

Corollaire A. — *Chaque série de Dirichlet* (1) *possède des suites de coefficients principaux.*

En effet, d'après la définition B et d'après a et b du lemme II, on voit aisément que la suite des coefficients $\{d_{n_k}\}(k=1, 2, \ldots)$ qui satisfait à la condition b du lemme II est une suite de coefficients principaux.

COROLLAIRE B. — *Si dans la série de Dirichlet* (1) *on a* $\lim\limits_{n=\infty} d_n = 0$, *il existe des suites majorantes* $\{q_n\}$, $q_n \geqq |d_n|$, *appartenant à la classe* $Q\{\lambda_n\}$, *telles que* $\lim\limits_{n=\infty} q_n = 0$.

En effet, d'après la condition c du lemme II, la suite $\{q_n\}$ qui satisfait aux conditions du lemme est une telle suite.

Dans les deux paragraphes qui suivent nous donnons quelques lemmes qui serviront dans la démonstration du théorème fondamental.

10. Soit $f(s) = \sum\limits_0^\infty d_n e^{-\lambda_n s}$ la série de Dirichlet (1) avec $\lambda_0 > 0$. Posons

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\Gamma(\lambda_n + 1)} e^{-\lambda_n s},$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma de Euler. On démontre aisément que $F(s)$ est une fonction entière satisfaisant pour chaque $\varepsilon > 0$ à l'inégalité

$$M(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{-\infty < t < \infty} |F(\sigma + it)| = O(e^{e^{-\sigma+\varepsilon}}) \qquad (\sigma \to -\infty).$$

Soit η un nombre réel $-\infty < \eta < +\infty$ et désignons par B_η la courbe symétrique par rapport à l'axe positif, donnée par l'équation paramétrique $\sigma = \eta - \log\cos\theta$, $t = \theta$, pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Désignons par $\mathcal{D}_\eta$ le domaine simplement connexe, contenant l'axe positif et dont la frontière est B_η. Remarquons que la transformation $w = e^s$, représente conformément et simplement le domaine $\mathcal{D}_\eta$ sur le demi-plan $\mathcal{R}(w) > e^\eta$. Les relations suivantes, (24) et (25) entre les deux fonctions $f(s)$ et $F(s)$, énoncées ici pour les séries de Dirichlet, sont bien connues [1]. Pour $\sigma > 0$, on a

$$(24) \qquad f(s) = f(\sigma + it) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F(u + it)\, du.$$

Cette relation n'est autre que la transformation connue de Laplace, si l'on pose $z = e^\sigma$ et $x = e^{-u}$. On trouve aussi

$$(25) \qquad F(s) = F(\sigma + it) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_\eta} e^{e^{-\sigma+z}} f(z + it)\, dz;$$

l'intégration dans (25) est prise dans le sens négatif et η est choisi de manière

[1] *Voir*, par exemple, V. BERNSTEIN, *Leçons sur les séries de Dirichlet* (Collection Borel), p. 294.

que la fonction $f_t(z) = f(z+it)$ soit holomorphe dans le domaine fermé $\overline{\mathcal{D}}_\eta$ (ce qui sera toujours le cas si $\eta > 0$). En utilisant (24) et (25), on obtient aisément le lemme suivant, qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus précis de M. G. Pólya [1].

LEMME III. — *Soient $f(s)$ et $F(s)$ les deux séries de Dirichlet définies plus haut. Si la fonction $f(s)$ est holomorphe sur le segment de l'axe imaginaire donné par $t_1 \leqq t \leqq t_2$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait*

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} |F(\sigma + it)| = O(e^{e^{-\sigma-\delta}}) \qquad \text{pour} \quad \sigma \downarrow -\infty. \tag{26}$$

Si, au contraire, (26) est satisfaite, la fonction $f(s)$ est holomorphe dans la bande $\sigma > -\delta$, $t_1 < t < t_2$ et y est donnée par (24).

11. LEMME IV. — *Soit $\{q_n\}$ une suite appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$. Posons $C_n = \dfrac{q_n}{\Gamma(\lambda_n+1)}$. $\log C_n$ est donc une fonction concave de λ_n pour n assez grand. Pour simplifier les choses, supposons que ceci est vrai pour tous les n ($n = 0, 1, \ldots$). Posons comme dans le paragraphe 4 :*

$$m(\sigma) = \max_{0 \leq n < \infty} C_n e^{-\lambda_n \sigma} \qquad \textit{pour} \quad -\infty < \sigma < \infty. \tag{12}$$

Soit $\{\sigma_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$) une suite de nombres réels telle que $m(\sigma_n) = C_n e^{-\lambda_n \sigma_n}$. (On voit aisément que $\sigma_n \downarrow -\infty$). *Les inégalités suivantes sont alors satisfaites :*

a. $\sigma_n = -\log \lambda_n + o(1)$ *pour* $n \to \infty$.
b. Pour chaque $\delta > 0$, $\sigma \leqq -\log \lambda_n - \delta$ *et* $n \geqq n_0 = n_0(\delta)$,

$$C_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma} \geqq C_{\nu-1} e^{-\lambda_{\nu-1}\sigma} \qquad \textit{pour} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

c. Étant donné $\varepsilon > 0$, *il existe* $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ *tel que*

$$m(\sigma) \geqq e^{e^{-\sigma-\varepsilon}} \qquad \textit{pour} \quad \sigma < \sigma_0.$$

Démonstration. — Pour démontrer *a* remarquons que, d'après la définition de la suite $\{\sigma_n\}$, on a

$$\frac{\log C_n - \log C_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \geqq \sigma_n \geqq \frac{\log C_{n+1} - \log C_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Or, d'après la définition de $\{C_n\}$, la définition A et les formules asymptotiques pour la dérivée de $\Gamma(x)$, on trouve

$$\frac{\log C_{n+1} - \log C_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \frac{\log q_{n+1} - \log q_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} - \frac{\log \Gamma(\lambda_{n+1}+1) - \log \Gamma(\lambda_n+1)}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = -\log \lambda_n + o(1),$$

---

[1] G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Math. Zeitsch.*, B. 29, 1929, p. 585).

d'où l'on tire la relation a. L'inégalité b est une conséquence immédiate de a. Pour chaque $-\infty < \sigma < -\log\lambda_0$ désignons par $n(\sigma)$ l'entier non négatif satisfaisant à $\lambda_{n(\sigma)} \leqq e^{-\sigma} < \lambda_{n(\sigma)+1}$. En écrivant $m(\sigma) \geqq C_{n(\sigma)} e^{-\lambda_{n(\sigma)}\sigma}$ et en tenant compte de la définition de $n(\sigma)$ et de la suite $\{C_n\}$, on arrive aisément à la dernière inégalité c.

Nous allons maintenant énoncer notre théorème fondamental. Ce théorème diffère du théorème I en ce qu'on remplace la suite majorante $\{q_n\}$ du théorème I, définie par $q_n = e^{C(\lambda_n)}$, $C(x)$ étant la plus petite enveloppe concave non négative de points $P_n = (\lambda_n, \log|d_n|)(n = 0, 1, \ldots)$, par les suites majorantes $\{q_n\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$. Ce qui est important, en particulier, dans le cas où $\lim\limits_{n=\infty} d_n = 0$. En effet, la suite majorante $\{q_n\}$ du théorème I satisfait dans ce cas, comme toujours, à la restriction $q_n \geqq 1$. Tandis que, d'après le paragraphe 9, corollaire B, il existe alors des suites majorantes $\{q_n\}$ appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$ avec $\lim q_n = 0$.

12. Théorème III (théorème fondamental). — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$. Supposons que dans ce demi-plan $f(s)$ soit représentée par la série de Dirichlet* (1), $f(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$. *Posons* $f_n(s) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}$. *Supposons, enfin que les coefficients d_n soient majorés par une suite $\{q_n\}$ appartenant à la classe* $Q\{\lambda_n\}$, $|d_n| \leqq q_n$. *Dans ces conditions on a, dans tout domaine fermé et borné $\bar\Delta$ contenu dans $\mathcal{D}$,*

$$\max_{s\in\bar\Delta}\left|\frac{f(s)-f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}}\right| = O(1) \qquad \text{pour} \quad n \to \infty. \tag{27}$$

Démonstration. — Posons $g(x) = \max|\log q_n - \log q_m|$ pour $|\lambda_n - \lambda_m| \leqq x$. D'après cette définition et la relation $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{\log q_{n+1} - \log q_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = 0$, on voit aisément que $g(x)$ est une fonction croissante non négative satisfaisant aux deux conditions suivantes :

α. $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{g(x)}{x} = 0$.

β. $|\log q_n - \log q_m| \leqq g(|\lambda_n - \lambda_m|)$.

Étant donné le lemme de Borel-Lebesgue, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Chaque point $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar\Delta$ est le centre d'un carré $C(s_0, \delta_0)$: $|\sigma - \sigma_0| \leqq \delta_0$, $|t - t_0| \leqq \delta_0$, $[\delta_0 = \delta_0(s_0) > 0]$, *dans lequel $f(s)$ est holomorphe et satisfait à* (27) [*où l'on remplace $\bar\Delta$ par* $C(s_0, \delta_0)$].

Pour la démonstration de cette proposition, nous distinguons entre trois cas :

Cas A. — Soit $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar{\Delta}$ avec $\sigma_0 > 0$. Choisissons $0 < \delta_0 \leqq \frac{\sigma_0}{2}$. D'après les hypothèses du théorème et d'après les propriétés de la fonction $g(x)$ définie plus haut, on a dans le carré $C(s_0, \delta_0)$,

$$\max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \frac{f(s) - f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} \right| = \max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \sum_{\nu = n+1}^{\infty} \frac{d_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n) s} \right| \leqq \sum_{\nu = n+1}^{\infty} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_\nu - \lambda_n)\delta_0}$$
$$\leqq \sum_{\nu = n+1}^{\infty} e^{g(\lambda_\nu - \lambda_n) - (\lambda_\nu - \lambda_n)\delta_0} \leqq \sum_{\nu = 1}^{\infty} e^{g(\nu H) - \nu h \delta_0} = K_1(\delta_0) < \infty,$$

où h et H sont les constantes positives dont il a été question dans (1) et $K_1(\delta_0)$ est une constante positive qui ne dépend pas de n.

Cas B. — Soit $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \bar{\Delta}$ avec $\sigma_0 < 0$. Choisissons $0 < \delta_0 \leqq -\frac{\sigma_0}{2}$ assez petit pour que $f(s)$ soit holomorphe dans $C(s_0, \delta_0)$. Posons $M = \max |f(s)|$ pour $s \in C(s_0, \delta_0)$. On obtient

$$(28) \qquad \max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \frac{f(s) - f_n(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} \right| = \max_{s \in C(s_0, \delta_0)} \left| \frac{f(s)}{q_n e^{-\lambda_n s}} - \sum_{\nu = 0}^{n} \frac{d_\nu}{q_n} e^{(\lambda_n - \lambda_\nu) s} \right|$$
$$\leqq \frac{M}{q_n e^{\lambda_n \delta_0}} + \sum_{\nu = 0}^{n} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_n - \lambda_\nu)\delta_0}.$$

Or, puisque $\lim \frac{\log q_n}{\lambda_n} = 0$, on a

$$(28') \qquad \frac{M}{q_n e^{\lambda_n \delta_0}} \leqq M_1(\delta_0),$$

où $M_1(\delta_0)$ est une constante positive qui ne dépend pas de n.

D'après les propriétés de la fonction $g(x)$ définie plus haut

$$(28'') \qquad \sum_{\nu = 0}^{n} \frac{q_\nu}{q_n} e^{-(\lambda_n - \lambda_\nu)\delta_0} \leqq \sum_{\nu = 0}^{n} e^{g(\lambda_n - \lambda_\nu) - (\lambda_n - \lambda_\nu)\delta_0} < \sum_{\nu = 0}^{\infty} e^{g(\nu H) - \nu h \delta_0} = K_2(\delta_0) < \infty.$$

(28), (28′) et (28″) nous donnent le résultat cherché (27) pour $\bar{\Delta} = C(s_0, \delta_0)$.

Enfin, prenons le troisième cas, le plus difficile.

Cas C. — Soit $s_0 = it_0 \in \bar{\Delta}$. Sans diminuer la généralité, on peut supposer que $s_0 = 0$ et donc que $f(s)$ est régulière sur le segment de l'axe imaginaire $|t| \leqq d$ où $d > 0$. Posons

$$(29) \qquad F(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{d_n}{\Gamma(\lambda_n + 1)} e^{-\lambda_n s}.$$

D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 10, $F(s)$ est une fonction entière. De plus, la dernière hypothèse que nous avons faite sur $f(s)$ et le lemme III nous permettent de conclure qu'il existe un nombre $\delta > 0$, tel qu'on ait

$$\max_{|t|\leq a} |F(\sigma+it)| = O(e^{e^{-\sigma-2\delta}}) \quad \text{pour} \quad \sigma \to -\infty. \tag{30}$$

D'après le même lemme, $f(s)$ est holomorphe dans la bande $\sigma > -2\delta$, $|t| < d$ et y est représentée par l'intégrale

$$f(s) = f(\sigma+it) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F(u+it)\, du. \tag{24}$$

Posons

$$C_n = \frac{q_n}{\Gamma(\lambda_n+1)} \quad \text{et} \quad m(\sigma) = \max_{0\leq n<\infty} C_n e^{-\lambda_n\sigma}.$$

D'après la définition A, $\log C_n$ est une fonction concave de λ_n pour n assez grand. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que ceci soit vrai, pour tous les n, $n \geq 0$.

