ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. ZAMANSKY

Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 19-93

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__19_0>

CLASSES DE SATURATION

DE

CERTAINS PROCÉDÉS D'APPROXIMATION

DES

SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS CONTINUES

ET APPLICATIONS

A QUELQUES PROBLÈMES D'APPROXIMATION

PAR M. M. ZAMANSKY.

INTRODUCTION.

Le problème particulier qui fut à l'origine de ce travail consistait à trouver un exemple de classe de saturation attachée à un procédé d'approximation. Le problème a été posé par M. Favard (1) et nous donnons quelques réponses dont celle relative au procédé de Fejér. On sait que ce procédé ne peut donner d'approximation meilleure que $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Nous avons alors cherché quelle était l'approximation fournie par les sommes de Fejér d'une fonction continue périodique f, en un point, lorsque la meilleure approximation trigonométrique était $O\left(\frac{1}{n}\right)$. L'importance de cette classe de fonctions a été mise en évidence en 1945 par M. Zygmund.

Dans la solution de ce problème nous avons utilisé d'une part les propriétés de la suite des dérivées de polynomes trigonométriques convergeant uniformément vers f et d'autre part une méthode de calcul. Nous avons appliqué ces propriétés et cette méthode à quelques autres problèmes. La solution de certains d'entre eux résulte de la connaissance de classes de saturation.

Le théorème de M. S. Bernstein sur la majoration de la dérivée d'un polynome trigonométrique intéresse l'ensemble de ces polynomes. Lorsqu'il s'agit

(1) *Voir* par exemple *Colloque d'Analyse harmonique* (Publications du C. N. R. S., Paris).

d'une classe particulière de polynomes trigonométriques il peut être précisé. Ainsi l'hypothèse $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne $|P'_n| = O(\log n)$, et ce dernier ordre de grandeur peut effectivement être le meilleur; mais $|P''_n| = O(n)$ alors que le théorème de Bernstein donnerait seulement $|P''_n| = O(n \log n)$.

Les propriétés des dérivées de sommes trigonométriques convenablement choisies ont donné une autre condition nécessaire et suffisante pour que f fût approchée à $O\left(\frac{1}{n}\right)$ près par ses sommes de Fejér, à savoir que la fonction conjuguée $\tilde{f}$ appartînt à la classe Lip 1. Nous en avons déduit la condition pour que $\tilde{f} \in$ Lip 1, exprimée par une intégrale portant sur f.

Nous indiquons aussi les classes de saturation attachées à d'autres procédés d'approximation. En introduisant des différences d'ordre pair et symétriques, nous obtenons un procédé d'approximation auquel correspond une approximation de saturation $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, p étant un entier positif donné. De leur étude nous avons déduit une infinité de conditions toutes équivalentes permettant de reconnaître que la meilleure approximation d'ordre n, $E_n(f)$ est $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$.

Nous avons montré que les procédés obtenus par les moyennes de Cesaro d'ordre entier possèdent la même classe de saturation que celle attachée au procédé de Fejér. Enfin le procédé de Jackson a permis, une fois sa classe de saturation déterminée, d'indiquer deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(x)$ possédât une dérivée $f'(x)$ qui appartînt à la classe Lip 1, condition exprimée à partir de $f(x)$ seulement et dont l'une est que $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ fût bornée uniformément en x et h.

Dans la troisième Partie, nous avons appliqué la méthode précédente à divers problèmes. En particulier dans l'hypothèse où f est continue, nous généralisons le théorème de Young qui donne la condition nécessaire et suffisante de convergence de la série conjuguée lorsque f est à variation bornée, nous indiquons la condition nécessaire et suffisante de convergence de la série de Fourier à $O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ près $(0 < \alpha \leqq 1)$ exprimée au moyen des dérivées des sommes de Fourier, et nous donnons la solution du problème des dérivées d'ordre non entier.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. Classes de fonctions Lip α, C_A. — Lorsque $f(x)$ satisfait uniformément à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha (0 < \alpha \leqq 1)$, c'est-à-dire lorsque $\dfrac{|f(x)-f(x')|}{|x-x'|^\alpha}$ est borné uniformément en x et x', nous écrirons $f \in \text{Lip}.\alpha$.

Nous désignerons par C_A la classe des fonctions telles que

$$\left| \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} \right|$$

soit uniformément borné en x et t par A.

2. Polynomes ou sommes trigonométriques. — Sauf mention expresse contraire nous désignerons par $P_n(x)$ un polynome trigonométrique d'ordre n, c'est-à-dire une expression de la forme $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$. Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π; nous écrirons sa série de Fourier

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

et la série conjuguée $\sum_{1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin x)$. $S_n(x)$ désignera la somme des $2n+1$ premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$. C'est un polynome d'ordre n.

$$\text{(N.1)} \qquad \sigma_n(x) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$$

est la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér de $f(x)$. C'est une somme *d'ordre* $n-1$.

$$\text{(N.2)} \qquad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t} \sin(2n+1)t\,dt,$$

$$\text{(N.3)} \qquad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{\sin t} \sin(2n+1)t\,dt,$$

$$\text{(N.4)} \qquad \sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x+2t)}{t^2} \sin^2 nt\,dt \quad (^1),$$

$$\text{(N.5)} \qquad \sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2} \sin^2 nt\,dt.$$

---

(1) On a aussi

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin^2 t} \sin^2 nt\,dt.$$

Nous désignerons par $f^{\cdot}$ la fonction conjuguée d'une fonction f de période 2π, lorsqu'elle existe. On a

$$(\text{N}.6)\qquad S_n^{\cdot}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{\sin t}(\cos t-\cos(2n+1)t)\,dt.$$

Lorsque $f^{\cdot}$ existe,

$$(\text{N}.7)\qquad f^{\cdot}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)-f(x-2t)]\,\text{cotg}\,t\,dt,$$

et lorsque l'intégrale suivante a un sens,

$$(\text{N}.8)\qquad f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t^2}\sin 2nt\,dt.$$

Nous poserons

$$(\text{N}.9)\qquad V_n=2\sigma_{2n}-\sigma_n.$$

L'expression

$$(\text{N}.10)\qquad J_{pn}(x)=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt$$

$$=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt$$

est une somme trigonométrique d'ordre pn. Nous les appellerons sommes de Jackson-de la Vallée-Poussin [6].

On a

$$\alpha_p=\frac{1}{2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}t}{t^{2p}}dt}$$

et

$$(\text{N}.11)\qquad J_{2n}(x)-f(x)=\frac{3}{2\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^4}\sin^4 nt\,dt,$$

$$(\text{N}.12)\qquad J_{pn}(x)-f(x)=\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt.$$

3. Meilleure approximation trigonométrique. — $E_n(f)$ ou E_n lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, désignera la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n de $f(x)$ continue de période 2π.

Nous rappelons quelques résultats.

Si $f(x)$ possède une dérivée $p^{\text{ième}}$ et si $f^{(p)}\in \text{Lip}\,\alpha(0<\alpha\leqq 1)$,

$$E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right)\quad [6].$$

Réciproquement si f peut être quel que soit n approchée par des polynomes d'ordre n à une quantité $\frac{K}{n^{p+\alpha}}$ près où K est une constante, p entier >0 et $0<\alpha<1$, f possède une dérivée d'ordre p appartenant à la classe Lip α.

Pour $\alpha=1$, cette réciproque est inexacte. On a dans ce cas le résultat suivant [8] :

Pour que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, il faut et il suffit que $\left|\frac{\delta_p(f, x, t)}{t^{p-1}}\right|=O(1)$ uniformément en x et t et pour que $E_n=o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, il faut et il suffit que

$$\left|\frac{\delta_p(f, x, t)}{t^{p-1}}\right|=o(1),$$

où

$$\delta_p(f, x, t)=f(x+pt)-C_p^1 f(x+(p-1)t)+C_p^2 f(x+(p-2)t)\ldots\pm f(x).$$

En particulier, la condition $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalente à

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|=O(1)$$

et la condition $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalente à

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|=o(1).$$

En d'autres termes pour que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$, il faut et il suffit que $f\in C_A$.

Si $\quad E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left(\text{ou } o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad E_n(f^{\cdot})=O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left(\text{ou } o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ [8],

si $\quad E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad (0<\alpha<1), \qquad E_n(f^{\cdot})=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

4. Module de continuité. — Le module de continuité de $f(x)$, soit

$$\max_{|x-x'|\leq h}|f(x)-f(x')|$$

sera désigné par $\omega(f, h)$ ou $\omega(h)$. Nous rappelons que $\omega(h)$ est une fonction continue non décroissante de h; que si m est >0 entier, $\omega(mh)\leqq m\omega(h)$ et si $m>0$ n'est pas entier $\omega(mh)\leqq(m+1)\omega(h)$.

5. Dérivées des sommes trigonométriques précédentes. — *a. Calcul de* σ'_n. — $a_0, \ldots, a_n, \ldots, b_n, \ldots$ désignant les coefficients de Fourier de $f(x)$ et

$$A_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx, \qquad A_n^{\cdot}=b_n\cos nx-a_n\sin nx \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

on a

$$\sigma_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)A_k.$$

D'où

$$\sigma'_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(1-\frac{k}{n}\right)\Lambda^{\cdot}_k = \sum_{k=1}^{n-1} k\Lambda^{\cdot}_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Lambda^{\cdot}_k.$$

Au moyen de la transformation d'Abel on obtient, après réduction,

$$\text{(N.13)}\qquad \sigma'_n = (n-1)\sigma^{\cdot}_n - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\sigma^{\cdot}_k.$$

b. Calcul de σ''_n. — Nous utiliserons σ''_n sous la forme obtenue à partir de

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+2t)\sin^2 nt}{t^2}\,dt.$$

On pose $x+2t=u$ et l'on a

$$\sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin^2 n\dfrac{u-x}{2}}{\left(\dfrac{u-x}{2}\right)^2}\frac{du}{2}.$$

D'où

$$\frac{d\sigma_n}{dx} = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 n\dfrac{u-x}{2}}{\left(\dfrac{u-x}{2}\right)^2}\right)\frac{du}{2}.$$

Or

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 n\dfrac{u-x}{2}}{\left(\dfrac{u-x}{2}\right)^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 nt}{t^2}\right).$$

En revenant à nouveau à la variable d'intégration t, il vient

$$\sigma'_n(x) = -\frac{1}{2n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2 nt}{t^2}\right)dt.$$

De même pour $\sigma''_n(x)$; mais comme $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(\dfrac{\sin^2 nt}{t^2}\right)$ est une fonction paire de t, on a :

$$\begin{aligned}\sigma''_n(x) &= \frac{1}{4n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2t)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^2 nt}{t^2}\right)dt\\ &= \frac{1}{4n\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^2 nt}{t^2}\right)dt.\end{aligned}$$

$$\text{(N.14)}\qquad \begin{aligned}\sigma''_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}&[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)]\\ &\times\left[\frac{n^2\cos 2nt}{t^2}-\frac{2n\sin 2nt}{t^3}+\frac{3\sin^2 nt}{t^4}\right]dt\end{aligned}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^2 nt}{t^2}\right)dt = 0$ puisque si $f\equiv 1$, $\sigma''_n\equiv 0$.

c. Calcul de $S''_n(x)$. — De $S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n A_k$, on tire $S''_n = -\sum_1^n k^2 A_k$. En appliquant la transformation d'Abel, on a

$$S''_n = -n^2 S_n + \sum_1^{n-1} (2k+1) S_k$$

et en l'appliquant une seconde fois on obtient

$$S''_n = -n^2 S_n + n(2n+1)\sigma_n - 2(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n). \tag{N.15}$$

d. Calcul de J'_{2n}, J''_{2n}. — Comme pour le calcul de σ'_n, on a

$$J'_{2n} = -\frac{3}{4\pi n^3}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) - f(x-2t)]\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right] dt,$$

car $\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right)$ est fonction impaire de t.

$$J'_{2n}(x) = -\frac{3}{\pi n^3}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) - f(x-2t)]\,\frac{\sin^3 nt}{t^3}\left[\frac{n\cos nt}{t} - \frac{\sin nt}{t^2}\right] dt$$

ou encore

$$J'_{2n}(x) = -\frac{3n}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right) - f\left(x-\frac{2t}{n}\right)\right]\frac{\sin^3 t}{t^3}\left(\frac{t\cos t - \sin t}{t^2}\right) dt. \tag{N.16}$$

Puis, $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right)$ étant une fonction paire de t,

$$J''_{2n}(x) = \frac{3}{8\pi n^3}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) + f(x-2t)]\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt;$$

comme $J''_{2n} \equiv 0$ lorsque $f \equiv 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt = 0,$$

d'où

$$J''_{2n}(x) = \frac{3}{8\pi n^3}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt;$$

enfin en changeant t en $\frac{t}{n}$,

$$J''_{2n}(x) = \frac{3n^2}{4\pi}\int_0^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right) + f\left(x-\frac{2t}{n}\right) - 2f(x)\right]\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 nt}{t^4}\right) dt. \tag{N.17}$$

e. Calcul de $V'_n = 2\sigma'_{2n} - \sigma'_n$. — D'après (N.13) on a

$$V'_n = -\frac{2}{n}\sum_n^{2n-1} k\sigma^{\cdot}_n + 2(2n-1)\sigma^{\cdot}_{2n} - (n-1)\sigma^{\cdot}_n. \tag{N.18}$$

Nous utiliserons une autre forme de V'_n que nous calculerons à partir de

$$V_n = 2\sigma_{2n} - \sigma_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{\sin^2 2nt - \sin^2 nt}{t^2}\,dt.$$

Nous supposerons que $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, ce qui sera le cas où nous nous placerons, de façon à assurer l'existence des intégrales qui suivent et la continuité de $f^{\cdot}$.

On aura encore

$$V'_n = -\frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin^2 2nt - \sin^2 nt}{t^2}\right]dt.$$

Or

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin^2 2nt - \sin^2 nt}{t^2}\right] = 2n\frac{\sin 4nt}{t^2} - \frac{n \sin 2nt}{t^2} - \frac{2}{t^3}[\sin^2 2nt - \sin^2 nt]$$

et d'après (N.8) :

(N.19)
$$V'_n = 2n[\sigma^{\cdot}_{2n} - f^{\cdot}] + n[2\sigma^{\cdot}_{2n} - \sigma'_n - f^{\cdot}] + \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t^3}(\sin^2 2nt - \sin^2 nt)\,dt.$$

6. Dans la suite nous poserons

(N.20)
$$\varphi_x(t) = \varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x).$$

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS DE LA SUITE DES DÉRIVÉES DE POLYNOMES TRIGONOMÉTRIQUES CONVERGEANT UNIFORMÉMENT VERS UNE FONCTION CONTINUE PÉRIODIQUE.

I. — Théorème général.

$f(x)$ étant une fonction continue de période 2π, $P_n(x)$ un polynome trigonométrique d'ordre n, si, quels que soient x et n, $|P_n(x) - f(x)| < \frac{\varphi(n)}{n^{k-1}}$ où k est entier > 0 et $\varphi(x)$ une fonction continue, positive, non croissante, les dérivées d'ordre k des polynomes $P_n(x)$ satisfont à l'inégalité

(1)
$$|P_n^{(k)}(x)| < A + Bn\varphi(n) + C\int_1^n \varphi(x)\,dx,$$

où A, B, C *sont des constantes.*

Considérons la suite $\{P_{a^p}\}$ où a est un entier fixe $\geqq 2$ et où p prend la suite des valeurs entières. On a

$$|P_{a^p} - P_{a^{p+1}}| < \frac{\varphi(a^p)}{a^{p(k-1)}} + \frac{\varphi(a^{p+1})}{a^{(p+1)(k-1)}} \leqq \frac{2\varphi(a^p)}{a^{p(k-1)}}.$$

$P_{a^p} - P_{a^{p+1}}$ étant un polynome d'ordre a^{p+1}, le théorème de Berstein donne

$$|P_{a^p}^{(k)} - P_{a^{p+1}}^{(k)}| < 2\, a^{k(p+1)} \frac{\varphi(a^p)}{a^{p(k-1)}} = 2\, a^k a^p \varphi(a^p).$$

D'où

$$|P_{a^p}^{(k)} - P_{a^{p_0}}^{(k)}| < 2\, a^k a^p \varphi(a^p) + 2\, a^{k+1} \sum_{m=p_0}^{p-1} a^{m-1} \varphi(a^m)$$

$$= 2\, a^k a^p \varphi(a^p) + \frac{2\, a^{k+1}}{a-1} \sum_{m=p_0}^{p-1} (a^m - a^{m-1}) \varphi(a^m) < 2\, a^k a_p \varphi(a^p) + \frac{2\, a^{k+1}}{a-1} \int_{a^{p_0-1}}^{a^{p-1}} \varphi(x)\, dx.$$

Si n est un entier quelconque et p tel que $a^p \leqq n < a^{p+1}$,

$$|P_n^{(k)} - P_{a^p}^{(k)}| < n\varphi(n) + a^k a^p \varphi(a^p) = n\varphi(n) + \frac{a^{k+1}}{a-1} [a^p - a^{p-1}] \varphi(a^p).$$

et

$$|P_n^{(k)}| < \max_x |P_{a^{p_0}}^{(k)}| + n\varphi(n) + \frac{a^{k+1}}{a-1} \int_{a^{p-1}}^{a^p} \varphi(x)\, dx + \frac{2\, a^{k+1}}{a-1} \int_{a^{p_0-1}}^{a^{p-1}} \varphi(x)\, dx.$$

ou encore

$$|P_n^{(k)}| < A + Bn\varphi(n) + C\int_1^n \varphi(x)\, dx.$$

Si $P_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$, on peut poser

$$\max_x |P_n - f| = \rho(n) \qquad \text{et} \qquad \sup_{p \geq n} \rho(p) = \varphi(n).$$

Cas particuliers. — *a. Si* $P_n(x)$ *converge uniformément vers* $f(x)$, $\frac{P'_n(x)}{n}$ *tend uniformément vers zéro avec* $\frac{1}{n}$.

Pour $k = 1$ on a en effet

$$\frac{|P'_n|}{n} < \frac{A}{n} + \varphi(n) + C\,\frac{1}{n} \int_1^n \varphi(x)\, dx \qquad \text{où} \quad \lim_{x\,\infty} \varphi(x) = 0.$$

Or

$$\frac{1}{x} \int_1^x \varphi(x)\, dx = \frac{1}{x} \int_1^X \varphi(x)\, dx + \frac{1}{x} \int_X^x \varphi(x)\, dx \qquad (1 < X < x)$$

$$< \frac{X-1}{x} \varphi(1) + \left(1 - \frac{X}{x}\right) \varphi(X),$$

quantité qui est moindre que ε donné si l'on choisit X de façon que $\varphi(X) < \frac{\varepsilon}{2}$, puis x pour que $\frac{X-1}{x} \varphi(1) < \frac{\varepsilon}{2}$. On peut prouver cette propriété directement. Si pour $n \geqq N$ on a $|P_n - f| < \varepsilon$, alors $|P_n - P_N| < 2\varepsilon$ et d'après le théorème de Bernstein, $|P'_n - P'_N| < 2n\varepsilon$ d'où

$$\left|\frac{P'_n}{n} - \frac{P'_N}{n}\right| < 2\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{|P'_n|}{n} < 2\varepsilon + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

b. Si $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|P''_n(x)| = O(n)$ *uniformément en* x.

Il suffit de prendre $\varphi = \text{const.}$ et $k = 2$.

Lorsque $f(x)$ peut être approchée à $O\left(\frac{1}{n}\right)$ près, l'inégalité (1) fournit pour les dérivées premières : $|P'_n| = O(\log n)$ lorsque $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi soit

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin px}{p^2} \qquad \text{et} \qquad P_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin px}{p^2}.$$

On a

$$|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad P'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\cos px}{p}$$

admet pour maximum $\sum_{1}^{n} \frac{1}{p} \sim \log n$. Si on applique alors le théorème de Bernstein à P''_n en partant de P'_n on trouve $|P''_n| = O(n \log n)$ alors que (1) donne $|P''_n| = O(n)$. Nous utiliserons souvent cette propriété dans la suite. Nous préciserons donc la constante qui intervient dans la majoration de P''_n en utilisant les sommes de Jackson-de la Vallée-Poussin.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est que $f \in C_A$ [8]. Soit

$$A = \sup_{x,t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right|.$$

J_{2n} désignant la somme de Jackson-de la Vallée-Poussin d'ordre $2n - 1$, on a, d'après (N. 17) et (N. 20),

$$J''_{2n}(x) = \frac{3n^2}{4\pi} \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 t}{t^4}\right) dt.$$

D'où lorsque $f \in C_A$,

$$|J''_{2n}(x)| < \frac{3An}{2\pi} \int_0^{+\infty} t \left| \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 t}{t^4}\right) \right| dt = kAn,$$

où

$$k = \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} t \left| \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin^4 t}{t^4}\right) \right| dt.$$

Un calcul rapide prouve que $k < 8$, d'où $|J''_{2n}| < 8An$. Cette constante n'est certainement pas la meilleure pour la classe C_A.

c. Si $|f - P_n| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *alors pour* $k = 2$ *et* $\varphi(x)$ *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{x}$ *on a, d'après* (1),

$$|P''_n| < A + Bn\varphi(n) + C\int_1^n \varphi(x)\,dx = o(n) \qquad \text{car} \qquad \int_1^n \varphi(n)\,dx = o(n) \quad \text{d'après } (a).$$

d. Si $f(x) \in \operatorname{Lip} \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *et si* $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $|P'_n| = O(n^{1-\alpha})$.

