Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jules Haag

Sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certains systèmes différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 299-335
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__299_0>

SUR

L'EXISTENCE ET LA STABILITÉ

DES

SOLUTIONS PÉRIODIQUES

DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

PAR M. JULES HAAG.

INTRODUCTION. — Dans un travail récent ([1]) j'ai exposé une théorie générale de la synchronisation d'un système à n degrés de liberté, en supposant que ce système constitue un oscillateur *linéaire,* c'est-à-dire que ses mouvements autonomes sont déterminés par des équations linéaires. Cette théorie reposait sur certains théorèmes concernant les équations différentielles, que j'avais préalablement établis ([2]).

Or, il existe des oscillateurs *non linéaires,* c'est-à-dire dont les mouvements autonomes sont déterminés par des équations non linéaires. Parmi ces mouvements existe un mouvement périodique sinusoïdal (oscillateur *Abelé*) ou non sinusoïdal (oscillateur de *relaxation*). Je me suis proposé de reprendre la théorie générale de la synchronisation d'un système à plusieurs degrés de liberté, en m'affranchissant de l'hypothèse de la linéarité. Cela m'a nécessairement conduit à étendre les théorèmes généraux qui avaient servi de base à ma première théorie. C'est cette extension qui fait l'objet du présent Mémoire.

Je commence par étudier les systèmes différentiels *linéaires à coefficients périodiques,* d'abord sans seconds membres, puis avec seconds membres. J'utilise à cet effet ce que j'ai appelé les *décréments,* lesquels sont donnés par une équation algébrique.

([1]) *Ann. Éc. Norm.*, (3), 64, p. 285 à 338.
([2]) *Bull. Soc. math.*, (27), 70, p. 155 à 172; (2), 71, p. 1 à 14.

Je considère ensuite un système *non linéaire*, admettant une solution périodique connue. Je détermine les *solutions qui tendent asymptotiquement vers cette solution périodique*, ce qui me conduit aux *conditions de stabilité* de cette dernière.

J'ajoute ensuite aux seconds membres des équations précédentes des *fonctions perturbatrices* périodiques, précédées d'un facteur λ, positif et arbitrairement petit. Je démontre que si λ est assez petit, *le système perturbé admet une solution périodique*. Sa *stabilité* est déterminée par une équation algébrique d'ordre n, dont toutes les racines doivent avoir leur partie réelle négative.

Je considère ensuite un système analogue au précédent, mais dont la période autonome dépend d'un paramètre. *La période propre étant supposée assez voisine de la période des fonctions perturbatrices*, je démontre *l'existence d'un certain nombre de solutions admettant la seconde de ces périodes.*

J'examine ensuite le cas des *systèmes couplés.*

Dans le cas où l'intégrale générale du système non perturbé est périodique, on peut, par *variation des constantes*, se ramener au cas particulier étudié dans les Mémoires précités.

Dans un prochain travail, j'appliquerai ceci au problème général de la synchronisation.

1. *Système linéaire et homogène.* — Soit le système

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)x_j \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

où les $p_{ij}(t)$ sont des fonctions de période T, finies et continues [1] dans l'intervalle (o, T). Dans un précédent travail (*loc. cit.*), j'ai étudié les solutions qui sont multipliées par un facteur constant S quand t augmente de T. Ce facteur S est donné par une équation algébrique de degré m. Dans le travail en question, j'ai supposé que les racines de cette équation étaient toutes distinctes. Mais, nous rencontrerons, dans ce qui va suivre, des cas de racines multiples. Nous allons donc reprendre la question dans toute sa généralité.

2. Soit $\theta_i^j(t)$ un système de solutions fondamentales, l'indice j caractérisant chacune de ces solutions. L'intégrale générale est

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \theta_i^j(t). \tag{2}$$

[1] On pourrait supposer qu'il existe des discontinuités finies pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles de t.

Cherchons une solution vérifiant l'identité

$$x_i(t+\mathrm{T} \equiv \mathrm{S}x_i(t). \tag{3}$$

Il faut et il suffit que l'on ait $x_i(\mathrm{T}) = \mathrm{S}x_i(0)$, soit

$$\sum_{j=1}^{m} a_j[\theta_i^j(\mathrm{T}) - \mathrm{S}\theta_i^j(0)] = 0. \tag{4}$$

On doit donc avoir

$$\mathrm{D}(\mathrm{S}) \equiv \| \theta_i^1(\mathrm{T}) - \mathrm{S}\theta_i^1(0)\ \theta_i^2(\mathrm{T}) - \mathrm{S}\theta_i^2(0) \ldots \theta_i^m(\mathrm{T}) - \mathrm{S}\theta_i^m(0) \| = 0. \tag{5}$$

Cette équation sera appelée *l'équation en* S du système (1).

3. On peut *la former directement*, sans qu'il soit nécessaire de connaître l'intégrale générale du système.

Supposons que l'on ait, pour une solution particulière, $x_i(\mathrm{T}) = \mathrm{S}x_i(0)$. En intégrant (1) de 0 à T et posant $x_i(0) = a_i$, on obtient

$$(\mathrm{S}-1)a_i = \sum_j \int_0^{\mathrm{T}} p_{ij}(t)x_j(t)\,dt.$$

Posons

$$\int_0^t p_{ij}(t) = q_{ij}^0(t).$$

En intégrant par parties et tenant compte de (1), il vient

$$(\mathrm{S}-1)a_i = \mathrm{S}\left[\sum_j a_j q_{ij}^0(\mathrm{T})\right] - \sum_i \sum_k \int_0^{\mathrm{T}} q_{ik}^0(t)p_{kj}(t)x_j(t)\,dt.$$

Posons

$$\int_0^t \left[\sum_k q_{ik}^0(t)p_{kj}(t)\right] dt = q_{ij}^1(t).$$

En répétant l'opération précédente, il vient

$$(\mathrm{S}-1)a_i = \mathrm{S}\sum_j a_j[q_{ij}(\mathrm{T}) - q_{ij}^1(\mathrm{T})] + \sum_k \sum_j \int_0^{\mathrm{T}} q_{ik}^1(t)p_{kj}(t)x_j(t)\,dt.$$

En continuant indéfiniment, on obtient

$$\mathrm{S}-1)a_i = \mathrm{S}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}a_j\right), \tag{6}$$

avec

$$a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_{ij}^n(\mathrm{T}). \tag{7}$$

La série du second membre est *absolument convergente*. En effet, appelons μ une limite supérieure des $|p_{ij}(t)|$. On a

$$|q_{ij}^0(t)| < \mu t, \quad |q_{ij}^1(t)| < \frac{m\mu^2 t^2}{2}, \quad \dots, \quad |q_{ij}^n(t)| < \frac{m^n \mu^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'où résulte la propriété annoncée.

L'équation en S s'obtient maintenant en annulant le déterminant du système (6).

