ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUELINE LELONG-FERRAND

# Étude au voisinage de la frontière des fonctions subharmoniques positives dans un demi-espace

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 66 (1949), p. 125-159
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__125_0>

# ÉTUDE AU VOISINAGE DE LA FRONTIÈRE

DES

# FONCTIONS SURHARMONIQUES POSITIVES

## DANS UN DEMI-ESPACE [1]

PAR Mme JACQUELINE LELONG-FERRAND.

### I. — Généralités.

1. Soit $u(\mathrm{M})$ une fonction surharmonique positive dans un domaine D de l'espace $\mathrm{R}^p$ à $p \geqq 2$ dimensions. Nous nous proposons d'étudier le comportement de $u(\mathrm{M})$ au voisinage de la frontière de D.

D'après le théorème de décomposition de Riesz, $u(\mathrm{M})$ peut être considérée comme la somme d'une fonction harmonique positive $\mathrm{H}(\mathrm{M})$ et d'un potentiel de masse positive par rapport à la fonction de Green de D. Soit

$$\mathrm{U}^{\mu}(\mathrm{M}) = \int g(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\mu(\mathrm{P}). \tag{1}$$

Il est naturel d'appliquer à $\mathrm{U}^{\mu}(\mathrm{M})$ les méthodes de la théorie du potentiel. Mais il est plus curieux de constater que ces mêmes méthodes s'appliquent aussi à $\mathrm{H}(\mathrm{M})$, en considérant cette fonction comme un potentiel de double couche étendue à la frontière de D. On sait qu'une telle représentation est possible lorsque le domaine D est limité par des surfaces suffisamment régulières (à courbure bornée par exemple). Le cas général n'a pas été complètement élucidé et nous ne l'aborderons pas ici [2]. Dans le cas où D est la boule S $[\mathrm{OM} < 1]$ de $\mathrm{R}^p$, la formule est classique et connue sous le nom d'intégrale de

(1) Les résultats de ce Mémoire ont été exposés dans trois Notes aux *C. R. Ac. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1161-1333-1500.

(2) *Voir* à ce sujet le Mémoire de R. S. MARTIN; *Minimal positive harmonic functions* (*Trans. Ann. Math. Soc.*, t. 49, 1941, p. 137-172).

Poisson-Stieltjès, soit

$$H(M)=\int_{\Sigma}\frac{\partial g}{\partial n}(M, P)\,d\psi(P)=\int_{\Sigma}\frac{1-OM^2}{MP^p}\,d\psi(P),$$

$g(M, P)$ désignant la fonction de Green de S, et $\psi(P)$ une répartition de masse positive sur la surface $\Sigma$ de S.

Mais nous préférons, à cause de la simplicité des calculs et des applications (en particulier pour le problème de Phragmen et Lindelöf), étudier directement le cas où D est le demi-espace $(x>0)$ de $R^p$, limité par l'hyperplan $\pi(x=0)$. La formule de représentation est moins classique et plus délicate du fait que D est non borné. Nous l'avons établie dans un article antérieur [1] et nous rappelons ici seulement le résultat :

*Toute fonction harmonique positive dans le demi-espace* D *peut être représentée sous la forme*

$$(2)\qquad H(M)=cx+\int_{\pi}\frac{\partial g}{\partial n}(M, P)\,d\mu(P)=cx+\int_{\pi}\frac{x\,d\mu(P)}{MP^p},$$

$g(M, P)$ désigne la fonction de Green de D, $\mu$ une répartition de masse positive dans $\pi$ et $c$ une constante positive, qui peut s'interpréter comme étant la masse $\mu$ localisée à l'infini.

Notre étude sera fondée sur les formules (1) et (2) et sur des inégalités simples vérifiées par la fonction de Green. La méthode s'appliquerait, sans grande modification, à un domaine D limité par un nombre fini de surfaces à courbure bornée. En particulier, la transformation de Kelvin nous donnera immédiatement les résultats relatifs à une boule. Mais l'extension à un domaine général semble assez difficile, excepté le cas $p=2$ qui peut se traiter par représentation conforme. Il faudrait en effet avoir des connaissances plus précises que celles que nous possédons sur le comportement de la fonction de Green au voisinage de la frontière. C'est sans doute dans la voie ouverte par R. S. Martin (Mémoire cité) qu'il faudrait chercher la solution.

2. Nous rappellerons tout d'abord quelques notions générales relatives aux potentiels.

Soit D un domaine, $g(M, P)$ la fonction de Green de D, $\mu(P)$ une répartition de masse dans D (dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des répartitions de masse positive). Nous appelons potentiel de Green de la répartition $\mu$, la fonction

$$U^{\mu}(M)=\int g(M, P)\,d\mu(P).$$

[1] J. Lelong, *Bull. des Sc. Math.*, t. 73, 1949, p. 1-12.

On peut refaire, avec les potentiels de Green, toute la théorie classique du potentiel, telle qu'elle est exposée par exemple dans le Mémoire de H. Cartan [1].

L'énergie de la distribution $\mu$ étant l'intégrale

$$\int U^{\mu}(P)\,d\mu(P),$$

nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des distributions d'énergie finie dans D, par $\mathcal{M}$ l'ensemble des distributions $\mu$ telles que $U^{\mu} \not\equiv \infty$, par $\mathcal{L}$ l'ensemble des distributions $\lambda$ telles que $\int U^{\mu}\,d\lambda < \infty$ pour toute distribution $\mu$ de $\mathcal{M}$. On a évidemment $\mathcal{M} \supset \mathcal{E} \supset \mathcal{L}$.

Un ensemble E de D étant donné, nous désignerons par $\mathcal{E}_E^i$ (resp. $\mathcal{M}_E$) l'adhérence forte (resp. fine) des distributions de $\mathcal{E}$ portées par E; par $\mathcal{E}_E^e$ (resp. $\mathcal{M}_E^e$) l'intersection des $\mathcal{E}_A^i$ (resp. $\mathcal{M}_A^i$) relatifs aux ensembles ouverts A contenant E.

Pour un ensemble E strictement intérieur à D, on peut définir une capacité intérieure et une capacité extérieure, que nous appellerons capacités de Green; et pour un tel ensemble les capacités de Green sont dans un rapport borné avec les capacités ordinaires. En effet, si $\Delta$ est un domaine intérieur à D et contenant E, et si $h(M, P)$ désigne la fonction harmonique fondamentale dans $R^p$, il existe un nombre $\alpha > 1$ tel que, quels que soient M et P dans $\Delta$, on ait

$$g(M, P) < h(M, P) < \alpha g(M, P).$$

On en déduit, si C est la capacité de Green et C′ la capacité ordinaire : $C' < C < \alpha C'$. Donc la notion de capacité nulle est la même, qu'il s'agisse de potentiels de Green ou de potentiels ordinaires.

Mais si l'ensemble E s'accumule sur la frontière de D, il n'existe pas toujours une distribution capacitaire pour la fonction de Green, relative à E; et même si cette distribution existe, elle n'est pas nécessairement d'énergie finie. Nous étudierons les distributions capacitaires à la fin de ce Mémoire; et nous donnerons, dans le cas où D est le demi-espace ($x > 0$), la condition pour que ces distributions existent.

Mais ce n'est pas la notion de capacité qui s'est révélée constructive dans l'étude que nous allons faire. Et nous allons introduire d'autres notions.

3. Nous supposerons désormais que le domaine D considéré est le demi-espace $x > 0$ de $R^p$, limité par l'hyperplan $\pi$. Nous désignerons par $h(M, P)$ la fonction harmonique fondamentale dans $R^p \left[ h(M, P) = \log \frac{1}{MP} \text{ pour } p = 2, \; h(M, P) = \frac{1}{MP^{p-2}} \text{ pour } p > 2 \right]$, par Q le symétrique de P par rapport à $\pi$, par $x$

---

[1] H. Cartan, *Théorie générale du balayage en potentiel Newtonien* (*Annales de l'Université de Grenoble*, t. 22, 1946, p. 225).

l'abscisse de M et par $\xi$ celle de P. La fonction de Green de D est alors

$$g(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = h(\mathrm{M}, \mathrm{P}) - h(\mathrm{M}, \mathrm{Q}).$$

Or on a

$$\mathrm{MQ}^2 - \mathrm{MP}^2 = 4x\xi,$$

et l'on en déduit les inégalités

$$l_p \frac{x\xi}{\mathrm{MQ}^p} \leqq g(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \leqq l_p \frac{x\xi}{\mathrm{MP}^p}$$

en posant

$$l_p = 2(p-2) \qquad \text{pour} \quad p \geqq 2,$$
$$l_p = 2 \qquad \text{pour} \quad p = 2.$$

Un potentiel $\mathrm{U}^\mu$ de masse positive satisfait donc à la double inégalité

$$x l_p \int \frac{\xi\, d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MQ}^p} \leqq \mathrm{U}^\mu(\mathrm{M}) \leqq x l_p \int \frac{\xi\, d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^p}. \tag{3}$$

Une condition nécessaire pour que $\mathrm{U}^\mu(\mathrm{M}) \not\equiv \infty$ est donc que, quel que soit le point A extérieur à D, on ait

$$\int \frac{\xi\, d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{AP}^p} < \infty.$$

Cette condition est équivalente à

$$\int_{\mathrm{OP} \leqq \mathrm{R}} \frac{\xi\, d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{R}^p} + \int_{\mathrm{OP} > \mathrm{R}} \frac{\xi\, d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^p} < \infty. \tag{4}$$

Nous allons voir qu'elle est suffisante.

Considérons dans ce but la fonction

$$u(\mathrm{M}) = x \qquad \text{pour} \quad \mathrm{OM} \leqq \mathrm{R},$$
$$u(\mathrm{M}) = x \frac{\mathrm{R}^p}{\mathrm{OM}^p} \qquad \text{pour} \quad \mathrm{OM} \geqq \mathrm{R}.$$

Cette fonction est continue et bornée dans D, nulle dans $\pi$, harmonique pour $\mathrm{OM} < \mathrm{R}$ et pour $\mathrm{OM} > \mathrm{R}$. Sa dérivée normale à la surface $\Sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{OM} = \mathrm{R}, x > 0)$ de la demi-boule $\mathrm{S}_{\mathrm{R}}$ $(\mathrm{OM} < \mathrm{R}, x > 0)$ subit une discontinuité égale à $-p\dfrac{x}{\mathrm{R}}$ lorsqu'on sort de $\mathrm{S}_{\mathrm{R}}$. On peut donc considérer $u(\mathrm{M})$ comme un potentiel de Green, correspondant à la répartition de masse sur $\Sigma_{\mathrm{R}}$

$$d\lambda_{\mathrm{R}}(\mathrm{P}) = \frac{2p}{l_p k_p} \frac{\xi}{\mathrm{R}} d\sigma_{\mathrm{P}} = \frac{2}{l_p h_p} \frac{\xi}{\mathrm{R}} d\sigma_{\mathrm{P}},$$

en désignant par $\xi$ l'abscisse de P, par $k_p$ l'aire $p-1$ dimensionnelle de la sphère unité dans $R^p$ et par $h_p$ son volume

$$\left[k_p = p h_p = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\frac{p}{2}}\right],$$

$d\sigma_P$ est l'élément d'aire de $S_R$, $l_p$ le coefficient déjà défini. La masse totale ainsi répartie sur $\Sigma_R$ est

$$\lambda_R = \frac{2}{R h_p l_p}\int_{\Sigma_R} \xi \, d\sigma_P = R^{p-1}\frac{2 h_{p-1}}{l_p h_p}.$$

L'énergie de cette répartition est

$$\gamma_R = \frac{2}{R h_p l_p}\int_{\Sigma_R} \xi^2 \, d\sigma_P = \frac{R^p}{l_p}.$$

Soit alors $\mu$ une répartition telle que $U^\mu \not\equiv \infty$. On aura

$$\int U^\mu \, d\lambda_R = \int U^{\lambda_R} \, d\mu = \int_{OP \leq R} \xi \, d\mu(P) + \int_{OP > R} \frac{\xi R^p}{OP^p} d\mu(P),$$

et nous avons vu que si $U^\mu \not\equiv \infty$, le dernier membre de cette égalité est borné.