Soit $\sigma_n (n = 0, 1, \ldots)$ une suite décroissante $\sigma_n \downarrow -\infty$ telle que l'on ait $m(\sigma_n) = C_n e^{-\lambda_n\sigma_n}$ et soit $\varepsilon > 0$ un nombre positif quelconque. D'après le lemme IV, on a

$$\begin{cases} m(\sigma) \geq e^{e^{-\sigma-\varepsilon}} & \text{pour} \quad \sigma \leq \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon), \\ \sigma_n = -\log\lambda_n + o(1) & \text{pour} \quad n \to \infty. \end{cases} \tag{31}$$

Dans le théorème II posons

$$f(s)(=)F(s), \qquad d_n(=)\frac{d_n}{\Gamma(\lambda_n+1)}, \qquad C_n(=)C_n, \qquad n_k(=)n, \qquad \sigma_k(=)\sigma_n,$$
$$\delta(=)\delta \quad \text{et} \quad d(=)d.$$

On voit aisément que les conditions du théorème II sont satisfaites pour la fonction $F(s)$. En particulier la condition (13) est satisfaite. Car, si nous choisissons dans la première inégalité (31), $0 < \varepsilon < \delta$, nous obtenons, compte tenu de cette inégalité et de (30),

$$\max_{\substack{\sigma'-\delta\leq\sigma\leq\sigma' \\ -d\leq t\leq d}} |F(\sigma+it)| \leq e^{e^{-\sigma'-\delta}} < m(\sigma') \quad \text{pour} \quad \sigma' \leq \sigma'_0. \tag{31'}$$

Soient d' et δ' deux nombres positifs tels que $0 < d' < d$, $0 < \delta' < \min(\delta, d)$. Posons

$$F_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu+1)} e^{-\lambda_\nu s}.$$

D'après le théorème II et la seconde inégalité (31), on a, dans la demi-bande $\sigma \geq -\log\lambda_n - \delta'$, $|t| \leq d'$,

$$|F(\sigma+it) - F_n(\sigma+it)| \leq KC_n e^{-\lambda_n\sigma} \; (n = 0, 1, \ldots). \tag{32}$$

Posons

$$(33)\qquad \delta_0 = \min\left\{\frac{\delta'}{2},\ \frac{\delta'^2}{4},\ \log\frac{1+\frac{\delta'}{2}}{1+\frac{\delta'}{3}},\ \frac{e^{\delta'}}{2}(e^{-\delta}-e^{-2\delta})\right\}.$$

(24) nous permet d'écrire, pour $s=\sigma+it$ appartenant au carré $C(0, \delta_0)$: $|\sigma_0|\leqq\delta_0$, $|t|\leqq\delta_0$,

$$(34)\qquad \begin{aligned} f(s)-f_n(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}[F(u+it)-F_n(u+it)]\,du \\ &= \int_{-\log\lambda_n-\delta'}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}[F(u+it)-F_n(u+it)]\,du \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u}[F(u+it)-F_n(u+it)]\,du = I_n(s)+J_n(s). \end{aligned}$$

D'après (32) et la définition de $\{C_n\}$, on trouve

$$(35)\qquad \begin{aligned} |I_n(s)| &\leqq KC_n \int_{-\log\lambda_n-\delta'}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\,du < KC_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\,du \\ &= KC_n e^{-\lambda_n\sigma}\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\lambda_n}\,dx = KC_n\Gamma(\lambda_n+1)\,e^{-\lambda_n\sigma} = Kq_n e^{-\lambda_n\sigma}, \end{aligned}$$

où K est la constante positive introduite dans (32).

Pour $J_n(s)$ on obtient

$$(36)\qquad \begin{aligned} J_n(s) &= \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F(u+it)\,du \\ &\quad - \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F_n(u+it)\,du = J_n^{\star}(s) - J_n^{\star\star}(s). \end{aligned}$$

(30) et (33) nous permet d'écrire

$$(36')\qquad \begin{aligned} |J_n^{\star}(s)| &= \left|\int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F(u+it)\,du\right| \\ &\leqq A_1 \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{\sigma-u-2\delta}\,du \\ &= A_1 e^{\sigma}\int_{\lambda_n e^{\delta'}}^{\infty} e^{-x(e^{\sigma}-e^{-2\delta})}\,dx \\ &\leqq A_1 e^{\delta}\int_{\lambda_n e^{\delta'}}^{\infty} e^{-x(e^{-\delta}-e^{-2\delta})}\,dx \leqq A_2\, e^{-2\delta_0\lambda_n} = o(q_n e^{-\lambda_n\sigma}), \end{aligned}$$

uniformément par rapport à $s\in C(0, \delta_0)$. (A_1 et A_2 sont deux constantes positives qui ne dépendent que de δ_0).

En tenant compte du lemme IV, conséquence b, on obtient pour n assez grand

$$(36'') \qquad |J_n^{**}(s)| = \left| \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} F_n(u+it)\, du \right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} \left(e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu e^{-\lambda_\nu u} \right) du$$
$$\leq (n+1) C_n \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\, du.$$

Pour la dernière intégrale, on a

$$(36''') \qquad \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n-\delta'} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-u} e^{-\lambda_n u}\, du = e^{(\lambda_n+1)\delta'} \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n} e^{-e^{\delta'} e^{\sigma-u}} e^{\sigma-(\lambda_n+1)u}\, du$$
$$= e^{(\lambda_n+1)\delta'} \int_{-\infty}^{-\log\lambda_n} e^{-(e^{\delta'}-1)e^{\sigma-u}} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-(\lambda_n+1)u}\, du$$
$$< e^{\delta'} e^{-[(e^{\delta'}-1)e^{\sigma}-\delta']\lambda_n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^{\sigma-u}} e^{\sigma-(\lambda_n+1)u}\, du$$
$$= e^{\delta'} e^{-[(e^{\delta'}-1)e^{\sigma}-\delta']\lambda_n} \Gamma(\lambda_n+1).$$

Or, pour $s \in C(0, \delta_0)$, on a d'après (33) $e^\sigma \geq \dfrac{1+\frac{\delta'}{3}}{1+\frac{\delta'}{2}}$, et donc

$$(e^{\delta'}-1)e^{\sigma} - \delta' > \left(\delta' + \frac{\delta'^2}{2}\right) e^{\sigma} - \delta' \geq \frac{\delta'^2}{3}.$$

La dernière inégalité, (36'''), (36''), (33), la relation $n = O(\lambda_n)$ et la définition de $\{C_n\}$, nous donnent

$$(36'''') \qquad J_n^{**}(s) = O\left(\lambda_n q_n e^{-\lambda_n \frac{\delta'^2}{3}}\right) = o(q_n e^{-\lambda_n \sigma}),$$

uniformément par rapport à $s \in C(0, \delta_0)$.

De (36), (36') et (36''''), on tire

$$(37) \qquad J_n(s) = o(q_n e^{-\lambda_n \sigma}) \qquad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

uniformément par rapport à $s \in C(0, \delta_0)$.

(34), (35) et (37) nous donnent le résultat cherché (27) pour $\overline{\Delta} = C(0, \delta_0)$. Ce qui démontre le dernier cas et achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE II.

Sur le théorème de Fatou-Pólya. Généralisation du théorème de Fabry-Pólya. Généralisation d'un théorème de Mlle Cartwright. Critère général pour que $s = 0$ soit un point singulier pour la série (1).

1. Soit $f(s) = \sum_0^\infty d_n e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet (1) pour laquelle l'axe imagi-

naire n'est pas une coupure. Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe où $f(s)$ est holomorphe et qui contient le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$ et tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Désignons par T le domaine composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$ et $\mathcal{R}(s) < 0$ et tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Soit $\{n_k\}$ $(k = 1, \ldots)$ une suite croissante d'indices principaux de $f(s)$ (Déf. B, § 6, Chap. I). Posons

$$g_{n_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{d_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}} \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{38}$$

D'après le théorème fondamental et la définition B, les fonctions $g_{n_k}(s)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sont holomorphes et bornées dans leur ensemble dans tout domaine fermé $\overline{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{D}$. La famille $\{g_{n_k}(s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ est donc normale dans $\mathcal{D}$. On peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Chaque fonction $g(s)$, limite d'une suite partielle de fonctions de la famille, $g_{\bar{n}_k}(s) \to g(s)$ pour $k \to \infty$ $s \in \mathcal{D}$, ($\{\bar{n}_k\}$ étant une suite partielle de $\{n_k\}$), possède les propriétés suivantes :*

a. $g(s)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans le domaine T *et y possède les développements*

$$\left\{\begin{aligned} g(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} \quad \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g(s) &= -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} \quad \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0; \end{aligned}\right. \tag{39}$$

où $|a_m| \leqq$ C pour $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, C étant une constante positive qui ne dépend que de la suite $\{n_k\}$ et où $\{\mu_m\}$ et $\{\mu_{-m}\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ sont deux suites croissantes de nombres positifs satisfaisant aux inégalités $h \leqq \mu_{\pm 1} \leqq$ H, $h \leqq \mu_{m+1} - \mu_m \leqq$ H et $h \leqq \mu_{-m-1} - \mu_{-m} \leqq$ H pour $m = 1, 2, \ldots$; h et H sont les deux constantes positives introduites dans (1). De plus, on peut extraire de la suite $\{\bar{n}_k\}$ une suite partielle $\{n'_k\}$ pour laquelle on ait

$$\lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k+m} - \lambda_{n'_k}) = \mu_m \quad \text{et} \quad \lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k} - \lambda_{n'_k-m}) = \mu_{-m} \quad \text{pour } m = 1, 2, \ldots; \tag{40}$$

$$\lim_{k=\infty} \frac{d_{n'_k+m}}{d_{n'_k}} = a_m \quad \text{et} \quad \lim_{k=\infty} \frac{d_{n'_k-m}}{d_{n'_k}} = a_{-m} \quad \text{pour } m = 1, 2, \ldots. \tag{40'}$$

b. La fonction $g(s)$ possède des points singuliers sur l'axe imaginaire qui sont tous, d'après a, des points singuliers de $f(s)$.

Démonstration. — Soit $\{q_n\}$ la suite majorante appartenant à la classe $Q\{\lambda_n\}$ qui nous a servi dans la définition de la suite d'indices principaux $\{n_k\}$ (Déf. B). C'est-à-dire que l'on a $|d_n| \leqq q_n$ et $q_{n_k} \leqq C|d_{n_k}|$ pour $k = 1, 2, \ldots$, où $1 \leqq C < \infty$. Posons $\log G(x) = \max|\log q_n - \log q_m|$ pour $|\lambda_n - \lambda_m| \leqq x$. G$(x)$ est une fonction croissante qui satisfait $\left(\text{d'après } \lim\limits_{n=\infty} \frac{q_n}{q_{n+1}} = 1\right)$ à $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\log G(x)}{x} = 0$. On trouve facilement les relations suivantes :

$$\left|\frac{d_{n_k \pm m}}{d_{n_k}}\right| \leqq CG(|\lambda_{n_k \pm m} - \lambda_{n_k}|), \tag{41}$$

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \left|\frac{d_{n_k \pm m}}{d_{n_k}}\right| \leqq \lim_{k=\infty} C \frac{q_{n_k \pm m}}{q_{n_k}} = C, \tag{41'}$$

$$mh \leqq |\lambda_{n_k \pm m} - \lambda_{n_k}| \leqq mH \qquad \text{pour} \quad k, m = 1, 2, \ldots; \tag{41''}$$

où $0 < h < H < \infty$. Les relations (41), (41′) et (41″) nous permettent de démontrer aisément qu'on peut extraire, de la suite $\{\bar{n}_k\}$, qui est une suite partielle de $\{n_k\}$ (par un procédé diagonal), une suite partielle $\{n'_k\}$ pour laquelle les limites (40) et (40′) existent.

Définissons les suites $\{\mu_m\}$, $\{\mu_{-m}\}$, $\{a_m\}$ et $\{a_{-m}\}$ par les limites (40) et (40′). On voit aisément, d'après (41′) et (41″), que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} h \leqq \mu_{\pm 1} \leqq H, \qquad h \leqq \mu_{m+1} - \mu_m \leqq H, \\ h \leqq \mu_{-m-1} - \mu_{-m} \leqq H \quad \text{et} \quad |a_{\pm m}| \leqq C, \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{42}$$

Posons

$$\begin{cases} g^{+}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g^{-}(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} \qquad \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0. \end{cases} \tag{43}$$

D'après les inégalités précédentes, les séries $g^{+}(s)$ et $g^{-}(s)$ convergent pour $\mathcal{R}(s) > 0$ et $\mathcal{R}(s) < 0$ respectivement. Pour démontrer a et b il suffit, donc de prouver

$$g(s) = g^{+}(s) \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0 \qquad \text{et} \qquad g(s) = g^{-}(s) \quad \text{pour } s \in \mathcal{O},\ \mathcal{R}(s) < 0.$$

Or, dans tout domaine fermé et borné $\overline{\Delta}$ contenu dans $\mathcal{O}$, on a uniformément

$$g_{n'_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n'_k}(s)}{d_{n'_k} e^{-\lambda_{n'_k} s}} \to g(s). \tag{44}$$

En tenant compte des premières égalités (40), (40′), (41) et (44), on démontre aisément que, pour $\mathcal{R}(s) > 0$,

$$g(s) = \lim_{k=\infty} g_{n'_k}(s) = \lim_{k=\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{n'_k + m}}{d_{n'_k}} e^{-(\lambda_{n'_k + m} - \lambda_{n'_k})s} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} = g^{+}(s).$$

Soit maintenant $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathcal{O}$, avec $\sigma_0 < 0$. Il est évident que

$$\lim_{k=\infty} \frac{f(s_0)}{d_{n'_k} e^{-\lambda_{n'_k} s_0}} = 0.$$

Mais, la dernière relation, (44)(41) et (40′) nous donnent le résultat cherché

$$g(s_0) = \lim_{k=\infty} g_{n'_k}(s_0) = -\lim_{k=\infty} \frac{f_{n'_k}(s_0)}{d_{n'_k}\, e^{-\lambda_{n'_k} s_0}} = -\lim_{k=\infty} \sum_{m=0}^{n'_k} \frac{d_{n'_k - m}}{d_{n'_k}} e^{(\lambda_{n'_k} - \lambda_{n'_k - m}) s_0}$$
$$= -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s_0} = g^-(s_0).$$

Ceci achève la démonstration de a et de b.