4. Revenons au système (4), où nous remplaçons S par une racine S_1 de l'équation (5). Supposons que le déterminant principal soit d'ordre $m-p$. La solution générale est de la forme $a_j = \sum_{k=1}^{p} B_j^k b_k$, les b_k désignant des constantes arbitraires et les m formes linéaires a_j étant linéairement indépendantes. En portant dans (2) et ordonnant par rapport aux b_k, on obtient

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{p} b_k y_i^k(t),$$

les k intégrales particulières $y_i^k(t)$ étant linéairement indépendantes (¹). On peut donc leur faire jouer le rôle des $\theta_i^k(t)$ d'indices $k \leqq p$. On a

$$y_i^j(\mathrm{T}) = S_1 y_i^j(0) \qquad \text{pour} \quad j \leqq p.$$

Le déterminant (5) admet visiblement le facteur $(S_1 - S)^p$. Ce facteur étant supprimé, il reste l'équation de degré $m-p$

$$\| y_i^1(0)\ y_i^2(0) \dots y_i^p(0)\ \theta_i^{p+1}(\mathrm{T}) - S\theta_i^{p+1}(0) \dots \theta_i^m(\mathrm{T}) - S\theta_i^m(0) \| = 0. \tag{8}$$

5. *Supposons qu'elle admette encore la racine* S_1. — Pour $S = S_1$, l'identité (3) ne peut plus être vérifiée par une solution indépendante des précédentes. Cherchons alors à vérifier une identité de la forme

$$x_i(t + \mathrm{T}) = S_1 x_i(t) + \sum_{j+1}^{p} c_j y_i^j(t). \tag{9}$$

Nous posons

$$x_i(t) = \sum_{j=p+1}^{m} a_j \theta_i^j(t)$$

(¹) En effet, on a $y_i^k(t) = \sum_{j=1}^{m} B_j^k \theta_i(t)$. Si $\sum_{k=1}^{p} \rho_k y_i^k(t) \equiv 0$, on a $\sum_{k=1}^{p} \rho_k B_j^k = 0$, ce qui est impossible, d'après l'indépendance des formes linéaires a_j.

et nous obtenons les équations

$$(10) \qquad \sum_{i=p+1}^{m} a_j[\theta_i^j(\mathrm{T}) - \mathrm{S}_1\theta_i^j(0)] - \sum_{j=1}^{p} c_j y_i^j(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

C'est un système linéaire et homogène par rapport aux m inconnues a_j, c_j. Son déterminant est nul, d'après (8). Mais, il n'y a plus de solution pour laquelle les c_j seraient tous nuls (nº 4).

Prenons une solution quelconque, que nous appelons $y_i^{p+1}(t)$. Comme on peut toujours faire une substitution linéaire sur les $y_i^j(t)$ d'indice $j \leqq p$, nous pouvons supposer $c_j = 0$ pour $j < p$ et $c_p = 1$. Nous avons ainsi

$$y_i^{p+1}(t + \mathrm{T}) = \mathrm{S}_1 y_i^{p+1}(t) + y_i^p(t).$$

La solution $y_i^{p+1}(t)$ peut être substituée à $\theta_i^{p+1}(t)$; moyennant quoi l'équation (8) devient, en supprimant le facteur $\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}$,

$$\| y_i^1(0) \ldots y_i^{p+1}(0) \;\; \theta_i^{p+2}(\mathrm{T}) - \mathrm{S}\theta_i^{p+2}(0) \ldots \theta_i^m(\mathrm{T}) - \mathrm{S}\theta_i^m(0) \| \, 0.$$

Si elle admet encore la racine S_1, nous répétons les opérations précédentes et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne la solution $y_i^q(t)$.

La racine S_1 *est multiple d'ordre* q et l'on a les identités

$$(11) \qquad \begin{cases} y_i^j(t + \mathrm{T}) = \mathrm{S}_1 y_i^j(t) & \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq p; \\ y_i^j(t + \mathrm{T}) = \mathrm{S}_1 y_i^j(t) + y_i^{j-1}(t) & \text{pour} \quad p + 1 \leqq j \leqq q. \end{cases}$$

6. Les $\theta_i^j(t)$ d'indice $j \leqq q$ sont maintenant remplacés par les $y_i^j(t)$. L'équation (5), divisée par $(\mathrm{S}_1 - \mathrm{S})^q$, a la forme (8), où p est remplacé par q. Elle n'admet plus la racine S_1.

Soit S_2 une de ses racines. Pour $\mathrm{S} = \mathrm{S}_2$, le système (4) devient

$$(\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2)\left[\sum_{j=1}^{q} a_j y_i^j(0)\right] + \sum_{j=p+1}^{q} a_j y_i^{j-1}(0) + \sum_{i=q+1}^{m} a_j[\theta_i^j(\mathrm{T}) - \mathrm{S}_2\theta_i^j(0)] = 0.$$

Il n'admet aucune solution pour laquelle les a_j d'indice $j > q$ seraient tous nuls, car, s'il en était ainsi, les $y_i^j(0)$ d'indice $j \leqq q$ ne seraient pas linéairement indépendants. Si le déterminant principal est d'ordre $m - r$, il admet r solutions linéairement indépendantes, auxquelles correspondent r solutions $y_i^j(t)$, d'indice $j = q + 1, q + 2, \ldots, q + r$, linéairement indépendantes et que nous substituons aux $\theta_i^j(t)$ de même indice j.

L'équation (5), divisée par $(\mathrm{S}_1 - \mathrm{S})^q(\mathrm{S}_2 - \mathrm{S})^r$, prend la forme (8), p étant remplacé par $q + r$. Si elle admet encore la racine S_2, nous cherchons une solution vérifiant (9), où S_1 est remplacé par S_2 et où l'indice j varie de $q + 1$ à $q + r$. Nous posons

$$x_i(t) = \sum_h a_h \theta_i^h(t),$$

l'indice h prenant toutes les valeurs autres que $q+1, q+2, \ldots, q+r$. En raisonnant comme au n° 5, nous obtenons un nouveau groupe de solutions vérifiant des identités de la forme (11), S_1 étant remplacé par S_2, p par $p'=q+r$ et q par $q' \geqq p'$. Et ainsi de suite.

7. En résumé, nous avons obtenu un *système fondamental $y_i^j(t)$ constitué par un certain nombre de groupes correspondant aux racines distinctes de l'équation en* S. *Les fonctions de chaque groupe se répartissent en deux classes. Les fonctions de la première classe vérifient l'identité*

$$y_i^j(t+T) = S_j y_i^j(t). \tag{12}$$

Les fonctions de la deuxième classe vérifient l'identité

$$y_i^j(t+T) = S_j y_i^j(t) + y_i^{j-1}(t). \tag{13}$$

Elles sont rangées dans un ordre déterminé. Nous appellerons rang r_j d'une telle fonction son numéro d'ordre compté à partir de la fonction de plus petit indice et rang complémentaire r'_j la différence entre ce rang et le nombre ω_j des fonctions de la seconde classe, lequel sera *appelé le nombre caractéristique du groupe.*

Le nombre total des fonctions d'un groupe égale l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation en S.