Dans l'inégalité (1) on prend $k=1$ et $\varphi(x)=\frac{\lambda}{x^\alpha}$ où λ est une constante. On peut encore préciser ici les constantes. Si en effet $|f(x)-f(x')|<M|x-x'|^\alpha$, on peut trouver une suite de polynomes P_n tels que $|f(x)-P_n(x)|<\frac{kM}{n^\alpha}$. Si pour une autre suite $\{Q_n(x)\}$ on a $|f(x)-Q_n(x)|<\frac{k'M}{n^\alpha}$, de $|P_n-Q_n|<\frac{k+k'}{n^\alpha}M$, on tire $|P'_n-Q'_n|<(k+k')Mn^{1-\alpha}$. On peut donc chercher une majoration d'une suite particulière $\{P_n(x)\}$ et en utilisant les sommes de Jackson, on trouve $|P'_n|<\frac{C_\alpha}{1-\alpha}Mn^{1-\alpha}$, où $C_\alpha \to \frac{2}{\log 2}$ quand $\alpha \to 1$. Ces constantes ne sont certainement pas les meilleures.

e. Si $f(x) \in \operatorname{Lip} 1$ *et si* $|P_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|P'_n(x)|$ *est uniformément borné.*

L'inégalité (1) ne donne dans l'hypothèse $|f(x)-f(x')|<M|x-x'|$, que $|P'_n|=O(\log n)$. En utilisant encore les sommes J_n, on a (N. 10)

$$\left|\frac{J_{2n}(x+h)-J_{2n}(x)}{h}\right|=\left|\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{f\left(x+\frac{2t}{n}+h\right)-f\left(x+\frac{2t}{n}\right)}{h}\right]\frac{\sin^4 t}{t^4}\,dt\right|<M.$$

Donc $|J'_{2n}(x)|<M$ et le raisonnement fait en *d.* prouve que si $|P_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsque $f\in \operatorname{Lip} 1$, P'_n est uniformément borné.

Réciproquement si une suite de polynomes $P_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ continue et si la suite des dérivées $P'_n(x)$ est uniformément bornée en n et x, $f\in \operatorname{Lip} 1$, car

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{n\infty}\frac{P_n(x+h)-P_n(x)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{P_n(x+h)-P_n(x)}{h}=P'_n(x+\theta h),$$

où $0<\theta<1$, est uniformément borné.

II. — Majoration au moyen du module de continuité.

Théorème. — *Si quel que soit* x,

$$|P_n(x)-f(x)|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

où $\omega(h)$ *est le module de continuité de* $f(x)$,

$$|P'_n(x)|=O\left[n\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En effet $|J_{2n}-f|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ [4]. Si $|P_n-f|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, on a également

$$|J_{2n}-P_n|=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et par suite

$$|J'_{2n} - P'_n| = O\left[n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Il suffit donc de démontrer la proposition pour les dérivées des sommes J_{2n}.

On a (N.16)

$$J'_{2n}(x) = -\frac{3n}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{2t}{n}\right)-f\left(x-\frac{2t}{n}\right)\right]\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\,dt,$$

d'où

$$|J'_{2n}(x)| < \frac{3n}{\pi}\int_0^{+\infty}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\frac{\sin^3 t}{t^3}\cdot\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\right|dt.$$

Or $\omega\left(\frac{2t}{n}\right) < \omega\left(\frac{1}{n}\right)(2t+1)$ (Notations, 4). Désignant par α la constante absolue $\int_0^{+\infty}(2t+1)\left|\frac{\sin^3 t}{t^3}\,\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\right|dt$, on obtient

$$|J'_{2n}(x)| < \frac{3\alpha}{\pi}n\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

III. — Propriétés de $f(x)$, déduites de l'ordre de grandeur des dérivées $P'_n(x)$.

Nous avons vu que l'inégalité (1) peut fournir un ordre de grandeur exact de $\max|P'_n|$ et que cet ordre de grandeur peut être donné soit par l'intégrale $\int^n \varphi(x)\,dx$, soit par $n\varphi(n)$. L'exemple suivant montre que cet ordre de grandeur peut être plus faible que $n\varphi(n)$.

Soit

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin a^p x}{p^\alpha},$$

où α est >1 et a un entier impair $\geqq 3$. $\Pi_{a^N} = \sum_1^N \frac{\sin a^p x}{p^\alpha}$ est un polynome trigonométrique d'ordre a^N et l'approximation fournie est

$$f - \Pi_{a^N} = \sum_{N+1}^{\infty}\frac{\sin a^p x}{p^\alpha}.$$

Or si $x_k^N = \frac{1}{a^{N+1}}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k=0,\ 1,\ \ldots,\ a^{N+1}-1)$, $\sin a^p x_k^N = 1$ pour $p = N+1,\ N+2,\ \ldots$ parce que a est impair. De même $\sin a^p x_k^N = -1$ $(p = N+1, \ldots)$, si $x_{k'}^N = \frac{1}{a^{N+1}}\left(\frac{3\pi}{2}+2k'\pi\right)(k'=0, \ldots, a^{N+1}-1)$. En ces $2a^{N+1}$ points l'approximation est donc alternativement $\pm\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{p^\alpha}$. $\Pi_{a^N}(x)$ est donc polynome de meilleure approximation d'ordre a^N, a^N+1, ..., $a^{N+1}-1$ et fournit une approximation $O\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$.

D'ailleurs

$$\Pi'_{a^N}(x)=\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}\cos a^p x \qquad \text{et} \qquad \max_x |\Pi'_{a^N}(x)|=\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}.$$

Je dis que $\dfrac{\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}}{\frac{a^N}{N^{\alpha-1}}} \to 0$ pour $N\infty$. En effet, on a par la transformation d'Abel

$$\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}=O(1)+O\left(\frac{a^N}{N^\alpha}\right)+\sum_1^{N-1} a^{p+1}O\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right)$$

et dès que p est assez grand, $\frac{a^{p+1}}{p^{\alpha+1}}$ croît avec p, donc

$$\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}=O(1)+O\left(\frac{a^N}{N^\alpha}\right)+O\left(\frac{N a^N}{N^{\alpha+1}}\right).$$

D'où

$$\frac{\sum_1^N \frac{a^p}{p^\alpha}}{\frac{a^N}{N^{\alpha-1}}}=O\left(\frac{N^{\alpha-1}}{a^N}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)=O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Soit alors $\Pi_n(x)$ le polynome de meilleure approximation d'ordre n de $f(x)$, $\mu_n=\max_x|\Pi'_n(x)|$. Nous supposons que $\varliminf_{n\infty}\frac{\mu_n}{nE_n}=0$. Cette hypothèse fournit les résultats suivants :

THÉORÈME. — *$f(x)$ étant une fonction continue non constante :*

A. *Si pour une suite* $\{n_p\}$, $\lim_{p\infty}\frac{\mu_{n_p}}{n_p E_{n_p}}=0$, *alors :*

1° $E_{n_p}\sim\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)$;

2° $\lim_{p\infty}\dfrac{\omega\left(\frac{\theta\pi}{n_p}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}=1$ *uniformément en* θ $(1\leqq\theta\leqq\theta_0)$.

B. *Si* $\lim_{n\infty}\frac{\mu_n}{nE_n}=0$, *quel que soit* $r>0$, $\varliminf_{n\infty}\frac{n^{1-r}E_n}{\mu_n}=0$.

C. *Si* $\frac{n_{p+1}}{n_p}<+\infty$ *et si* $\lim_{p\infty}\frac{\mu_{n_p}}{n_p E_{n_p}}=0$ $\left(\textit{en particulier si } \frac{\mu_n}{nE_n}\to 0\right)$, *$f(x)$ n'appartient à aucune classe* Lip α.

Démonstration. — Posons $\lambda_n=\frac{nE_n}{\mu_n}$ et soit $\omega(\Pi_n, h)$ le module de continuité de $\Pi_n(x)$, $\omega(h)$ celui de f. Sur une période, $f(x)-\Pi_n(x)$ prend alternativement les valeurs E_n, $-E_n$ aux $2n+2$ points $\xi_n^i(i=1, 2, \ldots, 2n+1)$ énumérés dans l'ordre des abscisses croissantes. Soit $\delta_n=\min_i|\xi_n^i-\xi_n^{i+1}|$. Comme $(2n+2)\delta_n<2\pi$ on a $\delta_n<\frac{\pi}{n}\cdot$ Soit alors (ξ_n^i, ξ_n^{i+1}) un couple de points distants de δ_n. On a

$$|f(\xi_n^i)-f(\xi_n^{i+1})|=|f(\xi_n^i)-\Pi_n(\xi_n^i)+\Pi_n(\xi_n^i)-\Pi_n(\xi_n^{i+1})+\Pi_n(\xi_n^{i+1})-f(\xi_n^{i+1})|$$

et

$$|\Pi_n(\xi_n^{i+1})-\Pi_n(\xi_n^i)|\leqq\omega(\Pi_n, \delta_n)\leqq\delta_n\mu_n\leqq\frac{\pi}{n}\mu_n.$$

Dès que n est assez grand, $2E_n-\delta_n\mu_n\geqq 2E_n-\frac{\pi}{n}\mu_n$ est >0 car

$$2E_n-\frac{\pi}{n}\mu_n=2E_n\left(1-\frac{\pi}{2\lambda_n}\right).$$

Comme

$$f(\xi_n^i)-\Pi_n(\xi_n^i)=\pm E_n \qquad \text{et} \qquad f(\xi_n^{i+1})-\Pi_n(\xi_n^{i+1})=\mp E_n$$

on a

$$|f(\xi_n^i)-f(\xi_n^{i+1})|>2E_n-\delta_n\mu_n\geqq 2E_n-\frac{\pi}{n}\mu_n,$$

d'où

$$2E_n<\frac{\pi}{n}\mu_n+\omega(\delta_n)<\frac{\pi E_n}{\lambda_n}+\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad \text{ou} \qquad 2E_n\left(1-\frac{\pi}{2\lambda_n}\right)<\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

D'ailleurs A étant une constante positive

$$\omega\left(\frac{A}{n}\right)<2E_n+\omega\left(\Pi_n, \frac{A}{n}\right)\leqq 2E_n+\frac{A}{n}\mu_n=2E_n\left(1+\frac{A}{2\lambda_n}\right),$$

d'où

$$(1')\qquad 2E_n>\omega\left(\frac{A}{n}\right)\frac{1}{1+\frac{A}{2\lambda_n}}>\omega\left(\frac{A}{n}\right)\left(1-\frac{A}{2\lambda_n}\right).$$

Prenant $A=\pi$, nous obtenons

$$\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\frac{\pi}{2\lambda_n}}<2E_n<\omega\left(\frac{\pi}{\pi}\right)\frac{1}{1-\frac{\pi}{2\lambda_n}}$$

et, par suite, θ_n désignant un nombre compris entre $-\frac{1}{2}$ et 1, on a pour n assez grand,

$$(2)\qquad 2E_n=\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[1+\frac{\theta_n\pi}{\lambda_n}\right].$$

Cette égalité prouve la partie (A 1°). Remarquons maintenant que si $\theta\leqq 1$, $\omega\left(\frac{\theta\pi}{n}\right)\geqq\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Donc

$$\left(1-\frac{\pi}{2\lambda_n}\right)2E_n<\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)<\omega\left(\frac{\theta\pi}{n}\right)<2E_n\left(1+\frac{\theta\pi}{2\lambda_n}\right)$$

et, par suite,

$$1\leq\frac{\omega\left(\frac{\theta\pi}{n}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}\leq\frac{2E_n}{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(1+\frac{\theta\pi}{2\lambda_n}\right)\tag{3}$$

ce qui démontre (A 2°).

Démontrons que si $\frac{\mu_n}{nE_n}\to 0$,

$$\lim_{n\infty}\frac{n^{1-r}E_n}{\mu_n}=0\quad(r>0)\qquad\text{ou}\qquad\lim_{n\infty}\frac{\lambda_n}{n^r}=0.$$

Nous remarquons que si $P_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$,

$$\lim_{n\infty}\max_x|P'_n(x)|>0.$$

En effet si pour une suite n_p on avait $\lim_{p\infty}|P'_{n_p}(x)|=0$, de

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|=\lim_{p\infty}\left|\frac{P_{n_p}(x+h)-P_{n_p}(x)}{h}\right|,$$

on conclurait que $f(x+h)-f(x)=0$ quels que soient x et h. Donc

$$\mu_n>\mu>0\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{\lambda_n}=\frac{\mu_n}{nE_n}>\frac{\mu}{nE_n}>\frac{\mu}{n}$$

dès que $E_n<1$; la série $\sum\frac{1}{\lambda_n}$ est divergente.

D'autre part on ne peut pas extraire de la série $\sum\frac{1}{\lambda_n}$, une série $\sum\frac{1}{\lambda_{n_p}}$ convergente si $\frac{n_{p+1}}{n_p}<a<+\infty$, lorsque $\lambda_n\to+\infty$.

En effet, de (2) et (3) on tire dès que n_p est assez grand,

$$\frac{\omega\left(\frac{\theta\pi}{n_p}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}\leq\left(1+\frac{\pi}{\lambda_{n_p}}\right)\left(1+\frac{\theta\pi}{2\lambda_{n_p}}\right)<\left(1+\pi\frac{\theta+2}{\lambda_{n_p}}\right).\tag{4}$$

Or

$$\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}=\frac{\omega\left(\frac{n_{p+1}}{n_p}\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}<\frac{\omega\left(a\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}<1+\pi\frac{a+2}{\lambda_{n_{p+1}}}.\tag{5}$$

En écrivant les inégalités (5) pour $p=0, 1, \ldots, p+1$, on obtient en mutipliant membre à membre

$$\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p_0}}\right)}{\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)}<\prod_{m=1}^{p+1}\left[1+\frac{\pi(a+2)}{\lambda_{n_m}}\right].$$

Comme $\lim\limits_{p\,\infty}\omega\left(\frac{\pi}{n_{p+1}}\right)=0$, on en déduit que le produit infini $\prod\limits_{p=1}^{\infty}\left(1+\frac{\pi(a+2)}{\lambda_{n_p}}\right)$ est divergent, donc que $\sum\frac{1}{\lambda_{n_p}}$ diverge.

Soit alors une suite n_p telle que $1<a'<\frac{n_{p+1}}{n_p}<a<+\infty$. On a

$$n_p>a'^p n_0 \qquad \text{et} \qquad p<\frac{\log\frac{n_p}{n_0}}{\log a'}.$$

$\sum\frac{1}{\lambda_{n_p}}$ étant divergente, quel que soit $\alpha>0$, $\underline{\lim\limits_{p\,\infty}}\left(\frac{\lambda_{n_p}}{p^{1+\alpha}}\right)=0$.

On a alors, r étant un nombre positif quelconque donné,

$$\frac{\lambda_{n_p}}{n_p^r}<\frac{1}{(\log a')^{1+\alpha}}\frac{\left(\log\frac{n_p}{n_0}\right)^{1+\alpha}}{n_p^r}\frac{\lambda_{n_p}}{p^{1+\alpha}}.$$

Comme

$$\lim_{p\,\infty}\frac{\left(\log\frac{n_p}{n_0}\right)^{1+\alpha}}{n_p^r}=0, \qquad \underline{\lim_{p\,\infty}}\left(\frac{\lambda_{n_p}}{p^{1+\alpha}}\right)=0,$$

on en conclut $\underline{\lim\limits_{p\,\infty}}\frac{\lambda_{n_p}}{n_p^r}=0$. Ce qui prouve que si $\frac{\mu_n}{n\mathrm{E}_n}\to 0$, $\overline{\lim\limits_{n\,\infty}}\frac{n^{1-r}\mathrm{E}_n}{\mu_n}=0$ quel que soit $r>0$.

Démontrons C. Posons $\varphi(h)=\frac{\omega(h)}{h^\alpha}$ et supposons $\frac{n_{p+1}}{n_p}<a<+\infty$. L'inégalité (4) donne

$$\frac{\varphi\left(\frac{\theta\pi}{n_p}\right)}{\varphi\left(\frac{\pi}{n_p}\right)}<\frac{1}{\theta^\alpha}\left(1+\pi\frac{\theta_1+2}{\lambda_{n_p}}\right),$$

θ variant continûment depuis $\theta_0>1$ jusqu'à $\theta_1>a^2$. Dès que p est suffisamment grand $\frac{1}{\theta_0^\alpha}\left(1+\pi\frac{\theta_1+2}{\lambda_{n_p}}\right)\leq k<1$. D'où

$$\varphi\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)\leq k^{q+1}\varphi\left(\frac{\pi}{n_{p+q+1}}\right).$$

Si l'on suppose alors que $f\in\operatorname{Lip}\alpha$,

$$\varphi(h)<\mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)\leq k^{q+1}\mathrm{A}.$$

Pour $q\infty$ on obtiendrait donc

$$\varphi\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)=0 \qquad \text{donc} \qquad \omega\left(\frac{\pi}{n_{p-1}}\right)=0,$$

ce qui entraînerait $f=\text{const.}$

La fonction $f(x)=\sum \frac{\sin a^p x}{p^\alpha}$ jouit des propriétés indiquées dans ce théorème.

IV. — Nouvelle majoration de $P'_n(x)$.

THÉORÈME. — *Si* $|P_n(x)-f(x)|=O[E_n(f)]$ *et si la fonction conjuguée* $f^{\cdot}$ *existe et est continue,*

$$|P'_n(x)|=O[n\,E_n(f)]+O\left[n \max_{x,p=0,1,\ldots,n} |\sigma^{\cdot}_{n+p}-f^{\cdot}|\right],$$

$\sigma^{\cdot}_n(x)$ *étant la* $n^{\text{ième}}$ *somme de Fejér de* $f^{\cdot}$.

Il suffit de prouver ce résultat pour une suite particulière $\{P_n\}$ telle que $P_n-f|=O(E_n)$ car si $|Q_n-f|=O(E_n)$, on a aussi

$$|P_n-Q_n|=O(E_n) \qquad \text{et} \qquad |P'_n-Q'_n|=O(nE_n).$$

On sait [6] que $V_n=2\sigma_{2n}-\sigma_n$ donne de f une approximation comprise entre E_{2n} et $4E_n$.

En vertu de (N.13)

$$\sigma'_n=(n-1)\sigma^{\cdot}_n-\frac{2}{n}\sum_1^{n-1} k\sigma^{\cdot}_k$$

on a (N.18)

$$V'_n=2\sigma'_{2n}-\sigma'_n=-\frac{2}{n}\sum_n^{2n-1} k\sigma^{\cdot}_k+2(2n-1)\sigma^{\cdot}_{2n}-(n-1)\sigma^{\cdot}_n$$

et comme la somme des coefficients est nulle on a bien

$$V'_n=O\left[n \max_{p=0,\ldots,n} \max_x |\sigma^{\cdot}_{n+p}-f^{\cdot}|\right].$$

En échangeant les rôles de f et $f^{\cdot}$ et désignant par $P_n(f^{\cdot}; x)$ un polynome qui donne de $f^{\cdot}$ une approximation $O[E_n(f^{\cdot})]$, on a

$$(6) \qquad |P'_n(f^{\cdot}; x)|=O[n\,E_n(f^{\cdot})]+O\left[n \max_{x,p=0,\ldots,n} |\sigma_{n+p}-f|\right].$$

CONSÉQUENCE. — *Pour que* $|\sigma_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ *il faut et il suffit que* $f^{\cdot}\in \mathrm{Lip}\,1$.

En effet si $|\sigma_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$, $E_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ et l'on a aussi $E_n(f^{\cdot})=O\left(\frac{1}{n}\right)$ [8].

Soit alors $\{P_n(f^{\cdot}; x)\}$ une suite de polynomes convergeant uniformément vers $f^{\cdot}$, de sorte que

$$|P_n(f^{\cdot}; x)-f^{\cdot}|=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'après (I, e), $|P'_n(f^{\cdot}; x)|$ est uniformément borné en n et x et $f^{\cdot}\in \mathrm{Lip}\,1$.

La réciproque est connue [1]. Nous la démontrons à nouveau au Chapitre III, théorème 14. Nous donnons plus loin une autre condition nécessaire et suffisante pour que $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

CHAPITRE II.

CLASSES DE SATURATION ATTACHÉES A CERTAINS PROCÉDÉS D'APPROXIMATION.

Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

une fonction continue et γ un procédé de sommation de sa série de Fourier, définie par une suite de constantes $\gamma_k^n (k = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire que nous considérons la suite de polynomes trigonométriques

$$P_n^\gamma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} \gamma_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

S'il existe alors une fonction $\varphi_\gamma(n)$ croissante telle que, quel que soit n, on ait $\max\limits_x \varphi_\gamma(n) |P_n^\gamma - f| > a$, où a désigne une constante positive qui dépend de f, et que, de plus, il existe des fonctions f pour lesquelles on ait

$$\max_x \varphi_\gamma(n) |P_n^\gamma - f| < b$$

(où b est une autre constante dépendant aussi de f), nous dirons que le procédé d'approximation γ se sature. Nous appellerons classe de saturation attachée au procédé γ l'ensemble des fonctions continues non constantes telles que

$$|P_n^\gamma - f| = O\left(\frac{1}{\varphi_\gamma(n)}\right).$$

Le but de ce Chapitre est d'indiquer les classes de saturation attachées à certains procédés. En raison de l'importance que présente pour la suite la connaissance de la classe de saturation attachée au procédé de Fejér, nous ferons de ce procédé une étude spéciale.

I. — Procédé d'approximation de Fejér.

Soit $\sigma_n(x)$ la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér de $f(x)$ continue de période 2π. $\sigma_n(x)$ est un polynome d'ordre $n-1$. Je dis que ce procédé est saturé avec l'approximation de saturation d'ordre $\frac{1}{n}$. En effet, si l'on suppose que pour une suite d'entiers n_p, $|\sigma_{n_p}-f|=o\left(\frac{1}{n_p}\right)$, de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\sigma_{n_p}-f)\cos kx\,dx=\frac{k}{n_p}a_k, \qquad \text{où} \quad n_p>k,$$

on tirerait

$$\left|\frac{k}{n_p}a_k\right|\leqq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|\sigma_{n_p}-f|\,dx=o\left(\frac{1}{n_p}\right), \qquad \text{d'où} \quad ka_k=0.$$

Donc $a_k=0$ quel que soit $k=1, 2, \ldots$ et de même $b_k=0$. Donc si l'on suppose que f n'est pas constante, on a quelle que soit f

$$\lim_{n\infty}\left\{\max_x n|\sigma_n-f|\right\}>0.$$

Pour chercher la condition à laquelle doit satisfaire f pour que

$$|\sigma_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

il suffit de connaître l'approximation donnée par σ_n d'une fonction f dont la meilleure approximation trigonométrique est $E_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$. On sait [8] que la condition nécessaire et suffisante pour que $E_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ est que $\left|\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t}\right|$ soit uniformément borné en x et t, autrement dit que f appartienne à la classe C_A. C'est donc dans la classe C_A que nous chercherons la classe de saturation attachée au procédé de Fejér.

1. Théorème 1. — *Si quels que soient x et t, $\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|\leqq A$, l'approximation de $f(x)$ par ses sommes de Fejér $\sigma_n(x)$ au point x, satisfait à l'inégalité suivante*

$$(7)\qquad \left|\sigma_n(x)-f(x)-\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}dt\right|<\lambda\frac{A}{n},$$

où α est une constante qui ne dépend pas de n et λ une constante dépendant de α. $\left(\text{On a } \lambda<\frac{7}{2} \text{ si } \alpha=\frac{\pi}{2}.\right)$

D'après (N.5),

$$\sigma_n-f=\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt.$$

On suppose $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|\leqq 2A$. On a

$$(8)\qquad \left|\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt\right|\leqq 2A\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin^2 nt}{t}dt=2A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{t}dt<3A.$$

Puis

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}\,dt.$$

Posons

$$u_n = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

Changeant t en $t+\frac{\pi}{2n}$, il vient

$$u_n = -\int_0^{+\infty} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2n}} - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}.$$

Or

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt\right| < 2A\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{dt}{t+\frac{\pi}{2n}} = 2A\log 2.$$

Donc, à une quantité moindre que $2A\log 2$ en valeur absolue près, on a

$$u_n = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\left[\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\cos 2nt\,dt.$$

Or

$$\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\varphi(t+h)}{(t+h)^2} = \frac{\varphi(t)-\varphi(t+h)}{(t+h)^2} + 2h\frac{\varphi(t)}{t}\frac{1}{(t+h)^2} + h^2\frac{\varphi(t)}{t}\frac{1}{t(t+h)^2}$$

et par suite

$$u_n = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt$$
$$+\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\frac{\cos 2nt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\,dt + \frac{\pi^2}{8n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\frac{\cos 2nt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\,dt.$$

Considérons les deux dernières intégrales. On a

$$\left|\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\frac{\cos 2nt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\,dt\right| < 2A\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \leq A,$$
$$\left|\frac{\pi^2}{8n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\frac{\cos 2nt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\,dt\right| < 2A\frac{\pi^2}{8n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} \leq \frac{A}{2}.$$

Démontrons maintenant que $\frac{1}{2}\int_{\frac{2n}{\pi}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt$ est borné.

On a

$$\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)=f(x+2t)+f(x-2t)-f\left(x+2t+\frac{\pi}{2n}\right)-f\left(x-2t-\frac{\pi}{2n}\right)$$

et $f(x)$ peut être approchée par un polynome P_n à moins de $k\frac{A}{n}$; k est une constante absolue dont il nous suffit de savoir qu'elle est moindre que $\frac{3}{\pi}$ lorsque P_n est convenablement choisi. Par exemple avec les sommes de Jackson-de la Vallée-Poussin l'erreur est

$$\left|\frac{3}{2\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^4}\sin^4 nt\,dt\right|<\frac{3A}{\pi n}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}\,dt<\frac{3A}{\pi n}.$$

$\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)$ diffère donc de

$$P_n(x+2t)+P_n(x-2t)-P_n\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right)-P_n\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)$$

de $\frac{12A}{\pi n}$ au plus. L'erreur commise dans la dernière intégrale où l'on remplace f par P_n, est donc moindre que

$$\frac{6A}{\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}<\frac{6A}{\pi^2}.$$

D'ailleurs, si l'on pose $Q_n(t)=P_n(x+2t)+P_n(x-2t)$ on a en vertu de

$$Q_n(t)-Q_n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4n^2}Q''_n\left(t+\frac{\theta\pi}{2n}\right)-\frac{\pi}{2n}Q'_n(t)\qquad(0<\theta<1),$$

$$P_n(x+2t)+P_n(x-2t)-P_n\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right)-P_n\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)$$
$$=-\frac{\pi}{n}[P'_n(x+2t)-P'_n(x-2t)]-\frac{\pi^2}{2n^2}\left[P''_n\left(x+2t+\frac{\theta\pi}{n}\right)+P''\left(x-2t-\frac{\theta\pi}{n}\right)\right].$$

Comme $|P_n-f|=O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|P''_n|=O(n)$ et l'on a vu qu'on peut supposer (Chap. I, § 1, b) $|P''_n|<4An$. Donc

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt$$

diffère de

$$-\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{P'_n(x+2t)-P'_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt.$$

d'une quantité qui, en valeur absolue, est au plus égale à $\frac{\pi^2}{4\pi^2}4\mathrm{A}n\frac{n}{\pi}=\pi\mathrm{A}$. Considérons alors

$$-\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}'_n(x+2t)-\mathrm{P}'_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}d\left(\frac{\sin 2nt}{2n}\right).$$

En intégrant par parties et en tenant compte de ce que $\frac{\pi}{2n}$ est un zéro de $\sin 2nt$, on obtient

$$\frac{\pi}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}''_n(x+2t)+\mathrm{P}''_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\sin 2nt\,dt-\frac{\pi}{4n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}'_n(x+2t)-\mathrm{P}'_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}\sin 2nt\,dt.$$

On a alors

$$\left|\frac{\pi}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}''_n(x+2t)+\mathrm{P}''_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\sin 2nt\,dt\right|<\frac{\pi}{2n^2}8\mathrm{A}n\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}<4\mathrm{A},$$

$$\left|\frac{\pi}{4n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\mathrm{P}'_n(x+2t)-\mathrm{P}'_n(x-2t)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^3}\sin 2nt\,dt\right|<\frac{\pi}{4n^2}8\mathrm{A}n\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}<2\mathrm{A}.$$

En définitive lorsque $\mathrm{E}_n(f)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}\right|\leqq\mathrm{A}$,

$$\left|\sigma_n-f-\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt\right|<\frac{3\mathrm{A}}{\pi n}+\frac{\mathrm{A}\log 2}{\pi n}+\frac{\mathrm{A}}{2n\pi}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi^2}+\pi+4+2\right]<\frac{7}{2}\frac{\mathrm{A}}{n}.$$

Pour une fonction f de la classe $\mathrm{C_A}$ on écrira donc

$$\sigma_n-f=\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais d'autre part

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt\right|<2\mathrm{A}\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{dt}{t}\right|=2\mathrm{A}\left|\log\frac{\pi}{2\alpha}\right|.$$

Donc

$$\sigma_n-f=\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), \tag{9}$$

où α est une constante quelconque.

Enfin si $\left|\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt\right|=\mathrm{O}(1)$, $\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt\right|=\mathrm{O}(1)$ quel que soit $\varepsilon>0$.

En effet si n désigne l'entier positif tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leqq \frac{1}{n}$, on a

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi}{t^2}\,dt\right| < \left|\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left|\frac{\varphi}{t^2}\right| dt\right| < 2\mathrm{A}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = 2\mathrm{A}\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

En remplaçant $2t$ par t, on en déduit le résultat suivant qui définit la classe de saturation attachée au procédé de Fejèr :

Théorème 2. — *Pour que* $|\sigma_n - f| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, *il faut et il suffit que* $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt$ *soit uniformément borné en* x *et* ε.

2. Pour prouver le théorème précédent il n'est pas nécessaire de savoir que la condition $\mathrm{E}_n(f) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ est équivalente à $\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|$ uniformément bornée en x et t. Il suffit de savoir (Chapitre I, § 1) que si

$$|f-\mathrm{P}_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad |\mathrm{P}''_n| = \mathrm{O}(n).$$

En effet l'hypothèse $\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| \leqq \mathrm{A}$ a été utilisée pour prouver que les quantités suivantes sont bornées :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt,$$

$$\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{\cos 2nt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\,dt, \qquad \frac{\pi^2}{8n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{\cos 2nt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\,dt.$$

Si dans chacune d'elles on remplace f par P_n tel que $|\mathrm{P}_n - f| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, l'erreur commise est $\mathrm{O}(1)$ car

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,dt = \mathrm{O}(n), \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} = \mathrm{O}(n),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{dt}{t\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} = \mathrm{O}(n^2), \qquad \int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2} = \mathrm{O}(n^3).$$

Désignant alors par $\varphi_n(t)$ ce que devient $\varphi(t)$ et remarquant que $|\varphi_n(t)| = t^2\mathrm{O}(n)$, on obtient pour les 1re, 2e et 4e quantités $\mathrm{O}(1)$. Il reste à prouver que

$$\left|\frac{\pi}{2n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi_n(t)}{t}\,\frac{\cos 2nt}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\,dt\right| = \mathrm{O}(1).$$

Si l'on remplace $\dfrac{1}{\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^2}$ par $\dfrac{1}{t^2}$ l'erreur commise est, au signe près,

$$\frac{\pi^2}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t^2\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^2}dt+\frac{\pi^3}{8n^3}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t^3\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^2}$$

et en valeur absolue chacune de ces intégrales est bornée. Considérons alors $\dfrac{\pi}{n}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)}{t^3}\cos 2nt\,dt$. Comme pour $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt$, nous changerons t en $t+\dfrac{\pi}{2n}$;

$$\frac{\varphi_n(t)}{t^3}-\frac{\varphi_n(t+h)}{(t+h)^3}=\frac{\varphi_n(t)-\varphi_n(t+h)}{(t+h)^3}+3h\frac{\varphi_n(t)}{t(t+h)^3}+3h^2\frac{\varphi_n(t)}{t^2(t+h)^3}+h^3\frac{\varphi_n(t)}{t^3(t+h)^3}.$$

On a encore

$$\frac{\pi}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi_n\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt=\mathrm{O}(1)$$

parce que

$$\left|\varphi_n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\right|=\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2\mathrm{O}(n);$$

les quantités

$$\frac{3\pi^2}{2n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^3}dt,\quad \frac{3\pi^3}{4n^3}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)\cos 2nt}{t^2\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^3}dt,\quad \frac{\pi^4}{8n^4}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)}{t^3\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^3}\cos 2nt\,dt$$

sont bornées. Enfin de

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{P}_n(x+2t)+\mathrm{P}_n(x-2t)-\mathrm{P}_n\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right)-\mathrm{P}_n\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)\right|\\&\quad=\left|\frac{\pi}{n}[\mathrm{P}'_n(x+2t)-\mathrm{P}'_n(x-2t)]+\frac{\pi^2}{2n^2}\left[\mathrm{P}''_n\left(x+2t+\frac{\theta\pi}{n}\right)+\mathrm{P}''_n\left(x-2t-\frac{\theta\pi}{n}\right)\right]\right|\\&\quad=t\,\mathrm{O}(1)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

il résulte que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\pi}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)-\varphi_n\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^3}\cos 2nt\,dt\right|\\&\quad=\frac{\mathrm{O}(1)}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{t\,dt}{\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^3}+\frac{\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t+\dfrac{\pi}{2n}\right)^3}=\mathrm{O}(1).\end{aligned}$$

Donc l'hypothèse $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne que

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On démontre encore que si

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| = O(1),$$

$\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right|$ est borné uniformément en x et ε et que si $\alpha = \text{const.}$

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| = O(1);$$

on remplace f par P_n, l'erreur commise est $O(1)$ et l'on écrit que

$$|\varphi_n(t)| = t^2 O(n).$$

3. *Si*

$$(10)\qquad E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il suffit en effet de reprendre le calcul fait au paragraphe 2 et de remarquer que d'après (Chap. I, § 1, *c*) : si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et si $|P_n - f| = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $|P''_n| = o(n)$. Tous les O sont remplacés par o.

4. *Si $f(x)$ possède une dérivée $f'(x)$ continue, dont le module de continuité est $\omega_1(h)$, quel que soit $p\,(0 < p < 1)$,*

$$|\sigma_n - f| = \omega_1\left(\frac{1}{(\log n)^p}\right) O\left(\frac{\log n}{n}\right) + O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right] = o\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

En effet on a, d'après (10),

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{t^2}\,dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} + \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{(\log n)^p}}^{+\infty} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{(\log n)^p}}^{+\infty} = O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right].$$

D'où

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right].$$

En intégrant par parties il vient

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{-t}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}}$$

$$+\frac{1}{\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} \frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t}\,dt + O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right].$$

Le premier terme vaut

$$\frac{1}{2\pi}\left[f\left(x+\frac{2}{n}\right)+f\left(x-\frac{2}{n}\right)-2f(x)\right]$$
$$-\frac{1}{2n\pi}(\log n)^p\left[f\left(x+\frac{2}{(\log n)^p}\right)+f\left(x-\frac{2}{(\log n)^p}\right)-2f(x)\right]$$
$$=\frac{1}{\pi n}\left[f'\left(x+\frac{2\theta}{n}\right)+f'\left(x-\frac{2\theta}{n}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{n\pi}\left[f'\left(x+\frac{2\theta'}{(\log n)^p}\right)-f'\left(x-\frac{2\theta}{(\log n)^p}\right)\right]=o\left(\frac{1}{n}\right).$$
$$(0<\theta,\ \theta'<1).$$

D'ailleurs

$$\left|\frac{1}{\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}} \frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t}\,dt\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right]\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{(\log n)^p}}\frac{dt}{t}$$
$$= O\left(\frac{1}{n}\right)\omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right][\log n - p\log\log n]$$
$$=\omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right]O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

D'où

$$\sigma_n - f = \omega_1\left[\frac{1}{(\log n)^p}\right]O\left(\frac{\log n}{n}\right)+O\left[\frac{(\log n)^p}{n}\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)=o\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

5. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *est que* $\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|$ *soit uniformément borné en* x *et* t.

Nous démontrons ce résultat dû à M. Zygmund [8] à partir de l'approximation de $f(x)$ par ses sommes de Fejèr.

Nous allons prouver que si $\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| \leq A$,

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sans utiliser les propriétés de P''_n qui résultaient de ce que $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

En effet on a comme précédemment [*voir* (8)]

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\sin^2 nt\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (\alpha = \text{const.}).$$

D'où

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

où

$$\varphi(t) = \varphi_x(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x).$$

Démontrons que si $\frac{\varphi(t)}{t}$ est borné, $\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}\,dt$ est borné aussi.

Prenant $\alpha > \frac{\pi}{2}$ et posant $u_n = \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\cos 2nt}{t^2}\,dt$, il vient en changeant t en $t + \frac{\pi}{2n}$,

$$u_n = -\int_{\frac{\alpha}{n}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} - \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt$$

et comme

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt\right| < 2A\int_{\frac{\alpha}{n}-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{dt}{t} = 2A\log\frac{\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{2}}.$$

On a à $O(1)$ près

$$u_n = \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\left[\frac{\varphi(t)}{t^2} - \frac{\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\cos 2nt\,dt.$$

Le calcul fait précédemment (§ 1) prouve que

$$u_n = O(1) + \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt.$$

Remplaçons au dénominateur $\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2$ par t^2. Au signe près l'erreur commise est

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\left[\varphi(t) - \varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\right]\frac{\frac{\pi}{n}t + \frac{\pi^2}{4n^2}}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt.$$

Tenant compte de ce que $\left|\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\right|<2A\left(2t+\frac{\pi}{2n}\right)$, cette intégrale est en valeur absolue moindre que

$$A\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\left(2t+\frac{\pi}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{n}t+\frac{\pi^2}{4n^2}\right)}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)^2}dt=O(1).$$

D'où

$$u_n=O(1)+\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

Changeons t en $t-\frac{\pi}{2n}$. En remarquant encore que

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{n}}^{\frac{\alpha}{n}+\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)-\varphi(t)}{\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)^2}\cos 2nt\,dt\right|=O(1)$$

et en prenant la demi-somme des deux dernières expressions de u_n, on obtient

$$u_n=O(1)+\frac{1}{4}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)}{t^2}-\frac{\varphi\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)-\varphi(t)}{\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)^2}\right]\cos 2nt\,dt.$$

La quantité entre crochets où $h=\frac{\pi}{2n}$ s'écrit

$$\frac{2\varphi(t)-\varphi(t+h)-\varphi(t-h)}{(t-h)^2}-2h\frac{\varphi(t)-\varphi(t+h)}{t(t-h)^2}+h^2\frac{\varphi(t)-\varphi(t+h)}{t^2(t-h)^2}.$$

La même inégalité $|\varphi(t)-\varphi(t+h)|<2A(2t+h)$ indique que les deux derniers termes fournissent des intégrales bornées. Enfin

$$\varphi_x(t+h)+\varphi_x(t-h)-2\varphi_x(t)=\varphi_{x+2t}(h)+\varphi_{x-2t}(h).$$

Donc

$$|\varphi_x(t+h)+\varphi_x(t-h)-2\varphi_x(t)|=O(h)$$

et comme $h=O\left(\frac{1}{n}\right)$, le premier terme donne encore une intégrale bornée.

En résumé, si $\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}$ est uniformément borné en x et t,

$$\sigma_n-f=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a alors

$$2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)=\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\alpha}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et comme $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < 2A$,

$$\left|\int_{\frac{\alpha}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right| < 2A\int_{\frac{\alpha}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{dt}{t} = 2A\log 2,$$

donc

$$2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et par suite $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ (¹).

Démontrons la réciproque.