Démontrons c par l'impossible. Supposons que l'une des séries (39) soit holomorphe sur l'axe imaginaire. On conclut, d'après cette hypothèse et d'après (39), que $g(s)$ est une fonction entière bornée dans tout le plan. $g(s)$ est donc une constante. Mais de (39) nous tirons $\lim g(\sigma) = 0$ pour $\sigma \to \infty$ et $\lim g(\sigma) = -1$ pour $\sigma \to -\infty$. Ce qui nous mène à une contradiction et le théorème se trouve complètement établi.

2. Lemme V. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}$ composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$ et $\mathcal{R}(s) < 0$ et le segment de l'axe imaginaire $|t| < d$, $d > 0$. Supposons que $f(s)$ possède les développements suivants :*

$$(45) \qquad \begin{cases} f(s) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ f(s) = -\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_{-m} e^{-\lambda_{-m} s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0, \end{cases}$$

où $\lambda_1 \geqq 2h > 0$, $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geqq 2h$ pour $m = 1, 2, \ldots$, $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_{-m-1} - \lambda_{-m} \geqq 2h$ pour $m = 0, 1, \ldots$, et $|a_{\pm m}| \leqq C$ pour $m = 0, 1, \ldots$, C étant une constante positive. Dans ce cas, on a, pour $s = \sigma + it$ tel que $|t| \leqq d$, $s \neq \pm id$, l'inégalité suivante :

$$(46) \qquad |f(s)| \leqq \frac{C}{|[1 - e^{h(s-id)}][1 - e^{h(s+id)}]|}.$$

Pour démontrer ce lemme on considère les fonctions

$$F_\varepsilon(s) = f(s)[1 - e^{h(s-id+i\varepsilon)}][1 - e^{h(s+id-i\varepsilon)}].$$

Or, on démontre aisément que $|F_\varepsilon(s)| \leqq C$ sur les deux droites $t = \pm(d - \varepsilon)$ et que $|F_\varepsilon(s)| \leqq C + o(1)$ sur les deux droites $\sigma = \pm N$ $(0 < N \to \infty)$. En appliquant le théorème du maximum sur la fonction $F_\varepsilon(s)$ dans le rectangle $|\sigma| \leqq N$ $|t| \leqq d - \varepsilon$ et en faisant tendre N vers l'infini et ε vers zéro, on trouve précisément l'inégalité énoncée dans le lemme.

Nous nous servirons du dernier lemme pour ajouter une précision dans certains cas au théorème IV.

3. Théorème IV *bis*. — *Supposons que les conditions du théorème* IV *soient satisfaites. La fonction $f(s)$ est donnée par la série* (1) *et la fonction $g(s)$ possède les*

développements (39). *Soit $s_0 = i\tau_0$ un point singulier de $f(s)$, isolé sur l'axe imaginaire.* [C'est-à-dire qu'il existe un segment de l'axe imaginaire : $\tau_0 - 2\delta \leqq t \leqq \tau_0 + 2\delta$, $\delta > 0$, dont tous les points sauf le point $s_0 = i\tau_0$ sont des points réguliers de $f(s)$]. *Si $s = s_0$ est aussi un point singulier de $g(s)$, on peut affirmer : Ce point est un pôle simple pour $g(s)$.*

Pour démontrer ce théorème, remarquons que, d'après le théorème IV, s_0 est un point isolé singulier non critique de $g(s)$. Or, en appliquant le lemme V, sur les deux fonctions $g(s + i[\tau_0 + \delta])$ et $g(s + i[\tau_0 - \delta])$, on obtient, dans le voisinage de s_0 :

$$g(s) = O\left(\frac{1}{\left|1 - e^{-\frac{h}{2}(s - i\tau_0)}\right|}\right) = O\left(\frac{1}{|s - s_0|}\right).$$

On tire immédiatement de la dernière inégalité le théorème énoncé : s_0 ne peut être qu'un pôle simple pour $g(s)$.

4. Soit $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ la série de Dirichlet (1). D'après le théorème connu de Fatou-Pólya, [généralisé pour les séries de Dirichlet générales par M. A. Dvoretzky ([1])], il existe une suite $\{\varepsilon_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\varepsilon_n = \pm 1$, telle que la série $f^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n d_n e^{-\lambda_n s}$ possède l'axe imaginaire comme coupure. La démonstration élégante de M. G. Pólya est une *démonstration d'existence* seulement, tandis que les autres démonstrations employées sont basées sur le critère de Hadamard-Ostrowski et fournissent un procédé assez compliqué pour la détermination de la suite $\{\varepsilon_n\}$. Le théorème suivant propose une méthode beaucoup plus simple pour la détermination de cette suite.

THÉORÈME V. — *Soit $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ la série de Dirichlet* (1). *Soit $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite croissante d'indices principaux de $f(s)$* (Déf. B), *telle que $\lim_{k=\infty} (n_{k+1} - n_k) = \infty$. Posons*

$$f^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^* e^{-\lambda_n s}, \tag{47}$$

où $d_n^* = d_n$ pour $n \neq n_k$, $d_n^* = -d_n$ pour $n = n_k$. Dans ce cas l'axe imaginaire est une coupure pour au moins une de ces deux séries.

Démonstration. — Supposons, par impossible, que les deux séries $f(s)$ et $f^*(s)$ soient prolongeables à l'extérieur du demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$. Désignons

---

([1]) A. DVORETZKY, *Studies on general Dirichlet series*, Jérusalem, 1941 (Thèse de doctorat. Résumé en hébreu et en anglais).

par T le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et de tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Désignons par T* le domaine analogue pour $f^\star(s)$. Posons

$$g_{n_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{d_{n_k}\, e^{-\lambda_{n_k} s}} \qquad \text{et} \qquad g^\star_{n_k}(s) = \frac{f^\star(s) - f^\star_{n_k}(s)}{d^\star_{n_k}\, e^{-\lambda_{n_k} s}},$$

où

$$f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu\, e^{-\lambda_\nu s} \qquad \text{et} \qquad f^\star(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d^\star_\nu\, e^{-\lambda_\nu s}.$$

Appliquons d'abord le théorème IV à la famille $\{g_{n_k}(s)\}$. Soit $\{n'_k\}$ une suite partielle de $\{n_k\}$ pour laquelle on a $\lim\limits_{k=\infty} g_{n'_k}(s) = g(s)$ pour $\mathcal{R}(s) > 0$, et pour laquelle les relations (40) et (40′) sont satisfaites. D'après le théorème IV, la fonction $g(s)$ est holomorphe et uniforme dans le domaine T et y possède les développements

$$(39)\qquad \begin{cases} g(s) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m\, e^{-\mu_m s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g(s) = -1 - \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}\, e^{\mu_{-m} s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0; \end{cases}$$

où $|a_m| + |a_{-m}| = O(1)$, $h \leqq \mu_{\pm 1} \leqq H$, $h \leqq \mu_{m+1} - \mu_m \leqq H$ et $h \leqq \mu_{-m-1} - \mu_{-m} \leqq H$. D'après (40) et (40′) et la définition de la suite $\{d^\star_n\}$, on obtient pour $\mathcal{R}(s) > 0$

$$\lim_{k=\infty} g^\star_{n'_k}(s) = g^\star(s).$$

Si l'on applique maintenant le théorème IV à la famille $\{g^\star_{n_k}(s)\}$, on trouve que $g^\star(s)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans le domaine T* et y possède les développements

$$(39^\star)\qquad \begin{cases} g^\star(s) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a^\star_m\, e^{-\mu_m s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g^\star(s) = -1 - \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a^\star_{-m}\, e^{\mu_{-m} s} & \text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0. \end{cases}$$

Or, d'après la définition de la suite $\{d^\star_n\}$ et d'après (40′) [où l'on pose $d_n (=) d^\star_n$ et $a_n (=) a^\star_n$], on obtient

$$a^\star_{\pm m} = \lim_{k=\infty} \frac{d^\star_{n'_k \pm m}}{d^\star_{n'_k}} = -\lim_{k=\infty} \frac{d_{n'_k \pm m}}{d_{n'_k}} = -a_{\pm m} \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots.$$

La dernière inégalité et les développements (39) et (39*) pour $\mathcal{R}(s) > 0$ nous donnent $g(s) \equiv -g^\star(s)$. Mais, d'après les développements (39) et (39*) pour $\mathcal{R}(s) < 0$, on trouve

$$\lim_{\sigma=-\infty} g^\star(\sigma) = \lim_{\sigma=-\infty} g(\sigma) = -1.$$

Ce qui nous mène à une contradiction et démontre le théorème :

5. D'après un théorème connu de Fabry-Pólya sur les séries de Dirichlet lacunaires (dans sa forme faible), on sait que si la série de Dirichlet $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ (1) est telle que l'on ait $d_n=0$, sauf pour une suite croissante d'entiers non négatifs $\{n_k\}$, avec $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k\}=\infty$, la fonction $f(s)$ possède l'axe imaginaire comme coupure. Nous allons généraliser ce théorème en montrant qu'on obtient le même résultat lorsqu'il n'existe qu'une suite infinie de lacunes dont la longueur tend vers l'infini, à condition toutefois que ces lacunes soient bordées d'un côté par des coefficients principaux (Déf. B). De plus, nous remplaçons la condition sur les lacunes par une condition plus générale. Nous commençons par une forme restreinte du théorème. Une forme plus générale sera donnée ultérieurement.

THÉORÈME VI. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Soit* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *une suite croissante d'indices principaux telle que* $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ *et pour laquelle l'une des deux conditions suivantes est remplie :*

$$(48)\qquad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k+m}}{d_{n_k}}\right| \leqq e^{-\delta m} \quad pour\ m \geqq m_0, \qquad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k-m}}{d_{n_k}}\right| \leqq e^{-\delta m} \quad pour\ m \geqq m_0,$$

où $\delta > 0$. *Dans ces conditions, l'axe imaginaire est une coupure pour* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par impossible, que $f(s)$ soit prolongeable à l'extérieur du demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$ et que la première condition (48), par exemple, soit satisfaite. Posons $g_{n_k}(s)=\dfrac{f(s)-f_{n_k}(s)}{d_{n_k}e^{-\lambda_{n_k}s}}$ $\left[\text{où, comme toujours, } f_n(s)=\sum_0^n d_\nu e^{-\lambda_\nu s}\right]$ et appliquons le théorème IV à la famille de fonctions $\{g_{n_k}(s)\}$ qui est normale dans chaque domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$, et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $\{n'_k\}$ une suite partielle de $\{n_k\}$ telle que l'on ait $\lim_{k=\infty} g_{n'_k}(s)=g(s)$ pour $s\in\mathcal{D}$ et telle que les relations (40) et (40') soient vérifiées. D'après le théorème (IV), $g(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$ et y possède le développement

$$(49)\qquad g(s)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s},$$

où

$$\mu_m=\lim_{k=\infty}(\lambda_{n'_k+m}-\lambda_{n'_k}) \qquad \text{et} \qquad a_m=\lim_{k=\infty}\frac{d_{n'_k+m}}{d_{n'_k}}.$$

De plus, d'après le même théorème, l'abscisse de convergence de $g(s)$ est égale à zéro, et donc

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\log |a_m|}{\mu_m} = 0.$$

Mais, d'après les relations données plus haut pour μ_m et a_m et d'après la première condition (48), on trouve $\mu_m \leqq m\mathrm{H}$ et $|a_m| \leqq e^{-\delta m}$ pour $m \geqq m_0$, où H est la constante positive dont il a été question dans (1). Les dernières inégalités nous donnent

$$\overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\log |a_m|}{\mu_m} \leqq -\frac{\delta}{\mathrm{H}} < 0.$$

Ce qui nous mène à une contradiction et démontre le théorème.

Nous allons généraliser le dernier théorème en remplaçant les conditions (48) par des conditions plus générales. Mais énonçons d'abord quelques lemmes et un théorème dont nous nous servirons dans la démonstration du théorème plus général.