Si le nombre caractéristique est nul, c'est-à-dire si la seconde classe n'existe pas, nous dirons que le groupe est un *groupe simple.*

Si S_j est racine simple, il n'y a qu'une fonction dans le groupe; elle est de première classe; le groupe est simple.

Les S_j seront appelés les *décréments.* Nous poserons

$$|S_j| = \sigma_j, \qquad \alpha_j = \frac{1}{T}\log\sigma_j. \tag{14}$$

Les α_j seront les *décréments logarithmiques.*

Nous poserons aussi

$$H(t) = \| y_1^j(t)\, y_2^j(t) \ldots y_m^j(t) \| \tag{15}$$

et nous supposerons $H(0) = 1$. On sait que

$$H(t) = e^{\Delta(t)}, \qquad \Delta(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t p_{ii}(t)\, dt. \tag{16}$$

Nous appellerons $H_i^j(t)$ le quotient par $H(t)$ du mineur correspondant à l'élément y_i^j. Ces $H_i^j(t)$ vérifient le système différentiel

$$\frac{dH_i}{dt} = -\sum_{k=1}^{m} p_{ki}(t) H_k. \tag{17}$$

En effet, on a, pour $j = 1, 2, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{m} H_i y_i^j = 0 \text{ ou } 1.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{dH_i}{dt} y_i^j + \sum_i \sum_k H_i p_{ik} y_k^j = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^j \left(\frac{dH_i}{dt} + \sum_k p_{ki} H_k \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Le déterminant $\| y_i^j \|$ étant $\neq 0$, on en déduit (17).

8. *Identités diverses.* — Si, dans le déterminant $H(t)$, on remplace t par $t+T$, chaque élément $y_i^j(t)$ est remplacé par $S_j y_i^j(t)$ ou par $S_j y_i^j(t) + y_i^{j-1}(t)$. On peut manifestement, sans changer $H(t)$, laisser tomber successivement, en procédant de gauche à droite, les termes tels que $y_1^{j-1}(t)$. On en déduit que $\frac{H(t+T)}{H(t)}$ égale le produit des racines S_j, chacune étant répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. D'après (16), on conclut que *le produit des racines de l'équation en* S *vaut* $e^{\Delta(T)}$, ce qui est d'ailleurs évident sur l'équation (5).

9. Des formules (12) et (13), on peut tirer l'expression générale de $y_i^j(t+nT)$, n désignant un entier quelconque. On a, pour le premier groupe par exemple,

$$(18) \quad \begin{cases} y_i^j(t+nT) = S_1^n y_i^j(t), & \text{si } 1 \leqq j \leqq p, \\ y_i^j(t+nT) = \displaystyle\sum_{k=0}^{j-p} C_n^k S_1^{n-k} y_i^{j-k}(t), & \text{si } p \leqq j \leqq q. \end{cases}$$

Dans la deuxième formule, C_n^k est un coefficient du binome; il doit être remplacé par zéro si $k > n$, par 1 si $k = 0$ ou n.

La première formule est évidente d'après (12). Pour démontrer la seconde, il suffit de vérifier la formule de récurrence obtenue en remplaçant t par $t+(n-1)T$ dans la formule (13), ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{i-p} (C_n^k - C_{n-1}^k - C_{n-1}^{k-1}) S_1^{n-k} y_i^{j-k}(t) = 0.$$

Pour $n > k$, la parenthèse est nulle, d'après une formule élémentaire bien connue. Pour $n = k$, le deuxième terme de la parenthèse est nul, les deux autres valent *un*. Pour $n < k$, les trois termes sont nuls.

10. On a l'identité

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T})y_i^j(t+n\mathrm{T}) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{H}_i^j(t)y_i^j(t).$$

En utilisant les formules (18), on obtient, pour le premier groupe,

$$\sum_{j=1}^{p} \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T})\mathrm{S}_1^n y_i^j(t) + \sum_{j=p+1}^{q} \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T})\left[\sum_{k=0}^{j-p} \mathrm{C}_n^k \mathrm{S}_1^{n-k} y_i^{j-k}(t)\right] = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{H}_i^j(t)y_i^j(t).$$

Comme les H_i^j sont indépendants des y_i^j, ceci doit avoir lieu quels que soient les $y_i^j(t)$. On en déduit les formules suivantes :

$$(19)\quad \begin{cases} \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T}) = \dfrac{\mathrm{H}_i^j(t)}{\mathrm{S}_1^n}, & \text{si } 1 \leqq j \leqq p-1, \\ \mathrm{H}_i^j(t+n\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-j} \mathrm{C}_{n+k-1}^k \frac{\mathrm{H}_i^{j+k}(t)}{\mathrm{S}_1^{n+k}}(-1)^k, & \text{si } p \leqq j \leqq q. \end{cases}$$

Pour les vérifier, substituons dans l'identité ci-dessus. Les termes $\sum_{j=1}^{p-1} \mathrm{H}_i^j y_i^j$ disparaissent immédiatement et il reste

$$\sum_{j=p}^{q}\left[\sum_{k=0}^{q-j} \mathrm{C}_{n+k-1}^k(-1)^k \frac{\mathrm{H}_i^{j+k}}{\mathrm{S}_1^{n+k}}\right]\left[\sum_{h=0}^{j-p} \mathrm{C}_n^h \mathrm{S}_1^{n-h} y_i^{j-h}\right] = \sum_{r=p}^{q} \mathrm{H}_i^r y_i^r$$

ou

$$\sum_{j=p}^{q}\sum_{k=0}^{q-j}\sum_{h=0}^{j-p} \mathrm{C}_{n+k-1}^k \mathrm{C}_n^h(-1)^k \mathrm{S}_1^{-h-k}\mathrm{H}_i^{j+k} y_i^{j-h} = \sum_{r=p}^{q} \mathrm{H}_i^r y_i^r.$$

Posons, au premier membre, $j+k=s$ et $j-h=r$; il vient

$$\sum_{j=p}^{q}\sum_{s=j}^{q}\sum_{r=p}^{j} \mathrm{C}_{n+s-j-1}^{s-j}\mathrm{C}_n^{j-r}(-1)^{s-j}\mathrm{S}_1^{r-s}\mathrm{H}_i^s y_i^r = \sum_{r=p}^{q} \mathrm{H}_i^r y_i^r.$$

Si $s > r$, le coefficient de $\mathrm{H}_i^s y_i^r$ doit être nul, soit, en remarquant que $p \leqq r \leqq j \leqq s \leqq q \leqq$,

$$\sum_{j=r}^{s} \mathrm{C}_{n+s-j-1}^{s-j}\mathrm{C}_n^{j-r}(-1)^{s-j} = 0.$$

Pour $s=r$, on doit avoir

$$\sum_{j=r}^{r} \mathrm{C}_{n+r-j-1}^{r-j}\mathrm{C}_n^{j-r}(-1)^{r-j} = 1.$$

Dans cette dernière formule, on a nécessairement $j = r$ et la vérification est évidente. La première s'écrit, en posant $s - r = u > 0$,

$$\sum_{k=0}^{u} C_{n+k-1}^{k} C_{n}^{u-k} (-1)^{k} = 0.$$

On la vérifie en annulant le coefficient de x^u dans le produit des deux développements