Réciproquement, si la quantité

$$\int_{OP \leq R} \xi \, d\mu(P) + \int_{OP > R} \frac{\xi R^p}{OP^p} d\mu(P)$$

est finie, on en déduit $\int U^\mu \, d\lambda_R < \infty$, donc $U^\mu \not\equiv \infty$. On exprime ce fait en disant que la distribution $\lambda_R$ appartient à la classe $\mathcal{L}$.

4. *Notion de distribution fondamentale.* — Soit E un ensemble contenu dans la demi-boule $S_R(OM < R, x > 0)$. Le potentiel $U^{\lambda_R}$ défini précédemment est égal à $x$ en tout point M de E. D'après la théorie du balayage, on peut donc déterminer une distribution $\lambda_e$ de $\mathcal{E}_E^c$ telle que $U^{\lambda_e} = \xi$ en tout point P de E, excepté au plus sur un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_E^c$. Cette distribution, portée par l'adhérence de E, sera appelée *distribution fondamentale extérieure* (ou plus brièvement distribution fondamentale) relative à E. L'énergie de cette distribution $\gamma_e = \int \xi \, d\lambda_e(P)$ sera dite *puissance extérieure* de E, et la masse totale ainsi répartie $\lambda_e$ sera dite *charge extérieure de* E.

On montrerait de même qu'il existe une distribution $\lambda_i$ de $\mathcal{E}_E^i$ (distribution fondamentale intérieure) telle que $U^{\lambda_i} = \xi$ en tout point P de E excepté au plus pour un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_E^i$. On définirait ainsi la puissance intérieure $\gamma_i = \int \xi \, d\lambda_i(P)$ et la charge intérieure $\lambda_i$ de l'ensemble E.

On a évidemment

$$\gamma_i \leqq \gamma_e \leqq \gamma_R = \frac{R_p}{l_p},$$

$$\lambda_i \leqq \lambda_e \leqq \lambda_R = 2R^{p-1}\frac{h_{p-1}}{l_p h_p}.$$

Les quantités $\gamma_e$ et $\gamma_i$ ne sont autres que les $\lambda_R$-capacités de l'ensemble E (¹).

La puissance et la charge d'un ensemble borné sont donc finies. Il n'en serait pas de même pour un ensemble non borné. Et nous verrons (§ 13) à quelle condition doit satisfaire un tel ensemble pour être susceptible d'une distribution fondamentale.

## II. — Étude d'un ensemble au voisinage de la frontière.

### A. — Notion d'effilement.

5. Pour préciser le degré de raréfaction d'un ensemble E au voisinage d'un point frontière, nous aurons besoin de notions voisines de celle qui a été introduite par M. Brelot (²) sous le nom d'effilement. Nous aurons toujours deux cas à distinguer, selon que le point frontière considéré est à distance finie, auquel cas nous pouvons le supposer à l'origine, ou à l'infini.

Dans le premier cas, nous désignerons par $I_n$ l'intersphère $s^{n+1} < OM \leqq s^n$, $s$ étant une constante inférieure à 1 ; dans le deuxième cas, nous désignerons par $I_n$ l'intersphère $s^{n+1} > OM \geqq s^n$, $s$ étant une constante supérieure à 1.

Dans les deux cas, nous désignerons par $E_n$ la trace de E sur $I_n$, par $\gamma_n$ la puissance extérieure de $E_n$, et nous dirons que *l'ensemble* E *est effilé à l'origine* (*respectivement à l'infini*) *relativement à* D *si la série* $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$ *est convergente*.

Il faut remarquer tout d'abord que la notion que nous venons de définir est indépendante de la valeur de la constante $s$. On peut en effet exprimer la condition d'effilement sous une forme intégrale, ne faisant plus intervenir $s$, mais moins commode pour les calculs.

Désignons par $\gamma(r)$ la puissance extérieure de la trace de E sur la boule $B_r(OM \leqq r)$. On a évidemment, pour $s < 1$,

$$\gamma_n \leqq \gamma(s^n) \leqq \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i,$$

et l'on voit facilement que la condition d'effilement à l'origine est équivalente à la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\gamma(r)\,dr}{r^{p+1}}$.

(¹) *Voir* Cartan, *loc. cit.*, p. 251.

(²) M. Brelot, *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel* (*Journ. de Math.*, t. 19, 1940, p. 319).

On verrait de même que la condition d'effilement à l'infini est équivalente à la convergence de $\int_1^\infty \frac{\gamma(r)\,dr}{r^{p+1}}$.

6. La forme même des conditions données au paragraphe 5 rappelle beaucoup le critère de Wiener. Il est donc intéressant de comparer la notion d'effilement que nous venons de définir à l'effilement ordinaire.

Au cours de la comparaison, nous nous appuierons sur le lemme suivant, facile à démontrer :

LEMME. — *Si deux distributions de masse positive* $\lambda$ $\lambda'$ *de* $\mathcal{E}_E^e$ *satisfont à* $U^{\lambda'} \leqq k U^\lambda$ [$k = const.$], *les masses totales ainsi réparties,* $\lambda$, $\lambda'$, *et les énergies* $\gamma$ $\gamma'$ *de ces répartitions satisfont à*

$$\lambda' \leqq k\lambda, \qquad \gamma' \leqq k^2\gamma.$$

Soit alors E un ensemble contenu dans le cône $C_k\left(\frac{OM}{x} \leqq k\right)$. Posons $E_n = E \cap I_n$, $I_n$ étant l'intersphère $s^{n+1} < OM \leqq s^n$. L'abscisse $x$ d'un point M de l'adhérence de $E_n$ restant comprise entre $\frac{s^{n+1}}{k}$ et $s^n$, il en résulte que la puissance extérieure $\gamma_n$ de $E_n$ et sa capacité extérieure de Green $C_n$ satisfont à l'inégalité

$$\frac{s^{2n+2}}{k^2} C_n \leqq \gamma_n \leqq s^{2n} C_n.$$

Donc la condition d'effilement à l'origine, relativement à D, équivaut à la convergence de la série $\sum \frac{C_n}{s^{n(p-2)}}$. Il reste à comparer $C_n$ à la capacité ordinaire extérieure de $E_n$, soit $C'_n$.

Or si les points M et P sont contenus dans le secteur conique $I_n \cap C_k$ et si Q désigne le symétrique de $P^e$ par rapport à $\pi$, le rapport $\frac{MQ}{MP}$ reste supérieur à un nombre de la forme $1 + \alpha$ ($\alpha$ positif ne dépend que de $s$ et $k$). On en déduit pour $p > 2$

$$h(M, P) > g(M, P) > [1 - (1 + \alpha)^{2-p}]h(M, P),$$

inégalité de la forme

$$h(M, P) > g(M, P) > \beta h(M, P).$$

On démontrerait une inégalité analogue pour $p = 2$. On en déduit facilement que les capacités $C_n$ et $C'_n$ satisfont à $C_n > C'_n > \beta C_n$.

La convergence de la série $\sum \frac{C_n}{s^{n(p-2)}}$ équivaut donc à celle de la série $\sum \frac{C'_n}{s^{n(p-2)}}$.

En comparant ce résultat au critère de Wiener, on obtient l'énoncé suivant :

*Pour un ensemble* E *contenu dans un cône d'approximation* $C_k\left(\frac{OM}{x} < k\right)$

*l'effilement à l'origine, relatif à* D, *est équivalent à l'effilement ordinaire pour* $p > 2$.

Pour un ensemble E quelconque, et pour $p > 2$, l'effilement ordinaire entraîne l'autre.

Pour $p = 2$ les deux notions d'effilement ne sont pas directement comparables.

7. Nous allons montrer qu'*une inversion de pôle* O *transforme un ensemble effilé à l'origine* (*relativement à* D) *en un ensemble effilé à l'infini*. Cela nous dispensera d'étudier spécialement les ensembles effilés à l'infini.

Soit E un ensemble effilé à l'infini; désignons toujours par $E_n$ la trace de E sur l'intersphère $I_n$ ($s^{n+1} > OM \geqq s^n$), par $\gamma_n$ la puissance extérieure de $E_n$; soit enfin $E'_n$ l'inverse de $E_n$ dans l'inversion de pôle O et de puissance 1, $\gamma'_n$ sa puissance extérieure. Si $x$ désigne l'abscisse d'un point de $I_n$, et $x'$ celle de son inverse, on a

$$s^{2n} \leqq \frac{x}{x'} \leqq s^{2n+2}.$$

D'autre part, si M et P désignent deux points de $I_n$, M' et P' leurs inverses, on a

$$s^{2n} \leqq \frac{MP}{M'P'} \leqq s^{2n+2} \qquad \text{d'où} \qquad s^{2n(2-p)} \geqq \frac{g(M, P)}{g(M', P')} \geqq s^{(2n+2)(2-p)}.$$

On en déduit facilement que les puissances $\gamma_n$ et $\gamma'_n$ satisfont à la double inégalité

$$s^{2np} \leqq \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} \leqq s^{(2n+2)p}.$$

Donc la convergence de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$ est équivalente à celle de la série $\sum \gamma'_n s^{np}$. Et si l'on remarque que $E'_n$ est la trace de l'inverse E' de E, sur l'intersphère $I'_n$ [$s^{-n} \geqq OM > s^{-(n+1)}$], cette condition entraîne l'effilement de E' à l'origine. C. Q. F. D.

8. Pour terminer ces généralités, nous allons montrer qu'on peut étendre aux ensembles effilés relativement à D une propriété démontrée par M. J. Deny pour les ensembles effilés ordinaires.

THÉORÈME. — *Si l'ensemble* E *est effilé en* O (*resp. à l'infini*) *relativement à* D, *les rayons issus de* O *dont l'intersection avec* E *admet* O (*resp. l'infini*) *pour point limite, découpent sur la sphère de centre* O *et de rayon* 1, *un ensemble de capacité extérieure nulle dans* $R^p$.

Remarquons d'abord, puisque l'inverse d'un ensemble effilé à l'infini est un ensemble effilé à l'origine, qu'il suffit de faire la démonstration pour un ensemble effilé en O. Ensuite, comme l'ensemble E peut être considéré comme la limite de la suite croissante $E^{(n)} = E \cap C_n$ où $C_n$ est le cône $\frac{OM}{x} < n$, et que la limite d'une suite croissante d'ensembles de capacité extérieure nulle est encore de capacité extérieure nulle, il suffit de démontrer la propriété pour un ensemble E contenu dans un cône fixe $C_k$. Mais alors, d'après le paragraphe 6, pour $p > 2$, la propriété découle immédiatement de celle démontrée par M. J. Deny. Nous sommes cependant obligés de refaire la démonstration pour $p = 2$.

Soit donc l'ensemble E, effilé en O relativement à D, et contenu dans le cône $C_k\left(\frac{OM}{x} < k\right)$. Désignons par $I_n$ la couronne $s^{n+1} < OM \leqq s^n$, par $\omega_n$ la projection, à partir de O, sur le cercle $OM = 1$, de l'ensemble $E_n = E \cap I_n$. L'ensemble $\Omega$ découpé sur la sphère unité par les rayons issus de O et dont l'intersection avec E admet O pour point limite, apparaît comme l'ensemble des points communs à une infinité d'ensembles $\omega_n$. Donc si $\Omega$ était de capacité extérieure positive, et si A désignait cette capacité, quel que soit le nombre $n$ aussi grand que l'on veut, on pourrait trouver un nombre $n' > n$ tel que la capacité de l'ensemble $\omega_{n+1} + \omega_{n+2} + \ldots + \omega_{n'}$ soit au moins égale à $A - \varepsilon$. Si $A_n$ désigne la capacité extérieure ordinaire de $\omega_n$, on aurait

$$A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots + A_{n'} \geqq A - \varepsilon,$$

et la série $\Sigma A_n$ ne pourrait être convergente.

Or la capacité de Green est au moins égale à la capacité ordinaire. Donc si $B_n$ désigne la capacité de Green de $\omega_n$, la série $\Sigma B_n$ serait aussi divergente. Il reste à comparer $B_n$ à la capacité de Green $G_n$ de $E_n$. Or si M et P sont deux points de $E_n$, M' et P' leurs projections sur le cercle unité, on vérifie facilement l'inégalité

$$g(M', P') \geqq g(M, P)$$

et l'on en déduit $B_n \leqq G_n$.