6. Le lemme suivant est dû à M. N. Levinson [1].

LEMME VI. — *Soit* $\mathrm{F}(z)$ *une fonction entière qui satisfait aux conditions suivantes :*

$$(50) \qquad \overline{\lim_{\mathrm{R}=\infty}} \frac{\log \mathrm{M}(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} \leqq k < \infty, \quad \text{où} \quad \mathrm{M}(\mathrm{R}) = \max_{|z|=\mathrm{R}} |\mathrm{F}(z)|;$$

$$(50') \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |\mathrm{F}(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

Soit $\{\lambda_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ *une suite croissante de nombres positifs telle que l'on ait*

$$(51) \qquad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq h > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \mathrm{D}.$$

Supposons que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$(52) \qquad \pi \mathrm{D} > k,$$

$$(53) \qquad \mathrm{F}(\lambda_n) = \mathrm{O}(e^{-\theta(\lambda_n)}) \quad (n \to \infty),$$

où $\theta(x)$ est une fonction croissante telle que

$$(53') \qquad \int_1^{\infty} \frac{\theta(x)}{x^2} dx = \infty.$$

Alors la fonction $\mathrm{F}(z)$ est identiquement nulle.

LEMME VII. — *Soit* $\{\lambda_n\}$ $(n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ *une suite croissante de nombres réels, telle que* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq h > 0$ et $|\lambda_n - n| \leqq \alpha < \infty$ *pour* $-\infty < n < \infty$.

---

[1] N. LEVINSON, *Gap and density theorems* (*Amer. Math. Soc. Publ.*, vol. XXVI, 1940, p. 19).

Posons

(54) $$G(z) = (z - \lambda_0) \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\lambda_{-n}}\right).$$

$G(z)$ *est donc une fonction entière qui satisfait aux deux inégalités suivantes :*

(55) $$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log|G(re^{i\varphi})|}{r} \leqq \pi|\sin\varphi|,$$

(55′) $$|G'(x)| \leqq C(|x|+1)^{4\alpha} \qquad \text{pour} \quad -\infty < x < \infty,$$

C *étant une constante positive.*

Pour démontrer (55) et (55′) nous nous servirons d'un autre résultat dû aussi à M. N. Levinson (¹), qui a démontré que dans les conditions du lemme, on a

(56) $$|G(z)| = |G(x+iy)| < C_1(|z|+1)^{4\alpha}e^{\pi|y|},$$

où C_1 est une constante.

Or, l'inégalité (55) est une conséquence immédiate de (56). Si l'on tient compte de l'inégalité de Cauchy, on peut écrire pour $-\infty < x < \infty$: $|G'(x)| \leqq \max_{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi} |G(x+e^{i\varphi})|$. On tire aisément de cette inégalité et de (56) la relation énoncée (55′).

7. Théorème VII. — *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans un domaine T_0 composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et du segment de l'axe imaginaire $|t - t_0| < d$ où $-\infty < t < \infty$, $d > 0$.*

Supposons que $f(s)$ possède les développements suivants :

(57) $$\begin{cases} f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-\lambda_n s} & \textit{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ f(s) = \sum_{n=0}^\infty a_{-n} e^{\lambda_{-n} s} & \textit{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0; \end{cases}$$

où $\lambda_1 \geqq h > 0$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq h$, $(n = 1, 2, \ldots)$; $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_{-n-1} - \lambda_{-n} \geqq h$, $(n = 0, 1, \ldots)$; les a_n vérifient les relations

(58) $$|a_{-n}| \leqq C \quad \textit{pour } n = 0, 1, \ldots, \qquad |a_n| \leqq e^{-\theta(\lambda_n)} \quad \textit{pour } n = 1, 2, \ldots,$$

C étant une constante positive et $\theta(x)$ étant une fonction croissante telle que

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^2} dx = \infty.$$

Dans ces conditions $f(s)$ est identiquement nulle (et donc $a_n = 0$ pour $-\infty < n < \infty$).

(¹) *Loc. cit.*, p. 56.

Remarquons que dans le cas où les λ_n sont des entiers, le théorème est un cas particulier d'un théorème plus général démontré par Mlle M. L. Cartwright (1).

Démonstration. — Sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'on ait $t_0 = 0$ et

$$|\lambda_{\pm n} - n| < 1 \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{59}$$

Car on peut toujours se ramener à ce cas en ajoutant dans (57) des termes $a_n e^{-\lambda_n s}$ avec $a_n = 0$ et en faisant un changement de variable $s = cs' + it_0$, $c > 0$.

Avec V. Bernstein (2), faisons correspondre à $f(s)$ la fonction $J^+(z)$ définie par

$$J^+(z) = \int_a^b f(s)\, e^{sz}\, ds + \int_b^{\infty[\arg(s-b)=\alpha]} f(s)\, e^{sz}\, ds = J_1^+(z) + J_0^+(z), \tag{60}$$

où $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, a et b sont deux nombres réels tels que l'on ait $a \leqq b$, $-b < d|\cot g\alpha|$. Il est évident que la première intégrale $J_1^+(z)$ définit une fonction entière de z. Pour la seconde intégrale de (60), $J_0^+(z)$, posons $z = \rho e^{i\varphi}$, $s = b + ue^{i\alpha}$. On voit aisément, d'après les hypothèses faites sur les nombres a et b, que la partie du rayon d'intégration $s = b + ue^{i\alpha}$, $0 \leqq u < \infty$ qui se trouve dans le demi-plan $\mathcal{R}(s) \leqq 0$ est toute entière contenue dans la bande $|t| \leqq d$. Pour s variant sur le rayon considéré plus haut, on a

$$|e^{sz}| = e^{\rho b \cos\varphi}\, e^{u\rho\cos(\alpha+\varphi)}. \tag{61}$$

On tire aisément de cette égalité que la seconde intégrale de (60), $J_0^+(z)$, représente une fonction holomorphe de z dans le demi-plan

$$\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z = \varphi < \frac{3\pi}{2} - \alpha.$$

Or, comme il est facile de le voir, en gardant le nombre a fixe et en faisant varier les nombres b et α de manière que les autres conditions soient satisfaites, on obtient le prolongement analytique de $J^+(z)$ dans le domaine $0 < \arg z < 2\pi$. Pour étudier le comportement de $J^+(z)$ sur l'axe positif, choisissons dans (60) : $b = b_0 > 0$. En remplaçant $f(s)$, dans la seconde intégrale (60), par la première série (57), on voit que pour z tel que $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \alpha$, on peut effectuer l'intégration de $J_0^+(z)$ terme à terme et l'on obtient

$$J_0^+(z) = \int_{b_0}^{\infty[\arg(s-b_0)=\alpha]} f(s)\, e^{sz}\, ds = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{(z-\lambda_n)b_0}}{z-\lambda_n} = -e^{b_0 z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{-\lambda_n b_0}}{z-\lambda_n}. \tag{62}$$

---

(1) M. L. Cartwright, *Some Uniqeness Theorems, Proceedings of the London Math. Soc.*, Vol. 41, 1936, p. 35, Theorem III.

(2) V. Bernstein, *loc. cit.*, p. 111.

La série à droite nous donne le prolongement analytique de $J_0^+(z)$ dans tout le plan. On tire donc, de (60) et (62) que $J^+(z)$ est une fonction méromorphe avec des pôles simples aux points $z=\lambda_n (n=1, 2, \ldots)$ et dont les résidus sont égaux à $-a_n (n=1, 2, \ldots)$ respectivement.

D'une manière analogue, posons

$$(63) \qquad J^-(z)=\int_a^b f(s)\,e^{sz}\,ds+\int_b^{\infty[\arg(s-b)=\alpha]} f(s)\,e^{sz}\,ds=J_1^-(z)+J_0^-(z),$$

où $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, $-\infty<b\leqq a<\infty$ et $b<d|\operatorname{cotg}\alpha|$. Comme dans le cas précédent, on démontre que (63) représente une fonction holomorphe $J^-(z)$ dans le demi-plan $\frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\alpha$. En gardant le nombre a fixe et en faisant varier les nombres b et α de manière que les autres conditions soient satisfaites, on obtient le prolongement analytique de $J^-(z)$ dans le domaine $|\arg z|<\pi$. En prenant $b=b_0<0$, en remplaçant $f(s)$ dans la seconde intégrale (63) par la seconde série (57) et en intégrant $J_0^-(z)$ terme à terme $\left(\text{pour } z \text{ tel que } \frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, on obtient

$$(64) \qquad J_0^+(z)=\int_{b_0}^{\infty[\arg(s-b_0)=\alpha]} f(s)\,e^{sz}\,ds=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}e^{(z+\lambda_{-n})b_0}}{z+\lambda_{-n}}=-e^{b_0 z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}e^{\lambda_{-n}b_0}}{z+\lambda_{-n}}.$$

On conclut, d'après (63) et (64), que $J^-(z)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan avec des pôles simples aux points $z=-\lambda_{-n} (n=0, 1, \ldots)$, et dont les résidus sont égaux à $-a_{-n} (n=0, 1, \ldots)$ respectivement.

Posons maintenant

$$(65) \qquad J(z)=\int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\alpha]} f(s)\,e^{sz}\,ds-\int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\beta]} f(s)\,e^{sz}\,ds=J^+(z)-J^-(z),$$

où $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{3\pi}{2}$, $\beta\neq\alpha+\pi$ et a est un nombre réel tel que

$-d|\operatorname{cotg}\beta|<a<d|\operatorname{cotg}\alpha|$.

On voit aisément, d'après ce qui précède, que les intégrales (65) représentent une fonction holomorphe de z dans le secteur commun aux deux demi-plans

$$P_\alpha:\ \frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\alpha \qquad \text{et} \qquad P_\beta:\ \frac{\pi}{2}-\beta<\arg z<\frac{3\pi}{2}-\beta.$$

De plus, la fonction $J(z)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan avec des pôles simples aux points $z=\varepsilon_n\lambda_n$, $-\infty<n<+\infty$, où $\varepsilon_n=1$ pour $n=1, 2, \ldots$ et $\varepsilon_n=-1$ pour $n=0, -1, \ldots$, et dont les résidus sont égaux à $-\varepsilon_n a_n$ respectivement. Posons

$$(66) \qquad \delta(z)=\min|z-\varepsilon_n\lambda_n| \qquad \text{pour } -\infty<n<\infty.$$

Les relations (60), (62), (63), (64) et (65) nous montrent qu'il existe un nombre positif $0 < \Omega < \infty$ et une constante positive K tels que

$$|J(z)| \leqq K\left(1 + \frac{1}{\delta(z)}\right) e^{\Omega|z|}. \tag{67}$$

Nous allons maintenant étudier la croissance de $J(z)$ dans une direction déterminée de manière plus précise. Pour cela remarquons que si l'on fait varier les nombres α, β et a dans (65), les autres conditions étant satisfaites, on obtient le prolongement analytique de la même fonction $J(z)$ dans le secteur commun aux deux demi-plans P_α et P_β.

Soient φ, ε et d' trois nombres positifs tels que $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varepsilon < \varphi$ et $0 < d' < d$. Choisissons dans (65)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi + \varepsilon, \qquad \beta = \pi - \varphi + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad a = d' \operatorname{cotg} \alpha. \tag{68}$$

On voit aisément que les conditions de (65) sont satisfaites et que cette formule représente la fonction $J(z)$ dans le secteur $\varphi - \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} + \varphi - \varepsilon$. Pour la première intégrale $J^+(z)$ de (65) posons $s = -a + ue^{i\alpha}$, $0 \leqq u < \infty$, pour la seconde $s = -a + ue^{i\beta}$, $0 \leqq u < \infty$. Les relations (61) (où l'on pose $b = -a$), (65) et (68) nous donnent pour $z = \rho e^{i\varphi}$ l'inégalité suivante :

$$|J(\rho e^{i\varphi})| \leqq K_1 e^{-\rho a \cos\varphi} = K_1 e^{-\rho d' \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon) \cos\varphi},$$

où K_1 est une constante. Nous avons donc

$$\overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log|J(\rho e^{i\varphi})|}{\rho} \leqq -d' \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon) \cos\varphi.$$

En faisant tendre dans la dernière inégalité $\varepsilon \downarrow 0$ et $d' \uparrow d$, on obtient

$$\overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log|J(\rho e^{i\varphi})|}{\rho} \leqq -d|\sin\varphi| \qquad \text{pour} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{69}$$

D'une manière analogue, on démontre (69) pour chaque $-\pi < \varphi < \pi$ tel que $\varphi \not\equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{\pi}{2}\right)$. Or, la fonction $J(z)$ étant holomorphe dans les deux demi-plans $\mathcal{I}(z) > 0$ et $\mathcal{I}(z) < 0$, où elle satisfait à l'inégalité (67), on conclut, d'après un théorème connu de Phragmén-Lindelöf, que l'on a (69) même pour $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Enfin, étudions la croissance de $J(z)$ sur l'axe réel. Nous allons démontrer que pour x réel on a

$$|J(x)| \leqq \frac{K_2}{\delta(x)}, \tag{70}$$

où la fonction $\delta(x)$ est définie par (66), K_2 étant une constante positive.