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} (-1)^{k} x^{k}, \qquad (1+x)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{u-k} x^{u-k}.$$

11. Posons $t = nT + \theta$, $0 \leqq \theta < T$. Les formules (18) et (19) nous montrent que, pour t infiniment grand, on a *asymptotiquement*, avec la notation (14),

$$(20) \qquad \begin{cases} |y_i^j(t)| = \dfrac{e^{\alpha_j t} t^{r_j}}{T^{r_j}(r_j)!} |y_i^{j-r_j}(\theta)| e^{-(\theta + r_j T)\alpha_j} \leqq M e^{\alpha_j t} t^{r_j}, \\ |H_i^j(t)| = \dfrac{e^{-\alpha_j t} t^{r'_j}}{T^{r'_j}(r'_j)!} |H_i^{j+r'_j}(\theta)| e^{(\theta - r'_j T)\alpha_j} \leqq M' e^{-\alpha_j t} t^{r'_j}. \end{cases}$$

Dans ces formules, r_j et r'_j doivent être remplacés par zéro, si $r_j < 0$; M et M' ont une signification évidente.

12. *Système linéaire non homogène.* — Considérons le système

$$(21) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}(t) x_j + f_i(t), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où les f_i sont des fonctions continues. Son intégrale générale est

$$(22) \qquad x_i(t) = \sum_{i=1}^{m} y_i^j(t) Y_j(t),$$

avec

$$(23) \qquad Y_j(t) = a_j + A_j(t, f)$$

et

$$(24) \qquad A_j(t, f) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^t H_k^j(t) f_k(t)\, dt.$$

De (22) on déduit

$$(25) \qquad Y_j(t) = \sum_{i=1}^{m} H_i^j(t) x_i(t).$$

13. *Conditions d'existence d'une solution périodique.* — Si les $x_i(t)$ admettent la période T, les équations (21) montrent que *les $f_i(t)$ admettent aussi cette période.*

Réciproquement, si les $f_i(t)$ admettent la période T, pour que la solution (22) admette aussi cette période, il faut et il suffit que l'on ait $x_i(\mathrm{T}) = x_i(0)$ ou, d'après (22), (23) et (11),

$$\sum_{j=1}^{p-1} [a_j(\mathrm{S}_1 - 1) + \mathrm{S}_1 \mathrm{A}_j(\mathrm{T})] y_i^j(0) + \sum_{j=p}^{q-1} [a_j(\mathrm{S}_1 - 1) + \mathrm{S}_1 \mathrm{A}_j(\mathrm{T}) + a_{j+1} + \mathrm{A}_{j+1}(\mathrm{T})] y^j(0)$$
$$+ [a_q(\mathrm{S}_1 - 1) + \mathrm{S}_1 \mathrm{A}_q(\mathrm{T})] y_i^q(0) + \ldots = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ces équations constituent un système linéaire et homogène par rapport aux crochets. Le déterminant est $\mathrm{H}(0) = 1$; donc, tous les crochets doivent être nuls. D'où l'on tire, en supposant $\mathrm{S}_1 \neq 1$,

$$(26) \quad \begin{cases} a_j = \dfrac{\mathrm{S}_1}{1 - \mathrm{S}_1} \mathrm{A}_j(\mathrm{T}) & \text{pour } 1 \leqq j \leqq p - 1 \text{ et } j = q, \\ a_j = \dfrac{\mathrm{S}_1 \mathrm{A}_j(\mathrm{T}) + a_{j+1} + \mathrm{A}_{j+1}(\mathrm{T})}{1 - \mathrm{S}_1} & \text{pour } p \leqq j \leqq q - 1 \end{cases}$$

et les formules analogues dans tous les groupes.

On en conclut que *si aucun décrément n'est égal à* un, *il y a une solution périodique et une seule*.

Si $\mathrm{S}_1 = 1$, il faut, pour le premier groupe,

$$(27) \quad \mathrm{A}_j(\mathrm{T}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j \leqq p - 1 \text{ et } j = q,$$

$$(28) \quad a_j = -\mathrm{A}_j(\mathrm{T}) - \mathrm{A}_{j-1}(\mathrm{T}) \quad \text{pour} \quad p + 1 \leqq j \leqq q.$$

Les $f_i(t)$ doivent vérifier les p conditions (27) et l'on a alors une infinité de solutions périodiques, dépendant des p constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_p$

$$(29) \quad x_i = \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha y_i^\alpha(t) + \mathrm{B}_i(t, f).$$

Les $\mathrm{B}_i(t, f)$ sont des *fonctions déterminées*, résultant de ce qui précède. Observons que les f_k interviennent linéairement dans ces fonctions; on a donc

$$(30) \quad \mathrm{B}_i(t, f) - \mathrm{B}_i(t, f') = \mathrm{B}_i(t, f - f').$$

De plus, si $|f_k| < \bar{f}$ quel que soit k, on a

$$(31) \quad |\mathrm{B}_i(t, f)| < \mathrm{A}\bar{f},$$

A désignant une constante positive déterminée, égale, à un facteur constant près, au maximum des $|y_j^i(t) \mathrm{H}_k^j(t)|$ pour $0 \leqq t \leqq \mathrm{T}$.

14. *Solutions tendant vers zéro pour $t = +\infty$.* — Supposons que l'on ait, quels que soient k et $t > 0$,

$$(32) \quad |f_k(t)| < \mathrm{C}\, e^{2\beta t},$$

où C désigne une constante positive et $\beta = h\alpha$, $0 < h < \frac{1}{2}$, α désignant *le plus grand des α_j négatifs*.

Convenons de numéroter les solutions fondamentales $y_i^j(t)$ de telle manière que l'on ait

$$\alpha_j < 0 \quad \text{pour } j \leqq p, \qquad \alpha_j \geqq 0 \quad \text{pour } j > p. \tag{33}$$

D'après (20), on a, pour $j \leqq p$,

$$|A_j(t)| < m\mathrm{M}'\mathrm{C}\int_0^t e^{(2\beta-\alpha_j)t}t^{r'_j}\,dt. \tag{34}$$

Si $j > p$, l'intégrale $A_j(+\infty)$ a un sens et l'on a

$$|A_j(+\infty) - A_j(t)| < m\mathrm{M}'\mathrm{C}\int_t^{+\infty} e^{(2\beta-\alpha_j)t}t^{r'_j}\,dt. \tag{35}$$

15. Cela posé, choisissons arbitrairement les p constantes $b_1, b_2, \ldots; b_p$, de module $< \rho$. Puis, prenons

$$a_j = b_j \quad \text{si } j \leqq p, \qquad a_j = -A_j(+\infty) \quad \text{si } j > p. \tag{36}$$