Donc la divergence de la série $\Sigma B_n$ entraîne celle de la série $\Sigma G_n$, et l'ensemble E ne serait pas effilé en O.

Définition. — *Nous dirons, pour abréger, qu'un ensemble de rayons issus de l'origine est un ensemble* J *s'il découpe sur la sphère de centre* O *et de rayon* 1 *un ensemble de capacité extérieure nulle dans* $R^p$.

### B. — Ensembles semi-effilés et raréfiés.

9. Définition. — *Nous dirons que l'ensemble* E *est semi-effilé à l'origine (resp. à l'infini) si, avec les notations du paragraphe* 5, *la quantité* $\frac{\gamma_n}{s^{np}}$ *tend vers zéro.*

*Propriétés.* — *a.* La condition de semi-effilement est indépendante de la valeur de la constante $s$ choisie. On peut en effet mettre cette condition sous une forme indépendante de $s$ : si $\gamma(r)$ désigne la puissance extérieure de la trace de E sur la boule $B_r$ ($OM \leqq r$), l'ensemble E est semi-effilé à l'origine (resp. à l'infini) si la quantité $\frac{\gamma(r)}{r^p}$ tend vers zéro lorsque $r$ tend vers zéro (resp. lorsque $r$ tend vers l'infini).

*b.* L'inverse d'un ensemble semi-effilé à l'origine est semi-effilé à l'infini, et réciproquement.

*c.* Si E est semi-effilé en O, l'ensemble des rayons issus de O sur lesquels il existe une suite $M_n$ de points de E telle que le rapport $\frac{OM_n}{OM_{n+1}}$ soit borné, est un ensemble J de rayons.

Les propriétés *a*, *b*, *c* se démontrent comme les propriétés analogues des ensembles effilés. Remarquons en passant qu'un ensemble effilé est, *a fortiori*, semi-effilé.

10. Définition. — *Nous dirons qu'un ensemble* E *contenu dans* D *est raréfié extérieurement* (*resp. intérieurement*) *à l'origine si la charge extérieure* (*resp. intérieure*) $\lambda_n$ *de* $E_n$ *est telle que* $\frac{\lambda_n}{s^{n(p-1)}}$ *tende vers zéro* (notations du § 5).

On définirait de même la raréfaction à l'infini.

Un ensemble raréfié extérieurement est aussi semi-effilé. Mais il existe des ensembles semi-effilés qui ne sont pas raréfiés extérieurement : par exemple la portion de D comprise entre l'hyperplan $\pi$ ($x = 0$) et un hyperplan $\pi'$ quelconque parallèle à $\pi$. Cet ensemble est semi-effilé à l'infini, mais non raréfié.

La condition de raréfaction peut aussi se mettre sous une forme indépendante de $s$ : en désignant par $\lambda(r)$ la charge de l'ensemble $E_r$, trace de E sur la boule $B_r$ ($OM \leqq r$), l'ensemble E est raréfié à l'origine (resp. à l'infini) si $\frac{\lambda(r)}{r^{p-1}}$ tend vers zéro lorsque $r$ tend vers zéro (resp. lorsque $r$ tend vers l'infini).

## III. — Étude du rapport $\frac{u}{x}$.

### A. — Étude du potentiel de Green.

11. Soit tout d'abord

$$U^\mu(M) = \int_D g(M, P)\, d\mu(P),$$

le potentiel de Green dû à la répartition $\mu$ dans le demi-espace $D(x > 0)$.

Étudions le rapport $\dfrac{U^{\mu}(M)}{x}$ au voisinage de l'infini. Posons

$$\int_{OP<1} \xi\, d\mu(P) = k, \qquad \int_{OP\geqq s^n} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^p} = c_n \qquad (s>1).$$

Puisque $U^{\mu} \not\equiv \infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_{OP>1} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^p}$ est convergente, et $c_n$ tend vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$.

Supposons le point M dans l'intersphère $I_n$ $(s^n \leqq OM < s^{n+1})$ et décomposons $U^{\mu}(M)$ en la somme des potentiels

$$U_0(M) + U_1(M) + U_2(M) + U_3(M),$$

$U_0(M)$ étant le potentiel des masses contenues dans $OP<1$, $U_1(M)$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $1 \leqq OP < s^{n-1}$, $U_2(M)$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $J_n(s^{n-1} \leqq OP < s^{n+2})$ et $U_3(M)$ le potentiel des masses contenues dans $OP \geqq s^{n+2}$.

On aura successivement, en tenant compte des inégalités (3),

$$\frac{U_0(M)}{x\,l_p} \leqq \int_{OP<1} \frac{\xi\, d\mu(P)}{MP^p} \leqq \int_{OP<1} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM-OP)^p} \leqq \frac{k}{(s^n-1)^p},$$

$$\frac{U_1(M)}{x\,l_p} \leqq \int_{1\leqq OP<s^{n-1}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OM-OP)^p} \leqq c_0(s-1)^{-p},$$

$$\frac{U_3(M)}{x\,l_p} \leqq \int_{OP\geqq s^{n+2}} \frac{\xi\, d\mu(P)}{(OP-OM)^p} \leqq c_{n+2}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-p},$$

$\varepsilon$ étant donné, on peut déterminer $s$ assez grand pour que

$$c_0(s-1)^{-p} < \frac{\varepsilon}{6\,l_p},$$

puis $n$ assez grand pour que

$$c_{n+2}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-p} < \frac{\varepsilon}{6\,l_p} \qquad \text{et} \qquad \frac{k}{(s^n-1)^p} < \frac{\varepsilon}{6\,l_p}.$$

On aura alors

$$\frac{U_0(M)+U_1(M)+U_3(M)}{x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $E_{\varepsilon}$ l'ensemble défini par $\dfrac{U^{\mu}(M)}{x} \geqq \varepsilon$. Posons

$$E_n = E_{\varepsilon} \cap I_n.$$

En tout point M de $E_n$, on aura

$$U_2(M) > \frac{\varepsilon}{2}\,x.$$

Soit $\lambda_n$ la répartition fondamentale relative à $E_n$, et $\gamma_n$ la puissance extérieure de $E_n$. On aura

$$\int U_2(M)\,d\lambda_n(M) > \frac{\varepsilon}{2}\int x\,d\lambda_n = \frac{\varepsilon}{2}\gamma_n.$$

Mais

$$\int U_2(M)\,d\lambda_n(M) = \int_{J_n} U^{\lambda_n}\,d\mu \leqq \int_{J_n} \xi\,d\mu(P) = \mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1},$$

en posant

$$\mu_n = \int_{I_n} \xi\,d\mu(P).$$

Or la convergence de l'intégrale $\int_{PO\geqq 1} \frac{\xi\,d\mu(P)}{OP^p}$ entraîne celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{np}}$, et puisque $\gamma_n < \frac{2}{\varepsilon}(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1})$ elle entraîne aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$. L'ensemble $E_\varepsilon$ est donc effilé à l'infini.

THÉORÈME 1*a*. — *Quel que soit* $\varepsilon > 0$ *l'ensemble des points de* D *où l'on a* $U^\mu(M) \geqq \varepsilon x$, *est effilé à l'infini relativement à* D.

On en déduit que $\frac{U^\mu(M)}{x}$ tend vers zéro lorsque M tend vers l'infini radialement, excepté au plus pour un ensemble J de rayons.

12. Étudions maintenant le comportement de $\frac{U^\mu(M)}{x}$ à l'origine. Posons

$$\gamma = \liminf_{M\to 0} \frac{U^\mu(M)}{x}.$$

Si $\gamma = +\infty$, $\frac{U^\mu(M)}{x} \to +\infty$ lorsque M tend vers O.

Si $\gamma < \infty$, appliquons la première des inégalités (3)

$$\frac{U^\mu(M)}{x\,l_p} \geqq \int \frac{\xi\,d\mu(P)}{MQ^p} \geqq \int \frac{\xi\,d\mu(P)}{(OM + OP)^p}.$$

Si M tend vers O on en déduit facilement que l'intégrale $A = \int \frac{\xi\,d\mu(P)}{OP^p}$ est convergente et bornée par $\frac{\gamma}{l_p}$. Nous allons montrer que $A = \frac{\gamma}{l_p}$. A cet effet considérons la répartition fondamentale $\lambda_R$ sur la demi-sphère $\Sigma_R(OP = R,\ \xi > 0)$, soit

$$d\lambda_R(P) = \frac{2\xi\,d\sigma(P)}{R h_p l_p} \qquad (\textit{voir}\ \S 3),$$

$$\int U^{\lambda_R}\,d\mu(P) = \int_{OP<R} \xi\,d\mu(P) + \int_{OP\geqq R} \xi\,\frac{R^p\,d\mu(P)}{OP^p},$$

on a donc

$$\int U^{\lambda_R}\,d\mu(P) < \int \xi \frac{R^p\,d\mu(P)}{OP^p} = AR^p,$$

or

$$\int U^{\lambda_R}\,d\mu(P) = \int U^{\mu}\,d\lambda_R \qquad \text{et} \qquad \int \xi\,d\lambda_R = \frac{R^p}{l_p}.$$

Il existe donc au moins un point P de $\Sigma_R$ où l'on a

$$\frac{U^{\mu}(P)}{\xi} \leqq A\,l_p,$$

donc $\gamma \leqq A l_p$ et finalement $\gamma = A l_p$. C. Q. F. D.

Désignons alors par $E_\varepsilon$ l'ensemble des points de D, où l'on a

$$\frac{U^{\mu}(M)}{x} \geqq \gamma + \varepsilon.$$

Supposons M dans l'intersphère $I_n[s^{n+1} < OM \leqq s^n\ (s < 1)]$ et décomposons $U^{\mu}(M)$ en $U_1(M) + U_2(M) + U_3(M)$, $U_1(M)$ étant le potentiel des masses contenues dans $OP > s^{n-1}$, $U_2(M)$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $J_n(s^{n+2} < OP \leqq s^{n-1})$ et $U_3(M)$ le potentiel des masses contenues dans $OP \leqq s^{n+2}$. On aura, d'après la deuxième inégalité (3)

$$\frac{U_1(M)}{x\,l_p} \leqq \int_{OP > s^{n-1}} \frac{\xi\,d\mu(P)}{(OP - OM)^p} < (1 - s)^{-p} A,$$

$$\frac{U_3(M)}{x\,l_p} \leqq \int_{OP \leqq s^{n+2}} \frac{\xi\,d\mu(P)}{(OM - OP)^p} < \left(\frac{1}{s} - 1\right)^{-p} A_{n+2},$$

en posant

$$A_n = \int_{OP \leqq s^n} \frac{\xi\,d\mu(P)}{OP^p}.$$

On peut déterminer $s$ assez petit pour que

$$A\,l_p(1 - s)^{-p} < A\,l_p + \frac{\varepsilon}{4},$$

puis $n$ assez grand pour que

$$A_{n+2}\,l_p\left(\frac{1}{s} - 1\right)^{-p} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On aura alors

$$\frac{U_1(M) + U_3(M)}{x} < \gamma + \frac{\varepsilon}{2},$$

donc en tout point M de $E_n = E_\varepsilon \cap I_n$

$$U_2(M) > \frac{\varepsilon x}{2}.$$

Soit $\lambda$ la répartition fondamentale relative à $E_n$, $\gamma_n$ la puissance extérieure de $E_n$. Posons

$$\int_{I_n} \xi \, d\mu(P) = \mu_n.$$

On aura

$$\int U_2(M) \, d\lambda(M) > \frac{\varepsilon}{2} \int x \, d\lambda(M) = \frac{\varepsilon}{2} \gamma_n,$$

or

$$\int U_2(M) \, d\lambda(M) = \int_{J_n} U^\lambda(P) \, d\mu(P) \leqq \int_{J_n} \xi \, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}.$$

Or la convergence de l'intégrale $\int \frac{\xi \, d\mu(P)}{OP^p}$ entraîne celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{np}}$ donc aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$, puisque $\gamma_n < \frac{2}{\varepsilon}(\mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1})$. On a donc le résultat suivant :

**Théorème** $2a$. — *Si* $\liminf\limits_{M \to 0} \frac{U^\mu(M)}{x} = \gamma < \infty$, *l'ensemble des points de* D, *où l'on a* $\frac{U^\mu(M)}{x} \geqq \gamma + \varepsilon$ *est effilé à l'origine relativement à* D; *ce qui montre que* $\frac{U^\mu(M)}{x}$ *tend vers* $\gamma$ *lorsque* M *tend vers* O *radialement, excepté pour un ensemble* J *de rayons. De plus il existe au moins un point* M *sur chaque sphère de centre* O, *tel que* $U^\mu(M) \leqq \gamma x$.