Il suffit de démontrer (70) pour $|x| \geqq x_0$. Pour fixer les idées, supposons que x soit positif. Dans la définition de $J(z)$, (65), prenons $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < a < d \cot g \alpha$ et $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$, $\beta \neq \alpha + \pi$. On a $J(z) = J^+(z) - J^-(z)$ où les fonction $J^+(z)$ et $J^-(z)$ sont définies (dans un certain secteur) par les intégrales correspondantes de (65). Or, d'après (64), on a

$$J^-(z) = -e^{-az} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n} e^{-a\lambda_{-n}}}{z + \lambda_{-n}}.$$

On obtient donc, pour x positif,

$$(71) \qquad J^-(x) = O(e^{-ax}) = o(1) \qquad \text{pour} \quad x \to \infty.$$

Posons

$$f_n(s) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}.$$

Dans le demi-plan $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \alpha$ on peut écrire

$$(72) \quad J^+(z) = \int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\alpha]} f(s)\, e^{sz}\, ds = \int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\alpha]} f_n(s)\, e^{sz}\, ds$$
$$+ \int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\alpha]} [f(s) - f_n(s)]\, e^{sz}\, ds = I_n(z) + I_n^\star(z).$$

En intégrant la première intégrale terme à terme, on obtient

$$(73) \qquad I_n(z) = \int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\alpha]} f_n(s)\, e^{sz}\, ds = -\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{z - \lambda_\nu} e^{-(z-\lambda_\nu)a}.$$

Remarquons maintenant que pour s appartenant au secteur $|\arg(s+a)| \leqq \alpha$, on a l'inégalité suivante :

$$(74) \qquad |f(s) - f_n(s)| \leqq K_3\, e^{-\lambda_n \sigma} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où K_3 est une constante. On obtient ceci en appliquant le théorème I (avec une légère modification) à la fonction $f(s)$ et en tenant compte du fait que la suite $\{a_n\}$ est bornée par une constante positive A pour $n = 1, 2, \ldots$.

Or, d'après (74), on voit aisément que la seconde intégrale (72) qui représente la fonction $I_n^\star(z)$ dans le demi-plan P_α

$$\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \alpha,$$

converge aussi vers une fonction holomorphe de z dans le domaine Δ_n : $x < \lambda_n$, $y > -(\cot g \alpha)(\lambda_n - x)$. Comme les deux domaines P_α et Δ_n possèdent une partie commune, on obtient ainsi le prolongement analytique de $I_n^\star(z)$

dans le domaine Δ_n. En particulier la fonction $I_n^*(z)$ est holomorphe sur le demi-axe réel $x < \lambda_n$ et y est donnée par

$$(75)\qquad I_n^*(x) = \int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\alpha]} [f(s) - f_n(s)]\, e^{sx}\, ds.$$

Soit maintenant x un nombre positif tel que $x \neq \lambda_n (n = 1, 2, \ldots,)$, $x > \lambda_1$ et déterminons le nombre $n = n(x)$ par l'inégalité $\lambda_{n-1} < x < \lambda_n$, $n \geqq 2$.

En tenant compte de (73) nous pouvons écrire

$$(76)\qquad |I_n(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{|a_\nu|}{x-\lambda_\nu} e^{-(x-\lambda_\nu)a} + \left(\frac{|a_{n-1}|}{x-\lambda_{n-1}} e^{-(x-\lambda_{n-1})a} + \frac{|a_n|}{\lambda_n - x} e^{-(x-\lambda_n)a} \right).$$

En utilisant les inégalités

$$|a_\nu| \leqq A \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

et

$$x - \lambda_\nu \geqq \lambda_{n-1} - \lambda_\nu \geqq (n-1-\nu)h \qquad \text{pour} \quad \nu = 1, \ldots, n-2,$$

on obtient pour la première somme

$$(77)\qquad \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{|a_\nu|}{x-\lambda_\nu} e^{-(x-\lambda_\nu)a} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A}{mh} e^{-mha} = K_4.$$

Les deux derniers termes de (76) sont plus petits que $\frac{K_5}{\delta(x)}$. On arrive donc à l'inégalité

$$(78)\qquad |I_n(x)| \leqq \frac{K_6}{\delta(x)} \qquad \text{pour} \quad x > \lambda_1.$$

Pour $I_n^*(x)$ on obtient, en tenant compte de (74) et (75),

$$(79)\qquad \begin{aligned} |I_n^*(x)| \leqq K_3 \int_{-a}^{\infty[\arg(s+a)=\alpha]} e^{(x-\lambda_n)\sigma} |ds| &= \frac{K_3}{\cos\alpha} \int_{-a}^{\infty} e^{(x-\lambda_n)\sigma} d\sigma \\ &= \frac{K_3\, e^{-(x-\lambda_n)a}}{(\cos\alpha)(\lambda_n - x)} \leqq \frac{K_n}{\delta(x)}. \end{aligned}$$

(65), (71), (72), (78) et (79) nous donnent l'inégalité (70) énoncée pour $x \geqq \lambda_1$. La démonstration de cette inégalité pour x négatif est faite d'une manière analogue.

Posons maintenant

$$(80)\qquad G(z) = (z + \lambda_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \left(1 + \frac{z}{\lambda_{-n}}\right).$$

La fonction $G(z)$ ainsi définie est une fonction entière qui satisfait aux conditions du lemme VII pour $\alpha = 1$. Posons ensuite

$$(81)\qquad H(z) = G(z)\, J(z),$$

où $J(z)$ est la fonction méromorphe définie par (65).

D'après ce qui précède, $H(z)$ est une fonction entière satisfaisant à la relation

$$(82)\qquad H(\lambda_n) = -\varepsilon_n G'(\lambda_n) a_n \quad \text{pour} \quad -\infty < n < \infty, \qquad (\varepsilon_n = \pm 1).$$

Les relations (55) et (67) nous permettent de constater que $H(z)$ est d'ordre 1 et de type moyen. Des inégalités (56) du lemme VII pour $\alpha = 1$ (70) et (81), nous tirons

$$(83)\qquad |H(x)| = O(x^4) \quad \text{pour} \quad |x| \to \infty.$$

Or, (55′) et la seconde condition (58) nous donnent

$$(A)\qquad \underline{\lim}_{n=\infty} |(H\lambda_n)| = 0.$$

En appliquant le théorème de M. Hadamard sur la factorisation des fonctions entières d'ordre fini, à la fonction $H(z)$, et en utilisant les relations (A), (83) et le fait que $H(z)$ est d'ordre 1, on conclut que $H(z)$ possède une infinité de zéros. Soient $z_i (i = 1, 2, 3, 4)$ quatre zéros distincts de $H(z)$. Posons

$$(84)\qquad F(z) = \frac{H(z)}{\prod_{i=1}^{4}(z - z_i)}.$$

La fonction entière $F(z)$ satisfait aux conditions du lemme VI. En effet, on voit aisément que $F(z)$ est d'ordre 1 et de type moyen. D'après (55), (69), (81) et (84) on a

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{\rho=\infty}} \frac{\log |F(\rho e^{i\varphi})|}{\rho} \leqq (\pi - d)|\sin\varphi| \qquad \text{pour} \quad 0 < |\varphi| < \pi.$$

Or, l'indicatrice de croissance $h(\varphi)$ est une fonction continue de φ, la dernière inégalité est valable aussi pour $\varphi = 0, \pi$. Donc, les conditions (50), (51) et (52) du lemme VI sont satisfaites avec $k = \pi - d$, $D = 1$. D'après (83) et (84), on voit que $F(z)$ est bornée sur l'axe réel et donc que la condition (50′) est satisfaite. Enfin, en tenant compte de (55′), (58), (82) et (84) on obtient

$$F(\lambda_n) = O(e^{-\theta(\lambda_n)}) \qquad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

où $\theta(x)$ est la fonction croissante dont il a été question dans (58).

Donc les dernières conditions (53) et (53′) du lemme VI sont satisfaites et l'on conclut que $F(z) \equiv H(z) \equiv 0$. D'après (82), on obtient $a_n = 0$ pour $-\infty < n < \infty$, $f(s) \equiv 0$. Ce qui démontre le théorème.

8. Nous utilisons le dernier théorème pour démontrer la généralisation suivante du théorème VI.

Théorème VIII. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Soit* $\{n_k\} (k = 1, 2, \ldots)$ *une suite croissante d'indices principaux telle que*

$\lim\limits_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ *et telle que l'une des deux conditions suivantes soit remplie*

$$(85)\quad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k+m}}{d_{n_k}}\right|\leqq e^{-\theta\, m}\quad (m=1, 2, \ldots); \qquad \overline{\lim_{k=\infty}}\left|\frac{d_{n_k-m}}{d_{n_k}}\right|\leqq e^{-\theta\, m}\quad (m=1, 2, \ldots),$$

où $\theta(m)$ *est une suite croissante satisfaisant à* $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\theta(m)}{m^2}=\infty$. *L'axe imaginaire est alors une coupure pour* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par impossible, que $f(s)$ soit holomorphe sur le segment de l'axe imaginaire $|t-t_0|<d\ (-\infty<t_0<\infty,\ d>0)$ et que la première condition (85), par exemple, soit remplie. Désignons par T_0 le domaine composé de deux demi-plans $\mathcal{R}(s)>0$, $\mathcal{R}(s)<0$ et le segment de l'axe imaginaire $|t-t_0|<d$. Posons

$$g_{n_k}(s)=\frac{f(s)-f_{n_k}(s)}{d_{n_k}e^{-\lambda_{n_k}s}}.$$

$\left[\text{où, comme toujours, } f_n(s)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}d_\nu e^{-\lambda_\nu s}\right]$ et appliquons le théorème IV à la famille de fonctions $\{g_{n_k}(s)\}$ qui est normale dans tout domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s)>0$, et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $g(s)$ une fonction quelconque, la limite d'une suite partielle de fonctions de la famille dans le domaine $\mathcal{D}$. D'après le théorème IV la fonction $g(s)$ est holomorphe dans le domaine T_0 et y possède les développements (39) suivants :

$$(39)\quad \begin{cases} g(s)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m e^{-\mu_m s} & \text{pour}\quad \mathcal{R}(s)>0,\\ g(s)=-1-\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{-m}e^{\mu_{-m}s} & \text{pour}\quad \mathcal{R}(s)<0,\end{cases}$$

où $|a_m|\leqq C$ pour $m=\pm1, \pm2, \ldots$. $\{\mu_m\}$ et $\{\mu_{-m}\}$ $(m=1, 2, \ldots)$ sont deux suites croissantes de nombres positifs telles que $0<h\leqq\mu_{\pm1}\leqq H<\infty$, $h\leqq\mu_{m+1}-\mu_m\leqq H$ et $h\leqq\mu_{-m-1}-\mu_{-m}\leqq H$. De plus, les relations (40) et (40′) sont satisfaites. Or, en tenant compte de (40′) et (85) on obtient l'inégalité $|a_m|\leqq e^{-\theta(m)}$, $\{\theta(m)\}(m=1, 2, \ldots)$ étant la suite croissante introduite dans l'énoncé de notre théorème. Il est donc évident que la fonction $f(s)$ satisfait aux conditions du théorème VII et l'on tire $g(s)\equiv 0$. Mais, d'après (39), on a $\lim\limits_{\sigma=-\infty}g(\sigma)=-1$. Ce qui nous mène à une contradiction et démontre le théorème.

9. Le dernier théorème peut être encore amélioré pour une classe assez vaste de séries de Taylor. Pour cela nous nous servirons du lemme suivant qu'on démontre aisément.

LEMME VIII. — *Soit* $f(z)=\sum_{0}^{\infty} d_n z^n$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1. *Supposons que dans le secteur* $S_\alpha : |z|<1, |\arg z| \leqq \alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, *la fonction* $f(z)$ *soit bornée* $|f(z)| \leqq M$. *Dans ces conditions, on peut décomposer* $f(z)$ *en somme de deux fonctions*

$$f(z)=g(z)+h(z), \tag{86}$$

où $g(z)$ *et* $h(z)$ *sont des fonctions holomorphes dans le cercle* $|z|<1$, *où* $g(z)$ *est holomorphe sur l'arc du cercle unité* $|\arg z|<\alpha$ *et* $h(z)$ *est holomorphe sur l'arc du cercle unité* $\alpha<|\arg z| \leqq \pi$. *De plus, posons pour* $|z|<1$, $h(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$, *on a*

$$\sum_{0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \tag{87}$$

et en particulier $\lim c_n = 0$.

10. THÉORÈME IX. — *Soit* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1. *Soit* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots,)$ *une suite croissante d'indices principaux telle que* $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$ *et pour laquelle l'une des deux conditions* (85) *du théorème VIII soit satisfaite. Supposons de plus que l'on ait* $\overline{\lim_{k=\infty}} |d_{n_k}| > 0$. *Dans ces conditions* $f(z)$ *n'est pas bornée dans aucun secteur du cercle unité.*

Démonstration. — Nous démontrons le théorème par contradiction. Sans restreindre la généralité on peut supposer (par l'impossible) que dans un secteur $S_\alpha : |\arg z| \leqq \alpha$ avec $0<\alpha<\pi$ on ait $|f(z)| \leqq M$. D'après le lemme VIII on peut écrire $f(z)=g(z)+h(z)$, où $g(z)$ est holomorphe dans $|z|<1$ et sur l'arc du cercle unité $|\arg z|<\alpha$; $h(z)=\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$ pour $|z|<1$ avec $\lim c_n = 0$. Pour $g(z)$ on obtient

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} (d_n - c_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Soit $\{n'_k\}$ une suite partielle de $\{n_k\}$ telle que l'on ait $\underline{\lim_{k=\infty}} |d_{n'_k}| > 0$. Or, on démontre aisément que la suite $\{n'_k\}$ est une suite d'indices principaux pour la fonction $g(z)$. De plus, d'après nos hypothèses et d'après $\lim c_n = 0$, on conclut que l'une des conditions (85) est satisfaite pour $g(z)$ (où l'on pose $n_k = n'_k$). Donc $g(z)$ satisfait aux conditions du théorème VIII et l'on peut affirmer que le cercle unité est une coupure pour $g(z)$. Mais cela nous donne une contradiction [la fonction $g(z)$ est holomorphe sur l'arc du cercle unité $|\arg z|<\alpha$], et démontre le théorème.