Supposons que $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. On a

$$|2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)|=O\left(\frac{1}{n}\right) \quad [6].$$

Et en vertu de (7) où $\alpha=\frac{\pi}{2}$, on a

$$2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)=\frac{2}{4n\pi}\int_{\frac{\pi}{4n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt-\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\left|\int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right|=O(1).$$

$\theta=\theta(x,n)$ étant compris entre 1 et 2, on a, d'après la formule de la moyenne,

$$\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{4n}\right)\frac{\varphi\left(\frac{\theta\pi}{4n}\right)}{\frac{\theta^2\pi^2}{16n^2}}=O(1) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left|\frac{\varphi\left(\frac{\theta\pi}{4n}\right)}{\frac{\theta\pi}{4n}}\right|=O(1).$$

Soit $t_n=\frac{\theta\pi}{4n}$. On a

$$\frac{\pi}{4n}<t_n<\frac{\pi}{2n} \qquad \text{et} \qquad a<\frac{t_{n+1}}{t_n}<b \qquad (a \text{ et } b, \text{ const. absolues} > 0).$$

Je dis que si $\left|\frac{\varphi(t_n)}{t_n}\right|$ est uniformément borné en n et x, $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|$ est uniformé-

---

(¹) Il faut remarquer que si pour suite d'entiers n_p tels que $\frac{n_{p+1}}{n_p}<a<+\infty$, on a

$$|P_{n_p}-f|<\frac{k}{n_p}.$$

Si l'on considère p_{n_p} comme un polynome d'ordre n_p+m ($m=1, 2, \ldots, n_{p+1}-n_p-1$), on a

$$|P_{n_p}-f|<\frac{k\,n_{p+1}}{n_p}\,\frac{1}{n_{p+1}}<\frac{ka}{n_{p+1}},$$

c'est-à-dire que quel que soit n, $E_n<\frac{k'}{n}$.

ment borné en x et t. Nous prendrons une suite d'entiers égaux à 2^p et posant $\lambda_p = t_{2^p}$, on a $\frac{\pi}{2^{p+2}} < \lambda_p < \frac{\pi}{2^{p+1}}$; λ_p est une suite décroissante tendant vers zéro pour $p\infty$. Soit $t > 0$ et p l'entier tel que $\lambda_{p+1} < t < \lambda_p$. On a alors

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right| < \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{\lambda_{p+1}}.$$

Or si

$$|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{\lambda_{p+1}}$ diffère de $[P_{2^p}(x+t)+P_{2^p}(x-t)-2P_{p^p}(x)]\frac{1}{\lambda_{p+1}}$ de $\frac{O\left(\frac{1}{2p}\right)}{\lambda_{p+1}} = O(1)$ au plus. Et

$$|P_{2p}(x+t)+P_{2p}(x-t)-2P_{2p}(x)| = t^2 O(2^p) = O(\lambda_p^2) O(2^p).$$

Donc

$$\frac{|P_{2p}(x+t)+P_{2p}(x-t)-2P_{2p}(x)|}{\lambda_{p+1}} = \frac{O(\lambda_p^2)\,O(2^p)}{\lambda_{p+1}} = O(1).$$

Ce qui prouve le théorème.

6. *Meilleure constante pour le procédé de Fejèr dans la classe* Lip 1. — Le problème des meilleures constantes posé par M. Favard [2] et résolu par lui pour diverses classes de fonctions, trouve ici pour le procédé régulier de Fejèr et la classe Lip 1, une solution simple.

Soit en effet

$$M = \sup_{x,x'} \left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\right|.$$

On a alors

$$\sigma_n - f = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{a} + \frac{1}{n\pi}\int_{a}^{+\infty} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (a \text{ étant une constante}).$$

D'où

$$|\sigma_n - f| \leq \frac{2}{\pi}\frac{M}{n}\left[\log a - \log\frac{\alpha}{n}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{2}{\pi} M \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or si l'on considère la fonction $f_1(x)$, nulle pour $x = 0$, paire et telle que pour $0 \leq x \leq a < \pi$, $f_1(x) = Mx$, on a

$$\sigma_n(0) - f_1(0) = \frac{2}{\pi} M \frac{\log n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

Pour le procédé de Fejèr et la classe Lip 1, *la meilleure constante est donc* $\frac{2}{\pi}$ [3]

et toute fonction continue périodique qui au voisinage d'un point x est représentée par deux segments de pente $+M$ et $-M$ est extrémale.

7. *Condition pour que* $\tilde{f} \in \mathrm{Lip}\, 1$. — On a vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est que $\tilde{f} \in \mathrm{Lip}\, 1$ (Chap. I, § 4). Donc d'après le théorème 2 on énoncera le suivant :

THÉORÈME 3. — *Pour que la fonction conjuguée $\tilde{f}$ de f satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre 1, il faut et il suffit que* $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}\,dt$ *soit uniformément borné en ε et x.*

II. — Généralisations.

Nous étendrons dans ce qui suit la méthode qui nous a servi pour les sommes de Fejèr à d'autres sommes trigonométriques s'exprimant sous forme d'intégrale, le noyau étant celui de Jackson-de la Vallée-Poussin $\frac{\sin 2^{2p} nt}{t^{2p}}$ (p entier >0).

1. *Les différences* Δ_{2p} [4]. — On pose

$$[x_0] = f(x_0), \qquad [x_0 x_1] = \frac{[x_0]-[x_1]}{x_0 - x_1}, \qquad \ldots,$$

$$[x_0 \ldots x_n] = \frac{[x_0 \ldots x_{n-1}] - [x_1 \ldots x_n]}{x_0 - x_n}; \qquad (x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j).$$

On a alors

$$[x_0 x_1 \ldots x_n] = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

$[x_0, \ldots, x_n]$ s'appelle la $n^{\text{ième}}$ différence divisée de $f(x)$ relativement aux points $x_0, \ldots, x_n$. Lorsque f possède sur l'intervalle (a, b) contenant $x_0, \ldots, x_n$ une dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$, on sait que $[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ où ξ est compris entre le plus petit et le plus grand des $n+1$ nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Si l'on suppose de plus que $x_0 = x + a_0 t, \ldots, x_n = x + a_n t$, où x est fixe et $a_0, \ldots, a_n$ des constantes ($a_i \neq a_j$ si $i \neq j$), on a

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\delta_n(f, x_0, \ldots, x_n)}{t^n},$$

$\delta_n(f, x_0, \ldots, x_n)$ [que nous écrirons $\delta_n(t)$ quand il n'y aura pas d'ambiguïté] est une différence d'ordre n. Lorsque $f^{(n)}$ existe, on a $\delta_n(t) = t^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Pour toute expression telle que $\lambda_n \delta_n(t)$ où λ_n est une constante dépendant de n seulement, on peut écrire

$$|\lambda_n \delta_n(t)| = t^n O\left[\max_x |f^{(n)}_{(x)}|\right].$$

On peut généraliser les résultats de M. Zygmund en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *$\delta_p(t)$ étant une différence de $f(x)$ continue, de période 2π, relative aux points $x+a_k t$ ($k=0, 1, \ldots, p$) où les a_k sont des constantes, si $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$, $\frac{|\delta_p(t)|}{|t|^{p-1}}$ est uniformément borné en n et x.*

En effet si $|f-P_n|=O\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$, $|P_n^{(p)}|=O(n)$ d'après (1). Écrivons

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})$$

et désignons par $\delta_p(P, t)$ ce que devient $\delta_p(t)=\delta_p(f, t)$ quand on remplace f par P. $\delta_p(f, t)$ étant une forme linéaire à coefficients constants de $f(x+a_k t)$, on a

$$\delta_p(f, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_p(\Pi_{2^k}, t), \qquad \text{où} \quad \Pi_{2^k}=(P_{2^k}-P_{2^{k-1}});$$

$$=\sum_{k=1}^{+N}+\sum_{N+1}^{+\infty}$$

Or

$$|f-P_{2^k}|=O\left(\frac{1}{2^{kp-k}}\right) \qquad \text{donc} \quad |\Pi_{2^k}|=O\left(\frac{1}{2^{kp-k}}\right) \qquad \text{et} \qquad |\delta_p(\Pi_{2^k}, t)|=O\left(\frac{1}{2^{kp-k}}\right).$$

D'où

$$\sum_{N+1}^{\infty}\delta_p(\Pi_{2^k}, t)=O\left[\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{N+1}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{N+2}+\ldots\right]=O\left(\frac{1}{2^{N(p-1)}}\right).$$

D'autre part

$$|\delta_p(\Pi_{2^k}, t)|=O(|t|^p)\max_x|\Pi_{2^k}^{(p)}|=|t|^p O(2^k) \qquad \text{car} \quad |P_{2^k}^{(p)}|=O(2^k).$$

D'où

$$|\delta_p(f, t)|=|t|^p\sum_{1}^{N}O(2^k)+O\left(\frac{1}{2^{N(p-1)}}\right)=|t|^p O(2^N)+O\left[\left(\frac{1}{2^N}\right)^{p-1}\right],$$

Soit N l'entier tel que $\frac{1}{2^N}<|t|\leqq\frac{1}{2^{N-1}}$. On a alors

$$|\delta_p(f, t)|=O(|t|^{p-1})+O(|t|^{p-1})=O(|t|^{p-1}). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous allons prendre pour $a_0, \ldots, a_n$ des valeurs particulières.

Considérons les points $x-t$, x, $x+t$ et posons

$$\Delta_2(t)=f(x-t)-2f(x)+f(x+t) \quad (^1).$$

---

(1) Quand il sera nécessaire de préciser nous écrirons $\Delta_2(f, t)$, $\ldots$, $\Delta_{2p}(f, t)$ au lieu de $\Delta_{2p}(t)$.

On a

$$\Delta_2(t) - 2^2\Delta_2\left(\frac{t}{2}\right) = f(x-t) - 4f\left(x - \frac{t}{2}\right) + 6f(x) - 4f\left(x + \frac{t}{2}\right) + f(x+t),$$

c'est-à-dire une différence d'ordre 4 de $f(x)$ aux points $x-t$, $x - \frac{t}{2}$, x, $x + \frac{t}{2}$, $x+t$. On a en posant

$$x_0 = x - t, \quad x_1 = x, \quad x_2 = x + t, \quad [x_0 x_1 x_2] = \frac{\Delta_2(t)}{2t^2}$$

et en posant

$$x_0 = x - t, \quad x_1 = x - \frac{t}{2}, \quad x_2 = x, \quad x_3 = x + \frac{t}{2}, \quad x_4 = x + t,$$

$$[x_0 x_1 x_2 x_3 x_4] = \frac{\Delta_2(t) - 2^2\Delta_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{3}{2}t^4}.$$

Posons

$$\Delta_4(t) = \Delta_2(t) - 2^2\Delta_2\left(\frac{t}{2}\right), \quad \ldots, \quad \Delta_{2p+2}(t) = \Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right).$$

On a le résultat suivant :

Δ_{2p} est une différence de $f(x)$, d'ordre $2p$, aux points

$$x - t, \quad x - \frac{t}{2}, \quad x - \frac{t}{2^2}, \quad \ldots, \quad x - \frac{t}{2^{p-1}}, \quad x, \quad x + \frac{t}{2^{p-1}}, \quad \ldots, \quad x + t.$$

Le résultat est en effet exact pour $p = 1, 2$. Supposons qu'il soit vrai pour p. C'est-à-dire que si

$$x_0^{2p} = x - t, \quad x_1^{2p} = x - \frac{t}{2}, \quad \ldots, \quad x_k^{2p} = x - \frac{t}{2^k}, \quad \ldots, \quad x_{p-1}^{2p} = x - \frac{t}{2^{p-1}},$$

$$x_p^{2p} = x, \quad \ldots, \quad x_{2p}^{2p} = x + t, \quad [x_0^{2p} x_1^{2p} \ldots x_{2p}^{2p}] = \frac{\Delta_{2p}(t)}{\lambda_p t^{2p}},$$

où λ_p est une constante dépendant de p seulement, on a

$$[x_0^{2p+2}, x_1^{2p+2}, \ldots, x_{2p+2}^{2p+2}] = \frac{\Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)}{\lambda_{p+1} t^{2p+2}}$$

en posant

$$x_0^{2p+2} = x - t, \quad x_1^{2p+2} = x - \frac{t}{2}, \quad \ldots, \quad x_p^{2p+2} = x - \frac{t}{2^p},$$

$$x_{p+1}^{2p+2} = x, \quad \ldots, \quad x_{2p+2}^{2p+2} = x + t.$$

En effet en raison de la symétrie deux à deux des points x_k^{2p} par rapport au point $x_p^{2p} = x$, il suffit de chercher pour $k \leqq p - 1$ le terme en $f(x_k^{2p+2})$ dans l'expression de $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Formons $\dfrac{\Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)}{\lambda_p t^{2p}}$ qu'on obtient en retranchant de la valeur de $[x_0^{2p}, \ldots, x_{2p}^{2p}]$ pour t, sa valeur pour $\frac{t}{2}$. Remarquons que

$$x_k^{2p} = x_k^{2p+2} \quad \text{si} \quad k \leqq p-1, \qquad x_p^{2p} = x_{p+1}^{2p+2} \qquad \text{et} \qquad x_k^{2p} = x_{k+2}^{2p+2} \quad \text{si} \quad k \geqq p+1.$$

On obtient donc pour terme en $f(x_k^{2p+2})$

$$\frac{-f(x_k^{2p+2})}{(x_k^{2p+2}-x_0^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_{p-1}^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+1}^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+3}^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_{2p+2}^{2p+2})}$$
$$+\frac{f(x_k^{2p+2})}{(x_k^{2p+2}-x_1^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_p^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+1}^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+2}^{2p+2})\ldots(x_k^{2p+2}-x_{2p+1}^{2p+2})},$$

c'est-à-dire le terme en $f(x_k^{2p+2})$ de $[x_0^{2p+2}, \ldots, x_{2p+2}^{2p+2}]$ multiplié par

$$\left[\frac{1}{(x_k^{2p+2}-x_0^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{2p+2}^{2p+2})} - \frac{1}{(x_k^{2p+2}-x_p^{2p+2})(x_k^{2p+2}-x_{p+2}^{2p+1})}\right] = \frac{t^2(2^{2p}-1)}{2^{2p}}.$$

Quand au terme en $f(x_p^{2p+2})$ qui provient de $\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)$, on a

$$\frac{f(x_p^{2p+2})}{(x_p^{2p+2}-x_1^{2p+2})\ldots(x_p^{2p+2}-x_{2p+1}^{2p+2})},$$

c'est-à-dire le terme de $[x_0^{2p+2}, \ldots, x_{2p+2}^{2p+2}]$ en $f(x_p^{2p+2})$ multiplié par

$$(x_p^{2p+2}-x_0^{2p+2})(x_p^{2p+2}-x_{2p+2}^{2p+2}) = \frac{t^2(2^{2p}-1)}{2^{2p}}.$$

Il en est de même pour le terme en $f(x_{p+1}^{2u+2})$.

En définitive

$$\frac{\Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)}{\lambda_p t^{2p}} = \frac{t^2(2^{2p}-1)}{2^{2p}}[x_0^{2p+2} x_1^{2p+2} \ldots x_{2p+2}^{2p+2}].$$

D'où

$$(11) \qquad \Delta_{2p+2}(t) = \lambda_{p+1} t^{2p+2}[x_0^{2p+2}, x_1^{2p+2} \ldots x_{2p+2}^{2p+2}] \qquad \text{et} \qquad \lambda_{p+1} = \lambda_p\left(1-\frac{1}{2^{2p}}\right)(\lambda_1 = 2).$$

On remarquera que $\lambda_{p+1} = 2\prod_{m=1}^{p}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)$ et que, par suite, λ_p a une limite finie pour $p\infty$. Lorsque $f', f'', \ldots, f^{(2p)}$ existent, on a

$$(12) \qquad \Delta_{2p}(t) = 2\prod_{m=1}^{p-1}\left(1-\frac{1}{2^{2m}}\right)t^{2p}\frac{f^{(2p)}(\xi)}{(2p)!}, \qquad \text{où} \quad x-t<\xi<x+t.$$

On a également

$$\frac{d}{dt}\Delta_2 = \Delta'_2 = f'(x+t) - f'(x-t), \qquad \ldots, \qquad \Delta'_{2p}(t) = \Delta'_{2p-2}(t) - 2^{2p-3}\Delta'_{2p-2}\left(\frac{t}{2}\right)$$

et l'on verrait encore que les quantités $\Delta'_{2p}(t)$ sont des différences d'ordre $(2p-1)$

de $f'(x)$ aux points $x-t$, $x-\frac{t}{2}$, $\ldots$, $x-\frac{t}{2^{p-1}}$, $x+\frac{t}{2^{p-1}}$, $\ldots$, $x+t$. De même, si

$$\Delta''_4 = f''(x-t) - f''\left(x-\frac{t}{2}\right) - f''\left(x+\frac{t}{2}\right) + f''(x+t), \qquad \ldots,$$

$$\Delta''_{2p}(t) = \Delta''_{2p-2}(t) - 2^{2p-4}\Delta''_{2p-2}\left(\frac{t}{2}\right),$$

$\Delta''_{2p}(t)$ est une différence d'ordre $2p-2$ de $f''(x)$. On aura donc

$$(13) \qquad |\Delta'_{2p}(t)| = |t|^{2p-1}\,O\left[\max_x |f^{(2p)}|\right]$$

et

$$(14) \qquad \Delta''_{2p}(t) = |t|^{2p-2}\,O\left[\max_x |f^{(2p)}|\right].$$

2. Nous avons vu (Chap. I, 1) que si $f(x)$ peut être approchée par une suite de polynomes $P_n(x)$ de façon que $|f-P_n| = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ (k entier >0), alors $P_n^{(k+1)} = O(n)$. Pour $k=1$ cette propriété nous a permis de déterminer la classe de saturation attachée au procédé de Fejèr. Nous allons pour le résultat suivant supposer que $f(x)$ jouit plus généralement de la propriété suivante : il existe une suite $\{P_n\}$ et un entier $p>0$ telle que si ρ_n désigne $\max_x|f-P_n|$, $|P_n^{(2p)}(x)| = O(n^{2p}\rho_n)$. On remarquera qu'on a alors $|P_n^{(2p+m)}(x)| = O(n^{2p+m}\rho_n)$. Dans les applications nous pourrons pour certaines classes de fonctions remplacer ρ_n par E_n et écrire $|f-P_n| = O(E_n)$.

Théorème 5. — *Soit ρ_n une suite de nombres positifs tendant vers zéro pour $n\infty$ (¹). S'il existe une suite de polynomes $\{P_n\}$ et un entier positif p tel que $|P_n - f| = O(\rho_n)$ et $|P_n^{(2p)}(x)| = O(n^{2p}\rho_n)$, alors*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\sin^{2r} nt\,dt = \frac{C_{2r}^r}{2^{2r}}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\,dt + O(n^{q-1}\rho_n),$$

α étant une constante et q, r des entiers ($q>1$, $2r \geqq q$, $2p+2r-q>0$). Si dans l'hypothèse on peut remplacer O par o, on peut aussi dans la conclusion remplacer O par o.

La démonstration est en tous points semblable à celle donnée dans le cas de $p=1$, $q=2$, $r=1$. Nous la reprendrons rapidement.

$\sin^{2r} nt$ s'exprime linéairement en fonction de $\cos 2knt$ ($k=0, 1, \ldots, r$) et

---

(¹) Les ρ_n ne sont pas nécessairement décroissants.

le terme constant est $\frac{C_{2r}^r}{2^{2r}}$. Si dans $\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \sin^{2r} nt\,dt$ on remplace f par P_n, l'erreur commise est

$$O(\rho_n)\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\sin^{2r} nt}{t^q}\,dt = O(\rho_n)\,n^{q-1}\int_0^{\alpha} \frac{\sin^{2r} t}{t^q}\,dt = O(n^{q-1}\rho_n).$$

Soit $\Delta_{2p}^n(t)$ ce que devient $\Delta_{2p}(t)$ quand on remplace f par P_n. On a

$$|\Delta_{2p}^n(t)| = O(t^{2p}) \max_x |P_n^{(2p)}| = t^{2p}\,O(n^{2p}\rho_n),$$

donc

$$\int_0^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_{2p}^n(t)}{t^q} \sin^{2r} nt\,dt = O(n^{2p}\rho_n)\int_0^{\frac{\alpha}{n}} t^{2p-q} \sin^{2r} nt\,dt$$
$$= O(n^{2p+2r}\rho_n)\int_0^{\frac{\alpha}{n}} t^{2p+2r-q}\,dt = O(n^{q-1}\rho_n).$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \sin^{2r} nt\,dt = O(n^{q-1}\rho_n) + \frac{C_{2r}^r}{2^{2r}}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}\,dt + \sum_{k=1}^{r} A_k \int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \Delta_{2p}(t)\frac{\cos 2knt}{t^q}\,dt,$$

les A_k étant des constantes absolues.

Dans les dernières intégrales nous remplaçons encore f par P_n; l'erreur commise est $O(n^{q-1}\rho_n)$ et en procédant sur $\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \Delta_{2p}(t)\frac{\cos 2knt}{t^q}\,dt$ comme précédemment (§ 1, 1°) $\Big($on change t en $t+\frac{\pi}{2kn}$ et l'on prend la demi-somme des valeurs obtenues$\Big)$, on a

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \Delta_{2p}^n(t)\frac{\cos 2knt}{t^q}\,dt = O(n^{q-1}\rho_n) + \frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty}\left[\frac{\Delta_{2p}^n(t)}{t^q} - \frac{\Delta_{2p}^n\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q}\right]\cos 2knt\,dt.$$

Cette dernière quantité, où l'on a réduit au même dénominateur et développé $\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q$, s'écrit

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}^n(t) - \Delta_{2p}^n\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q}$$

augmenté d'un nombre fini de termes de la forme

$$\frac{1}{n^m}\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}^n(t)}{t^m\left(t+\frac{\pi}{2kn}\right)^q}\cos 2knt\,dt$$

qui sont moindres que $O(n^{q-1}\rho_n)$ parce que $|\Delta^n_{2p}(t)| = t^{2p} O(n^{2p}\rho_n)$ d'après (12).