Enfin on a

$$\gamma = l_p \int \frac{\xi \, d\mu(P)}{OP^p}.$$

13. Il est à remarquer que les deux résultats que nous venons de démontrer (théorèmes $1a$ et $2a$) ne se ramènent pas l'un à l'autre par inversion. Au contraire, la transformation de Kelvin nous donne les résultats nouveaux suivants :

**Théorème** $3a$. — *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *l'ensemble des points de* D, *où l'on a*

$$U^\mu(M) \frac{OM^p}{x} \geqq \varepsilon,$$

*est effilé à l'origine relativement à* D.

**Théorème** $4a$. — *Si* $\gamma = \liminf\limits_{M \to \infty} U^\mu(M) \frac{OM^p}{x} < \infty$, *alors l'ensemble des points où* $U^\mu(M) \frac{OM^p}{x} > \gamma + \varepsilon$ *est effilé à l'infini relativement à* D, *et il existe, sur chaque sphère de centre* O, *au moins un point* M *où l'on ait*

$$U^\mu(M) < \frac{\gamma x}{OM^p}.$$

Les théorèmes $1a$ et $2a$ sont aussi susceptibles de réciproques.

RÉCIPROQUE 1*a*. — *Si l'ensemble* E *est effilé à l'infini, il existe une répartition* $\mu$ *de* $\mathfrak{M}_E^e$ *telle que le rapport* $\frac{U^\mu(M)}{x}$ *reste supérieur à* 1 *sur* E *ou même tende vers* $+\infty$ *lorsque* M *tend vers l'infini sur* E, *en négligeant au plus un ensemble de points de* E *de capacité extérieure nulle.*

RÉCIPROQUE 2*a*. — *Si l'ensemble* E *est effilé à l'origine, il existe une répartition* $\mu$ *de* $\mathfrak{M}_E^e$ *telle que* $\liminf_{M \to 0} \frac{U^\mu(M)}{x} = \gamma < \infty$ *et que* $\frac{U^\mu(M)}{x}$ *reste supérieur à* $\gamma + 1$ *sur* E *ou même tende vers* $+\infty$ *lorsque* M *tend vers* 0 *sur* E, *en négligeant au plus un ensemble de points de* E *de capacité extérieure nulle.*

Démontrons par exemple la réciproque 1*a*. Supposons E effilé à l'infini. Reprenons les notations du paragraphe 5. La série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$ étant convergente, on peut trouver une suite $\varepsilon_n$ tendant vers séro telle que la série $\sum \frac{\gamma_n}{\varepsilon_n s^{np}}$ soit encore convergente.

Soit $\lambda_n$ la répartition fondamentale relative à $E_n$. Le potentiel résultant de la somme $\mu$ de toutes les répartitions $\frac{\lambda_n}{\varepsilon_n}$ est non identique à l'infini puisque

$$\int_{OP \geqq 1} \frac{\xi\, d\mu(P)}{OP^p} < \sum_1^\infty \frac{\gamma_n}{\varepsilon_n s^{np}} < \infty$$

et il répond aux conditions imposées puisque

$$U^\mu(M) > \frac{U^{\lambda_n}(M)}{\varepsilon_n} \geqq \frac{x}{\varepsilon_n}$$

en tout point M de $E_n$ excepté au plus sur un ensemble de points de $E_n$ de capacité extérieure nulle. C. Q. F. D.

La réciproque 2*a* se démontrerait de la même façon.

De l'existence d'une distribution $\mu$ de $\mathfrak{M}_E^e$ telle que $U^\mu(M) \geqq x$ en tout point de E, excepté un ensemble de capacité extérieure nulle, on déduit par balayage une distribution $\lambda$ de $\mathcal{E}_E^e$ telle que $U^\lambda(M) = x$ en tout point de E excepté au plus un ensemble de capacité extérieure nulle. Comme corollaire de la réciproque 1*a*, on peut donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble* E *non borné soit susceptible d'une distribution fondamentale, c'est que* E *soit effilé à l'infini relativement à* D.

B. — ÉTUDE DE $\frac{H(M)}{x}$.

**14.** Soit

$$H(M) = cx + \int_{\pi} \frac{x\, d\mu(P)}{MP^p}.$$

Pour étudier le rapport $\frac{H(M)}{x}$ il suffit d'étudier l'intégrale

$$f(M) = \int \frac{d\mu(P)}{MP^p}.$$

Étudions tout d'abord son comportement à l'infini. Nous poserons

$$k = \int_{OP<1} d\mu(P), \qquad c_n = \int_{OP \geqq s^n} \frac{d\mu(P)}{OP^p}, \qquad \mu_n = \int_{I_n} d\mu(P).$$

Ces intégrales sont convergentes puisque $H(M) \neq \infty$. Supposons M dans l'intersphère $I_n(s^{n+1} > OM \geqq s^n)$ et décomposons $f(M)$ en $f_0(M) + f_1(M) + f_2(M) + f_3(M)$ comme nous l'avons fait pour $U^\mu(M)$. On aura

$$f_0(M) = \int_{OP<1} \frac{d\mu(P)}{MP^p} < \frac{k}{(s^n - 1)^p},$$

$$f_1(M) = \int_{1 \leqq OP < s^{n-1}} \frac{d\mu(P)}{MP^p} < c_0(s-1)^{-p},$$

$$f_3(M) = \int_{OP \geqq s^{n+2}} \frac{d\mu(P)}{MP^p} \leqq c_{n+2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-p}.$$

Comme au paragraphe 11, on peut choisir $s$ et $n$ assez grands pour que

$$f_0(M) + f_1(M) + f_3(M) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit alors $E_\varepsilon$ l'ensemble des points M de D où $f(M) \geqq \varepsilon$; si $\lambda_n$ est la répartition fondamentale relative à $E_n = E_\varepsilon \cap I_n$, et $\gamma_n$ la puissance extérieure de $E_n$, on aura en tout point de $E_n$ : $f_2(M) > \frac{\varepsilon}{2}$ donc

$$\frac{\varepsilon}{2}\gamma_n \leqq \int x f_2(M)\, d\lambda_n(M) = \iint_{s^{n+2} > OP \geqq s^{n-1}} \frac{x\, d\mu(P)\, d\lambda_n(M)}{MP^p} = \int_{s^{n+2} > OP \geqq s^{n-1}} v(P)\, d\mu(P),$$

en posant

$$v(P) = \int \frac{x\, d\lambda_n(M)}{MP^p}.$$

Or d'après les résultats obtenus au paragraphe 12, $v(P)$ apparait comme la plus petite limite du rapport $\frac{U^{\lambda_n}(M)}{x\, l_p}$ lorsque le point M de D tend vers le point fixe P de $\pi$ (il suffit de prendre P pour origine et d'appliquer le théorème $2a$).

Donc, puisque $U^{\lambda_n}(M) \leqq x$, on a $v(P) \leqq l_p^{-1}$ et l'on en déduit

$$\frac{\varepsilon}{2}\gamma_n \leqq \frac{1}{l_p}(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1}).$$

Or la convergence de l'intégrale $\int_{OP>1} \frac{d\mu(P)}{OP^p}$ entraîne celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{np}}$ donc aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$. L'ensemble $E_\varepsilon$ est effilé à l'infini.

THÉORÈME 1 *b*. — *Si la fonction* H(M) *est harmonique positive dans* D *et si c est la borne inférieure du rapport* $\frac{H(M)}{x}$, *l'ensemble des points de* D, *où l'on a* $H(M) \geqq (c+\varepsilon)x$, *est effilé à l'infini quel que soit* $\varepsilon > 0$.

15. La propriété d'effilement ne suffit pas ici à caractériser l'ensemble $E_\varepsilon$. En effet, en nous appuyant sur le principe du maximum, nous voyons que l'ensemble $E_\varepsilon$ est fermé relativement à D, d'un seul tenant avec $\pi$, et tel que $\Delta = D - E_\varepsilon$ soit un domaine simplement connexe. Il semble plus difficile ici d'obtenir une réciproque analogue à celle du paragraphe 13.

Pour $p = 2$ (cas du plan), il est facile de montrer qu'un ensemble E effilé à l'infini, ou même seulement semi-effilé, et d'un seul tenant avec $\pi$, ne peut contenir aucune suite tendant vers l'infini angulairement. Sinon il y aurait des valeurs de $n$, aussi grandes que l'on veut, pour lesquelles $E_n = E \cap I_n$ posséderait au moins un point $M_n$ intérieur à l'angle $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ fixe); d'après les propriétés topologiques de E, $E_n$ contiendrait aussi un continu joignant ce point soit à $\pi$, soit aux deux cercles $[OM = s^n,\ OM = s^{n+1}]$ et le quotient par $s^{2n}$ de la puissance d'un tel continu ne tend pas vers zéro. E ne pourrait donc pas être semi-effilé.

Du théorème 1 *b* on peut donc déduire que $\frac{H(M)}{x}$ tend vers $c$ angulairement, au moins dans le cas $p = 2$. Mais la propriété est générale et peut être démontrée par un procédé plus élémentaire [1]. Le théorème 1 *b* complète donc le résultat obtenu précédemment, et le contient pour $p = 2$.

16. On étudierait de même le comportement de $\frac{H(M)}{x}$ au voisinage de l'origine.

Posons

$$\gamma_0 = \liminf_{M \to O} f(M),$$

et supposons $\gamma_0 < \infty$.

Nous allons montrer que l'intégrale $A = \int \frac{d\mu(P)}{OP^p}$ est convergente et a pour valeur $\gamma_0$.

[1] *Voir* J. LELONG, *loc. cit.*

On a, en effet,

$$f(\mathrm{M}) = \int \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^p} > \int_{\mathrm{OP}>k\,\mathrm{OM}} \frac{d\mu(\mathrm{P})}{(\mathrm{OP}+\mathrm{OM})^p} > \frac{k^p}{(1+k)^p} \int_{\mathrm{OP}>k\,\mathrm{OM}} \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^p},$$

donc si M tend vers O, on voit que l'intégrale $\int \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^p}$ est convergente, et bornée par $\gamma_0 \frac{(1+k)^p}{k^p}$. Mais $k$ étant aussi grand que l'on veut, on a $\mathrm{A} \leqq \gamma_0$. D'autre part si M est sur l'axe $\mathrm{O}x$, on a $\mathrm{MP} > \mathrm{OP}$, donc

$$f(\mathrm{M}) \leqq \int \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^p} = \mathrm{A},$$

et l'on en déduit $\gamma_0 \leqq \mathrm{A}$, donc $\gamma_0 = \mathrm{A}$.