Comme un cas particulier on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME IX'. — *Soit* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1 *et qui satisfait aux conditions suivantes :*

a. $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$.

b. $\overline{\lim_{k=0}}\,|a_{n_k}|>0$.

Dans ce cas la fonction $f(z)$ *n'est bornée dans aucun secteur du cercle unité.*

11. Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à 1. D'après M. Hadamard on définit l'ordre ω de $f(z)$ sur le cercle unité par

$$\omega=\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{\log|a_n|}{\log n}+1. \tag{88}$$

De même, M. Hadamard a défini l'ordre $\omega_{\overline{C}}$ de $f(z)$ sur un arc fermé $\overline{C}$ du cercle unité. Sans entrer dans les détails de la définition mentionnons quelques propriétés de l'ordre $\omega_{\overline{C}}$ ainsi défini.

α. Si l'arc fermé $\overline{C}_1$ est contenu dans $\overline{C}$ on a $\omega_{\overline{C}_1}\leqq\omega_{\overline{C}}$.

En particulier, on a toujours $\omega_{\overline{C}}\leqq\omega$, où ω est l'ordre de $f(z)$ sur tout le cercle unité.

β. Si $f(z)$ est holomorphe sur $\overline{C}$, on a $\omega_{\overline{C}}=-\infty$.

Enfin, on a le lemme suivant (1) :

LEMME H. — *Soit* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, *la série de Taylor d'ordre* $\omega_{\overline{C}}$ *sur un arc fermé* $\overline{C}$ *du cercle unité introduite plus haut. Étant donné* $\varepsilon>0$, *on peut décomposer* $f(z)$ *en une somme* $f(z)=g(z)+h(z)$, *où* $g(z)$ *et* $h(z)$ *sont holomorphes dans* $|z|<1$, $g(z)$ *étant holomorphe sur l'arc ouvert* C *du cercle unité, tandis que l'ordre* ω_1, *de* $h(z)$ *sur tout le cercle unité satisfait à* $\omega_1\leqq\omega_{\overline{C}}+\varepsilon$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Soit* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence est égal à* 1 *et telle qu'on ait* $d_n=0$ *pour* $n=0, 1, \ldots,$ *sauf pour* $n=n_k$, *où* $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ *est une suite croissante d'entiers non négatifs avec* $\lim_{k=\infty}(n_{k+1}-n_k)=\infty$. *Soit* ω *et* $\omega_{\overline{C}}$ *l'ordre de* $f(z)$ *sur tout le cercle unité et sur un*

---

(1) *Voir*, par exemple, S. MANDELBROJT, *Modern Researches on the Singularities of functions defined by Taylor's Series* (*The Rice Institute Pamphlet*, vol. 14, 1927, p. 303).

arc fermé $\overline{C}$ *du cercle unité. Dans ces conditions, pour tout arc fermé* $\overline{C}$ *du cercle unité, on a*

$$\omega_{\overline{C}} = \omega = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|d_n|}{\log n} + 1.$$

Remarquons que dans le cas où la suite $\{n_k\}$ satisfait en outre à la restriction $n_{k+1} - n_k > A\sqrt{n_k \log n_k}$, ce théorème a déjà été énoncé et démontré par Fabry (1).

Démonstration. — Dans le cas $\omega = -\infty$ le théorème est évident d'après $-\infty \leqq \omega_{\overline{C}} \leqq \omega = -\infty$. Prenons le cas $-\infty < \omega \leqq \infty$. Supposons, par l'impossible, qu'il existe un arc C du cercle unitaire pour lequel on ait $\omega_{\overline{C}} < \omega \leqq \infty$. Soit ω' un nombre réel tel que $\omega_{\overline{C}} < \omega' < \omega$. D'après le lemme H on peut écrire

$$f(z) = g(z) + h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{pour} \quad |z| < 1,$$

où $g(z)$ et $h(z)$ sont holomorphes dans le cercle $|z| < 1$, où $g(z)$ est holomorphe sur l'arc ouvert C, et où l'ordre ω_1 de $h(z)$ sur tout le cercle unité satisfait à l'inégalité $\omega_1 \leqq \omega'$. Donc, on a $d_n = b_n + c_n$ pour $n = 0, 1, \ldots$ et d'après les hypothèses faites sur les d_n on trouve

$$b_n = -c_n \qquad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots, n \neq n_k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{89}$$

De plus, d'après la définition (88), il vient

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|d_n|}{\log n} = \omega - 1, \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|c_n|}{\log n} \leqq \omega' - 1. \tag{90}$$

Puisque $d_n = b_n + c_n$, $\omega' < \omega$, on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|b_n|}{\log n} = \omega - 1. \tag{91}$$

Or, en utilisant (91), on démontre aisément qu'il existe une suite infinie de coefficients principaux $\{b_{n'}\}(k = 1, 2, \ldots)$ de la fonction $g(s)$ satisfaisant à la condition

$$\lim_{k=\infty} \frac{\log|b_{n'_k}|}{\log n'_k} = \omega - 1. \tag{92}$$

L'égalité (89) et la seconde inégalité (90) nous permettent de conclure que la suite $\{n'_k\}$ pour $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$ fait partie de la suite $\{n_k\}$. D'après (89), $b_{n'_k+m} = -c_{n'_k+m}$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et $k \geqq k_0(m)$. Ce dernier résultat, la seconde inégalité (90) et (92) nous donnent

$$\lim_{k=\infty} \frac{b_{n'_k+m}}{b_{n'_k}} = 0 \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots.$$

(1) E. Fabry, *Ordre des points singuliers d'une série de Taylor* (*Comptes rendus*, t. 151, 1910, p. 922).

On voit que les conditions du théorème VI sont satisfaites pour la fonction $g(z)$, pour la suite d'indices principaux $\{n'_k\}$ et pour le nombre positif $\delta = \infty$. On conclut que le cercle unité est une coupure pour $g(z)$. Mais, comme $g(z)$ est holomorphe sur l'arc ouvert C, cela nous mène à une contradiction et démontre le théorème.

12. Le théorème suivant donne un critère général pour que le point $s = 0$ soit un point singulier pour la série de Dirichlet (1). Ce critère présente des aspects analogues à ceux du critère donné par Fabry pour les séries de Taylor ([1]), bien que aucun de ces deux critères ne contienne l'autre.

THÉORÈME XI. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Supposons qu'il existe deux suites croissantes d'entiers positifs* $l_k \uparrow \infty$ *et* $m_k \uparrow \infty$ *telles que* $l_k < m_k < l_{k+1}$ *pour* $k = 1, 2, \ldots$ *que* $\lim (m_k - l_k) = \infty$ *et que les conditions suivantes soient satisfaites :*

a. Il existe une suite d'indices principaux $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *avec* $l_k \leqq n_k \leqq m_k$.

b. Il existe un angle $|\arg z| \leqq \gamma$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, *et une suite de nombres complexes* $\{e^{-i\alpha_k}\}$, $-\infty < \alpha_k < \infty$, *telle que les nombres* $d_n e^{-i\alpha_k}$ *pour* $l_k \leqq n \leqq m_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *soient tous compris dans cet angle.*

Le point $s = 0$ *est alors un point singulier de* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par l'impossible, que $s = 0$ soit un point régulier de $f(s)$. Soit $\{k_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ une suite partielle de $\{k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ pour laquelle l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

α. $\lim_{i=\infty} (m_{k_i} - n_{k_i}) = \infty$.

β. $\lim_{i=\infty} (n_{k_i} - l_{k_i}) = \infty$.

Pour simplifier les choses supposons qu'on puisse prendre comme suite $\{k_i\}$ la suite $\{k\}$ elle-même, et que l'on ait α. Soit $\mathcal{D}$ un domaine simplement connexe contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$, le point $s = 0$ et où $f(s)$ est holomorphe. Posons

$$g_{n_k}(s) = \frac{f(s) - f_{n_k}(s)}{d_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}} \qquad \text{où} \quad f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s},$$

et appliquons le théorème IV à la famille $\{g_{n_k}(s)\}$, qui est holomorphe et normale dans $\mathcal{D}$. Soit $g(s)$ une fonction quelconque limite d'une suite partielle de

([1]) E. FABRY, *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux* (*Ann. Sci. de l'École Normale Sup.*, t. 13, 1896, p. 375).

fonctions de la famille. $g(s)$ est holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}$ et satisfait aux conditions a et b du théorème IV. En particulier, pour $\mathcal{R}(s) > 0$, $f(s)$ possède le premier développement (39)

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s},$$

où $a_m = O(1)$, $0 < h \leq \mu_m \uparrow \infty$, $h \leq \mu_{m+1} - \mu_m \leq H$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et où l'abscisse de convergence de cette série est égale à zéro. De plus, les a_m satisfont à la première relation (40'). C'est-à-dire, il existe une suite partielle $\{n'_k\}$ de la suite $\{n_k\}$ telle que l'on ait

$$\lim_{k=\infty} \frac{d_{n'_k+m}}{d_{n'_k}} = a_m \qquad \text{pour} \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Or, en tenant compte de cette relation, de α, de a et de b, on arrive aisément à démontrer que tous les coefficients $\{a_m\}(m = 1, 2, \ldots)$ se trouvent dans un angle $|\arg z - \arg z_0| \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$. Donc, d'après le thèorème de Vivanti-Dienes, (généralisé pour les séries de Dirichlet par Landau et Fekete), le point $s = 0$ est un point singulier pour $g(s)$. Ceci nous mène à une contradiction et démontre le théorème.

Remarquons que dans la démonstration précédente nous nous sommes servis du théorème de Vivanti-Dienes. Ce dernier théorème lui-même peut être démontré facilement en utilisant notre théorème IV. Mais nous n'insistons pas ici sur cette démonstration.

Le théorème suivant est un corollaire du théorème XI.

THÉORÈME XII. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Supposons qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs* $n_k \uparrow \infty$ *telle que* $\lim_{k=\infty}(n_{k+1} - n_k) = \infty$ *et qui satisfasse à la condition suivante :*

Il y a un angle $|\arg z| \leq \gamma$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, *et une suite de nombres complexes* $\{e^{-i\alpha_k}\}$, $-\infty < \alpha_k < \infty$, *telle que les nombres* $d_n e^{-i\alpha_k}$ *pour* $n_k \leq n < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *soient tous compris dans cet angle. Le point* $s = 0$ *est alors un point singulier de* $f(s)$.

Remarquons que le dernier théorème admet comme cas particuliers le théorème de Vivanti-Dienes et un théorème de Fabry, généralisé pour les séries de Dirichlet (1), dont voici l'énoncé :

THÉORÈME F. — *Soit* $f(s) = \sum_{0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Posons* $d_n = |d_n| e^{i\varphi_n}$. *Si* $\lim_{n=\infty} \frac{e^{i\varphi_n}}{e^{i\varphi_{n+1}}} = 1$, *le point* $s = 0$ *est un point singulier de* $f(s)$.

CHAPITRE III.

Généralisation d'un théorème de M. G. Pólya pour une classe de séries de Dirichlet (I). Largeur des « lacunes » et « densité » des points singuliers sur l'axe imaginaire des séries de Dirichlet (I).

1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite croissante de nombres non négatifs tels que $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqq h > 0$. Désignons par $N(x)$ le nombre des λ_n satisfaisant à $\lambda_n < x$. D'après M. G. Pólya (¹) les deux limites suivantes existent :

$$\lim_{\xi \to 1-0} \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)-N(x\xi)}{x(1-\xi)} = D^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{\xi \to 1-0} \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)-N(x\xi)}{x(1-\xi)} = D^-.$$

Posons aussi

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)}{x} = \overline{D}, \qquad \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N(x)}{x} = \underline{D}.$$

On appelle D^+ la densité maximum de la suite $\{\lambda_n\}$, D^- la densité minimum, $\overline{D}$ la densité supérieure et $\underline{D}$ la densité inférieure de la suite $\{\lambda_n\}$.

Nous allons maintenant introduire la notion de la densité arithmétique minimum d'ensemble de nombres positifs.

Définition D. — *Soit* $E\{y\}$ *un ensemble de nombres positifs* y. *Désignons par* $n(x, R)$ $(x>0,\ R>0)$, *le nombre des nombres positifs* y *appartenant à* E *et satisfaisant à l'inégalité* $x \leqq y < x+R$. [$n(x, R)$ *peut être égal à* ∞]. *Nous définissons la densité arithmétique minimum* $\underline{\underline{D}}$ *de* $E\{y\}$ *par la relation*

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\lim_{R\to\infty}}\ \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{n(x, R)}{R}.$$

On démontre aisément que l'on a aussi $\underline{\underline{D}} = \underline{\lim} \frac{n(x, R)}{R}$ quand x et R tendent vers l'infini de toutes les manières possibles. En prenant $E\{y\} = \{\lambda_n\}$, où $\{\lambda_n\}$ est la suite considérée plus haut, on trouve que les différentes densités sont liées entre elles par l'inégalité

$$\underline{\underline{D}} \leqq D^- \leqq \underline{D} \leqq \overline{D} \leqq D^+ \leqq \frac{1}{h}. \tag{93}$$

2. Nous nous servirons du lemme suivant que l'on démontre facilement.

Lemme IX. — *Soit* $E\{y\}$ *un ensemble de nombres positifs dont la densité arithmétique minimum* $\underline{\underline{D}}$ *est finie. Étant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe deux suites de nombres positifs* $\{x_i\}$ *et* $\{R_i\}$ *telles que* $\lim_{i=\infty} x_i = \infty$ *et* $\lim_{i=\infty} R_i = \infty$ *et pour lesquelles on a*

$$\frac{n(x_i, R)}{R} < \underline{\underline{D}} + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < R \leqq R_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{94}$$

où $n(x, R)$ *est la fonction introduite dans la définition* D.