Des formules (22), (23) et des inégalités (34), (35), on déduit

$$|x_i(t)|\,e^{-\beta t} < \mathrm{M}\rho\left[\sum_{j=1}^{p} e^{(\alpha_j-\beta)t}t^{r_j}\right] + m\mathrm{M}\mathrm{M}'\mathrm{C}\left[\sum_{j=1}^{p}\mathrm{X}_j + \sum_{j=p+1}^{m}\mathrm{X}'_j\right], \tag{37}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{X}_j &= e^{(\alpha_j-\beta)t}t^{r_j}\int_0^t e^{(2\beta-\alpha_j)t}t^{r'_j}\,dt \qquad \text{pour } j \leqq p,\\ \mathrm{X}'_j &= e^{(\alpha_j-\beta)t}t^{r_j}\int_t^{+\infty} e^{(2\beta-\alpha_j)t}t^{r'_j}\,dt \qquad \text{pour } j > p. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Pour $j \leqq p$, on a $\alpha_j - \beta \leqq \alpha(1-h) < 0$. Le maximum de $e^{(\alpha_j-\beta)t}t^{r_j}$, pour $0 < t < +\infty$, est

$$\mathrm{M}_j = \frac{e^{-r_j}r_j^{r_j}}{(\beta-\alpha_j)^{r_j}}. \tag{39}$$

Posons ensuite

$$\mathrm{N}_j = \max \text{ de } \mathrm{X}_j, \qquad \mathrm{N}'_j = \max \text{ de } \mathrm{X}'_j. \tag{40}$$

Ces maxima sont *finis*. En effet, pour $j \leqq p$, on a

$$2\beta - \alpha_j \geqq \alpha(2h-1) > 0.$$

Pour $t = +\infty$, la valeur asymptotique de X_j est $\dfrac{e^{\beta t}t^{\omega_j}}{2\beta-\alpha_j}$, dont la limite est zéro. Pour $j > p$, on a $2\beta - \alpha_j < 0$; la valeur asymptotique de X'_j est $\dfrac{e^{\beta t}t^{\omega_j}}{\alpha_j - 2\beta}$, dont la limite est encore zéro.

Il résulte de tout ceci que l'on a, quel que soit $t > 0$,

$$(41) \qquad |x_i(t)| < (\rho P + CP')e^{\beta t},$$

avec

$$(42) \qquad P = M\left(\sum_{j=1}^{p} M_j\right), \qquad P' = mMM'\left(\sum_{j=1}^{p} N_j + \sum_{j=p+1}^{m} N'_j\right).$$

On en conclut que *la solution considérée tend vers zéro pour* $t = +\infty$. Elle dépend des p constantes arbitraires b_j. Nous la désignerons par la notation $x_i(t) = \Phi_i(f, b)$. On a évidemment

$$(43) \qquad \Phi_i(f, b) - \Phi_i(g, b) = \Phi_i(f-g, 0).$$

16. Les constantes M_j, N_j, N'_j dépendent uniquement des nombres entiers r_j, r'_j, des décréments logarithmiques α_j et du choix de la constante h. Si tous les décréments sont éloignés de *un*, ces constantes ont évidemment une valeur finie. Mais, nous rencontrerons plus loin le *cas où* certains décréments ont un module < 1 et infiniment voisin de *un*. Examinons l'ordre de grandeur de P et de P′ dans cette hypothèse.

Posons $\alpha = -\lambda$, λ étant infiniment voisin de $+0$. Si σ_j est infiniment voisin de *un* et si $j \leqq p$, on a

$$\alpha_j = -k\lambda, \qquad k \geqq 1.$$

La formule (39) montre immédiatement que $M_j = O(\lambda^{-r_j})$. Comme $r_j \leqq \omega_j$, il s'ensuit que *si* ω *désigne le plus grand des* ω_j *correspondant à des décréments ayant un module* < 1 *et en différant par* $O(\lambda)$, *on a*

$$(44) \qquad P = O(\lambda^{-\omega}).$$

Cherchons l'ordre de grandeur de N_j, dans la même hypothèse que ci-dessus. Posons

$$(2\beta - \alpha_j)t = (k - 2h)\lambda t = x \qquad \text{et} \qquad \frac{k-h}{k-2h} = n.$$

On a

$$X_j = [(k-2h)\lambda]^{-\omega_j - 1} \times e^{-nx} x^{r_j} \int_0^x e^x x^{r'_j} dx.$$

Le rapport n étant > 1, la fonction de x constituée par le second facteur tend vers zéro pour $x = +\infty$. Elle admet donc un maximum fini et l'on a

$$N_j = O(\lambda^{-\omega_j - 1}).$$

Supposons maintenant $\alpha_j = k\lambda$ et posons

$$(\alpha_j - 2\beta)t = (k + 2h)\lambda t = x \qquad \text{et} \qquad \frac{k+h}{k+2h} = n.$$

On a

$$X'_j = [(k+2h)\lambda]^{-\omega_j-1} \times e^{nx} x^{r_j} \int_x^{+\infty} e^{-x} x^{r'_j} dx.$$

Le rapport n étant < 1, la fonction de x constituée par le second facteur tend vers zéro pour $x = +\infty$. Elle admet donc un maximum fini et l'on a

$$N'_j = O(\lambda^{-\omega_j-1}).$$

Il résulte de cette discussion que *si l'on appelle ω' le plus grand des ω_j correspondant à des décréments ayant un module ≥ 1 et en différant par* $o(\lambda)$, *on a*

$$P' = O(\lambda^{-\omega'-1}). \tag{45}$$

Dans le cas où les groupes correspondant à des décréments ayant un module différant de un *par* $o(\lambda)$ *sont tous des groupes simples, on a*

$$P = O(1), \qquad P' = O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{46}$$

17. *Système non linéaire.* — Considérons le système

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{47}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions f_i admettent la période T par rapport à t.

2° Le système admet une solution $Z_i(t)$ de période T.

3° Dans le *domaine* (D) défini par

$$|z_i - Z_i(t)| < R, \tag{48}$$

et quel que soit t, les f_i, considérés comme fonctions des z_j, sont continus et admettent des dérivées premières et secondes continues $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}$, $f_{ijk} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k}$. Toutes ces fonctions et dérivées sont également continues par rapport à t.

Nous appellerons $p_{ij}(t)$ et $p_{ijk}(t)$ les fonctions périodiques obtenues en remplaçant les z par les $Z(t)$ dans f_{ij} et f_{ijk}. Le système (1) sera dit *système linéaire associé* au système (47).

Pour faciliter le langage, nous ferons jouer à t le rôle du temps et nous considérerons les z_i comme les coordonnées cartésiennes d'un point (z) de l'espace à m dimensions. La courbe décrite par ce point quand les z_i vérifient (47) et que t croît de 0 à $+\infty$ sera dite une *trajectoire du système* (47).

Appelons (z_0) la position de (z) pour $t = 0$ et domaine (D_0) le domaine défini par

$$|z_i(0) - Z_i(0)| < R_0. \tag{49}$$

Nous dirons que la solution (Z) est *stable* si l'on peut choisir R_0 assez petit pour que, *quelle que soit la position de* (z_0) *dans* (D_0), les différences $z_i(t) - Z_i(t)$ vérifient (48) quel que soit $t > 0$ et tendent vers zéro pour $t = +\infty$.