Enfin en intégrant par parties

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta^n_{2p}(t) - \Delta^n_{2p}\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)^q} \cos 2knt\, dt$$

et en prenant $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2n}\right.$ est un zéro de $\sin 2knt$ pour $\left.k = 1, 2, \ldots, r\right)$, on trouve deux termes qui, à une constante multiplicative près, sont

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\Delta^n_{2p}(t) - \Delta^n_{2p}\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)^{q+1}} \sin 2knt = O(n^{q-1}E_n)$$

parce que

$$\left|\Delta^n_{2p}(t) - \Delta^n_{2p}\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\left|\Delta^{n\prime}_{2p}\left(t + \frac{\theta\pi}{2kn}\right)\right|$$
$$= O\left(\frac{1}{n}\right) t^{2p-1} \max_x |P^{(2p)}_n| = O(n^{2p-1}\rho_n)\, t^{2p-1}$$

en vertu de $|\Delta^{n\prime}_{2p}(t)| = t^{2p-1} O\left(\max_x |P^{(2p)}_n|\right)$ d'après (13) et

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{\Delta^{n\prime}_{2p}(t) - \Delta^{n\prime}_{2p}\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)^q} \sin 2kn\, dt = O(n^{q-1}E_n)$$

parce que

$$\left|\Delta^{n\prime\prime}_{2p}(t) - \Delta^{n\prime\prime}_{2p}\left(t + \frac{\pi}{2kn}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\left|\Delta^{n\prime\prime}_{2p}\left(t + \frac{\theta\pi}{2kn}\right)\right| = O(n^{2p-1}\rho_n)\, t^{2p-2}$$

en vertu de $|\Delta^{n\prime\prime}_{2p}(t)| = t^{2p-2} O\left(\max_x |P^{(2p)}_n|\right)$ d'après (14).

Comme dans le cas des sommes de Fejèr, si l'on a dans l'hypothèse

$$|P_n - f| = o(\rho_n) \quad \text{et} \quad |P^{(2p)}_n| = o(n^{2p}\rho_n) \quad (^1),$$

on voit qu'il faut dans le cours des calculs, remplacer partout O par o.

Enfin on a encore

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\, dt\right| = O(n^{q-1}\rho_n) + \left|\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\alpha}{n}} \frac{\Delta^n_{2p}(t)}{t^q}\, dt\right| = O(n^{q-1}\rho_n),$$

ce qui achève la démonstration.

3. *Conséquences et applications.* — *a.* $q = 2p = 2r$.

---

(1) On a vu que si $\rho_n = \frac{1}{n}$, l'hypothèse $|P_n - f| = o\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne $|P''_n| = o(n)$.

THÉORÈME 6. — *Si Λ_p est une constante, dépendant de p seulement, convenablement choisie,* $\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p} nt\,dt$ *représente la différence entre une somme trigonométrique d'ordre $2^p pn$ et $f(x)$. L'approximation par ces sommes d'une fonction f telle que* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ *est donnée par*

$$\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)}\cdot\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}dt + O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

Ce procédé d'approximation se sature avec l'approximation de saturation d'ordre $\frac{1}{n^{2p-1}}$ *dans la classe des fonctions où* $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}dt$ *est borné uniformément en x et ε.*

Soit d'après (N.12)

$$\begin{aligned}J_{pn} - f &= \frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)\sin^{2p} nt}{t^{2p}}dt\\ &= \frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^{2p}}\sin^{2p} nt\,dt,\end{aligned}$$

où $\alpha_p = \dfrac{1}{2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p} t}{t^{2p}}dt}\cdot$ C'est la différence entre une somme trigonométrique d'ordre pn : J_{pn} et $f(x)$. On a alors

$$J_{2pn} - f = \frac{\alpha_p}{2^{2p-1}\,n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(2t)\sin^{2p} 2nt}{t^{2p}}dt$$

et en changeant t en $\frac{t}{2}$,

$$J_{2pn} - f = \frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)\sin^{2p} nt}{t^{2p}}dt.$$

D'où

$$u_n = (J_{pn} - f) - 2^2(J_{2pn} - f) = \frac{\alpha^p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_4(2t)\sin^{2p} nt}{t^{2p}}dt.$$

La même opération appliquée à u_n donnera

$$u_n - 2^4 u_{2n} = \frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_6(2t)\sin^{2p} nt}{t^{2p}}dt.$$

Après p opérations on obtiendra

$$\frac{\alpha_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)\sin^{2p} nt}{t^{2p}}dt = K_{2^p pn}(x) - \frac{1}{\Lambda_p}f(x),$$

où $K_{2^p_{pn}}(x)$ est une somme trigonométrique d'ordre 2^p_{pn}, combinaison linéaire des sommes $J_{2kpn}(x)(k=0, 1, \ldots, p)$ et λ_p une constante dépendant de p seulement. Ceci prouve la première partie du théorème.

D'après le théorème 5 où l'on prend $\rho_n = \frac{1}{n^{2p-1}}$, on aura

$$|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right) \qquad \text{et} \qquad |P_n^{(2p)}| = O(n).$$

Donc si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, en remarquant que

$$\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} = \frac{(p+1)\ldots(2p)}{2^{2p}p!} = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots(2p)},$$

on aura pour une telle fonction

$$\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}} \sin^{2p} nt\, dt = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)} \frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p}}\, dt + O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

Ce procédé ne peut donner l'approximation $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ que si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et pour que ce procédé donne de f l'approximation $O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, il est donc nécessaire et suffisant que $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\, dt$ soit borné uniformément en x et n.

Mais d'après le théorème 4, si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, $\left|\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p-1}}\right| = O(1)$ uniformément en x et t, donc ε étant quelconque > 0 et n l'entier tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leqq \frac{1}{n}$. On a

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\, dt\right| \leqq \left|\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\right| \leqq O(1) \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = O(1).$$

Il reste donc à prouver que le procédé est saturé. Nous allons pour cela démontrer que l'hypothèse

$$\left|\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}} \sin^{2p} nt\, dt\right| = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right) \qquad \text{entraîne} \quad f = \text{const.}$$

En effet supposons

$$\left|\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}} \sin^{2p} nt\, dt\right| = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

Alors $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et si $|P_n - f| = o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, $|P_n^{(2p)}| = o(n)$. On peut donc écrire

$$\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}} \sin^{2p} nt\, dt = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots(2p)} \frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\, dt + o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right);$$

donc $U_{p,n}(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\,dt$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. m étant un entier >0 fixe soit

$$\varepsilon_{m,n}=\int_0^{2\pi}U_{p,n}(x)\cos mx\,dx.$$

$\varepsilon_{m,n}$ tend vers zéro pour $n\,\infty$. Or

$$\varepsilon_{m,n}=\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{2\pi}\Delta_{2p}(2t)\cos mx\,dx \quad \text{et} \quad \Delta_{2p}(2t)=\sum_{k=0}^{p}A_k\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right),$$

les A_k étant des constantes absolues. Un terme de

$$\varepsilon_{m,n}=\sum_{k=0}^{p}A_k\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{+\infty}\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right)\cos mx\,dx$$

est à un facteur constant près

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{2\pi}\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right)\cos mx\,dx.$$

Or

$$\int_0^{2\pi}\Delta_2\left(\frac{t}{2^{2k-1}}\right)\cos mx\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[f\left(x+\frac{2t}{2^{2k}}\right)+f\left(x-\frac{2t}{2^{2k}}\right)-2f(x)\right]\cos mx\,dx=\int_0^{2\pi}f(u)\cos m\left(u-\frac{2t}{2^{2k}}\right)du$$
$$+\int_0^{2\pi}f(u)\cos m\left(u+\frac{2t}{2^k}\right)du-2\int_0^{2\pi}f(u)\cos mu\,du,$$

et comme

$$\cos m(u+h)+\cos m(u-h)-2\cos mu=-4\cos mu\sin^2 m\frac{h}{2},$$

on a

$$\Delta_{2p}(\cos mx,\ 2t)=\text{const.}\cos mu\sin^{2p}mt.$$

D'où

$$\varepsilon_{m,n}=\text{const.}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{dt}{t^{2p}}\int_0^{2\pi}f(x)\cos mx\sin^{2p}mt\,dx=\text{const.}\,a_m\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\sin^{2p}mt}{t^{2p}}\,dt,$$

a_m étant un coefficient de Fourier de $f(x)$.

Il en résulte donc $a_m=0$ quand on fait croître n indéfiniment. De même $b_m=0$. Et par suite l'hypothèse

$$\frac{\Lambda_p}{n^{2p-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p}}\sin^{2p}nt\,dt=o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

entraîne bien $f=\text{const.}$

b. On peut au moyen de ces sommes trigonométriques démontrer le résultat bien connu suivant :

THÉORÈME. — *Si $f(x)$ possède une dérivée $k^{\text{ième}}$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre* $\alpha (0 < \alpha \leqq 1)$, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right)$.

En effet si $k = 2p$, on a

$$\Delta_{2p+2}(t) = \Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)$$

et d'après (12)

$$\Delta_{2p+2}(t) = 2\prod_{m=1}^{p-1}\left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\frac{t^{2p}}{(2p)!}[f_{(\xi)}^{(2p)} - f_{(\xi')}^{(2p)}],$$

où

$$x - t < \xi < x + t, \qquad x - \frac{t}{2} < \xi' < x + \frac{t}{2}.$$

Donc si $f^{(2p)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, comme $|\xi - \xi'| < 3t$, on a

$$|\Delta_{2p+2}(t)| < 2\prod_{m=1}^{p-1}\left(1 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\frac{3^\alpha M}{(2p)!}t^{2p+\alpha} \qquad \text{si} \quad |f_{(x)}^{(2p)} - f_{(x')}^{(2p)}| \leqq M|x - x'|^\alpha.$$

Et

$$\left|\frac{\Lambda_{p+1}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p+2}(2t)}{t^{2p+2}}\sin^{2p+2}nt\,dt\right| < \frac{\mu_p M}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}nt}{t^{2-\alpha}}dt = \frac{\mu_p M}{n^{2p+\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}t}{t^{2-\alpha}}dt,$$

où $\mu_p = \text{const}$. On a donc si $k = 2p$

$$\left|\frac{\Lambda_{p+1}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p+2}(2t)}{t^{2p+2}}\sin^{2p}nt\,dt\right| = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right).$$

Si $k = 2p - 1$ on a : $\Delta_{2p}(t) = \lambda_p t^{2p}[x_0^{2p}\ldots x_{2p}^{2p}]$ d'après (11) et la définition des différences divisées donne

$$\Delta_{2p}(t) = \lambda_p t^{2p}\frac{[x_0^{2p}\ldots x_{2p-1}^{2p}] - [x_1^{2p}\ldots x_{2p}^{2p}]}{x_0^{2p} - x_{2p}^{2p}}.$$

Or $x_0^{2p} = x - t$ et $x_{2p}^{2p} = x + t$. D'autre part

$$[x_0^{2p}\ldots x_{2p-1}^{2p}] = \frac{f_{(\xi)}^{(2p-1)}}{(2p-1)!}, \qquad [x_1^{2p}\ldots x_{2p}^{2p}] = \frac{f_{(\xi')}^{(2p-1)}}{(2p-1)!},$$

où

$$x - t < \xi < x - \frac{t}{2}, \qquad x - \frac{t}{2} < \xi' < x + t.$$

Donc $|\xi - \xi'| < 3t$ et

$$|\Delta_{2p}(t)| \leqq \lambda_p\frac{|t|^{2p+\alpha}3^\alpha M}{2(2p-1)!\,t} = \frac{3^\alpha\lambda_p}{2(2p-1)!}M|t|^{2p-1+\alpha}.$$

De $\Delta_{2p+2}(t) = \Delta_{2p}(t) - 2^{2p}\Delta_{2p}\left(\frac{t}{2}\right)$ on tire

$$|\Delta_{2p+2}(t)| \leq \text{const.}\, M\, |t|^{2p-1+\alpha},$$

d'où

$$\left|\frac{\Lambda_{p+1}}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p+2}(2t)}{t^{2p+2}}\sin^{2p+2}nt\,dt\right| < \frac{\nu_p M}{n^{2p+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}nt}{t^{3-\alpha}}\,dt,$$

soit

$$O\left(\frac{1}{n^{2p-1+\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right).$$

c. Conditions pour que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$.

Théorème 7. — *Pour que* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ *il faut et il suffit que l'une des quantités suivantes soit uniformément bornée en* ε *et* x.

$$\frac{\Delta_{2p}(\varepsilon)}{\varepsilon^{2p-1}}, \qquad \varepsilon^{2m}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^{2p+2m}}\,dt \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Considérons

$$v_n^{p,m} = \frac{\mu_{p,m}}{n^{2p+2m-1}}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\sin^{2p+2m}nt\,dt,$$

où m est entier $\geqq 1$. Comme précédemment (3*a*) si la constante $\mu_{p,m}$ est convenablement choisie $v_n^{p,m}$ représente la différence entre une somme d'ordre $2^p(p+m)n$ et $f(x)$. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que $|v_n^{p,m}| = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$. Cela n'est possible que si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et dans ce cas d'après le théorème 5 on a

$$\begin{aligned} v_n^{p,m} &= \frac{\mu_{p,m}}{n^{2p+2m-1}}\,\frac{C_{2p+2m}^{p+m}}{2^{2p+2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)\left[\frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt + O(1)\right]. \end{aligned}$$

Donc pour que $|v_n^{p,m}| = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ il est nécessaire et suffisant que

$$\frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt$$

soit uniformément borné en x et n. Cette condition est équivalente à $\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon'}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2+2m}}\,dt$ borné. En effet si

$$\frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\,dt = O(1),$$

alors $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ et d'après le théorème 4, $\left|\frac{\Delta_{2p}}{t^{2p-1}}\right| = O(1)$. On a alors

$$\left|\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\, dt\right| = O(1)\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t^{2m+1}} = O[(n+1)^{2m} - n^{2m}] = O(n^{2m-1})$$

et

$$\left[\frac{1}{n^{2m}} - \frac{1}{(n+1)^{2m}}\right] = O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right).$$

Si n est l'entier tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leqq \frac{1}{n}$, la différence

$$\left.\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\, dt - \frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\, dt\right|$$

$$= \left|\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} + \left(\varepsilon^{2m} - \frac{1}{n^{2m}}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\, dt\right| = O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2m+1}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Réciproquement si

$$\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\, dt = O(1), \qquad \frac{1}{n^{2m}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\, dt = O(1).$$

Mais d'autre part une autre condition nécessaire et suffisante pour que $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ est que $\varphi_n^{p,m} = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$. Car si $\varphi_n^{p,m} = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ également; et si $E_n = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$ alors $\left|\frac{\Delta_{2p}}{t^{2p-1}}\right| = O(1)$ (Théorème 4). Donc

$$|\varphi_n^{p,m}| = O(1)\frac{1}{n^{2p+2m-1}}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p+2m} nt\, dt}{t^{2m+1}} = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right).$$

En changeant t en $\frac{t}{2}$ dans $\varepsilon^{2m}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p+2m}}\, dt$, nous obtenons le théorème énoncé.

III. — Sommation de Cesaro d'ordre entier.

1. *Procédé de sommation de Cesaro d'ordre 2.*

Théorème 8. — *La classe de saturation attachée au procédé de sommation de Cesaro d'ordre 2 est la même que celle attachée au procédé de Fejèr.*

Soit

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n}{1 + 2 + \ldots + n} \qquad \text{et} \qquad \sigma_n^2 - f = \frac{\sum_1^n k(\sigma_k - f)}{\sum_1^n k}$$

et d'après (N.5)

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 - f &= \frac{2}{n(n+1)\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(\sum_1^n \sin^2 kt\right) dt \\
&= \frac{1}{n(n+1)\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(n - \sum_1^n \cos 2kt\right) dt \\
&= \frac{1}{n(n+1)\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}\right) dt.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou, condition équivalente, $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < 2A$ (Notations 3°), on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right) dt\right| &< 2A\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\sum_1^n (k^2t^2)\, dt \\
&= 2A\, O(n^3)\int_0^{\frac{1}{n}} t\, dt = 2A\, O(n),
\end{aligned}$$

donc

$$\sigma_n^2 - f = O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2n+1}{2n(n+1)\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt - \frac{1}{n(n+1)\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt.$$

[On verrait encore comme au (§ 1, 3°) que si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut remplacer partout O par o]. Or $\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| < 2n+1$; donc a étant une constante quelconque,

$$\left|\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt\right| = O(n).$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right]\sin(2n+1)t\, dt\right| \\
&\quad < \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{|\varphi(t)|}{t^2}\,\frac{O(t^3)}{t^2}\,|\sin(2n+1)t|\, dt < O(1)\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt = O(1),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'à $O(1)$ près on peut remplacer $\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)\sin(2n+1)t}{t^2 \sin t} dt$ par $\int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)\sin(2n+1)t}{t^3} dt$ et cette dernière quantité est $O(n)$ si $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| < 2A$.

Donc

$$\sigma_n^2 - f = \frac{2n+1}{2n(n+1)\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

et comme $\frac{2n+1}{2n(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{2n(n+1)}$ on a finalement

$$\sigma_n^2 - f = \frac{1}{n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{15}$$

lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ on remplacera O par o.

Cette égalité prouve le théorème. On peut remarquer que la borne inférieure $\frac{1}{n}$ de cette dernière intégrale peut être remplacée par $\frac{\alpha}{n}$ comme dans (7).

On remarque aussi que si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$\sigma_n - f = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = 2(\sigma_n - f) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\sigma_n^2 - f = 2(\sigma_n - f) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ on a

$$n(\sigma_n^2 - f) = 2n(\sigma_n - f) + o(1).$$

Donc

Si $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$n(\sigma_n^2 - f) \approx 2n(\sigma_n - f).$$

2. *Procédé de sommation de Cesaro d'ordre entier quelconque.* — Si l'on pose $S_n^1 = S_0 + \ldots + S_{n-1}$ on a

$$\sigma_n^1 = \frac{S_n^1}{C_n^1}.$$

Puis

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} S_k^1 \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \frac{S_n^2}{\sum_{k=1}^{n} C_k^1}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} C_{k+p-1}^{p} = C_{n+p}^{p+1}.$$

En effet C^p_{k+p-1} est le coefficient de x^p dans le développement de $(1+x)^{k+p-1}$ et

$$\sum_{k=1}^{n}(1+x)^{k+p-1}=(1+x)^{p-1}\sum_{k=1}^{n}(1+x)^k$$
$$=(1+x)^{p-1}\left[\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)}{x}\right]=\frac{(1+x)^{n+p}-(1+x)^p}{x}$$

et le terme en x^p dans le dernier membre a pour coefficient C^{p+1}_{n+p}. D'où $S^2_n=C^2_{n+1}\sigma^2_n$. Puis

$$\sigma^3_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}C^2_{k+1}\sigma^2_k}{C^3_{n+2}},\quad \dots,\quad \sigma^p_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}C^{p-1}_{k+p-2}\sigma^{p-1}_k}{C^p_{n+p-1}}\quad \text{et}\quad \sigma^p_n-f=\frac{\sum_{k=1}^{n}C^{p-1}_{k+p-2}(\sigma^{p-1}_k-f)}{C^p_{n+p-1}}.$$

Or

$$\sigma^2_n-f=\frac{1}{2\pi C^2_{n+1}}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[n+\frac{1}{2}-\frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}\right]dt$$

ou

$$C^2_{k+1}(\sigma^2_k-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt,$$

que nous écrirons

$$C^2_{k+1}(\sigma^2_k-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[C^1_k+\frac{1}{2}C^1_1-\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt.$$

D'où

$$C^3_{n+2}\sigma^3_n=\sum_{k=1}^{n}C^2_{k+1}(\sigma^2_k-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\sum_1^n C^1_k+\frac{1}{2}\sum_1^n C^1_1-\sum_1^n\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[C^2_{n+1}+\frac{1}{2}C^1_n-\sum_1^n\frac{\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt$$

et en raison de $\sum_{k=1}^{n}C^p_{k+p-1}=C^{p+1}_{n+p}$ on a pour $p\geqq 3$:

$$C^p_{n+p-1}(\sigma^p_n-f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{C^{p-3}_{n+p-4-(k-1)}\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}k\,C^p_{n+p-1-(k-1)}=C^{p+2}_{n+p+1}.$$

En effet $kC^p_{n+p-1-(k-1)}$ est le coefficient de x^p dans le développement de $k(1+x)^{n+p-k}$ et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(1+x)^{n+p-k} &= (1+x)^{n+p+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+x)^{k+1}}\\ &= -(1+x)^{n+p+1}\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}\right]\\ &= -(1+x)^{n+p+1}\frac{d}{dx}\left[\frac{1-(1+x)^n}{x(1+x)^n}\right]\\ &= (1+x)^{n+p+1}\frac{(1+x)^{n+1}-(n+1)x-1}{x^2(1+x)^{n+1}}\\ &= \frac{(1+x)^{n+p+1}-(1+x)^p-(n+1)x(1+x)^p}{x^2}.\end{aligned}$$

Il faut donc au numérateur de cette dernière quantité prendre le coefficient du terme en x^{p+2} qui est précisément C^{p+2}_{n+p+1}. Il en résulte que si $t\to 0$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{C^{p-3}_{n+p-4-(k-1)}\sin(2k+1)t}{2\sin t}$$

tend vers $C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}$.