Décomposons alors $f(\mathrm{M})$ en la somme des trois intégrales

$$f_1(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{OP}>s^{n-1}} \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^p}, \qquad f_2(\mathrm{M}) = \int_{s^{n+2}<\mathrm{OP}\leqq s^{n-1}} \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^p}, \qquad f_3(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{OP}\leqq s^{n+2}} \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^p},$$

et supposons M dans l'intersphère $\mathrm{I}_n\,[s^{n+1} < \mathrm{OM} \leqq s^n\ (s<1)]$. On aura comme au paragraphe 12

$$f_1(\mathrm{M}) < \mathrm{A}(1-s)^{-p}, \qquad f_3(\mathrm{M}) < \left(\frac{1}{s}-1\right)^{-p} \mathrm{A}_{n+2},$$

en posant

$$\mathrm{A}_n = \int_{\mathrm{OP}\leqq s^n} \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^p}.$$

On peut déterminer d'abord $s$ assez petit pour que

$$\mathrm{A}(1-s)^{-p} < \mathrm{A} + \frac{\varepsilon}{4},$$

puis $n$ assez grand pour que

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{s}-1\right)^{-p} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On aura alors

$$f_1(\mathrm{M}) + f_3(\mathrm{M}) < \mathrm{A} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\mathrm{E}_\varepsilon$ l'ensemble des points de D où l'on a $f(\mathrm{M}) \geqq \mathrm{A} + \varepsilon$; désignons par $\mathrm{E}_n$ la trace de E sur $\mathrm{I}_n$, par $\lambda_n$ la distribution fondamentale de $\mathrm{E}_n$ et par $\gamma_n$ l'énergie de cette distribution. On aura sur $\mathrm{E}_n$ : $f_2(\mathrm{M}) > \frac{\varepsilon}{2}$; donc

$$\int x f_2(\mathrm{M})\, d\lambda_n > \frac{\varepsilon}{2} \gamma_n.$$

Or

$$\int x f_2(\mathrm{M})\, d\lambda_n = \iint_{s^{n+2}<\mathrm{OP}\leqq s^{n-1}} \frac{x\, d\mu(\mathrm{P})\, d\lambda_n(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}^p} = \int_{s^{n+2}<\mathrm{OP}\leqq s^{n-1}} v(\mathrm{P})\, d\mu(\mathrm{P}),$$

en posant

$$v(\mathrm{P}) = \int \frac{x\, d\lambda_n(\mathrm{M})}{\mathrm{MP}^p}.$$

D'après les résultats du paragraphe 12, $v(\mathrm{P})$ est la plus petite limite du rapport $\frac{\mathrm{U}^{\lambda_n}(\mathrm{M})}{x l_p}$ lorsque le point M tend vers le point P de $\pi$. On a donc $v(\mathrm{P}) \leqq l_p^{-1}$ d'où

$$\frac{\varepsilon}{2}\gamma_n \leqq \frac{1}{l_p}(\mu_{n-1}+\mu_n+\mu_{n+1}),$$

en posant

$$\mu_n = \int_{\mathrm{I}_n} d\mu(\mathrm{P}).$$

Or la convergence de l'intégrale $\int \frac{d\mu(\mathrm{P})}{\mathrm{OP}^p}$ entraîne celle de la série $\sum \frac{\mu_n}{s^{np}}$, donc aussi celle de la série $\sum \frac{\gamma_n}{s^{np}}$. L'ensemble $\mathrm{E}_\varepsilon$ est effilé à l'origine.

En revenant à la fonction H(M), en nous rappelant que $\mathrm{A} = \gamma_0$, et en posant $\gamma = c + \gamma_0$, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2*b*. — *Si* $\gamma$ *est la plus petite limite de* $\frac{\mathrm{H}(\mathrm{M})}{x}$ *lorsque* M *tend vers* O, *l'ensemble* $\mathrm{E}_\varepsilon$ *des points où* $\mathrm{H}(\mathrm{M}) \geqq (\gamma+\varepsilon)x$ *est effilé à l'origine relativement à* D, *quel que soit* $\varepsilon > 0$.

*En chaque point de* $\mathrm{O}x$, *on a* $\mathrm{H}(\mathrm{M}) < \gamma x$.

La propriété d'effilement ne suffit pas ici à caractériser l'ensemble $\mathrm{E}_\varepsilon$. On verrait, comme au paragraphe 15, que l'ensemble $\mathrm{E}_\varepsilon$ est connexe, et d'un seul tenant avec $\pi$, tandis que $\Delta = \mathrm{D} - \mathrm{E}_\varepsilon$ est un domaine simplement connexe. On verrait aussi que le théorème 2*b* contient, pour $p = 2$, un résultat antérieurement démontré, à savoir que le rapport $\frac{\mathrm{H}(\mathrm{M})}{x}$ tend vers $\gamma$ lorsque M tend vers l'origine angulairement. Cependant ce résultat est valable pour $p > 2$.

L'application de la transformation de Kelvin aux théorèmes 1*b* et 2*b* nous donnerait des résultats analogues à ceux qui ont été obtenus au paragraphe 13 pour les potentiels.

## C. — Applications.

17. Soit $u(\mathrm{M})$ une fonction surharmonique positive dans D. On peut la mettre sous la forme

$$u(\mathrm{M}) = \mathrm{H}(\mathrm{M}) + \mathrm{U}^\mu(\mathrm{M}) = cx + x\int_\pi \frac{d\psi(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}^p} + \int_{\mathrm{D}} g(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\mu(\mathrm{P}),$$

$c$ étant une constante positive, $\psi(\mathrm{P})$ une répartition de masse positive dans $\pi$ et $\mu(\mathrm{P})$ une répartition de masse positive dans D. En groupant les résultats relatifs aux fonctions harmoniques et aux potentiels, nous obtenons facilement des propriétés de $u(\mathrm{M})$.

*a*. L'ensemble $E_\varepsilon$ des points de D où l'on a $u(M) \geqq (c+\varepsilon)x$ est effilé à l'infini relativement à D. Cet ensemble est en effet contenu dans la réunion des ensembles $E'_\varepsilon$ $\left[\text{défini par } H(M) \geqq \left(c+\frac{\varepsilon}{2}\right)x\right]$ et $E''_\varepsilon$ $\left[\text{défini par } U^\mu(M) \geqq \frac{\varepsilon}{2}x\right]$; et il est facile de voir que la réunion de deux ensembles effilés est encore un ensemble effilé. Comme on a évidemment $u(M) \geqq cx$, le nombre $c$ est la borne inférieure du rapport $\frac{u(M)}{x}$ dans D. On peut donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 1 *c*. — *Si c est la borne inférieure dans* D *du rapport* $\frac{u(M)}{x}$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a* $u(M) \geqq (c+\varepsilon)x$, *est effilé à l'infini relativement à* D.

*b*. Supposons
$$\liminf_{M \to 0} \frac{u(M)}{x} = \gamma < \infty.$$
Il en résulte que les quantités
$$\gamma' = \liminf_{M \to 0} \frac{H(M)}{x} \qquad \text{et} \qquad \gamma'' = \liminf_{M \to 0} \frac{U^\mu(M)}{x}$$
sont finies.

Donc l'ensemble $E'_\varepsilon$ des points où $H(M) \geqq \left(\gamma' + \frac{\varepsilon}{2}\right)x$ et l'ensemble $E''_\varepsilon$ des points où $U^\mu(M) \geqq \left(\gamma'' + \frac{\varepsilon}{2}\right)x$ sont effilés à l'origine. Il en résulte que l'ensemble des points où $u(M) \geqq (\gamma' + \gamma'' + \varepsilon)$ est aussi effilé à l'origine. Donc $\gamma' + \gamma'' \geqq \gamma$. D'autre part, pour $OM = r$ assez petit, on a
$$H(M) > \left(\gamma' - \frac{\varepsilon}{2}\right)x, \qquad U^\mu(M) > \left(\gamma'' - \frac{\varepsilon}{2}\right)x,$$
donc $u(M) > (\gamma' + \gamma'' - \varepsilon)x$ et par conséquent $\gamma' + \gamma'' \leqq \gamma$. Finalement $\gamma = \gamma' + \gamma''$.

THÉORÈME 2*c*. — *Si* $\liminf_{M \to 0} \frac{u(M)}{x} = \gamma < \infty$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a*
$$u(M) > (\gamma + \varepsilon)x,$$
*est effilé à l'origine relativement à* D.

L'application de la transformation de Kelvin aux théorèmes précédents nous donne les résultats suivants :

THÉORÈME 3 *c*. — *Si c est la borne inférieure du rapport* $\frac{OM^p}{x}u(M)$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a*
$$\frac{OM^p}{x}u(M) \geqq c + \varepsilon$$
*est effilé à l'origine relativement à* D.

THÉORÈME 4c. — *Si* $\liminf_{M \to \infty} \frac{OM^p}{x} u(M) = \gamma < \infty$, *alors l'ensemble des points de* D *où l'on a*

$$\frac{OM^p}{x} u(M) \geqq \gamma + \varepsilon$$

*est effilé à l'infini relativement à* D.

18. Les résultats du paragraphe 17 s'appliquent encore aux fonctions $u(M)$ surharmoniques dans D, pas nécessairement positives, mais représentables sous la forme

$$(5) \qquad u(M) = cx + x\int_\pi \frac{d\psi(P)}{MP^p} + \int_D g(M, P)\, d\mu(P),$$

$c$ étant une constante de signe quelconque, $\psi$ une répartition de masse positive dans $\pi$ et $\mu$ une répartition de masse positive dans D.

Pour qu'une fonction $u(M)$ surharmonique dans D soit représentable sous cette forme, il faut et il suffit que la fonction sousharmonique $v(M) = -u(M)$ satisfasse aux hypothèses du lemme de Phragmen et Lindelöf, à savoir :

*a*. $\limsup_{M \to P} v(M) \leqq 0$ en tout point P de $\pi$ à distance finie;

*b*. $\liminf_{r \to \infty} \frac{m(r)}{r} = \alpha < \infty$, en désignant par $m(r)$ la borne supérieure de $v(M)$ sur la demi-sphère $\Sigma_r$ [$OM = r$, $x > 0$].

Supposons en effet d'abord que $v(M)$ satisfasse à ces hypothèses. D'après le lemme classique de Phragmen et Lindelöf, que nous avons étendu à l'espace $R^p$ à $p$ dimensions [1], il existe une constante $j_p$ ne dépendant que de $p$, telle que l'on ait partout dans D :

$$v(M) < \alpha x j_p.$$

La fonction

$$u_1(M) = \alpha x j_p - v(M)$$

est donc surharmonique positive dans D, et peut se mettre sous la forme

$$u_1(M) = c_1 x + x\int_\pi \frac{d\psi(P)}{MP^p} + \int_D g(M, P)\, d\mu(P),$$

avec $c_1 \geqq 0$. On en déduit que $u(M) = -v(M)$ est bien de la forme (5) avec $c = c_1 - \alpha j_p$.

Réciproquement soit $u(M)$ de la forme (5). D'après ce que nous avons vu au paragraphe 17, l'ensemble des points de D, où l'on a $u(M) > (c + \varepsilon)x$, est effilé à l'infini relativement à D; le nombre $c$, qui n'est plus ici nécessairement

---

(1) *Voir* J. LELONG, *loc. cit.*

positif, est encore la borne inférieure de $\frac{u(M)}{x}$. Si l'on pose

$$v(M) = -u(M),$$

on a bien en tout point P de $\pi$ à distance finie

$$\limsup_{M \to P} v(M) \leqq 0.$$

Posons d'autre part

$$\mu(r) = \operatorname*{borne\,sup}_{OM=r} \frac{v(M)}{x} = -\operatorname*{borne\,inf}_{OM=r} \frac{u(M)}{x}.$$

On sait que $\mu(r)$ tend vers $-c$ lorsque $r$ tend vers l'infini. Or si $\mu(r) \leqq 0$, on a $v(M) \leqq 0$ pour $OM = r$, donc $m(r) \leqq 0$. Si $\mu(r) > 0$, on a

$$v(M) < x\mu(r) < r\mu(r), \qquad \text{donc} \quad \frac{m(r)}{r} < \mu(r).$$

On en déduit

$$\alpha = \liminf_{r \to \infty} \frac{m(r)}{r} < c^-,$$

en posant

$$c^- = \frac{1}{2}[\,|c| - c\,]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

19. Il suffit d'examiner les résultats précédents pour en déduire le théorème de M. Heins ([1]).

Soit $v(M)$ une fonction sousharmonique dans D et satisfaisant aux hypothèses $a$ et $b$ du lemme de Phragmen et Lindelöf. Posons

$$\beta = \operatorname{borne\,sup} \frac{v(M)}{x}.$$

D'après ce que nous venons de voir, $\beta$ est un nombre fini, et l'ensemble $E_\varepsilon$ des points de D où l'on a $v(M) < (\beta - \varepsilon)x$ est effilé à l'infini relativement à D.

*a*. Supposons $\beta > 0$.