18. Posons

$$z_i = Z_i(t) + x_i, \qquad F_i(x, t) = f_i(Z + x, t) - f_i(Z, t) - \sum p_{ij}(t)\, x_j. \tag{50}$$

Les équations (47) s'écrivent

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum p_{ij}(t)\, x_j + F_i(x, t). \tag{51}$$

Si les points (z) et (z') appartiennent au domaine (D), on a, en vertu des hypothèses faites au n° 17,

$$|F_i(x, t)| < KR^2, \qquad |F_i(x, t) - F_i(x', t)| < K'R\left[\sum_j |x_j - x'_j|\right], \tag{52}$$

K et K' désignant des constantes positives proportionnelles au maximum des modules des dérivées secondes f_{ijk} dans le domaine (D).

19. *Solutions tendant vers la solution périodique pour* $t = +\infty$. — Adoptons, pour le système associé, les notations du n° 14, de sorte que p désignera *le nombre des décréments ayant un module* < 1, chacun d'eux étant répété un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Choisissons arbitrairement les constantes $b_1, b_2, \ldots, b_p$, de module $< \rho$. Nous allons leur faire correspondre une solution du système (47) par la méthode des *approximations successives*.

Soit $x_i^n(t)$ la $n^{\text{ième}}$ approximation. Posons $F_i(x^n, t) = F_i^n(t)$. Nous déterminons nos approximations successives par les formules

$$x_i^n(t) = \Phi_i(F^{n-1}, b), \qquad x_i^0 = \Phi_i(0, b) \tag{53}$$

avec la notation du n° 15.

20. Nous allons démontrer que l'on a, quel que soit n,

$$|x_i^n(t)| < \rho B_n e^{\beta t}, \qquad \rho B_n < R, \tag{54}$$

les B_n désignant des constantes positives provisoirement indéterminées et β le nombre introduit au n° 14.

D'après (41), on peut prendre $B_0 = P$.

Admettons maintenant l'inégalité (54) au rang $n - 1$. D'après (52), on a

$$|F_i^{n-1}(t)| < K\rho^2 B_{n-1}^2 e^{2\beta t}.$$

Cette inégalité est de la forme (32), avec $C = K\rho^2 B_{n-1}^2$. On a donc, d'après (41),

$$|x_i^n(t)| < (\rho P + P' K \rho^2 B_{n-1}^2)\, e^{\beta t},$$

et l'on peut prendre

$$(55)\qquad B_n = P + Q\rho B_{n-1}^2, \qquad Q = P'K.$$

Si B_n tend vers une limite B, pour $n = +\infty$, cette limite est donnée par l'équation du second degré

$$(56)\qquad \varphi(B) \equiv Q\rho B^2 - B + P = 0,$$

laquelle a des racines si

$$(57)\qquad \rho < \frac{1}{4PQ}.$$

Je dis que $B_n > B_{n-1}$. Ceci revient à $\varphi(B_{n-1}) > 0$. Cette condition est manifestement remplie pour $n = 1$. Admettons $B_n > B_{n-1}$ et démontrons $B_{n+1} > B_n$, soit, d'après (55),

$$P + Q\rho B_n^2 > P + Q\rho B_{n-1}^2,$$

ce qui résulte de $B_n > B_{n-1}$.

Ceci nous apprend du même coup que B_n est extérieur aux racines de (56).

Je dis que B_n est inférieur à la plus petite racine. Il suffit de démontrer que $B_n < \frac{1}{2Q\rho}$. Pour $n = 0$, ceci revient à $\rho < \frac{1}{2PQ}$, conséquence de (57). Admettons la propriété pour B_n. On a

$$B_{n+1} = P + Q\rho B_n^2 < P + \frac{Q\rho}{4Q^2\rho^2} = P + \frac{1}{4Q\rho} < \frac{1}{2Q\rho},$$

d'après (57). Donc, la propriété est vérifiée pour B_{n+1}.

Il résulte de ce raisonnement que B_n *tend, en croissant, vers la plus petite racine* B *de l'équation* (56). On en conclut que l'on, a quel que soit n,

$$(58)\qquad |x_i^n(t)| < \rho B e^{\beta t}.$$

Reste à vérifier $\rho B < R$. Pour cela, il suffit que $\varphi\left(\frac{R}{\rho}\right) < 0$, soit

$$(59)\qquad \rho < \frac{R(1 - QR)}{P},$$

ce qui exige

$$(60)\qquad R < \frac{1}{Q}.$$

Si cette dernière condition n'est pas remplie, $\frac{R}{\rho}$ est $> \frac{1}{\rho Q}$, c'est-à-dire plus grand que la somme des racines de l'équation (56), donc *a fortiori* plus grand que la plus petite racine B.

21. Occupons-nous maintenant de la *convergence des approximations*. Posons

$$u_i^n(t) = x_i^n(t) - x_i^{n-1}(t),$$

et admettons que l'on ait, quel que soit t,

$$|u_i^n(t)| < U_n e^{\beta t}, \tag{61}$$

U_n désignant une constante positive. D'après l'identité (43), on a

$$u_i^{n+1} = \Phi_i(F^n - F^{n-1}, 0).$$

Or, la deuxième inégalité (52) nous donne, en tenant compte de (58) et (61),

$$|F_k^n(t) - F_k^{n-1}(t)| < m K' B \rho U_n e^{2\beta t}.$$

Cette inégalité est de la forme (32), avec $C = mK'B\rho U_n$. On a donc, d'après (41),

$$|u_i^{n+1}(t)| < m P' K' B \rho\, U_n e^{\beta t},$$

et l'on peut prendre

$$U_{n+1} = m P' K' B \rho U_n.$$

Les séries $u_i^n(t)$ sont absolument et uniformément convergentes si $B < \frac{1}{mP'K'\rho}$. Il suffit pour cela que $\varphi\left(\frac{1}{mP'K'\rho}\right)$ soit < 0, ce qui exige

$$\rho < \frac{mP'K' - Q}{P m^2 P'^2 K'^2}, \tag{62}$$

sous réserve que

$$Q < mP'K'. \tag{63}$$

Si cette dernière inégalité n'est pas vérifiée, $\frac{1}{mP'K'\rho}$ est $> \frac{1}{Q\rho}$, c'est-à-dire que la somme des racines de (56), donc *a fortiori* plus grand que la plus petite racine B.

22. En définitive, *si ρ est assez petit* pour que les inégalités (57) et éventuellement (59) et (62) soient toutes vérifiées, les fonctions $x_i^n(t)$ tendent uniformément, pour $n = \infty$, vers des fonctions déterminées $x_i(t)$. Ces fonctions vérifient le système (51). En effet, la différence $F_i(x, t) - F_i(x^n, t)$ tend uniformément vers zéro, d'après la deuxième inégalité (52). Donc, la dérivée $\frac{dx_i^n}{dt}$ tend uniformément vers $\sum_j p_{ij}(t) x_j + F_i(x, t)$. Il en résulte que cette limite est la dérivée $\frac{dx_i}{dt}$. Donc, l'équation (51) est vérifiée.