Cherchant alors l'approximation de f fournie par la moyenne de Cesaro d'ordre p, σ^p_n et supposant dans ce but $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est-à-dire $\frac{\varphi(t)}{t}$ uniformément borné en x et t (Notations 3°) nous écrirons encore :

$$\begin{aligned}C^p_{n+p-1}(\sigma^p_n-f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} &+ \frac{1}{2\pi}\left(C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}C^{p-3}_{n+p-4-(k-1)}\sin(2k+1)t}{2\sin t}\right]dt.\end{aligned}$$

Le premier terme s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varphi(t)}{2t^2\sin t}\left[2\sin t\left(C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}\right)-\sum_{k=1}^{n}C^{p-3}_{n+p-4-(k-1)}\sin(2k+1)t\right]dt.$$

Or

$$2\sin t\left[C^{p-1}_{n+p-2}+\frac{1}{2}C^{p-2}_{n+p-3}\right]-\sum_{k=1}^{n}C^{p-3}_{n+p-4-(k-1)}\sin(2k+1)t$$

est un polynome trigonométrique d'ordre $2n+1$, impair, nul pour $t=0$. Son développement commence par un terme en t^3 au voisinage de $t = 0$ et sa dérivée troisième est

$$< 2 C_{n+p-2}^{p-1} + C_{n+p-3}^{p-2} + \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^3 C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3}.$$

Or $C_n^p = O(n^p)$. Cette dérivée est donc en valeur absolue moindre que

$$O(n^{p-1}) + O(n^{p-2}) + O(n^{p-3}) \sum_{1}^{n} O(k^3)$$

c'est-à-dire $O(n^{p+1})$. Si $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$, le premier terme est donc en valeur absolue inférieur à

$$O(n^{p+1}) \int_0^{\frac{1}{n}} t\, dt = O(n^{p-1}).$$

Le troisième terme s'écrit : $\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{a} + \frac{2}{2\pi} \int_{a}^{+\infty}$ où a est une constante quelconque $< \frac{\pi}{2}$.

Or

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{a}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} \sin(2k+1)t}{2 \sin t} \right] dt \right|$$
$$< \frac{1}{2\pi} \int_{a}^{+\infty} \frac{4 \max|f|}{t^2} \left[\sum_{k=1}^{n} k C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} C_{n+p-4-(k-1)}^{p-2} \right]$$
$$< \frac{1}{\pi} \int_{a}^{+\infty} \frac{\max|f|}{t^2} \left[C_{n+p-2}^{p-1} + \frac{1}{2} C_{n+p-3}^{p-2} \right] = O(n^{p-1}).$$

et

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\varphi(t)}{t^2} \frac{\sum_{k=1}^{n} C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} \sin(2k+1)t}{2 \sin t} dt \right| < \int_{\frac{1}{n}}^{a} \frac{\sum_{k=1}^{n} O(n^{p-3})}{t^2} dt$$

parce que $\frac{\varphi(t)}{t} = O(1)$ et

$C_{n+p-4-(k-1)}^{p-3} = O(n^{p-3})$; cette quantité est donc $O(n^{p-1})$.

En définitive

$$\sigma_n^p - f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{C_{n+p-2}^{p-1} + \frac{1}{2} C_{n+p-3}^{p-2}}{C_{n+p-1}^{p}} \right] \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt + \frac{O(n^{p-1})}{C_{n+p-1}^{p}}$$

c'est-à-dire

$$\sigma_n^p - f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{C_{n+p-2}^{p-1} + \frac{1}{2}C_{n+p-3}^{p-2}}{C_{n+p-1}^p}\right]\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{C_{n+p-2}^{p-1}}{C_{n+p-1}^p}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 9. — *Les procédés d'approximation définis par les moyennes de Cesaro d'ordre p entier* ($p = 1, 2, \ldots$), *ont tous même classe de saturation.*

On remarquera : 1° qu'un calcul plus simple que pour σ_n et σ_n^2 permet de prouver que les classes de saturation attachées aux moyennes de Cesaro d'ordre entier $p \geqq 3$ sont les mêmes, mais ne prouve pas que cette classe est celle attachée au procédé de Fejèr;

2° que la constante qui figure dans l'approximation de f par σ_n^p lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ est asymptotiquement pour $p\ \infty$: $\frac{p}{2\pi n}$;

3° que si $|\sigma_n^p - f| = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $f = \text{const}$.

IV. — Procédé d'approximation de Jackson-de la Vallée-Poussin.

Dans ce paragraphe nous étudions la classe de saturation attachée au procédé de Jackson-de la Vallée Poussin défini par les sommes d'ordre $2n$,

$$J_{2n} = \frac{3}{2\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{t^4}\sin^4 nt\,dt. \quad (\text{N}.11)$$

Remarquons d'abord que si $\sigma_n^{\cdot}(x)$ désigne la conjuguée de la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejèr de $f(x)$,

$$v_n = \frac{1}{n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+2t)}{t^2}\sin^2 nt \sin 2nt\,dt = \sigma_{2n}^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot}.$$

En effet $f(x+2t)\sin^2 nt \sin 2nt$ a pour période π et en raison de

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t+k\pi)^2}$$

on a

$$v_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t) - f(x-2t)]\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt.$$

De $\frac{\sin^2 nt}{\sin t} = \sum_{p=1}^{n}\sin(2p-1)t$, on déduit :

$$v_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{1}{\sin t}\left[\sum_{p=1}^{n} 2\sin 2nt\sin(2p-1)t\right]dt$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{1}{\sin t}$$

$$\times\left[\sum_{p=1}^{n}(\cos(2n-2p+1)t-\cos(2n+2p-1)t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{1}{\sin t}$$

$$\times\sum_{p=1}^{n}[(\cos t-\cos(2n+2p-1)t)-(\cos t-\cos(2n-2p+1)t)]\,dt.$$

Or

$$S_p^{\cdot} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)-f(x-2t)]\frac{\cos t-\cos(2p+1)t}{\sin t}\,dt.$$

D'où

$$v_n = \frac{1}{2n}[S_n^{\cdot}+S_{n+1}^{\cdot}+\ldots+S_{2n-1}^{\cdot}-(S_1^{\cdot}+S_2^{\cdot}+\ldots+S_{n-1}^{\cdot})]$$

et comme $\sigma_n^{\cdot} = \dfrac{S_1^{\cdot}+\ldots+S_{n-1}}{n}$ il vient

$$v_n = \frac{1}{2n}[2n\sigma_{2n}^{\cdot}-2n\sigma_n^{\cdot}] = \sigma_{2n}^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}.$$

Théorème 10. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le procédé d'approximation de Jackson-de la Vallée-Poussin défini par* J_{2n} *donne de* $f(x)$ *une approximation* $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *est que* $f(x)$ *possède une dérivée* $f'(x)$ *satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre* 1.

Posant encore $\varphi(t) = f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)$, on a

$$J_{2n}-f = \frac{3}{2\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^4}\sin^4 nt\,dt.$$

Nous cherchons l'approximation donnée de f par J_{2n} lorsque $E_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. f possède alors une dérivée continue f' telle que $E_n(f') = O\left(\frac{1}{n}\right)$. D'autre part on a aussi

$$E_n(f^{\cdot}) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad E_n(f^{\cdot\prime}) = O\left(\frac{1}{n}\right)\quad \text{(Notations 3°)}.$$

En raison de la convergence absolue des intégrales qui vont intervenir on a, en intégrant par parties,

$$J_n-f = \frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^4 nt\,dt+\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^3}\sin^2 nt\sin 2nt\,dt.$$

Une nouvelle intégration par parties portant sur la dernière intégrale donne :

$$\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}[2n\sin nt\cos nt\sin 2nt+2n\sin^2 nt\cos 2nt]\,dt$$
$$+\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^2}\sin^2 nt\sin 2nt\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\pi n}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}(\sin^2 2nt-\sin^2 nt)\,dt+\frac{1}{n}[\sigma_{2n}(f'';x)-\sigma_n(f'';x)]$$

en raison de $\sin^2 2nt+2\sin^2 nt\cos 2nt=2(\sin^2 2nt-\sin^2 nt)$ et du lemme précédent. On a donc

$$\mathrm{J}_{2n}-f=\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^4 nt\,dt$$
$$+\frac{1}{n}[\sigma_{2n}(f'';x)-\sigma_n(f'';x)]+2\sigma_{2n}(f;x)-\sigma_n(f;x)-f(x).$$

Or $\sin^4 nt=\sin^2 nt-\frac{1}{4}\sin^2 2nt$. Le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^2 nt\,dt$$
$$-\frac{2}{(2n)^3\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^2 2nt\,dt.$$

Soit alors

$$u_n=\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^2 nt\,dt.$$

Comme

$$\frac{\cos t}{\sin^3 t}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t+k\pi)^3},$$

on a

$$u_n=\frac{1}{\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin^3 t}\cos t\sin^2 nt\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin^2 t}\sum_{k=1}^{n}(2\cos t\sin[2k-1]t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin^2 t}\left[\sin t+2\sum_{k=1}^{n-1}\sin 2pt+\sin 2nt\right]dt$$
$$=\frac{1}{2\pi n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{\sin t}\,dt+\frac{1}{n^2}[f''-\sigma_n(f'';x)]+\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k[f''-\sigma_k(f'';x)].$$

La première intégrale a un sens parce que f'' existe et $\mathrm{E}_n(f'')=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. La première quantité vaut donc $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. La seconde est $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ parce que $\sigma_n(f''; x)$ converge uniformément vers f''.

On a donc aussi

$$\frac{2}{(2n)^3\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x+2t)-f'(x-2t)}{t^3}\sin^2 2nt\,dt$$
$$= o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{\pi(2n)^3}\left\{\sum_{k=1}^{2n+1}k[f''-\sigma_k(f''; x)]\right\}.$$

Or

$$\frac{2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k(f-\sigma_k)=\frac{n-1}{n^2}\left[f-\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+(n-1)\sigma_{n-1}}{1+2+\ldots+(n+1)}\right].$$

Enfin en remarquant que $|2\sigma_{2n}-\sigma_n-f|=O[E_n(f)]$ et en utilisant les résultats obtenus sur l'approximation par les sommes de Fejèr et les moyennes de Cesaro d'ordre 2 des fonctions f telles que $E_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ [*voir* (7) et (15)] (ce qui est le cas pour f'' ici) on obtient après réduction :

$$J_{2n}-f=O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{4\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1''}{t^2}dt-\frac{1}{2\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1''}{t^2}dt-\frac{1}{2\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1''}{t^2}dt,$$

où

$$\varphi_1''=f''(x+2t)+f''(x-2t)-2f''(x)$$

c'est-à-dire

$$J_{2n}-f=-\frac{3}{4\pi n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi''}{t^2}dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{16}$$

Ainsi s'exprime l'approximation de f par J_{2n} lorsque $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Si $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ on a aussi

$$E_n(f'')=o\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad E_n(f')=o\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad E_n(f'')=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et en reprenant les calculs précédents on voit qu'on peut dans (16) remplacer O par o. Il existe donc une classe de saturation (Th. 6). Elle est obtenue lorsque $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\varphi_1''}{t^2}dt$ est uniformément bornée en x et n, c'est-à-dire (Th. 2) lorsque $|\sigma_n(f''; x)-f''(x)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc (I.4) lorsque $f'\in\operatorname{Lip} 1$. Ce qui achève de prouver le théorème.

On peut alors reprendre cette question et chercher la classe de saturation attachée à ce procédé, parmi les fonctions possédant une dérivée première appartenant à la classe Lip 1. On a le résultat suivant :

Théorème 11. — *L'approximation de f par J_{2n} lorsque $f' \in \mathrm{Lip}\, 1$ est donnée par*

$$J_{2n} - f = \frac{9}{16\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}\, dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En effet

$$J_{2n} - f = \frac{3}{2\pi n^3} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^4} \sin^4 nt\, dt + \frac{3}{2\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} \sin^4 nt\, dt.$$

Comme f' existe et $\in \mathrm{Lip}\, 1$, $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ est borné et

$$\left| \frac{3}{2\pi n^3} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi(t)}{t^4} \sin^4 nt\, dt \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'où

$$J_{2n} - f = O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{9}{16\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}\, dt$$
$$- \frac{3}{4\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} \cos 2nt\, dt + \frac{3}{16\pi n^3} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} \cos 4nt\, dt.$$

Les deux dernières intégrales valent $O(n)$, d'où le résultat.

Par conséquent pour que $|J_{2n} - f| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, c'est-à-dire pour que $f' \in \mathrm{Lip}\, 1$ il faut et il suffit que $\frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}\, dt$ soit borné uniformément en n et x. Un raisonnement déjà utilisé prouve que cette condition est équivalente à $\varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^5}\, dt$ borné uniformément en x et ε. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 12. — *Pour que $f(x)$ possède une dérivée f' appartenant à la classe* Lip 1, *il faut et il suffit que $\varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^4}\, dt$ soit uniformément borné en x et ε.*

Remarquons enfin que si f' existe et $\in \mathrm{Lip}\, 1$,

$$|f'(x) - f'(x')| < M' |x - x'|$$

et

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| = |2t[f'(x+2\theta t) - f'(x-2\theta t)]| \qquad (0 < \theta < 1),$$
$$\leq 8M' t^2.$$

Réciproquement si $\left| \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{t^2} \right|$ est uniformément borné en x et t par $8\,M'$,

$$|J_{2n} - f| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car

$$|J_{2n}-f| = \frac{3}{2\pi n^3}\left|\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^4}\sin^4 nt\,dt\right| < \frac{12\,M'}{\pi n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 nt}{t^2}dt = \frac{12\,M'}{\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}dt.$$

Donc f possède une dérivée $f' \in \mathrm{Lip}\,1$. D'où ce résultat :

THÉORÈME 13. — *$f(x)$ étant continu, de période 2π, pour que f possède une dérivée f' appartenant à la classe* Lip 1, *il faut et il suffit que* $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}$ *soit uniformément borné en x et t.*

V. — Procédé d'approximation défini par la fonction sommatoire $1+\alpha u+\beta u^2$.

Soit $g(u) = 1-\alpha u+\beta u^2$ et considérons les sommes trigonométriques définies à partir de la série de Fourrier de f :

$$T_{n-1} = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Nous supposerons que $g(1)=0$, c'est-à-dire $1+\alpha+\beta=0$ et $\alpha\neq 0$.
En posant

$$A_k = a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

il vient

$$T_n = (1+\alpha)\,S_n-\alpha\sigma_n-\frac{\beta}{(n+1)^2}S''_n(x).$$

En tenant compte de $1+\alpha+\beta=0$ et de (N.15), on obtient :

$$\begin{aligned}T_n-f = {}&-\beta\frac{2n+1}{(n+1)^2}(S_n-f)\\ &-\alpha(\sigma_n-f)-\beta\frac{n(2n+1)}{(n+1)^2}(\sigma_n-f)+\frac{\beta n}{n+1}\left(\frac{\sigma_1+\ldots+n\sigma_n}{1+\ldots+n}-f\right).\end{aligned}$$

Si alors on suppose $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|S_n-f| = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ et d'après (7) et (17) on a

$$T_n-f = O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{\alpha}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt.$$

Lorsque $E_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ on peut dans T_n-f remplacer $O\left(\frac{1}{n}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n}\right)$ et l'on en déduit le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Le procédé d'approximation défini par la fonction sommatoire $1+\alpha u+\beta u^2$ où $\alpha+\beta+1=0$ et $\alpha\neq 0$ possède la même la classe de saturation que celle qui est attachée au procédé de Fejèr.*

CHAPITRE III.

APPLICATIONS A DIVERS PROBLÈMES D'APPROXIMATION ET AUX SÉRIES DE FOURIER.

1. *Approximation de la fonction conjuguée par les sommes de Fejèr.*

THÉORÈME 14. — *Si* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,1$, $\sigma_n^{\cdot} - f^{\cdot} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ [1]. *Si de plus* $f(x)$ *possède une dérivée continue* $f'(x)$,

$$f^{\cdot}(x) - \sigma_n^{\cdot}(x) = \frac{f'(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{2f^{\cdot}(x) - f^{\cdot}(x+t) - f^{\cdot}(x-t)}{t^2}\, dt.$$

La première partie du théorème est connue. Nous en avons démontré la réciproque (Chap. I, § 4). La démonstration suivante précise l'approximation de $f^{\cdot}$ par $\sigma_n^{\cdot}$ lorsque $f'(x)$ existe et est continue.

Nous utiliserons les sommes $V_n = 2\sigma_{2n} - \sigma_n$. D'après (N.19) on a

$$\begin{aligned} V'_n = {} & 2n(\sigma_{2n}^{\cdot} - f^{\cdot}) + n(2\sigma_{2n}^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} - f^{\cdot}) \\ & + \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{t^3} (\sin^2 2nt - \sin^2 nt)\, dt. \end{aligned}$$

Or $|2\sigma_{2n}^{\cdot} - \sigma_n^{\cdot} - f^{\cdot}| = O[E_n(f^{\cdot})]$. Soit d'autre part

$$A = \sup_{x,\,h} \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right|.$$

On a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{t^3} (\sin^2 2nt - \sin^2 nt)\, dt \right| \\ & \qquad < \frac{2A}{n\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin^2 2nt}{t^2} + \frac{\sin^2 nt}{t^2} \right) dt = \frac{3A}{\pi} \end{aligned}$$

et par suite

$$|\sigma_{2n}^{\cdot} - f^{\cdot}| < \frac{|V'_n|}{2n} + O[E_n(f^{\cdot})] + \frac{3A}{2\pi n}.$$

Or l'hypothèse $f \in \mathrm{Lip}\,1$ entraîne : $|V'_n| = O(1)$ (¹) et $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $E_n(f^{\cdot}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ [8]. Donc $|\sigma_{2n}^{\cdot} - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui prouve la première partie du théorème.

Supposons de plus que $f'(x)$ existe et soit continue pour $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

(¹) Chapitre I, 1°, *e*.

Posons $\Delta(2t)=f(x+2t)-f(x-2t)$. L'intégrale qui figure dans l'expression de V'_n s'écrit

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\Delta(2t)}{t}-4f'(x)\right]\frac{\sin^2 2nt}{t^2}dt-\frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\Delta(2t)}{t}-4f'(x)\right]\frac{\sin^2 nt}{t^2}dt+2f'(x),$$

car $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 nt}{t^2}dt=\frac{n\pi}{2}$. On a donc

$$V'_n-f'=2n(\sigma^{\cdot}_{2n}-f^{\cdot})+f'+n(2\sigma^{\cdot}_{2n}-\sigma^{\cdot}_n-f^{\cdot})$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\Delta\left(\frac{2t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}-4f'(x)\right]\frac{\sin^2 2t-\sin^2 t}{t^2}dt.$$

Tenant compte de $\Delta\left(\frac{2t}{n}\right)=\frac{4t}{n}f'\left(x+\frac{2\theta t}{n}\right)$ où $|\theta|<1$, la dernière intégrale s'écrit :

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[f'\left(x+\frac{2\theta t}{n}\right)-f'(x)\right]\frac{\sin^2 2t-\sin^2 t}{t^2}dt$$

et est en valeur absolue inférieure à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\omega_1\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{|\sin^2 2t-\sin^2 t|}{t^2}dt,$$

$\omega_1(h)$ désignant le module de continuité de $f'(x)$. Cette quantité qu'on rencontre dans la théorie élémentaire des sommes de Fejèr [6] tend vers zéro pour $n\,\infty$ comme $\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\left|\log\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right|$.

D'ailleurs lorsque f' existe et est continue

$$V'_n(f)=V_n(f')\qquad\text{et}\qquad |V'_n-f'|=O[E_n(f')].$$

On a donc

$$\frac{V'_n-f'}{2n}=\frac{f'}{2n}+(\sigma^{\cdot}_{2n}-f^{\cdot})+(2\sigma^{\cdot}_{2n}-\sigma^{\cdot}_n-f^{\cdot})+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais l'hypothèse f' entraîne $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $E_n(f^{\cdot})=o\left(\frac{1}{n}\right)$ [8]. Il vient alors

$$\frac{V'_n-f'}{2n}=\frac{f'}{2n}+\sigma^{\cdot}_{2n}-f^{\cdot}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{donc}\qquad\sigma^{\cdot}_{2n}-f^{\cdot}=-\frac{f'(x)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Enfin de cette dernière égalité on tire

$$\sigma^{\cdot}_{2n+1}-f^{\cdot}=-\frac{f'(x)}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)+[\sigma^{\cdot}_{2n+1}-\sigma^{\cdot}_{2n}].$$

Comme $S^{\cdot}_n=(n+1)\sigma^{\cdot}_{n+1}-n\sigma^{\cdot}_n$,

$$S^{\cdot}_{2n}=(2n+1)\sigma^{\cdot}_{2n+1}-2n\sigma^{\cdot}_{2n}\qquad\text{et}\qquad\sigma^{\cdot}_{2n+1}-\sigma^{\cdot}_{2n}=\frac{S^{\cdot}_{2n}-\sigma^{\cdot}_{2n+1}}{2n}=O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

Donc

$$\sigma^{\cdot}_{2n+1} - f^{\cdot} = -\frac{f'(x)}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et par suite

$$\sigma^{\cdot}_{n} - f^{\cdot} = -\frac{f'(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quant à la troisième partie du théorème, d'après (7) on a

$$\sigma^{\cdot}_{n} - f^{\cdot} = \frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty} \frac{f^{\cdot}(x+2t) + f^{\cdot}(x-2t) - 2f^{\cdot}(x)}{t^2}\,dt + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= -\frac{f'(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où le dernier résultat en changeant $2t$ en t.