On a tout d'abord $v(M) < \beta x$, donc $\frac{m(r)}{r} < \beta$. D'autre part l'ensemble $E_\varepsilon$ étant effilé à l'infini, ne peut contenir aucune suite infinie de calottes sphériques $S_{r_n,k}\left[OM = r_n,\ \frac{OM}{x} \leqq k\right]$ telle que $r_n \to \infty$. Car la puissance de la calotte $S_{r,k}\left[OM = r,\ \frac{OM}{x} \leqq k\right]$ est de l'ordre de $r^p$. Donc pour chaque valeur de $r$ assez

([1]) M. Heins, *On the Phragmen. Lindelöf principle* (*Trans. Ann. Math., Soc.*, t. 60, 1946, p. 238-244).

grande, il existe au moins un point M de $S_{r,k}$ n'appartenant pas à $E_\varepsilon$. En ce point M, on a $v(M) > (\beta - \varepsilon)x$, donc

$$\frac{m(r)}{r} > \frac{\beta - \varepsilon}{k} \qquad \text{et} \qquad \liminf \frac{m(r)}{r} > \frac{\beta - \varepsilon}{k}.$$

Mais comme $k$ est aussi voisin de 1 que l'on veut, et $\varepsilon$ arbitrairement petit, on en déduit

$$\liminf \frac{m(r)}{r} \geqq \beta.$$

Et puisque $\frac{m(r)}{r} < \beta$, on voit que le rapport $\frac{m(r)}{r}$ tend vers $\beta$ lorsque $r$ tend vers l'infini.

*b*. Supposons $\beta \leqq 0$.

On a tout d'abord $v(M) < \beta x$, donc $m(r) \leqq 0$. D'autre part l'ensemble $E_\varepsilon$ étant effilé à l'infini ne peut contenir aucune suite infinie de zones sphériques de la forme $S'_{r_n k}\left[OM = r_n, \frac{OM}{x} \geqq k\right]$ dont les rayons $r_n$ croîtraient indéfiniment; car la puissance de la zone $S'_{r,k}\left[OM = r, \frac{OM}{x} \geqq k\right]$ est de l'ordre de $r^p$. Donc, pour chaque valeur de $r$ assez grande, il existe au moins un point M sur chaque zone $S'_{r,k}$, où l'on a $v(M) > (\beta - \varepsilon)x$; en prenant $\varepsilon$ assez petit pour que $\beta - \varepsilon < 0$, on a $v(M) > (\beta - \varepsilon)\frac{r}{k}$; on en déduit $\frac{m(r)}{r} > \frac{\beta - \varepsilon}{k}$ et puisque $k$ est aussi grand que l'on veut, et $\varepsilon$ arbitrairement petit, on a $\liminf \frac{m(r)}{r} \geqq 0$, $m(r)$ étant négatif ou nul, on voit ainsi que le rapport $\frac{m(r)}{r}$ tend vers zéro.

Nous retrouvons ainsi le résultat de M. Heins : *Le rapport* $\frac{m(r)}{r}$ *tend vers* $\alpha$, *et le nombre* $\alpha$ *ne peut être que positif ou nul.*

En fait nous avons obtenu un résultat plus précis; puisque nous avons montré que le rapport $\frac{v(M)}{x}$ avait une pseudo-limite $\beta$, telle que $\alpha = \beta^+$.

La propriété des ensembles effilés démontrée au paragraphe 8 nous permet aussi de dire que le rapport $\frac{U(M)}{x}$ a une limite radiale finie $\beta$ excepté pour un ensemble de rayons découpant sur la sphère unité un ensemble de capacité extérieure nulle.

Remarquons enfin que, sous les hypothèses du lemme de Phragmen et Lindelöf, on a l'inégalité $v(M) \leqq \alpha x$, meilleure que l'inégalité démontrée primitivement.

20. Limitons-nous provisoirement au cas $p = 2$ et comparons les résultats

obtenus avec ceux que nous avions démontré antérieurement [1] en représentation conforme.

Soit $\Delta$ un domaine simplement connexe contenu dans le demi-plan $D(x > 0)$ de la variable $z = x + iy$. Nous avons résolu ailleurs le problème de la dérivée angulaire, pour un tel domaine; rappelons le résultat :

*La condition nécessaire et suffisante pour que dans la représentation conforme de $\Delta$ sur D, il existe une dérivée angulaire à l'infini, c'est que si l'on se donne une suite $R_n$ quelconque tendant vers l'infini, et si l'on pose*

$$\delta_n = \log \frac{R_{n+1}}{R_n}, \qquad \theta_n = \underset{\substack{z \in D - \Delta \\ R_n \leq |z| \leq R_{n+1}}}{\text{borne sup}} \frac{\pi}{2} - |\operatorname{Arg} z|,$$

*la série $\Sigma \theta_n \delta_n$ soit convergente.*

Nous allons montrer ici que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait dérivée angulaire à l'infini, c'est que* $D - \Delta$ *soit effilé à l'infini relativement à* D. On en déduira immédiatement la caractérisation géométrique des ensembles E effilés à l'infini et tels que $D - E$ soit un domaine simplement connexe.

Soit $\zeta = f(z)$ l'une des fonctions, définies dans D, qui représentent conformément D sur $\Delta$ de manière que $f(z) \to \infty$ lorsque $z \to \infty$. Supposons d'abord qu'il y ait dérivée angulaire à l'infini, c'est-à-dire que $\frac{f(z)}{z}$ ait une limite $\gamma$ non nulle lorsque $z$ tend vers l'infini.

Soit $z = \varphi(\zeta)$ la fonction inverse de $f(z)$, $H(\zeta)$ sa partie réelle. Posons

$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Nous pouvons prolonger $H(\zeta)$ dans D en posant

$$u(\zeta) = H(\zeta) \quad \text{si } \zeta \in \Delta, \qquad u(\zeta) = 0 \quad \text{si } \zeta \in D - \Delta.$$

On vérifie facilement que la fonction $u(\zeta)$ ainsi obtenue est sousharmonique dans D. Or $\frac{u(\zeta)}{\xi}$ a pour limite angulaire $c = \frac{1}{\gamma}$; $c$ est d'ailleurs la borne supérieure de $\frac{H(\zeta)}{\xi}$ dans D. La fonction $v(\zeta) = c\xi - u(\zeta)$ est surharmonique positive dans D et satisfait à

$$\liminf_{\zeta \to \infty} \frac{v(\zeta)}{\xi} = 0.$$

Dans l'ensemble des points où $v = c\xi$, c'est-à-dire $D - \Delta$, est effilé à l'infini relativement à D.

Réciproquement, supposons $D - \Delta$ effilé à l'infini relativement à D. La frontière $\Gamma$ de $\Delta$ étant un continu n'a pas de points irréguliers. On peut donc

---

[1] J. FERRAND, *C. R. Ac. Sc.*, t. 219, 1944, p. 507-508 et *Bull. Soc. Math.*, t. 69, 1945, p. 165-174.

déterminer une répartition $\mu$ sur $\Gamma$ telle que $U^\mu(\zeta) = \xi$ dans $D - \Delta$; la fonction $u(\zeta) = \xi - U^\mu(\zeta)$ est harmonique positive dans $\Delta$, nulle sur sa frontière. Elle est donc de la forme $u(\zeta) = \gamma H(\zeta)$; $\gamma$ est une constante positive non nulle, car la plus grande limite du rapport $\frac{u(\zeta)}{\xi}$ est égale à 1, puisque $\liminf \frac{U^\mu(\zeta)}{\xi} = 0$. On en déduit que le rapport $\frac{H(\zeta)}{\xi}$ a pour limite angulaire $\frac{1}{\gamma}$, donc que la dérivée angulaire est égale à $\gamma$, et non nulle. C. Q. F. D.

## IV. — Étude des limites de $u(M)$.

### A. — Étude de $U^\mu(M)$.

21. Au lieu d'étudier les fonctions $U^\mu(M)$ et $H(M)$ elles-mêmes, nous allons voir qu'il est plus commode d'étudier les rapports

$$\frac{OM}{x} U^\mu(M) \quad \text{et} \quad \frac{OM}{x} H(M).$$

Définition. — *Nous dirons qu'une suite $M_n$ est régulière au point A si elle converge vers A et si le rapport $\frac{AM_n}{AM_{n+1}}$ reste borné supérieurement.*

Théorème 5 *a*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite $M_n$ de points de D régulière à l'origine et telle que le rapport $\frac{OM_n}{x_n} U^\mu(M_n)$ reste borné (resp. tende vers zéro), c'est que la quantité $\frac{1}{R^{p-1}} \int_{OP<R} \xi \, d\mu(P)$ reste bornée (resp. tende vers zéro) lorsque R tend vers zéro.*

1° *La condition est nécessaire.* — Supposons

$$\frac{OM_n}{OM_{n+1}} < \frac{1}{s} \quad (s<1) \qquad \text{et} \qquad \frac{OM_n}{x_n} U^\mu(M_n) < k$$

pour $n$ assez grand ($n > N$).

Dans chaque intersphère $I_n$ ($s^{n+1} < OM \leqq s_n$), il existe au moins un point de la suite; en supprimant au besoin certains points de la suite, nous pouvons supposer que ce point est $M_n$. Posons

$$\mu_n = \int_{I_n} \xi \, d\mu(P).$$

D'après les inégalités (3) du paragraphe 3 nous avons

$$\frac{U^\mu(M)}{x l_p} > \int \frac{\xi \, d\mu(P)}{(OM+OP)^p} > \int_{I_n} \frac{\xi \, d\mu(P)}{(OM+OP)^p},$$

$$OM_n \frac{U^\mu(M_n)}{x_n l_p} > \frac{s^{n+1}}{(2s^n)^p} \mu_n,$$

donc, pour $n > N$

$$\mu_n < \frac{2^p k}{s l_p} s^{n(p-1)}.$$

On en déduit facilement que la quantité

$$\mu(r) = \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$$

est bornée par une quantité de la forme $Akr^{p-1}$ pour $r < s^N$, A étant une constante ne dépendant que de $s$ et $p$. Donc $\frac{\mu(r)}{r^{p-1}}$ reste borné ou tend vers zéro selon que $\frac{OM_n}{x_n} U^\mu(M_n)$ reste borné ou tend vers zéro.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons

$$\mu(r) = \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P) \leqq K r^{p-1} \qquad \text{pour} \quad r > R.$$

Soit $s < 1$. On aura

$$\mu_n = \int_{I_n} \xi \, d\mu(P) \leqq \mu(s^n) \leqq K s^{n(p-1)}$$

pour $n$ assez grand ($n > N$).

Supposons M dans l'intersphère $I_n$ ($s^{n+1} < OM \leqq s^n$) et décomposons $U^\mu(M)$ en $U_0^\mu + U_1^\mu + U_2^\mu + U_3^\mu$, $U_0^\mu$ désignant le potentiel des masses contenues dans $OP > s^N$, $U_1^\mu$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $s^N \geqq OP > s^{n-1}$, $U_2^\mu$ le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $J_n$ ($s^{n-1} \geqq OP > s^{n+2}$), et $U_3^\mu$ le potentiel des masses contenues dans la sphère $OP \leqq s^{n+2}$. Nous poserons

$$\alpha = \int_{OP>s^N} \frac{\xi \, d\mu(P)}{OP^p}.$$

Nous aurons alors, d'après les inégalités (3)

$$\frac{U_0^\mu(M)}{x l_p} < \int_{OP>s^N} \frac{\xi \, d\mu(P)}{(OP - OM)^p} < \frac{\alpha}{(1- \ )s^p},$$

$$\frac{U_1^\mu(M)}{x l_p} < \int_{s^{n-1}<OP\leqq s^N} \frac{\xi \, d\mu(P)}{(OP - OM)^p} < \sum_{i=N}^{n-2} \frac{\mu_i}{(s^{i+1} - s^n)^p},$$

d'où

$$\frac{U_1^\mu(M)}{x l_p} < K \sum_{i=N}^{n-2} \frac{s^{i(p-1)}}{s^{p(i+1)}(1-s)^p} < \frac{K}{(1-s)^{p+1} s^{p+n-2}}$$

et enfin

$$\frac{OM U_1^\mu(M)}{x} < \frac{K}{s^{p-1}(1-s)^{p+1}}.$$

De même

$$\frac{U_3^\mu(M)}{x l_p} \leq \int_{OP \leq s^{n+2}} \frac{\xi \, d\mu(P)}{(OM - OP)^p} \leq \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{\mu_i}{(s^{n+1} - s^i)^p},$$

d'où

$$\frac{OMU_3^\mu(M)}{x l_p} \leq \frac{K s^{p-2}}{(1-s)^{p+1}}.$$

On a ainsi

$$\frac{OM}{x}(U_0^\mu + U_1^\mu + U_3^\mu) < \frac{\alpha s^n}{(1-s)^p} + \frac{K(s^{p-2} + s^{1-p})}{(1-s)^{p+1}}.$$