(¹) G. Pólya, *Math. Zeitschrift*, Bd 29, 1929, p. 559.

3. Citons deux théorèmes dus respectivement à M. G. Pólya et à M. S. Mandelbrojt, où interviennent les notions de densité maximum et de densité supérieure. Commençons par le théorème de M. Pólya (¹).

THÉORÈME P. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *une série de Dirichlet telle que* $0 \leqq \lambda_n \uparrow \infty$, $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqq h > 0$ *et dont l'abscisse de convergence est égale à zéro. Soit* D^+ *la densité maximum de la suite* $\{\lambda_n\}$. *Dans ce cas, chaque segment de l'axe imaginaire de longueur supérieure à* $2\pi D^+$ *contient au moins un point singulier de* $f(s)$.

Voici le théorème de M. Mandelbrojt (²).

THÉORÈME M. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet du théorème précédent. Désignons par* $\overline{D}$ *la densité supérieure de la suite* $\{\lambda_n\}$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *un nombre positif arbitraire mais fixe. Il existe une fonction non positive* $A(x, y)$ *définie et continue pour* $x > 0$, $y \geqq 0$, *avec* $A(x, 0)=0$ *telle que* $f(s)$ *possède un point singulier dans chaque demi-bande* $|t-t_0| < \pi(\overline{D}+\varepsilon)$, $\sigma \geqq A(h, \overline{D})$.

D'après l'inégalité (93), on a toujours $\overline{D} \leqq D^+$. Or, dans le cas où $\overline{D}=D^+$ le théorème P admet le théorème M comme cas particulier. En effet, on voit aisément que le théorème M est toujours satisfait. Si $\overline{D} < D^+$, il n'en est pas de même. La question se pose à savoir si l'on peut toujours remplacer la densité maximum D^+ dans le théorème P par la densité supérieure $\overline{D}$.

Le théorème suivant donne une réponse partielle à cette question. A l'aide de notre théorème IV et du théorème M, nous démontrons que, dans le cas où la suite des coefficients $\{d_n\}$ est une suite quasi-régulière, on peut remplacer D^+ dans le théorème P, même par la plus petite densité, la densité arithmétique minimum $\underline{\underline{D}}$ de la suite $\{\lambda_n\}$.

4. THÉORÈME XIII. — *Soit* $f(s)=\sum_{0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1) *dont la suite de coefficients* $\{d_n\}$ *est une suite quasi-régulière* (Déf. C, *a'*, § 7, Chap. I). *Désignons par* $\underline{\underline{D}}$ *la densité arithmétique minimum de la suite* $\{\lambda_n\}$. *Dans ce cas, chaque segment de l'axe imaginaire de longueur supérieure à* $2\pi\underline{\underline{D}}$ *contient au moins un point singulier de* $f(s)$.

Démonstration. — Supposons, par impossible, qu'il existe un segment I de l'axe imaginaire de longueur supérieure à $2\pi\underline{\underline{D}}$ dont tous les points soient des points réguliers de $f(s)$. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que I

(¹) G. PÓLYA, *Ueber die Existenz unendlich vieler singularer Punkte* (*Berl. Sitz.*, 1923).
(²) S. MANDELBROJT, *Dirichlet Series* (*The Rice Institute Pamphlet*, 31, 1944, p. 229).

est le segment $|t| < \pi(\underline{\underline{D}} + \delta)$ où $\delta > 0$. Désignons par T_0 le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et du segment I. Puisque la suite de coefficients $\{d_n\}$ est une suite quasi-régulière, il existe (Déf. C) une suite croissante d'indices principaux $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ telle que $n_{i+1} - n_i = O(1)$ $(i \to \infty)$. Soit ε un nombre positif où $0 < \varepsilon < \delta$. D'après le lemme IX, il existe deux suites de nombres positifs $\{x_k\}$ et $\{R_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, satisfaisant à $\lim\limits_{k=\infty} x_k = \infty$, $\lim\limits_{k=\infty} R_k = \infty$, et à l'inégalité

$$(94) \qquad \frac{n(x_k, R)}{R} < \underline{\underline{D}} + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < R \leqq R_k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

où, comme plus haut, on désigne par $n(x, R)$ $(x > 0, R > 0)$ le nombre de λ_n satisfaisant à $x \leqq \lambda_n < x + R$. Soit $\bar{n}_k$ le plus grand n_i tel que $\lambda_{n_i} \leqq x_k$. On a

$$(95) \qquad 0 \leqq x_k - \lambda_{\bar{n}_k} = O(1) \qquad (k \to \infty).$$

Posons

$$g_{\bar{n}_k}(s) = \frac{f(s) - f_{\bar{n}_k}(s)}{d_{\bar{n}_k} e^{-\lambda_{\bar{n}_k} s}}, \qquad \text{où} \quad f_n(s) = \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

et appliquons le théorème IV à la famille $\{g_{\bar{n}_k}(s)\}$, qui est normale dans tout domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$ et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $g(s)$ une fonction limite quelconque d'une suite partielle de fonctions de la famille dans $\mathcal{D}$. D'après le théorème IV, $g(s) + 1$ est une fonction holomorphe dans le domaine T_0 et y possède les développements suivants :

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} g(s) + 1 &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} \qquad &\text{pour} \quad \mathcal{R}(s) > 0, \\ g(s) + 1 &= -\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} \qquad &\text{pour} \quad \mathcal{R}(s) < 0, \end{aligned} \right.$$

où $|a_m| = O(1)$ pour $|m| \to \infty$, $\mu_{\pm 1} \geqq h > 0$, $h \leqq \mu_{\pm(m+1)} - \mu_{\pm m} \leqq H$ $(m = 1, 2, \ldots)$. De plus, d'après le théorème IV, il existe une suite partielle $\{n'_k\}$ de $\{n_k\}$ telle que l'on ait

$$(40) \qquad \mu_m = \lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k+m} - \lambda_{n'_k}) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Posons $N_\mu(x) = \sum\limits_{0 \leqq \mu_m < x} 1$, avec $\mu_0 = 0$; $x > 0$ étant fixe, on obtient aisément d'après (94), (95) et (40) l'inégalité

$$N_\mu(x) < n(x'_k, x + A) < (\underline{\underline{D}} + \varepsilon)(x + A), \qquad (k \geqq k_0),$$

où $\{x'_k\}$ est une suite partielle de $\{x_k\}$, A une constante positive qui ne dépend pas de x et de k, $k_0 = k(x)$ un entier positif dépendant de x. La dernière inégalité nous donne

$$\overline{D}_\mu = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{N_\mu(x)}{x} \leqq D + \varepsilon,$$

où $\overline{D}_\mu$ est la densité supérieure de la suite $\{\mu_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Appliquons le théorème M à la fonction $g(s)+1$. Mais, la conclusion du théorème M n'est pas satisfaite, $g(s)+1$ étant holomorphe dans la bande $|t| < \underline{D} + \delta$, où $\delta > \varepsilon$. Cela mène à une contradiction et démontre le théorème.

5. M. Mandelbrojt a énoncé le théorème suivant [1] :

THÉORÈME. — *Soit* $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ *une série de Taylor dont le rayon du cercle de convergence vérifie* $0 < R < \infty$. *Supposons que les seules singularités de* $f(z)$ *sur le cercle de convergence soient des pôles. Posons* $l = \overline{\lim_{k=\infty}} (n_{k+1} - n_k)$. *Il existe alors au moins* l *pôles sur le cercle de convergence.*

Ce théorème a été généralisé par plusieurs auteurs et notamment par M. Jungen [2], qui a obtenu le même résultat en supposant seulement que les singulatités sur le cercle de convergence sont du type algébrico-logarithmique (ces points singuliers doivent satisfaire à une condition supplémentaire). Or, le théorème de M. Mandelbrojt, de même que le théorème de M. Jungen et d'autres théorèmes, peut être généralisé par les séries de Dirichlet (1) (où le nombre de points singuliers sur le cercle de convergence est remplacé par la densité arithmétique minimum des points singuliers sur une demi-droite de convergence quelconque). Nous publierons ces résultats prochainement. Nous nous bornons ici à démontrer un théorème général qui a des aspects communs avec le théorème de M. Mandelbrojt cité plus haut [3]. Dans la démonstration de ce théorème, nous utilisons le lemme suivant qu'on tire aisément d'une égalité connue de Carleman (généralisée pour les fonctions méromorphes).

LEMME C. — *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe dans le domaine fermé* $\overline{\Delta}$ *défini par* $|z| \geqq \rho > 0$, $\mathfrak{J}(z) \geqq 0$. *Désignons par* $\rho_\nu e^{i\varphi_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *les pôles de* $f(z)$ *dans* $\overline{\Delta}$ *arrangés de manière que* $\rho_\nu \leqq \rho_{\nu+1} \leqq \ldots$; $\rho_\nu e^{i\varphi_\nu}$ *figure dans*

---

[1] S. MANDELBROJT, *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 40, 1923, p. 420).

[2] R. JUNGEN, *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence*. (*Commen. Math. Helvetici*, t. 3, 1931, p. 287).

[3] En vérité, les généralisations des théorèmes de Mandelbrojt et Jungen sont des cas particuliers du théorhème XIV'. Il résulte du fait que dans le cas où la série (1) ne possède que des singularités algébrico-logarithmiques sur l'axe imaginaire, la suite des coefficients est quasi-régulière.

la suite un nombre de fois égal à l'ordre de multiplicité de ce pôle. Pour R $>\rho$, *on a*

$$\sum_{\rho_\nu<\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\rho_\nu}-\frac{\rho_\nu}{\mathrm{R}^2}\right)\sin\varphi_\nu \geqq -\frac{1}{2\pi}\int_\rho^{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\log|f(x)f(-x)|\,dx$$
$$-\frac{1}{\pi\mathrm{R}}\int_0^\pi \log|f(\mathrm{R}e^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta - \mathrm{A},$$

où A *est une constante positive qui ne dépend pas de* R.

6. Théorème XIV. — *Soit* $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1) *et soit* $\{n_k\}$ *une suite infinie d'indices principaux. Posons* $l(x)=\varlimsup_{n=\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ *où n prend toutes les valeurs entières telles que* $|n-n_k|\leqq x$ $(k=1, 2, \ldots)$; $l(x)$ *est une fonction croissante satisfaisant à* $l(x)\leqq \mathrm{H}$ [*où* H *est la constante positive dont il a été question dans* (1)]. *Soit* $l=\lim_{x=\infty} l(x)$. *Désignons par* $\underline{\underline{\mathrm{D}}}(t_0, \infty)$ *et* $\underline{\underline{\mathrm{D}}}(t_0, -\infty)$ *la densité arithmétique minimum de l'ensemble des points singuliers de* $f(s)$ *sur les demi-axes imaginaires* $t_0\leqq t<\infty$ *et* $-\infty<t\leqq t_0$ *respectivement* (Déf. D, § 1, Chap. III), *on a*

$$(96)\qquad \underline{\underline{\mathrm{D}}}(t_0, \infty)\geqq\frac{l}{2\pi}\quad \text{et}\quad \underline{\underline{\mathrm{D}}}(t_0, -\infty)\geqq\frac{l}{2\pi}\quad \text{pour chaque}\quad -\infty<t_0<\infty.$$

Remarquons que si l'on désigne par $n(x, \mathrm{R})$ $(-\infty<x<\infty, \mathrm{R}>0)$ le nombre des points siuguliers de $f(s)$ sur le segment de l'axe imaginaire $x\leqq t<x+\mathrm{R}$; on voit aisément (d'après la définition D) que l'énoncé du théorème peut être mis sous la forme équivalente suivante : *Étant donné* $\varepsilon>0$, *il existe un nombre positif* $\mathrm{R}_0=\mathrm{R}_0(\varepsilon)$ *tel que l'on ait*

$$n(x, \mathrm{R})\geqq\frac{l-\varepsilon}{2\pi}\mathrm{R}\qquad \text{pour}\quad -\infty<x<\infty,\qquad \mathrm{R}\geqq\mathrm{R}_0.$$

Démonstration. — Dans le cas où l'axe imaginaire est une coupure, la démonstration est évidente. Supposons donc que l'axe imaginaire ne soit pas une coupure et désignons par T_0 le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s)>0$, $\mathcal{R}(s)<0$ et de tous les points réguliers de $f(s)$ sur l'axe imaginaire. Supposons, par impossible, que le théorème ne soit pas vrai. Il existe alors un nombre t_0, $-\infty<t_0<\infty$, pour lequel l'une des inégalités (96) n'est pas vérifiée. Pour fixer les idées, supposons que l'on ait

$$\underline{\underline{\mathrm{D}}}^0=\underline{\underline{\mathrm{D}}}(t_0, \infty)<\frac{l}{2\pi}.$$

Choisissons $\varepsilon>0$ tel que $4\varepsilon<l-2\pi\underline{\underline{\mathrm{D}}}^0$. D'après le lemme IX il existe deux suites $\{x_j\}$, $\{\mathrm{R}_j\}$ $(j=1, 2, \ldots)$ où $t_0<x_j\to\infty$, $0<\mathrm{R}_j\to\infty$ et pour lesquelles on a

$$(97)\qquad \frac{n(x_j, \mathrm{R})}{\mathrm{R}}<\frac{l-3\varepsilon}{2\pi}=\underline{\underline{\mathrm{D}}}^0+\varepsilon'\qquad \text{pour}\quad j=1, 2, \ldots, 0<\mathrm{R}\leqq\mathrm{R}_j.$$

D'après la définition de l il existe $\xi_0 > 0$ tel que $l(x) > l - \varepsilon$ pour $x \geqq \xi_0$.