2. *Série de Fourier, série conjuguée et sommes de Fejèr.* — Dans ce paragraphe nous indiquons des critères de convergence de la série conjuguée et des conditions nécessaires et suffisantes pour que $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ exprimées au moyen des dérivées des sommes de Fourier.

THÉORÈME 15. — $S_n(x)$ *désignant la* $n^{\text{ième}}$ *somme de Fourier de* $f(x)$ *continue, si* $\frac{S'_n(x)}{n}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$ *(en particulier si la série de Fourier converge uniformément) la condition nécessaire et suffisante pour qu'au point* x *la série conjuguée converge est que* $\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\,\text{cotg}\,dt$ *ait une limite pour* $\varepsilon = 0$ *et la série conjuguée a alors pour somme.*

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\,\text{cotg}\,t\,dt.$$

Soit

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$$

et

$$S^{\cdot}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\frac{\cos t - \cos(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Pour calculer $S'_n(x)$ nous partons de

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}}\,\frac{du}{2}.$$

$\dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ étant une fonction paire de t sa dérivée est impaire d'où

$$S'_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(u)\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right)\frac{du}{2}, \qquad \text{où} \qquad t = \frac{u-x}{2}$$

ou encore

$$S'_n(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right) dt.$$

Posant $\psi(t) = f(x+2t) - f(x-2t)$ on obtient

$$\frac{S'_n(x)}{2n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\left[\frac{\sin(2n+1)t\cos t - (2n+1)\sin t\cos(2n+1)t}{(2n+1)\sin^2 t}\right] dt.$$

Soit

$$u_n(t) = \sin(2n+1)t\cos t - (2n+1)\sin t\cos(2n+1)t = (n+1)\sin 2nt - n(\sin 2n+2)t$$

et

$$\begin{aligned} u'''_n(t) &= 8n(n+1)\,[(n+1)^2\cos(2n+2)t - n^2\cos 2nt] \\ &= 8n(n+1)[(2n+1)\cos(2n+2)t - 2n^2\sin t\sin(2n+2)t]. \end{aligned}$$

On voit donc que si $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|u'''_n(t)| = O(n^3)$ et la formule de Taylor permet d'écrire lorsque $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|u_n(t)| < t^3 O(n^3)$.

Dans l'expression de $\dfrac{S'_n}{2n+1}$ on a donc

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\right| = \omega\left(\frac{1}{n}\right) O(n^2)\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^3}{\sin^2 t}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où

$$\frac{S'_n(x)}{2n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\frac{\sin(2n+1)t\cos t}{(2n+1)\sin^2 t}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\frac{\cos(2n+1)t}{\sin t}\,dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Considérons $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\frac{\sin(2n+1)t\cos t}{(2n+1)\sin^2 t}\,dt$. Si l'on remplace $\cos t$ par 1 l'erreur commise est

$$\frac{2}{2n+1}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2 t}\sin(2n+1)t\,dt.$$

Or $\psi(t)\dfrac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin_2 t}$ est fonction continue de t et

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \psi(t)\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2 t}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Donc

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\,\frac{\sin(2n+1)t\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2 t}\,dt$$

est un coefficient de Fourier d'une fonction continue et tend vers zéro pour $n\infty$, (uniformément en x). L'erreur commise est donc $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Le même raisonnement prouve qu'on peut dans $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin^2 t}\,dt$ remplacer $\sin^2 t$ par t^2 et que l'erreur commise est $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il reste donc à étudier

$$v_n = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{t^2}\,dt.$$

Nous prouverons que $v_n = \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

Si dans l'expression de v_n nous remplaçons f par $\mathrm{P}_n(x)$ tel que $|f-\mathrm{P}_n| = \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ l'erreur commise est $\mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Soit $\psi_n(t)$ ce qui devient alors $\psi(t)$; on a

$$v_n = \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_n(t)\,\frac{\sin(2n+1)t}{t^2}\,dt + \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Enfin selon une méthode déjà utilisée, changeons t en $t-\frac{\pi}{2n+1}$ et remarquons que

1°
$$\left|\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\sin(2n+1)t\,dt\right|$$
$$< \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\max|\mathrm{P}'_n|}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}\,dt = \mathrm{O}\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right];$$

car d'après (Ch. I, 2°), $|\mathrm{P}'_n| = \mathrm{O}\left[n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$;

2°
$$\left|\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\sin(2n+1)\,dt\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puis en prenant la demi-somme des deux expressions de v_n on a :

$$v_n = \frac{1}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\psi_n(t)}{t^2} - \frac{\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\right]\sin(2n+1)t\,dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

ou

$$v_n = \frac{1}{2n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi_n(t)-\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\sin(2n+1)t\,dt$$

$$+\frac{1}{n}\,\frac{\pi}{2n+1}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi_n(t)}{t\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\sin(2n+1)t\,dt$$

$$+\frac{1}{n}\,\frac{2\pi^2}{(2n+1)^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi_n(t)}{t^2\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)^2}\sin(2n+1)t\,dt.$$

Comme

$$|\psi_n(t)| \leq 4t\max|P'_n| = tO\left[n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et

$$\left|\psi_n(t)-\psi_n\left(t+\frac{\pi}{2n+1}\right)\right| = \frac{\pi}{2n+1}O[\max|P'_n|] = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

on a en définitive

$$v_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Par conséquent $f(x)$ étant continue et $\omega(h)$ son module de continuité :

$$\frac{2S'_n}{2n+1} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\frac{\cos(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

Or

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\psi(t)\frac{\cos t-\cos(2n+1)t}{\sin t}\,dt\right| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{|\cos t-\cos(2n+1)t|}{\sin t}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

parce que pour $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$|\cos t - \cos(2n+1)t| = t^2O(n^2).$$

On a donc :

$$\frac{2S'_n}{2n+1} = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + S_n - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2t)-f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\,dt. \tag{17}$$

Supposons alors qu'au point x, $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{S'_n(x)}{n} = 0$. Si $S_n^{\cdot}$ a une limite,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$$

a même limite pour $n\infty$ et réciproquement. D'ailleurs si

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$$

a une limite pour $n\,\infty$,

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$$

a même limite pour $\varepsilon = 0$. En effet n étant l'entier tel que $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \leqq \dfrac{1}{n}$, lorsque ε est donné,

$$\left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\varepsilon} \right| \leqq \left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \psi(t) \operatorname{cotg} t \, dt \right| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = O\left[\frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où résulte le théorème énoncé lorsque $\dfrac{S'_n(x)}{n} \to 0$ avec $\dfrac{1}{n}$. D'après le théorème général, on remarquera que ce résultat est exact dans le cas plus particulier où la série de Fourier de f converge uniformément car alors $\dfrac{S'_n(x)}{n}$ tend uniformément vers zéro lorsque n devient infini.

Le théorème 15 généralise le théorème de Young [7] pour les fonctions continues. Celui-ci indique même condition de convergence pour la série conjuguée en supposant que $f(x)$ non nécessairement continue, est à variation bornée. Lorsque $f(x)$ est continue et à variation bornée, sa série de Fourier converge uniformément. Pour les fonctions continues le théorème de Young est donc encore exact avec des hypothèses plus générales. Nous donnerons diverses conséquences de l'égalité (17).

THÉORÈME 16. — *Si en tout point d'un résiduel,*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$$

a une limite pour $\varepsilon = 0$, *il existe un résiduel* R *tel qu'en tout point de* R *une suite partielle infinie de* $\{S_n^{\cdot}\}$ converge vers

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t] \operatorname{cotg} t \, dt.$$

Rappelons qu'un résiduel d'un segment (a, b) est le complémentaire sur (a, b) d'un ensemble de 1re catégorie situé sur (a, b). Étant donné un ensemble de points $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ denses sur (a, b) et des intervalles $(a_n, a_n + l_n)$ tels que $\lim\limits_{n\infty} l_n = 0$ l'ensemble de tous les points de (a, b) intérieurs à une infinité d'intervalles $(a_n, a_n + l_n)$ constitue un résiduel de (a, b).

Soit alors $\rho_n = \max\limits_{x} |S_n - f|$. On sait que $\rho_n = O(\log n)$ [7].

On a

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| \leq 2\rho_n + |f(x+h) - f(x)|,$$

d'où

$$|S'_n(x + \theta h)| < \frac{2\rho_n}{|h|} + \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Prenons $h = h_n = \dfrac{\log n}{n\varepsilon_n}$ où $\lim\limits_{n\infty} \varepsilon_n = 0$ de façon que $\lim\limits_{n\infty} h_n = 0$ $\left(\text{par exemple } \varepsilon_n = \dfrac{1}{\log n}\right)$. On a alors

$$\frac{1}{n}|S'_n(x + \theta h_n)| < O(\varepsilon_n) + \frac{\varepsilon_n}{\log n}\omega(h_n) = o(1).$$

Donc en posant $\xi_n = x + \theta h_n$, $\dfrac{|S'_n(\xi_n)|}{n} \to 0$. (α, β) étant un intervalle de l'axe des x, si x est choisi intérieur à (α, β), dès que n est suffisamment grand, $\xi_n = x + \theta h_n$ est intérieur à (α, β). D'autre part $S'_n(x)$ étant fonction continue de x, l'hypothèse $\left|\dfrac{S'_n(\xi_n)}{n}\right| < \varepsilon'_n$ où $\lim\limits_{n\infty} \varepsilon'_n = 0$ permet d'associer à ξ_n un intervalle de longueur λ_n tel que si x_n est situé dans $(\xi_n, \xi_n + \lambda_n)$, on ait $\dfrac{|S'_n(x_n)|}{n} < 2\varepsilon'_n$. Les ξ_n étant choisis denses sur (a, b) et λ_n tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$, l'ensemble des points intérieurs à une infinité de $(\xi_n, \xi_n + \lambda_n)$ constitue un résiduel R'. A tout x de R' on peut associer une suite d'entiers $\{n_p\}_x$ tels que $\lim\limits_{n\infty} \dfrac{S'_{n_p}(x)}{n} = 0$.

Supposons qu'en tout point d'un résiduel R'',

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$$

ait une limite finie. On obtient le théorème 2 en remarquant de R' et R'' ont en un commun un résiduel R.

Théorème 17. — *$f(x)$ étant continue, lorsque $\dfrac{S'_n(x)}{n}$ tend uniformément vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$ (et en particulier lorsque la série de Fourier de f converge uniformément), une condition nécessaire et suffisante pour que la série conjuguée converge uniformément est que :*

1° $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt$ *ait une limite pour* $\varepsilon = 0$.

2° $\int_0^{\varepsilon}[f(x+2t)-f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\,dt$ *tende uniformément vers zéro avec* ε.

En effet si $\frac{S'_n}{n}$ tend uniformément vers zéro, l'hypothèse que S'_n tend uniformément vers une limite entraîne que $\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\operatorname{cotg} t\,dt$, existe et que $\int_0^{\varepsilon}\psi(t)\operatorname{cotg} t\,dt$ tend uniformément vers zéro avec ε.

$(\psi(t)=f(x+2t)-f(x-2t))$. Réciproquement, si $\frac{S'_n}{n}$ tend uniformément vers zéro, les hypothèses $\lim_{\varepsilon=0}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\operatorname{cotg} t\,dt$ existent et $\int_0^{\varepsilon}\psi(t)\operatorname{cotg} t\,dt$ tend uniformément vers zéro, entraînent que la série conjuguée converge uniformément [1].

THÉORÈME 18. — *Pour que* $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)(0<\alpha\leqq 1)$ *il faut et il suffit que* $|S''_n(x)|=O(n^{2-\alpha})$.

Si nous cherchons la condition pour que $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ il faut d'abord supposer que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$.

D'après (1), si $|S_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, $|S''_n(x)|=O(n^{2-\alpha})$.

Réciproquement si l'on suppose $S''_n(x)=O(n^{2-\alpha})$ $\left[\text{et } E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$ en vertu de (N 15) on a :

$$\frac{S''_n(x)}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}(f-S_n)+\frac{2n+1}{n+1}(\sigma_n-f)-\left(\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+n\sigma_n}{1+2+\ldots+n}-f\right),$$

et lorsque $0<\alpha<1$

$$|\sigma_n-f|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),\qquad \left|\frac{\sigma_1+\ldots+n\sigma_n}{1+\ldots+n}-f\right|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\qquad \text{d'où}\qquad |f-S_n|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Lorsque $\alpha=1$, $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'après (7) et (15) on a :

$$\sigma_n-f=\frac{1}{2\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

et

$$\sigma_n^2-f=\frac{2n+1}{2n(n+1)\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

---

(1) Rappelons le théorème de Fejèr : Si la série de Fourier converge uniformément et si f est continue, la série conjuguée converge uniformément [7].

Et par suite

$$\frac{S''_n(x)}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}(f-S_n) + \frac{2n+1}{2\pi n(n+1)}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} - \frac{2n+1}{2\pi n(n+1)}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}(f-S_n) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc si $|S''_n| = O(n)$,

$$|f-S_n| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Remarque. — En général une des conditions $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ n'entraîne pas l'autre.

Si en effet on considère $f(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^2}$, on a bien $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Mais comme

$$\sigma_n - f = S_{n-1} - f + \frac{1}{n}\sum_1^{n-1}\frac{\cos px}{p}, \qquad \sigma_n(0) - f(0) \sim \frac{\log n}{n}.$$

De même si $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ on ne peut avoir $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ que si $|S_n^{\cdot\prime}| = O(1)$ en vertu de $\sigma_n = S_{n-1} + \frac{1}{n}S^{\cdot\prime}_{n-1}$. Or, si $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $f^{\cdot} \in \operatorname{Lip} 1$; et en général si $f^{\cdot} \in \operatorname{Lip} 1$ on n'a pas $|S_n^{\cdot\prime}| = O(1)$ car dans le cas contraire on aurait aussi $|S_n^{\cdot\prime\prime}| = O(n)$ et par suite d'après le théorème précédent $|S_n^{\cdot} - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui est inexact.

Cette remarque et le théorème précédent sont précisés par les résultats suivants qui concernent l'ordre de grandeur des dérivées première et seconde des sommes de Fejèr.

Théorème 19. — *Si* $f \in \operatorname{Lip} 1$, $|\sigma'_n(x)| = O(1)$ *uniformément en* n *et* x.

Théorème 20. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\sigma''_n(x)| = O(n)$.

On obtient d'après (N. 13) : $\sigma_n^{\cdot\prime} = (n+1)(\sigma_n^2 - \sigma_n)$ quand on échange les rôles de σ_n et $\sigma_n^{\cdot}$.

D'où

$$\sigma_n^{\cdot\prime} = (n+1)(\sigma_n^2 - f - \sigma_n + f)$$

$$= (n+1)\left\{\left[\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right]\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

[d'après (7) et (15)]

$$= \frac{n+1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt + O(1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt + O(1).$$

Si $f^{\cdot} \in$ Lip 1, $|\sigma_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (Chap. I, 4°) et par suite

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{t^2}\,dt = O(1) \qquad [\text{d'après } (7)].$$

Donc $|\sigma_n^{\cdot\prime}| = O(1)$. En remplaçant $f^{\cdot}$ par f on a le théorème.

Pour démontrer le théorème 20 nous calculerons σ_n'' à partir de l'intégrale donnant σ_n. On a (N. 14) :

$$\sigma_n'' = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(t)\left[\frac{n^2\cos 2nt}{t^2} - \frac{2n\sin 2nt}{t^3} + \frac{3\sin^2 nt}{t^4}\right]dt.$$

Posons

$$u_n(t) = n^2 t^2 \cos 2nt - 2nt\sin 2nt + 3\sin^2 nt.$$

On a alors

$$\sigma_n'' = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(t)\frac{u_n(t)}{t^4}\,dt.$$

Si dans $u_n(t)$ on remplace t^2 et t par $\sin^2 t$ et $\sin t$ on ne commet sur $\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)}{t^4}\,dt$ qu'une erreur qui est $O\left(\frac{1}{n}\right)$. En effet

$$|\sin^2 t - t^2| = O(t^4) \qquad \text{et} \qquad |\sin t - t| = O(t^3).$$

Donc

$$u_n(t) - n^2\sin^2 t\cos 2nt + 2n\sin t\sin 2nt - 3\sin^2 nt\,| = n^2 O(t^4) + n O(t^3),$$

et par suite en posant

$$v_n(t) = n^2\sin^2 t\cos 2nt - 2n\sin t\sin 2nt + 3\sin^2 nt,$$

on a

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)-v_n(t)}{t^4}\,dt\right| = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)|\,\frac{n^2 O(t^4) + n O(t^3)}{t^4}\,dt$$

Or si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$, donc

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)-v_n(t)}{t^4}\,dt\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{1}{n}} (n^2 t + n)\,dt = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\sigma_n'' = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{u_n(t)}{t^4}\,dt + \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}u_n(t)\,dt$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\frac{v_n(t)}{t^4}\,dt + \frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4}u_n(t)\,dt.$$

Or si l'on calcule $\varphi_n^{(4)}(t)$ on trouve

$$\varphi_n^{(4)}(t) = 8n^6 \cos 2nt - 4n^2(n^4 + 3n^3)\cos(2n+2)t - 4n^2(n^4 - 3n^3)\cos(2n-2)t + O(n^4).$$

D'où en groupant les termes :

$$\varphi_n^{(4)}(t) = 16n^6 \cos 2nt \sin^2 t + 24n^5 \sin 2t \sin 2nt + O(n^4).$$

Donc si $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\varphi_n^{(4)}(t)| = O(n^4)$. Comme le développement de Taylor de φ_n commence par un terme en t^4, on a pour $|t| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $|\varphi_n(t)| = t^4 O(n^4)$ et par suite

$$\left| \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(t) \frac{\varphi_n(t)}{t^4} dt \right| = \frac{1}{2n\pi} O(n^4) \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi| \frac{t^4}{t^4} dt$$

et en raison de $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$, cette dernière quantité est $O(n)$. D'où lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} \sigma_n''(x) &= O(n) + \frac{1}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^4} u_n(t)\, dt \\ &= O(n) + \frac{n}{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\cos 2nt}{t^2} dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin 2nt}{t^3} dt \\ &\quad + \frac{3}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin 2nt}{t^4} dt. \end{aligned}$$

Comme $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right| = O(1)$,

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^3} \sin^2 nt\, dt \right| = O\left(\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right) = O(n)$$

et

$$\left| \frac{3}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin^2 nt}{t^4} dt \right| = O\left(\frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} \right) = O(n).$$

Quant à $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t) \frac{\cos 2nt}{t^2} dt$, nous avons précisément prouvé (Chap. II, § 1, 1°) que cette intégrale est bornée si $\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|$ est borné. En définitive si $E_n = O\left(\frac{1}{t}\right)$, on a $|\sigma_n'| = O(n)$, bien qu'en général $|\sigma_n - f|$ ne soit pas $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ce dernier théorème permet de prouver le suivant.