Nous avons formé une solution du système (51) qui, d'après (58), tend vers zéro pour $t = +\infty$. En remontant aux z_i par les formules (50), nous obtenons une *solution du système* (47) *qui tend vers la solution périodique* (Z) *pour $t = +\infty$, quelles que soient les p constantes arbitraires b_i, pourvu qu'elles soient assez petites.*

Pour ces solutions, on a $a_j = b_j$ si $j \leqq p$; si $j > p$, a_j est la limite de $-A_j(F^n)$ pour $n = \infty$; c'est une fonction déterminée des b_j. La position initale du point

(z) étant donnée, d'après (22), par les formules

$$z_i(0) = Z_i(0) + \sum_{j=1}^{p} b_j y_i^j(0) + \sum_{j=p+1}^{m} a_j y_i^j(0),$$

on voit que l'ensemble (D'_0) de ces points constitue une *multiplicité à p dimensions*, que nous appellerons *domaine restreint de stabilité*. La question se pose de savoir s'il existe d'autres solutions que les précédentes tendant vers la solution périodique pour $t = +\infty$. Cela est probablement impossible; mais je n'ai pu en donner une démonstration rigoureuse.

23. *Condition de stabilité.* — Pour que la solution (Z) soit stable, il faut et il suffit que le domaine (D'_0) soit un domaine (D_0) à m dimensions, c'est-à-dire que l'on ait $p = m$. Donc,

Théorème. — *La condition suffisante et probablement nécessaire de stabilité est que tous les décréments aient un module* < 1.

Le domaine (D_0) est un domaine *linéaire*, dont chaque point est à coup sûr le point de départ d'une trajectoire tendant vers la trajectoire périodique. Mais, le *véritable* domaine de stabilité (Δ_0) est plus étendu. Il comprend certainement (D_0); mais, nous ne connaissons pas sa frontière exacte.

Dans le cas particulier où le module maximum des décréments est de la forme $1-\lambda$, λ étant infiniment petit positif, on a $-\alpha = O(\lambda)$; les constantes P′ et Q sont infiniment grandes. D'après (57), ρ est infiniment petit. Donc, *si le module maximum des décréments de module* < 1 *est infiniment voisin de* un, *le domaine restreint de stabilité* (D'_0) *est infiniment petit dans toutes ses dimensions.*

Faisant toujours l'hypothèse précédente, supposons que *les groupes correspondant aux décréments de module infiniment voisin de un soient tous des groupes simples*. D'après (46), la constante P est finie et $P' = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Supposons maintenant *que les fonctions* f_i du n° 17 *soient multipliées par* λ; de sorte que les constantes K et K′ de (52) valent $O(\lambda)$. La constante Q du n° 20 est finie, donc aussi les seconds membres de (57), (59) et (60). Il en est de même de P′K′, donc du second membre de (62). On en conclut que, dans ce cas, *le domaine de stabilité reste fini quand* λ *tend vers zéro*.

24. *Cas où il existe une infinité de solutions périodiques.* — Supposons que le système (47) admette une infinité de solutions périodiques $Z_i(t, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ dépendant des paramètres μ_h, en nombre $n \leq m$. Nous supposons que les fonctions Z_i sont *indépendantes*, c'est-à-dire que n quelconques d'entre elles ne sont liées par aucune relation indépendante des μ_i et vérifiée quel que soit t. Ceci revient à dire qu'*aucun des jacobiens formés avec les* $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_h}$ *n'est identiquement nul.*

On a

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = f_i(Z, t).$$

Dérivons par rapport à μ_h :

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial \mu_h \partial t} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}(Z, t) \frac{\partial Z_j}{\partial \mu_h}.$$

Ceci exprime que les fonctions $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_h}$ vérifient le système linéaire associé. Celui-ci admet donc n solutions périodiques. Ces solutions sont linéairement indépendantes, sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles des μ_h. En effet, si elles ne l'étaient pas, tous les jacobiens ci-dessus mentionnés seraient identiquement nuls, contrairement à l'hypothèse.

On en conclut (n° 7) que *l'équation en* S *admet la racine* $S = 1$ comme *racine multiple d'ordre* n au moins.

Donnons aux μ_h des valeurs numériques déterminées et supposons que, pour ces valeurs, le nombre des $\sigma_i < 1$ soit p. Comme il y a au moins n décréments égaux à *un*, on a nécessairement $p \leqq m - n$. Nous savons (n° 22) qu'il existe un domaine restreint de stabilité (D'_0) à p dimensions, tel que toute solution issue d'un point de ce domaine tende, pour $t = +\infty$, vers la solution périodique envisagée.

Faisons maintenant varier arbitrairement les μ_h à l'intérieur des limites pour lesquelles les hypothèses précédentes sont valables. Le domaines (D'_0) engendre alors un domaine (D_0) à $n+p$ dimensions. Par tout point M_0 de ce domaine passe un domaine (D'_0) et un seul [1], auquel correspondent des valeurs déterminées des μ_h et par conséquent une solution périodique déterminée (Z) du système (47). Soit P_0 la position du point (Z) pour $t = 0$. Si l'on fait partir, au temps zéro, M de M_0 et P de P_0, la distance MP tend vers zéro pour $t = +\infty$. Par conséquent, *la solution issue de tout point de* (D_0) *tend vers une solution périodique*.

Pour que (D_0) soit un domaine à m dimensions, il faut et il suffit que l'on ait $p = m - n$. Nous dirons alors que *le faisceau des solutions périodiques est stable et que* (D_0) *est son domaine de stabilité*. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que le décrément* $S = 1$ *soit racine multiple d'ordre n de l'équation en* S *et que les autres décréments aient un module* < 1.

25. *Cas où les fonctions f_i sont indépendantes de t.* — Dans ce cas, s'il existe une solution périodique $Z_i(t)$, il en existe une infinité $Z_i(t + \mu)$, μ désignant une constante arbitraire. Quand on fait varier μ, la trajectoire fermée correspon-

---

[1] Si le champ de variation des μ_h est assez restreint.

dante reste fixe; mais le point de départ P_0, de coordonnées $Z_i(\mu)$, varie sur cette trajectoire.

On se trouve dans un cas particulier du cas examiné au n° 24, la solution périodique du système associé étant $Z'_i(t+\mu)$. *Pour que la trajectoire soit stable, il faut et il suffit que les* $m-1$ *décréments autres que* un *aient un module* <1.