La définition de $l(x)$ nous permet de voir aisément qu'on peut extraire de la suite d'indices principaux $\{n_k\}$ une suite partielle $\{\overline{n}_k\}$ satisfaisant à la propriété suivante :

Il existe une suite d'entiers positifs $\{p_k\}$ avec $|p_k - \overline{n}_k| \leqq \xi_0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et telle que

(98) $$\varliminf_{k=\infty} (\lambda_{p_k+1} - \lambda_{p_k}) \geqq l - 2\varepsilon,$$

et de plus, $p_k - \overline{n}_k$ est ou non négatif ou non positif pour $k = 1, 2, \ldots$.

Pour fixer les idées, supposons que $p_k - \overline{n}_k$ soit non négatif. Posons

$$g_{\overline{n}_k}(s) = \frac{f(s) - f_{\overline{n}_k}(s)}{d_{\overline{n}_k} e^{-\lambda_{\overline{n}_k}}}, \qquad \text{où} \quad f_n(s) = \sum_0^n d_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

et appliquons le théorème IV à la famille $\{g_{\overline{n}_k}(s)\}$ qui est normale dans tout domaine simplement connnexe $\mathcal{D}$ contenant le demi-plan $\mathcal{R}(s) > 0$ et où $f(s)$ est holomorphe. Soit $g(s)$ une fonction limite quelconque d'une suite partielle de fonctions de la famille. D'après le théorème IV, la fonction $g(s)$ est uniforme et holomorphe dans le domaine T_0 et y possède les développements suivants :

(39) $$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\mu_m s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0 \qquad \text{et} \qquad g(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} e^{\mu_{-m} s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) < 0,$$

où $\mu_{\pm 1} \geqq h > 0$, $h \leqq \mu_{\pm(m+1)} - \mu_{\pm m} \leqq H$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et $|a_m| = O(1)$ pour $|m| \to \infty$. De plus, il existe une suite partielle $\{n'_k\}$ de $\{\overline{n}_k\}$ pour laquelle on a

(40) $$\mu_m = \lim_{k=\infty} (\lambda_{n'_k+m} - \lambda_{n'_k}) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

On tire de la définition de $g(s)$, de (98) et de (40), qu'il existe un entier non négatif m_0 tel que $\mu_{m_0+1} - \mu_{m_0} \geqq l - 2\varepsilon$ (on pose $\mu_0 = 0$). Sans diminuer la généralité on peut supposer que $m_0 = 0$, et que, par conséquent,

(99) $$\mu_1 \geqq l - 2\varepsilon.$$

[Car, si ce n'est pas le cas, soit m_1 le plus grand entier positif tel que $m_1 \leqq m_0$ et $a_{m_1} \neq 0$. Si l'on pose

$$g^\star(s) = \frac{g(s) - \sum_{m=1}^{m_1} a_m e^{-\mu_m s}}{a_{m_1} e^{-\mu_{m_1} s}},$$

il est évident que $g^\star(s)$ possède des développements analogues à (40); pour $\mathcal{R}(s) > 0$ on peut écrire $g^\star(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a^\star_m e^{-\mu^\star_m s}$ où $\mu^\star_1 \geqq l - 2\varepsilon$. De plus, $g(s)$ et

$g^*(s)$ possèdent les mêmes singularités. Nous pouvons remplaçer dans notre raisonnement la fonction $g(s)$ par $g^*(s)$ qui vérifie la condition (99)].

D'après le théorème IV, les seuls points singuliers de $g(s)$ sur l'axe imaginaire sont des points singuliers de $f(s)$. Soient $\{x_j\}$, $\{R_j\}$ ($j=1, 2, \ldots$) les deux suites dont il a été question dans (97). D'après (97), tous les points singuliers de $f(s)$ sur les segments de l'axe imaginaire I_j définis par $x_j < t < x_j + R_j$ ($j=1, 2, \ldots$) sont isolés sur l'axe imaginaire. En utilisant le théorème IV *bis*, on trouve que les seuls points singuliers $i\tau$ de $g(x)$ sur les segments I_j ($j=1, 2, \ldots$) sont des pôles simples et que $i\tau$ est aussi un point singulier de $f(s)$. Posons

$$G_j(s) = g(s + ix_j) \qquad (j=1, 2, \ldots). \tag{100}$$

Soient $i\tau_1^{(j)}, i\tau_2^{(j)}, \ldots, i\tau_{m_j}^{(j)}$ les pôles simples de $G_j(s)$ sur le segment de l'axe imaginaire $0 < t < R_j$, rangés par ordre de valeur absolue. D'après (97) et (100), pour chaque $R > 0$, le nombre des pôles de $G_j(s)$, sur le segment de l'axe imaginaire $0 < t < R$, pour $j \geqq j_0(R)$, ne dépasse pas $\frac{l-3\varepsilon}{2\pi} R$. En tenant compte de cette remarque, on conclut qu'on peut extraire (par un procédé diagonal) une suite partielle de fonctions $\{G_{j_k}(s)\}$ ($k=1, 2, \ldots$) pour laquelle on a $\lim_{k=\infty} \tau_\nu^{(j_k)} = \tau_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), où $0 < \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \ldots < \infty$ $\left[\text{On obtient } \tau_1 > 0\right.$ d'après (97) et $\tau_\nu < \infty$ d'après $\left.\tau_\nu^{(j)} \leqq \frac{2\pi}{h}\nu\right]$. Désignons par $\mathcal{B}$ le domaine composé des deux demi-plans $\mathcal{R}(s) > 0$, $\mathcal{R}(s) < 0$ et du demi-axe imaginaire $t > 0$, excepté les points $i\tau_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). Soit $\bar{\Delta}$ un domaine fermé et borné quelconque contenu dans $\mathcal{B}$. En utilisant le lemme V (Chap. II, § 2), on voit aisément que la famille $\{G_{j_k}(s)\}$ est holomorphe et normale dans $\bar{\Delta}$ pour $k \geqq k_0 = k_0(\bar{\Delta})$. Soit $G(s)$ une fonction limite quelconque (dans $\mathcal{B}$) d'une suite partielle des fonctions de la famille. D'après ce qui précède, $G(s)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans $\mathcal{B}$ et y possède les développements suivants :

$$G(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e^{-\mu_m s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) > 0, \qquad G(s) = -1 - \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} e^{\mu_{-m} s} \quad \text{pour } \mathcal{R}(s) < 0, \tag{101}$$

$|\alpha_m| = |a_m|$ pour $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, les suites $\{\mu_m\}$, $\{\mu_{-m}\}$, $\{a_m\}$ et $\{a_{-m}\}$ sont celles dont il a été question dans (39). Les seuls points singuliers possibles de $G(s)$ dans le demi-plan $\mathcal{I}(s) > 0$ sont les points $i\tau_\nu$ qui ne peuvent être que des points singuliers isolés non critiques. En appliquant une fois de plus le lemme V, on conclut que les seuls points singuliers de $G(s)$ dans le demi-plan $\mathcal{I}(s) > 0$ sont des pôles simples de la forme $i\tau_\nu$. Soient $i\rho_1, i\rho_2, \ldots, i\rho_\nu, \ldots$ ces pôles rangés de manière que $0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots$. Désignons par $N(R)$, $R > 0$, le nombre de pôles $i\rho_\nu$ satisfaisant à $0 < \rho_\nu \leqq R$. D'après ce qui précède chacun de ces pôles est un point $i\tau_\nu$. La relation (97) et la définition de τ_ν nous mènent aisément à l'inégalité

$$N(R) \leqq \frac{l-3\varepsilon}{2\pi} R. \tag{102}$$

Choisissons un nombre positif b tel que $0 < b < \frac{\pi}{l-3\varepsilon}$. Il est évident d'après (102) qu'il existe une suite croissante $\{R_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, $1 < R_k \uparrow \infty$, telle que tous les segments de l'axe imaginaire $|t - R_k| \leqq b$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ne contiennent pas de points singuliers de $G(s)$.

Appliquons maintenant le lemme C du paragraphe précédent à la fonction $G(s)$, où l'on pose $\rho = 1$, $R = R_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Tous les pôles de $G(s)$ dans le demi-plan $\mathcal{I}(s) > 0$ sont simples et situés sur l'axe imaginaire, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqq \rho_\nu < R_k} \left(\frac{1}{\rho_\nu} - \frac{\rho_\nu}{R_k^2}\right) \geqq &-\frac{1}{2\pi}\int_1^{R_k} \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{R_k^2}\right)[\log|G(\sigma)| + \log|G(-\sigma)|]\,d\sigma \\ &- \frac{1}{\pi R_k}\int_0^\pi \log|G(R_k e^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta - A.\end{aligned} \tag{103}$$

En tenant compte de (102), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqq \rho_\nu < R_k} \left(\frac{1}{\rho_\nu} - \frac{\rho_\nu}{R_k^2}\right) &= \int_1^{R_k} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{R_k^2}\right) dN(u) = N(1)\left(\frac{1}{R_k^2} - 1\right) \\ &+ \int_1^{R_k} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{R_k^2}\right) N(u)\, du \leqq \frac{l-3\varepsilon}{2\pi}(\log R_k + 1).\end{aligned} \tag{104}$$

D'après (101), on a

$$|G(\sigma)| \leqq [|a_1| + o(1)]\, e^{-\mu_1\sigma} \quad \text{pour } \sigma \to \infty \qquad \text{et} \qquad |G(-\sigma)| \leqq 1 + o(1) \quad \text{pour } \sigma \to \infty.$$

De (99) on tire

$$\log|G(\sigma)| + \log|G(-\sigma)| \leqq -\mu_1\sigma + O(1) \leqq -(l-2\varepsilon)\sigma + O(1) \quad (\sigma \to \infty),$$

et donc

$$\left\{\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi}\int_1^{R_k}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{R_k^2}\right)[\log|G(\sigma)| + \log|G(-\sigma)|]\,d\sigma \geqq \frac{l-2\varepsilon}{2\pi}\log R_k - O(1) \\ (k \to \infty).\end{aligned}\right. \tag{105}$$

D'après le lemme V et la manière dont on a choisi la suite $\{R_k\}$, on trouve que $\max\limits_{0 \leqq \theta \leqq \pi} |G(R_k e^{i\theta})| = O(1)$ pour $k \to \infty$. Ceci nous donne

$$-\frac{1}{\pi R_k}\int_0^\pi \log|G(R_k e^{i\theta})| \sin\theta\, d\theta \geqq -o(1) \qquad (k \to \infty). \tag{106}$$

Enfin, des inégalités (103), (104), (105) et (106), nous tirons

$$\frac{l-3\varepsilon}{2\pi}(\log R_k + 1) \geqq \frac{l-2\varepsilon}{2\pi}\log R_k - A_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

où A_1 est une constante. En divisant la dernière inégalité par $\frac{1}{2\pi}\log R_k$ et en faisant tendre k vers l'infini, on obtient $l - 3\varepsilon \geqq l - 2\varepsilon$. Ce qui nous donne une contradiction et démontre le théorème.

Les deux théorèmes suivants sont des cas particuliers du théorème XIV.

THÉORÈME XIV′. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1) *dont la suite de coefficients* $\{d_n\}$ *est une suite quasi-régulière* (Déf. C). *Posons* $l = \overline{\lim_{n=\infty}}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$. *Désignons par* $\underline{\underline{D}}(t_0, \infty)$ *et* $\underline{\underline{D}}(t_0, -\infty)$ *la densité arithmétique minimum de l'ensemble de points singuliers de* $f(s)$ *sur le demi-axe imaginaire* $t_0 \leqq t < \infty$ *et* $-\infty < t \leqq t_0$, *respectivement. On a*

$$\underline{\underline{D}}(t_0, \infty) \geqq \frac{l}{2\pi} \quad \textit{et} \quad \underline{\underline{D}}(t_0, -\infty) \geqq \frac{l}{2\pi} \quad \textit{pour chaque} \quad -\infty < t_0 < \infty.$$

THÉORÈME XIV″. — *Soit* $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n s}$ *la série de Dirichlet* (1). *Soit* $\{n_k\}$ *une suite croissante d'entiers positifs telle que* $n_{k+1} - n_k = O(1)$ *pour* $k \to \infty$. *Posons* $l = \underline{\lim}_{k=\infty}(\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k})$. *On a*

$$\underline{\underline{D}}(t_0, \infty) \geqq \frac{l}{2\pi} \quad \textit{et} \quad \underline{\underline{D}}(t_0, -\infty) \geqq \frac{l}{2\pi} \quad \textit{pour chaque} \quad -\infty < t_0 < \infty.$$

Remarquons enfin que dans le cas où $f(s)$ est une série de Taylor — D, le nombre l défini dans les trois derniers théorèmes est un entier positif. Quelle que soit l'hypothèse, la conclusion est la même pour les trois cas : *$f(s)$ possède au moins l points singuliers sur chaque segment de l'axe imaginaire* $t_0 \leqq t < t_0 + 2\pi$. Remarquons aussi que la démonstration directe du théorème XIV dans ce cas est beaucoup plus simple que la démonstration du théorème général [1].

---

[1] *Voir* notre Note, *Sur un théorème de M. Mandelbrojt* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1786-1787).