THÉORÈME 21. — *α étant un nombre positif, si* $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $|S_n^{\cdot} - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ *aussi.*

Supposons tout d'abord $0 < \alpha < 1$. De (1) il résulte lorsque $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ que $|S'_n| = O(n^{1-\alpha})$; $\omega\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$; donc

$$\int_0^{\frac{1}{n}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Donc d'après (17) : $|S_n^{\cdot} - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Si $\alpha = 1$, l'hypothèse $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ entraîne $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $E_n(f^{\cdot}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (Not. 3°) et par suite $|\sigma_n^{\cdot\,''}| = O(n)$ (Th. 20). De plus $|S''_n| = O(n)$ et $|S'''_n| = O(n^2)$. De l'identité $\sigma_n^{\cdot\,''} = S_n^{\cdot\,''} - \frac{S'''_n}{n}$, on tire alors $|S_n^{\cdot\,''}| = O(n)$ donc en vertu du théorème 18 : $|S_n^{\cdot} - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Supposons maintenant que f' et $f^{\cdot\,'}$ existent, sont continues et $\in \operatorname{Lip} \alpha'$. En intégrant par parties $S_n - f = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2n+1)t\,dt$ on obtient à $O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha'}}\right)$ près :

$$S_n - f = \frac{2}{(2n+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f'(x+2t) - f'(x-2t)}{\sin t} - \frac{\varphi(t)\cos t}{2\sin^2 t}\right)\cos(2n+1)t\,dt$$

$$= \frac{2}{2n+1}(f^{\cdot\,'} - S_n^{\cdot\,'}) + \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin^2 t}[\sin^2(n+1)t - \sin^2 nt]\,dt$$

$$= \frac{2}{2n+1}(f^{\cdot\,'} - S_n^{\cdot\,'}) - \frac{1}{2n+1}[(n+1)(\sigma_{n+1} - f) - n(\sigma_n - f)]$$

$$= \frac{2}{2n+1}(f^{\cdot\,'} - S_n^{\cdot\,'}) - \frac{1}{2n+1}(S_n - f) \quad (^1).$$

D'où
$$S_n - f = \frac{1}{n+1}(f^{\cdot\,'} - S_n^{\cdot\,'}) \quad \text{et} \quad S_n^{\cdot} - f^{\cdot} = \frac{1}{n+1}(S'_n - f').$$

Si alors $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha'}}\right)$ $(0 < \alpha' \leq 1)$, f' et $f^{\cdot\,'}$ existent sont continues (Notations 3°) et appartiennent à $\operatorname{Lip}\alpha'$. On a

$$|S'''_n| = O(n^{2-\alpha'}) \quad \text{donc} \quad |S'_n - f'| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right) \quad \text{et par suite} \quad |S_n^{\cdot} - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha'}}\right).$$

De proche en proche en utilisant le théorème 18 on prouverait de même que si $|S_n - f| = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha'}}\right)$ p entier > 0, $0 < \alpha' \leq 1$), $|S_n^{\cdot} - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha'}}\right)$.

---

(1) La méthode utilisée pour démontrer le théorème 1 prouve que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin^2 t}\cos 2nt\,dt = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ si $f' \in \operatorname{Lip}\alpha$.

3. *Dérivées d'ordre α non entier.* — Soit $f(x)$ une fonction continue satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ayant pour période 1, pour valeur moyenne 0 sur une période. La primitive d'ordre $(1-\alpha)$ de $f(x)$ se définit par

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} f(x-u) u^{-\alpha}\, du \quad [7],$$

et l'on appelle dérivée d'ordre α de $f(x)$ lorsqu'elle existe la dérivée première de $f_{1-\alpha}$. On écrit $f^{\alpha}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}$. On sait que si $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, alors f^{γ} existe pour tout γ tel que $0 < \gamma < \alpha$ et $\in \mathrm{Lip}(\alpha - \gamma)$ mais f^{α} n'existe pas nécessairement. Le théorème suivant donne la condition pour que f^{α} existe et soit borné, plus précisément fournit la condition assurant que $f_{1-\alpha} \in \mathrm{Lip}\,1$.

THÉORÈME. — *$f(x)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha (0 < \alpha < 1)$, ayant pour période 1, pour valeur moyenne 0, pour que la primitive de f d'ordre $1-\alpha$ satisfasse uniformément à une condition de Lipschitz d'ordre 1, il faut et il suffit que*

$$\int_{t=\varepsilon}^{+\infty} \int_{u=0}^{+\infty} \frac{f^{\cdot}(x+t-u) + f^{\cdot}(x-t-u) - 2f^{\cdot}(x-u)}{u^{\alpha} t^2}\, du\, dt$$

soit uniformément borné en ε et x, $f^{\cdot}$ désignant la fonction conjuguée de f.

Ce théorème est une conséquence du théorème 3 qui résulte de la connaissance de la classe de saturation attachée au procédé de Fejèr. On a vu en effet que la condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathrm{Lip}\,1$ est que $|\sigma^{\cdot}_n - f^{\cdot}| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f^{\cdot}(x+t) + f^{\cdot}(x-t) - 2f^{\cdot}(x)}{t^2}\, dt$$

soit uniformément borné en x et ε. La condition cherchée ici s'exprime donc par

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f^{\cdot}_{1-\alpha}(x+t) + f^{\cdot}_{1-\alpha}(x-t) - 2f^{\cdot}_{1-\alpha}(x)}{t^2}\, dt$$

borné uniformément en x et ε et d'après la définition de la primitive d'ordre $1-\alpha$ de f ou $f^{\cdot}$ on obtient la condition énoncée.

4. *Majoration des coefficients de Fourier.* — On sait que si $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right) (r > 0)$, $|a_n|$ et $|b_n|$ sont $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Nous indiquons une majoration générale des coefficients de Fourier de $f(x)$ en fonction de E_n et qui contient les résultats connus.

THÉORÈME. — *Les coefficients de Fourier a_n et b_n de $f(x)$ sont en valeur absolue* *moindres que* $\lambda_p E_n + \mu_p \dfrac{\max\limits_x |P_n^{(2p+2)}|}{n^{2p+2}}$, $\{P_n(x)\}$ *étant une suite de polynomes trigonométriques donnant de* $f(x)$ *une approximation de l'ordre de* E_n, λ_p *et* μ_p *dépendant de p seulement.*

Nous reprendrons les différences $\Delta_{2p}(t) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \Delta_2\left(\frac{t}{2^{k-1}}\right)$ (Chap. II, § 2) où les α_k sont des constantes absolues. Soit

$$U_{p,q}(x, \varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q}\, dt,$$

où q est un entier $\geqq 2$ et soit

$$V_n(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} U_{p,q}(x, \varepsilon) \cos nx\, dx = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dt}{t^q} \int_0^{2\pi} \Delta_{2p}(f, x, t) \cos nx\, dx$$
$$= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dt}{t^q} \int_0^{2\pi} \left(\sum_k \alpha_k \Delta_2\left(\frac{t}{2^{k-1}}\right)\right) \cos nx\, dx.$$

On a

$$\int_0^{2\pi} \Delta_{2p}(t) \cos nx\, dx = \sum \alpha_k \int_0^{2\pi} f(u)\, \Delta_2\left(\cos nx, u, \frac{t}{2^k}\right) du$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \Delta_{2p}(t) \cos nx\, dx = -4 a_n \sum \alpha_k \sin^2 \frac{nt}{2^{k-1}}.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{nt}{2^{k-1}}\, dt = \pi - \frac{2^{k-3}}{n} \sin \frac{n\pi}{2^{k-3}},$$

on obtient donc

$$\int_0^{2\pi} \sum \alpha_k \sin^2 \frac{nt}{2^{k-1}}\, dt = \pi \sum_{k=1}^{p} \alpha_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k'} 2^{k-3} \sin \frac{n\pi}{2^{k-2}}.$$

Dès que n est assez grand, cette dernière quantité est voisine de $\pi \sum_{k=1}^{p} \alpha_k$ on a donc

$$|V_n(\varepsilon)| \geqq |a_n| \frac{\lambda_p}{(q-1)\varepsilon^{q-1}};$$

où λ_p dépend de p seul. D'où

$$|a_n| < \frac{q-1}{\lambda_p} \varepsilon^{q-1} \left| \int_0^{2\pi} U_{p,q}(x, \varepsilon) \cos nx\, dx \right|.$$

On prend q assez grand, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et l'on suppose f continue. Si dans cette dernière quantité on remplace f par un polynome P_n tel que $|P_n - f| < O(E_n)$, en désignant par $U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)$ ce qui devient $U_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)$, on commet une erreur inférieure à

$$O(E_n)\frac{q-1}{\lambda_p}\varepsilon^{q-1}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{dt}{t^q} = O(E_n).$$

On a donc

$$|a_n| < \lambda'_p(E_n)(q-1) + \frac{q-1}{\lambda_p}\frac{1}{n^{q-1}}\int_0^{2\pi} U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\cos nx\, dx.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{2\pi} U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\cos nx\, dx\right|\\ &= \left|\int_0^{2\pi}\left[U^n_{p,q}\left(x+\frac{\pi}{n}, \frac{1}{n}\right) + U^n_{p,q}\left(x-\frac{\pi}{n}, \frac{1}{n}\right) - 2U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\right]\cos nx\, dx\right|\\ &< O\left(\frac{1}{n^2}\right)\max_x\left|\frac{d^2}{dx^2}U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or.

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(P_n, x, t)}{t^q}dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\frac{d^2}{dx^2}\Delta_{2p}(P_n, x, t)}{t^q}dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}(P''_n, x, t)\,dt}{t^q},$$

car $\Delta_{2p}(P_n, x, t)$ est une forme linéaire de $P_n\left(x+\frac{t}{2^k}\right)+P_n\left(x-\frac{t}{2^k}\right)-2P_n(x)$. Comme $|\Delta_{2p}(P''_n, x, t)| < \mu_p t^{2p}\max_x|P_n^{(2p+2)}(x)|$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}U^n_{p,q}\left(x, \frac{1}{n}\right)\cos nx\, dx\right| &= O\left(\frac{1}{n^2}\right)\max_x\left|\frac{d^2}{dx^2}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta^n_{2p}(t)\,dt}{t^q}\right|\\ &= O\left(\frac{1}{n^{2p-q+3}}\right)\max_x|P_n^{(2p+2)}|\\ &\qquad (q \geqq 2p+2).\end{aligned}$$

D'où

$$|a_n| < \lambda'_p(q-1)E_n + \frac{q-1}{\lambda_p}O\left(\frac{1}{n^{2p+2}}\right)\max|P_n^{(2p+2)}|.$$

Et en prenant $q = 2p+2$ on obtient l'inégalité énoncée. Le calcul est le même pour b_n et donne même majoration.

En tenant compte de la majoration de $|P_n^{(2p+2)}|$ on obtient pour a_n et b_n une majoration ne faisant intervenir que E_n.

5. *Condition pour que* $\lim_{n\infty} nE_n = +\infty$.

Théorème. — *$f(x)$ étant une fonction continue de période 2π, nulle pour $x=0$, si au point $x=0$, $f(x)$ possède la dérivée droite $+\infty$ et la dérivée gauche $-\infty$ et si $\frac{f(x)}{x}$ est une fonction non croissante de x au voisinage de $x=0$, alors* $\lim_{n\infty} nE_n = +\infty$.

Les sommes trigonométriques d'ordre $3n$: $V_{3n} = \frac{3\sigma_{3n} - \sigma_n}{2}$ donnent de f une approximation comprise entre E_{3n} et $3E_n$. En tenant compte de ce que

$$\sin^2(n+p)t - \sin^2 nt = \sin pt \sin(2n+p)t,$$

on a

$$\begin{aligned} V_{3n} - f &= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{+\infty} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \frac{\sin 2nt \sin 4nt\, dt}{t^2} \\ &= \frac{1}{\pi n}\int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt. \end{aligned}$$

Au point $x = 0$ l'approximation fournie est

$$\rho_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} [f(t) + f(-t)] \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt.$$

α étant un nombre positif quelconque fixe

$$\int_\alpha^{+\infty} [f(t) + f(-t)] \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt = O(1).$$

Nous écrirons

$$\begin{aligned} &\int_0^\alpha f(t) \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(t) \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \left[\frac{f(t)}{t^2} - \frac{f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{n}\right)^2} \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{2n}\right)^2} - \ldots \right] |\sin nt \sin 2nt|\, dt. \end{aligned}$$

Or $\frac{f(t)}{t}$ ne croît pas, donc $\frac{f(t)}{t^2}$ décroît et par suite

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \frac{f(t)}{t^2} |\sin nt \sin 2nt|\, dt > \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \frac{f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{n}\right)^2} |\sin nt \sin 2nt|\, dt, \quad \ldots$$

De plus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(t) \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\, dt > \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \frac{f(t)}{t^2} |\sin nt \sin 2nt|\, dt.$$

Car au voisinage de 0, $\frac{f(t)}{t}$ est positif et la première formule de la moyenne donne pour la première intégrale

$$\frac{f(t_1)}{t_1}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin nt \sin 2nt}{t}\, dt \qquad \left(0 < t_1 < \frac{\pi}{2n}\right)$$

et pour la seconde

$$\frac{f(t_2)}{t^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}}\frac{|\sin nt \sin 2nt|}{t^2}\,dt \qquad \left(\frac{\pi}{2n} < t_2 < \frac{3\pi}{2n}\right).$$

Comme $\frac{f(t_1)}{t_1} \geqq \frac{f(t_2)}{t_2}$ il suffit pour prouver ce point de prouver que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin nt \sin 2nt}{t}\,dt > \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}}\frac{|\sin nt \sin 2nt|}{t}\,dt$$

ou encore que

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2n}}\frac{\sin nt \sin 2nt}{t}\,dt > 0,$$

c'est-à-dire que

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin t \sin 2t}{t}\,dt > 0.$$

Cette dernière intégrale s'écrit :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\left[\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin t}{t+\pi}\right]dt.$$

Entre o et $\frac{\pi}{2}$ la quantité entre crochets est >0 parce que $\operatorname{tg} x > \frac{x(\pi+x)}{\pi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$; la courbe représentative de $y = \operatorname{tg} x$ est située au-dessus de $y = x$ et part de o, celle de $y = \frac{x(\pi+x)}{\pi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$ part de o avec une tangente de pente $\frac{\pi}{2} < 1$ et est située pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$ au-dessous de la droite $y = \frac{\pi}{2}x$.

Donc $\int_0^{\alpha} f(t)\frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2}\,dt$ se présente sous la forme d'une somme de termes alternativement >0 et <0 et dont la valeur absolue décroît. Elle est donc supérieure à la somme des deux premiers termes, c'est-à-dire à

$$\frac{f(t_1)}{t_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t \sin 2t}{t}\,dt - \frac{f(t_2)}{t_2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{|\sin t \sin 2t|}{t}\,dt = \frac{f(t_1)}{t_1}a - \frac{f(t_2)}{t_2}b,$$

Comme $a > b$ et $\frac{f(t_1)}{t_1} \geqq \frac{f(t_2)}{t_2}$,

$$a\frac{f(t_1)}{t_1} - b\frac{f(t_2)}{t_2} > (a-b)\frac{f(t_2)}{t_2}$$

et $0 < t_2 < \frac{3\pi}{2n}$ tend vers o avec $\frac{1}{n}$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} \sin nt \sin 2nt \to +\infty \quad \text{avec } n.$$

La même démonstration vaut pour

$$\int_0^{+\infty} f(-t) \frac{\sin nt \sin 2nt}{t^2} dt,$$

ce qui prouve le théorème

6. *Théorèmes topologiques.* — Nous montrerons dans ce paragraphe que les propriétés différentielles de $f(x)$ sont liées aux propriétés sur des résiduels de la suite $\{P'_n\}$. Nous ne supposons plus ici que $f(x)$ est nécessairement périodique.

Soit $f(x)$ continue pour $a \leqq x \leqq b$, $\{P_n(x)\}$ une suite de polynomes convergeant uniformément vers $f(x)$, $\rho_n = \max_x |f - P_n|$, $m(x) = \underline{\lim}_{n\infty} P'_n(x)$, $M(x) = \overline{\lim}_{n\infty} P'_n(x)$ et $L(x)$ l'ensemble des valeurs d'accumulation de $P'_n(x)$ au point x.

x et x' étant deux valeurs de (a, b), $(x' > x)$, on a

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - \frac{P_n(x') - P_n(x)}{x' - x} \right| < \frac{2\rho_n}{x' - x}.$$

Soit σ une longueur $< b - a$. Quel que soit x sur $(a, b - \sigma)$ il existe au moins un point ξ tel que

$$P'_n(\xi) = \frac{P_n(x + \sigma) - P_n(x)}{\sigma} \qquad (x < \xi < x + \sigma).$$

Quand x varie, le théorème sur les fonctions implicites prouve que les points ξ se répartissent sur des intervalles séparés par les segments enfermant les abscisses des points d'inflexion de la courbe $y = P_n(x)$. Soit alors $\{\sigma_n\}$ une suite de longueurs tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, telles que $\lim_{n\infty} \frac{\rho_n}{\sigma_n} = 0$. A chaque valeur de n correspond un système d'intervalles l_n, lieu des points ξ_n tels que $P'_n(\xi) = \frac{P_n(x + \sigma_n) - (P_n(x)}{\sigma_n}$ quand x varie sur $(a', b') \subset (a, b)$. Comme σ_n tend vers zéro, quel que soit (α, β) sur (a, b), il contient pour n assez grand un point ξ_n au moins, donc tout ou partie d'un intervalle l_n. On peut donc à chaque l_n attacher un point a_n et les a_n sont partout denses sur (a, b). L'ensemble des points intérieurs à une infinité de l_n est non vide et est un résiduel. Donc à tout point ξ d'un résiduel défini par les suites $\{\dot{P}_n(x)\}$ et $\{\sigma_n\}$ on peut associer une suite de points $\{x_{n_p}\}$ telle que

$$\frac{P_{n_p}(x_{n_p}+\sigma_{n_p})-P_{n_p}(x_{n_p})}{\sigma_{n_p}}=P'_{n_p}(\xi).$$

On a alors

$$(18) \qquad \left|\frac{f(x_{n_p}+\sigma_{n_p})-f(x_{n_p})}{\sigma_{n_p}}-P'_{n_p}(\xi)\right|<\frac{2\rho_{n_p}}{\sigma_{n_p}},$$

où le second membre tend vers zéro pour $p\,\infty$.

Supposons alors que $f'(x)$ existe et soit finie en tout point de (a, b). $f(x)$ étant une fonction de première classe, est continue relativement à (a, b) sur un résiduel de (a, b). Et deux résiduels de (a, b) ayant en commun un résiduel R, on en conclut que sur R, (18) reste valable, $\frac{f(x_{n_p}+\sigma_{n_p})-f(x_{n_p})}{\sigma_{n_p}}$ ayant une limite qui est $f'(\xi)$. Si enfin on remarque que l'ensemble $L_{\{n\}}(x)$ relatif à la suite $\{P_n\}$contient $L_{\{n_p\}}(x)$ relatif à la suite $\{P_{n_p}\}$, on pourra énoncer :

THÉORÈME. — *Si $f(x)$ possède en tout point de (a, b) une dérivée finie, quelle que soit la suite $\{P_n(x)\}$ convergeant uniformément vers $f(x)$ sur (a, b), l'ensemble $L(x)$ des valeurs d'accumulation de $P'_n(x)$ contient la valeur $f'(x)$ en tout point d'un résiduel qui dépend de f et de $\{P_n\}$.*

Si l'on suppose qu'il existe un résiduel R′ tel que quelle que soit la suite infinie extraite de $\{P'_n\}$, cette suite diverge sur R′. Soit $R''=R\cap R'$ le résiduel commun à R et R′. En tout point ξ de R″, (18) reste valable. Donc $f(x)$ ne possèdent pas de dérivée sur R″. D'où :

THÉORÈME. — *S'il existe un résiduel et une suite de polynomes $\{P_n\}$ convergeant uniformément vers $f(x)$, telle que toute suite tirée de $\{P'_n\}$ diverge sur ce résiduel, alors sur un résiduel $f(x)$ n'a pas de dérivée.*

Supposons enfin qu'en tout point d'un résiduel R, une suite $\{P'_n\}$ ait une limite finie $\varphi(x)$. Si f' existe en tout point de (a, b), sur le résiduel $R\cap R_{\{n\}}$, $f'=\varphi$. Donc :

THÉORÈME. — *$\{P_n(x)\}$ convergeant uniformément vers $f(x)$, si $f(x)$ possède sur (a, b) une dérivée finie $f'(x)$ et si sur un ensemble contenant un résiduel, $P'_n(x)$ à une limite finie, alors sur un résiduel :* $\lim\limits_{n\,\infty} P'_n(x)=f'(x)$.

Dans un autre travail nous généralisons le théorème 7 $\left[\text{cas où } E_n=O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]$, les théorèmes 3, 12, 13, celui du Chapitre II, paragraphe 5 et complétons les résultats obtenus à partir de l'égalité (17), en prouvant en particulier que si l'on pose

$$f_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)] \operatorname{cotg} t \, dt,$$

on a

$$\frac{2\,S'_n(x)}{2n+1} = S_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) - f(x) + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] = S_n(x) - f_n^*(x) + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Alexits, *Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier* (*Matematikai és Fizikai Lapok*, t. 48, 1941, p. 410-433).

[2] Favard, *Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LXI, 1937).

[3] Nikolsky, *Approximation de fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques* (*Thèse*, Institut Stekloff, Moscou, 1945).

[4] Nörlund; *Vorlesungen über Differenzenrechnungen* (*Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, XIII, Springer, Berlin, 1924).

[5] Polya et Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II* (*Grundlehren*, XX, Springer, Berlin, 1925).

[6] de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation d'une variable réelle* (Gauthier-Villars, Paris, 1919).

[7] Zygmund, *Trigonometrical series* (*Monographie mathématique*, Varsovie, 1935).

[8] Zygmund, *Smooth functions* (*Duke mathematical Journal*, 1945).