Il reste à étudier le potentiel $U_2^\mu$. Soit R compris entre $s^n$ et $s^{n+1}$. Désignons par $\lambda_R$ la répartition fondamentale relative à la demi-sphère $\Sigma_R(OM = R, x > 0)$. On aura

$$\int U_2^\mu(M)\, d\lambda_R(M) = \int_{J_n} U^{\lambda_R}(P)\, d\mu(P) \leq \int_{J_n} \xi \, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

donc

$$\int U_2^\mu \, d\lambda_R \leq 3 K s^{(p-1)(n-1)}.$$

Or

$$\int \xi \, d\lambda_R = \frac{R^p}{l_p} \geq \frac{s^{p(n+1)}}{l_p}.$$

Il existe donc au moins un point M de $\Sigma_R$, où l'on a

$$\frac{U_2^\mu(M)}{x} < 3 K l_p \frac{s^{(n-1)(p-1)}}{s^{p(n+1)}},$$

donc

$$\frac{OM}{x} U_2^\mu(M) < \frac{3 K l_p}{s^{2p-1}}.$$

En ce point M, on aura

$$\frac{OM}{x} U^\mu(M) < \frac{\alpha s^n}{(1-s)^p} + \beta K, \qquad \beta = \frac{3 l_p}{s^{2p-1}} + \frac{s^{p-2} + s^{1-p}}{(1-s)^{p+1}}.$$

Ceci montre que si K est fixe, $\frac{OM}{x} U^\mu(M)$ est borné.

Si la quantité $\frac{\mu(r)}{r^{p-1}}$ tend vers zéro avec $r$, on peut déterminer N assez grand pour que $\beta K < \frac{\varepsilon}{2}$, puis, N étant choisi, prendre $n$ assez grand pour que $\frac{\alpha s^n}{(1-s)^p} < \frac{\varepsilon}{2}$. On aura alors

$$\frac{OM}{x} U^\mu(M) < \varepsilon.$$

Donc, si $\frac{\mu(r)}{r^{p-1}}$ reste borné (resp. tend vers zéro) on peut trouver au moins un point M sur chaque demi-sphère $\Sigma_R$ ($OM = R$, $x > 0$) tel que $\frac{OM}{x} U^\mu(M)$ reste borné (resp. tend vers zéro). C. Q. F. D.

22. Théorème 6*a*. — *Si la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}}\int_{OP<r} \xi\, d\mu(p)$ *tend vers zéro avec r, l'ensemble* $E_\varepsilon$ *des points de* D *où l'on a* $\frac{OM}{x} U^\mu(M) \geqq \varepsilon$ *est semi-effilé à l'origine; et l'ensemble* $F_\varepsilon$ *des points de* D *où l'on a* $U^\mu(M) \geqq \varepsilon$ *est raréfié extérieurement à l'origine.*

Choisissons une constante $s < 1$ et désignons par $E_n$ la trace de $E_\varepsilon$ sur l'intersphère $I_n$ ($s^{n+1} < OM \leqq s^n$), par $F_n$ la trace de $F_\varepsilon$ sur $I_n$. Soit $\lambda_n$ la répartition fondamentale de $E_n$ d'énergie $\gamma_n$, $\nu_n$ celle de $F_n$, de charge totale $\nu_n$.

Décomposons $U^\mu$ en $U_0^\mu + U_1^\mu + U_2^\mu + U_3^\mu$ comme au paragraphe précédent. On sait que pour $n$ assez grand, on a

$$\frac{OM}{x}(U_0^\mu + U_1^\mu + U_3^\mu) \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{donc} \quad U_0^\mu + U_1^\mu + U_3^\mu \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura donc $U_2^\mu(M) > \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{OM}$ sur $E_n$ et $U_2^\mu(M) > \frac{\varepsilon}{2}$ sur $F_n$. On en déduit

$$\int U_2^\mu\, d\lambda_n > \frac{\varepsilon}{2s^n}\int x\, d\lambda_n(M) = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\gamma_n}{s^n}$$

or

$$\int U_2^\mu\, d\lambda_n = \int_{J_n} U^{\lambda_n}\, d\mu \leqq \int_{J_n} \xi\, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

et puisque $\frac{\mu_n}{s^{n(p-1)}}$ tend vers zéro, on en déduit que $\frac{\gamma_n}{s^{np}}$ tend vers zéro; donc $E_\varepsilon$ est semi-effilé en O. De même

$$\int U_2^\mu\, d\nu_n > \frac{\varepsilon}{2}\nu_n.$$

or

$$\int U_2^\mu\, d\nu_n = \int_{J_n} U^{\nu_n}\, d\mu \leqq \int_{J_n} \xi\, d\mu(P) = \mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n+1}$$

et puisque $\frac{\mu_n}{s^{n(p-1)}}$ tend vers zéro, on en déduit que $\frac{\nu_n}{s^{n(p-1)}}$ tend aussi vers zéro; donc $F_\varepsilon$ est raréfié extérieurement en O. C. Q. F. D.

23. Les résultats relatifs au point à l'infini sont tout à fait analogues. Nous nous contenterons de les énoncer.

DÉFINITION. — *Nous dirons que la suite* $M_n$ *est régulière à l'infini si* $M_n$ *tend vers l'infini de manière que le rapport* $\frac{OM_{n+1}}{OM_n}$ *reste borné.*

THÉORÈME 7*a*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite* $M_n$ *régulière à l'infini et telle que le rapport* $\frac{OM_n}{x_n} U^\mu(M_n)$ *reste borné (resp. tende vers zéro) c'est que la quantité*

$$\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$$

*reste bornée (resp. tende vers zéro) lorsque r tend vers l'infini.*

THÉORÈME 8*a*. — *Si la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$ *tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini, alors l'ensemble* $E_\varepsilon$ *des points où l'on a*

$$\frac{OM}{x} U^\mu(M) > \varepsilon$$

*est semi-effilé à l'infini, et l'ensemble* $F_\varepsilon$ *des points où l'on a* $U^\mu > \varepsilon$ *est raréfié extérieurement à l'infini.*

24. DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un point* A *de* $\pi$ *est régulier pour la répartition* $\mu$ *si la quantité*

$$\frac{\mu(r, A)}{r^{p-1}} = \frac{1}{r^{p-1}} \int_{AP<r} \xi \, d\mu(P)$$

*tend vers zéro avec r.*

LEMME. — *Si* $U^\mu \not\equiv \infty$, *l'ensemble des points de* $\pi$ *qui ne sont pas réguliers pour la répartition* $\mu$ *est de mesure* $p-1$ *dimensionnelle nulle.*

Il nous suffit de démontrer que l'ensemble des points irréguliers contenus dans la sphère $OM \leqq R$ est de mesure nulle quel que soit R. Or puisque $U^\mu \not\equiv \infty$, on sait que l'intégrale $\int_{OP \leq 2R} \xi \, d\mu(P)$ est convergente. Si nous considérons $\xi \, d\mu(P)$ comme une répartition de masse positive, nous pouvons lui appliquer le lemme de Cartan-Ahlfors [1].

Posons

$$\mu(r, A) = \int_{AP \leq r} \xi \, d\mu(P).$$

(1) *Voir* NEVANLINNA, *loc. cit.*, p. 117.

Soit E la région définie par $O \leqq x \leqq \varepsilon$, $OM \leqq R$. La masse totale répartie sur E, soit

$$\mu(E) = \int_E \xi \, d\mu(P)$$

tend vers zéro avec $\varepsilon$. D'aprés le lemme de Cartan-Ahlfors, si $h(r)$ est une fonction continue croissante quelconque définie pour $0 \leqq r \leqq \infty$ et satisfaisant à $h(0) = 0$, $h(\infty) > \mu(E)$, on aura $\mu(r, A) \leqq h(r)$ en tout point de E excepté au plus sur un ensemble de points A pouvant être recouvert par une famille de sphères dont les rayons $r_n$ satisfont à $\Sigma h(r_n) < m_p$, $m_p$ étant une constante ne dépendant que de $p$.

Nous pouvons prendre

$$h(r) = \frac{r^{p-1}}{\sqrt{\mu(E)}}.$$

Si l'on fait tendre $\varepsilon$ vers zéro, on en déduit que pour tout point A de $\pi$ tel que $OA \leqq R$, excepté au plus un ensemble de mesure $p-1$ dimensionnelle nulle, la quantité $\frac{\mu(r, A)}{r^{p-1}}$ tend vers zéro avec $r$. C. Q. F. D.

THÉORÈME 9*a*. — *Si* $U^\mu \not\equiv \infty$, *l'ensemble des points de* D *où l'on a* $U^\mu(M) \geqq \varepsilon$ *est raréfié extérieurement en presque tout point* A *de* $\pi$, (c'est-à-dire : excepté au plus sur un ensemble de mesure $p-1$ dimensionnelle nulle) *quel que soit* $\varepsilon > 0$.

Ce résultat est une simple conséquence des théorèmes 6*a* et 9*a*.

25. Certains des résultats que nous venons d'énoncer sont susceptibles de réciproques.

1° *Réciproque du théorème* 6*a*. — Si l'ensemble E est semi-effilé à l'origine, il existe une répartition $\mu$ de $\mathfrak{M}_E^e$ telle que $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$ tende vers zéro avec $r$, et que $\frac{OM\,U^\mu(M)}{x}$ reste supérieur à 1 sur E, ou même tende vers l'infini lorsque M tend vers O sur E, en négligeant au plus un ensemble de points de E de capacité extérieure nulle.

2° *Réciproque du théorème* 8*a*. — Si l'ensemble E est semi-effilé à l'infini, il existe une répartition $\mu$ de $\mathfrak{M}_E^e$ telle que $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} \xi \, d\mu(P)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{r}$, et que $\frac{OM\,U^\mu(M)}{x}$ reste supérieur à 1 sur E, ou même tende vers l'infini lorsque M tend vers O sur E, en négligeant au plus un ensemble de points de E de capacité extérieure nulle.

Ces deux réciproques se démontrent comme celles du paragraphe 13.

3° *Réciproque* 9*a*. — Si l'ensemble $E_0$, contenu dans $\pi$, est de mesure $p-1$ dimensionnelle nulle, il existe une répartition $\mu$ de $\mathcal{M}$ telle que tout point de $E_0$ soit irrégulier pour cette répartition.

Supposons $E_0$ borné (sinon nous procéderions par passage à la limite, en considérant la trace de $E_0$ sur la sphère $OM \leqq R$). Nous pouvons enfermer $E_0$ dans une famille dénombrable $\mathcal{F}_i$ de sphères $\mathcal{S}_i^{(n)}$ dont les rayons $R_i^{(n)}$ satisfont à

$$\sum_{n=1}^{\infty} [R_i^{(n)}]^{p-1} < \varepsilon_i.$$

Nous prendrons pour $\varepsilon_i$ le terme général d'une série positive convergente.

Dans chaque sphère $\mathcal{S}_i^{(n)}$ considérons la calotte $T_i^{(n)}$ définie par $x > \frac{1}{2} R_i^{(n)}$, et sur cette calotte répartissons de façon quelconque la masse $\mu_i^{(n)} = [R_i^{(n)}]^{p-2}$. On aura

$$\frac{1}{2}[R_i^{(n)}]^{p-1} \leqq \int_{T_i^{(n)}} \xi \, d\mu(P) \leqq [R_i^{(n)}]^{p-1}.$$

La répartition totale de masse obtenue en recommençant l'opération pour chaque valeur de $i$ et de $n$, satisfait à

$$\int \xi \, d\mu(P) < \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

On a donc tout d'abord $U^\mu \not\equiv \infty$.

Soit A un point quelconque de $E_0$. Désignons par $\mathcal{S}_i$ une sphère de la famille $\mathcal{F}_i$ contenant A, par $R_i$ son rayon. La calotte $T_i$ correspondante est contenue dans l'intersphère $\frac{R_i}{2} < AM < 2R_i$.

On a donc, avec les notations du paragraphe 24

$$\mu(2R_i, A) > \int_{T_i} \xi \, d\mu > \frac{1}{2} R_i^{p-1},$$

ce qui montre que A est irrégulier pour la répartition $\mu$. C. Q. F. D.

### B. — Étude de H(M) et de $u$(M).

26. Rappelons tout d'abord les résultats connus (extension du théorème de Fatou à l'espace $R^p$) [1].

Si la fonction H(M) est harmonique positive dans le demi-espace D ($x > 0$), elle a une limite angulaire finie en presque tout point A de $\pi$.

---

[1] *Voir* PRIVALOFF, *Les problèmes limites de la théorie des fonctions harmoniques et sousharmoniques* (*Rec. Math.*, Moscou, 3 N. S., 1938, p. 3-24; résumé français, p. 24-25). On passe facilement du cas du domaine sphérique, considéré par Privaloff, au cas du demi-espace, étudié ici.

La démonstration est fondée sur la représentation intégrale de H(M) [formule (2)]. Mais, par analogie avec ce qui a été fait pour les potentiels (§§ 21 et 22), on peut compléter ce résultat et démontrer successivement les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5 *b*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite* $M_n$ *régulière en* O *et telle que le rapport* $\frac{OM_n}{x_n} H(M_n)$ *tende vers zéro, c'est que la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} d\mu(P)$ *tende vers zéro avec r.*

THÉORÈME 6 *b*. — *Si la quantité* $\frac{1}{r^{p-1}} \int_{OP<r} d\mu(P)$ *tend vers* $\gamma$ *lorsque r tend vers zéro, alors* H(M) *tend vers* $\frac{1}{2} k_p \gamma$ *lorsque* M *tend vers* O *angulairement, et l'ensemble défini par* $\left| H(M) - \frac{1}{2} k_p \gamma \right| \geqq \varepsilon$ *est raréfié extérieurement en* O, *quel que soit* $\varepsilon > 0$.

THÉORÈME 9 *b*. — *En presque tout point* A *de* $\pi$ *la fonction* H(M) *a une limite angulaire finie* $\gamma$ *et l'ensemble défini par* $|H(M) - \gamma| > \varepsilon$ *est raréfié extérieurement en* A.

Le théorème 5 *b* se démontre comme le théorème 5 *a*, avec les mêmes modifications qui permettaient de passer du théorème 1 *a* (§ 11) au théorème 1 *b* (§ 14).

Pour démontrer 6 *b*, on décompose d'abord $\mu$ en la somme d'une répartition de densité constante $\gamma$ dans $\pi$, et d'une répartition $\mu'$ de densité nulle en O. La répartition $\mu'$ n'est plus nécessairement positive, mais elle est bornée sur tout ensemble borné, et on peut lui appliquer le théorème 5 *b* de même que les raisonnements faits au paragraphe 22 pour les potentiels.

Enfin le théorème 9 *b* découle de 5 *b* et 6 *b*, si l'on sait qu'une distribution de masse positive a une densité finie excepté au plus sur un ensemble de mesure nulle.

De ces résultats, nous pouvons déduire le corollaire suivant, nécessaire pour la suite :

COROLLAIRE. — *Si la fonction* H(M) *est harmonique positive et bornée dans* D, *et si, en presque tout point* A *de* $\pi$ *il existe une suite* $M_n$ *régulière et telle que* $\frac{AM_n}{x_n} H(M_n)$ *tende vers zéro, alors* H(M) *est identiquement nulle.*

En effet la fonction H(M) possède alors une limite angulaire nulle en presque tout point A de $\pi$. Étant bornée, elle est identiquement nulle.

27. En groupant les résultats du paragraphe 26 avec ceux des paragraphes 21 et 22, on obtient des propriétés des fonctions surharmoniques positives dans D; en particulier le

THÉORÈME 9*c*. — *Si la fonction* $u(M)$ *est surharmonique positive dans* D, *en presque tout point* A *de* $\pi$, *il existe une constante* $\gamma$ *telle que l'ensemble défini par* $|u(M)-\gamma|\geqq\varepsilon$ *soit raréfié extérieurement en* A, *et que l'ensemble défini par* $|u(M)-\gamma|>\varepsilon\frac{AM}{x}$ *soit semi-effilé en* A.

On peut en déduire, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 8, que l'ensemble des rayons issus de A sur lesquels il existe une suite $M_n$ régulière en A et telle que la suite $u(M_n)$ n'admette pas $\gamma$ pour point d'accumulation, est un ensemble J de rayons.

### C. — APPLICATION AUX DISTRIBUTIONS CAPACITAIRES.

28. Soit E un ensemble quelconque contenu dans D. Nous appellerons *distribution capacitaire intérieure* (*resp. extérieure*) de E la distribution $\mu$ (si elle existe) de $\mathfrak{M}_E^i$ (resp. $\mathfrak{M}_E^e$) telle que $U^\mu=1$ excepté au plus sur un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_E^i$ (resp. $\mathcal{E}_E^e$). On aura donc $U^\mu=1$ en tout point de E excepté au plus sur un ensemble de points de E de capacité intérieure (extérieure) nulle. Or on sait (§ 24, corollaire) que l'ensemble des points défini par $U^\mu\geqq\varepsilon$, est raréfié extérieurement en presque tout point de $\pi$. Il en résulte que E, somme d'un ensemble de capacité intérieure (resp. extérieure) nulle, et d'un ensemble raréfié extérieurement en presque tout point de $\pi$, est lui-même raréfié intérieurement (resp. extérieurement) en presque tout point de $\pi$.

Réciproquement supposons E raréfié intérieurement (resp. extérieurement) en presque tout point de $\pi$. Nous allons montrer que E est susceptible d'une distribution capacitaire intérieure (resp. extérieure).

Considérons une suite croissante de domaines $D_k$ épuisant D et désignons par $F_k$ la trace de E sur $D_k$. $F_k$ étant strictement intérieur à D est susceptible d'une distribution capacitaire intérieure (resp. extérieure) $\mu_k$. La suite $U^{\mu_k}$ est croissante et bornée; elle a pour limite une fonction surharmonique $u(M)$ comprise entre zéro et 1. On aura $u(M)=1$ en tout point de E excepté un ensemble de capacité intérieure (extérieure) nulle. Nous allons montrer, en tenant compte de l'hypothèse faite sur E, que $u(M)$ se réduit à un potentiel.

Posons

$$u(M)=H(M)+U^\mu(M),$$

$H(M)$ étant une fonction harmonique positive dans D et $U^\mu(M)$ un potentiel de masse positive. Soit A un point de $\pi$ où E est raréfié intérieurement (resp. extérieurement). Désignons par $E_n$ la trace de E sur l'intersphère $I_n$ ($s^{n+1}<AM\leqq s^n$) ($s<1$) et par $\lambda_n$ la distribution fondamentale intérieure (resp. extérieure) relative à $E_n$, de charge totale $\lambda_n$. E étant raréfié, nous pouvons déterminer N tel que, $\varepsilon$ étant donné, $n \geqq N$ entraîne $\lambda_n < \varepsilon s^{n(p-1)}$. On aura alors

$$\lambda_n \geqq \int_{E_n} U^{\mu_k}\, d\lambda_n = \int U^{\lambda_n}\, d\mu_k \geqq \int_{I_n} x\, d\mu_k = \mu_{k,n}.$$

Donc, pour $n \geqq N$, on aura

$$\mu_{k,n} < \varepsilon s^{n(p-1)},$$

ce qui montre que $\frac{\mu_{k,n}}{s^{n(p-1)}}$ tend uniformément vers zéro, quel que soit $k$, lorsque $n$ tend vers l'infini.

Supposons M dans $I_n$ et décomposons $U^{\mu_k}$ en $U_1^{\mu_k} + U_2^{\mu_k}$, $U_1^{\mu_k}$ étant le potentiel des masses contenues dans l'intersphère $J_n = I_n + I_{n-1} + I_{n+1}$, et $U_2^{\mu_k}$ le potentiel des masses extérieures à $J_n$. En reprenant le raisonnement du paragraphe 21, on voit que $U_2^{\mu_k}$ tend uniformément vers zéro, donc pour $n$ assez grand, on aura $U_2^{\mu_k} < \varepsilon$, quel que soit $k$.

D'autre part, si $\lambda'_R$ est la répartition fondamentale relative à la demi-sphère $\Sigma_R$ (AM $=$ R, $x > 0$) on a

$$\int U_1^{\mu_k}\, d\lambda'_R = \int_{J_n} U^{\lambda'_R}\, d\mu_k \leqq \int_{J_n} x\, d\mu_k = \mu^{k,n-1} + \mu^{k,n+1} + \mu^{k,n},$$

donc pour $n \geqq N + 1$ :

$$\int U_1^{\mu_k}\, d\lambda'_R \leqq 3\varepsilon s^{n(p-1)}.$$

Pour $n$ assez grand, quel que soit $k$, on aura

$$\int U^{\mu_k}\, d\lambda'_R \leqq \varepsilon\lambda'_R + 3\varepsilon s^{n(p-1)} = K\varepsilon s^{n(p-1)},$$

en posant $K = 3 + \frac{2h_{p-1}}{l_p h_p}$, et en supposant $s^{n+1} < R \leqq s$. A la limite $u(M)$ satisfait donc, pour $n$ assez grand, à

$$\int u\, d\lambda'_R \leqq K\varepsilon s^{n(p-1)}.$$

Puisque $H(M) \leqq u(M)$ il existe donc sur chaque $\Sigma_R$ ($s^{n+1} < R \leqq s_n$) au moins un point M tel que

$$H(M) \leqq K\varepsilon \frac{l_p h_p}{2 s^{p-1} h_{p-1}}.$$

Il en résulte que le minimum $m(R)$ de $H(M)$ sur $\Sigma_R$ tend vers zéro avec R. Ceci ayant lieu en presque tout point A de $\pi$, on a $H(M) \equiv 0$. C. Q. F. D.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Pour qu'un ensemble* E *de* D *soit susceptible d'une distribution capacitaire intérieure (resp. extérieure) relativement à la fonction de Green de* D, *il faut et il suffit qu'il soit raréfié intérieurement (resp. extérieurement) en presque tout point* A *de* $\pi$.

29. Dans le cas où E ne satisfait pas à l'hypothèse du théorème précédent, il existe toujours une fonction $u(M)$ surharmonique positive dans D, et telle que $u(M) = 1$ excepté au plus pour un ensemble de mesure nulle pour toute distribution de $\mathcal{E}_E^i$ (resp. $\mathcal{E}_E$). Nous allons étudier cette fonction : elle est la somme d'un potentiel de Green $U^\mu(M)$ et d'une fonction harmonique $H(M)$. Le raisonnement fait au paragraphe 28 montre que $H(M)$ tend vers zéro lorsque M converge vers un point de $\pi$ où E est raréfié intérieurement (resp. extérieurement). Soit $E_0$ l'ensemble des points de $\pi$ où E n'est pas raréfié. Nous allons montrer que $H(M)$ a pour limite angulaire 1 en presque tout point de $E_0$. En effet l'ensemble défini par $U^\mu(M) > \varepsilon$ est raréfié en presque tout point de $\pi$; donc l'ensemble défini par $H(M) > 1 - \varepsilon$ n'est raréfié en presque aucun point de $E_0$. Or $H(M)$ a une limite angulaire $\gamma$ en presque tout point A de $\pi$, et l'ensemble défini par $H(M) > \gamma - \varepsilon$ est raréfié en A. Donc $\gamma = 1$ en presque tout point de $E_0$. C. Q. F. D.

Les deux propriétés établies pour $H(M)$ montrent que $H(M)$ est identique à la mesure harmonique extérieure de $E_0$ dans D.

*Application.* — Supposons E fermé. Alors $u(M)$ représente la mesure harmonique de E dans D — E.

THÉORÈME. — *Si l'ensemble* E *est fermé, la mesure harmonique de* E *dans* D — E *est la somme de la mesure harmonique dans* D *de l'ensemble* $E_0$ *des points de* $\pi$ *où* E *n'est pas raréfié, et d'un potentiel de la fonction de Green de* D.