26. *Introduction des fonctions perturbatrices.* — Considérons maintenant le système

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z, t) + \lambda g_i(z, t). \tag{64}$$

Les fonctions f_i sont les mêmes qu'au n° 17 et seront appelées *fonctions principales*. Le facteur λ est un facteur positif *arbitrairement petit*. Les fonctions g_i seront appelées les *fonctions perturbatrices*. Le système obtenu pour $\lambda = 0$ sera appelé le *système principal*. Nous supposons, comme au n° 24, qu'il admet une *solution périodique principale* $Z(t, \mu)$, dépendant des n paramètres μ_α. Nous admettons que cette solution est stable [1]. Il s'ensuit (n° 24) que la racine $S = 1$ est racine multiple d'ordre n de l'équation en S et que les autres décréments ont un module <1. Les solutions fondamentales du système associé étant toujours désignées par la notation $y_i^j(t)$, convenons que $y_i^\alpha(t) = \dfrac{\partial Z_i}{\partial \mu_\alpha}$ pour $1 \leqq \alpha \leqq n$. Nous appellerons Y une limite supérieure des $|y_i^j(t)|$ pour $0 \leqq t \leqq T$.

Rappelons (n° 13) que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système linéaire avec seconds membres ait une solution périodique sont $A_j(T, f) = 0$ pour $j \leqq n$. Si elles sont remplies, la solution périodique la plus générale est

$$x_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha y_i^\alpha(t) + B_i(t, f), \tag{65}$$

les c_α désignant des constantes arbitraires.

Nous appellerons toujours domaine (D) le domaine défini par (48), lorsque les μ_α sont assujettis à rester eux-mêmes dans un certain domaine.

Nous supposerons que les f_i admettent, dans (D), des dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre inclus et nous appellerons M_p une limite supérieure des modules des dérivées d'ordre p. De même, nous supposerons que les g_i admettent, dans (D), des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre inclus et nous appellerons N_p une limite supérieure des modules des dérivées d'ordre p.

Toutes ces conventions étant admises, nous nous proposons de *chercher les solutions périodiques du système* (64) *voisines des solutions périodiques princi-*

[1] Cette condition n'est pas indispensable pour l'existence de la solution périodique. Mais elle l'est pour sa stabilité.

pales $Z(t, \mu)$ *et d'en reconnaître la stabilité*. Nous pourrons donc, dans ce qui va suivre, *supposer* $0 \leqq t \leqq T$.

27. *Recherche des solutions périodiques.* — Posons

$$z_i = Z_i(t, \mu) + \lambda x_i. \tag{66}$$

L'équation (64) devient

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j p_{ij}(t)\, x_j + g_i(Z, t) + \lambda F_i(x, t, \lambda) \tag{67}$$

avec

$$F_i = G_i(x, t) + \lambda J_i(x, t, \lambda), \tag{68}$$

$$G_i(x, t) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk}(t)\, x_j x_k + \sum_j q_{ij}(t)\, x_j, \tag{69}$$

$$\begin{aligned} J_i = {} & \frac{1}{\lambda^3}\left[f_i(Z + \lambda x, t) - f_i(Z, t) - \lambda \sum_j p_{ij} x_j - \frac{\lambda^2}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk} x_j x_k \right] \\ & + \frac{1}{\lambda^2}\left[g_i(Z + \lambda x, t) - g_i(Z, t) - \lambda \sum_j q_{ij} x_j \right]. \end{aligned} \tag{70}$$

Les p_{ijk} et q_{ij} désignent les résultats de la substitution des Z aux z dans les dérivées partielles f_{ijk} et g_{ij}.

Imposons aux x_i de vérifier les conditions $|x_i| < R'$, le nombre positif R' devant être précisé ultérieurement. Les conditions (48) s'écrivent alors

$$\lambda R' < R. \tag{71}$$

De (69) on déduit

$$|G_i| < m R'\left(\frac{m R'}{2} M_2 + N_1 \right), \qquad \left| \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right| < m R' M_2 + N_1. \tag{72}$$

De (70) on déduit

$$J_i = \frac{1}{6} \sum_j \sum_k \sum_h f_{ijkh}(Z + \lambda\theta x, t)\, x_h + \frac{1}{2} \sum_j \sum_h g_{ijh}(Z + \lambda\theta' x, t)\, x_h,$$

θ et θ' étant compris entre zéro et *un*. D'où

$$|J_i| < m R'(M_3 + N_2). \tag{73}$$

Puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_i}{\partial x_j} & = \frac{1}{\lambda^2}\left[f_{ij}(Z + \lambda x, t) - p_{ij} - \lambda \sum_k p_{ijk} x_k \right] + \frac{1}{\lambda}\left[g_{ij}(Z + \lambda x, t) - q_{ij} \right] \\ & = \frac{1}{2} \sum_k \sum_h f_{ijkh}(Z + \lambda\theta x, t)\, x_h + \sum_h g_{ijh}(Z + \lambda\theta' x, t)\, x_h. \end{aligned}$$

D'où

$$\left| \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \right| < m R'(M_3 + N_2). \tag{74}$$

28. *Pour que les z soient périodiques*, il faut et il suffit que les x le soient, c'est-à-dire que l'on ait, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$A_i[T, g(Z, t)] + \lambda A_i(T, F) = 0.$$

Si λ tend vers zéro, on a, à la limite,

$$A_i[T, g(Z, t)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{75}$$

Moyennant quoi l'équation ci-dessus devient

$$A_i(T, F) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{76}$$

Les équations (75) contiennent les paramètres μ_α, car il en est ainsi des p_{ij} et des Z. Nous les appellerons les *équations en* μ et nous supposons qu'elles admettent une solution, que nous substituons aux μ_α, restés jusqu'à présent indéterminés.

29. Nous allons maintenant *construire une solution périodique* du système (67), en appliquant la méthode des *approximations successives*.

La $p^{\text{ième}}$ approximation $x_i^p(t)$ sera définie par la condition d'être périodique et de vérifier les équations (67) quand on y remplace les F_i par

$$F_i^{p-1}(t, \lambda) = F_i(x^{p-1}, t, \lambda) = G_i^{p-1} + \lambda J_i^{p-1}.$$

De plus, nous prenons $x_i^0(t) = 0$.

Supposons que les $x_i^{p-1}(t)$ vérifient (76). Les $x_i^p(t)$ sont donnés par (65), soit

$$x_i^p(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^p y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t) + \lambda\theta_i^p(t), \tag{77}$$

en posant

$$\varphi_i(t) = B_i[t, g(Z, t)], \tag{78}$$

$$\theta_i^p(t) = B_i(t, F^{p-1}) = B_i(t, G^{p-1}) + \lambda B_i(t, J^{p-1}). \tag{79}$$

On a

$$|\varphi_i| < AN_0, \qquad |\theta_i^p| < A\,m\,R'\left[\frac{m\,R'}{2} M_2 + N_1 + \lambda(M_3 + N_2)\right] = \Theta. \tag{80}$$

Nous déterminons les n constantes c_α^p par les conditions

$$A_i(T, F^p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{81}$$

qui sont nécessaires pour que les $x_i^{p+1}(t)$ puissent être périodiques.

30. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\xi_i^p = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha^p y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t), \tag{82}$$

de sorte que $x_i^p = \xi_i^p + \lambda\theta_i^p$. On peut écrire

$$G_i^p = G_i(\xi^p, t) + \lambda P_i(\xi^p, \theta^p),$$

avec

(83) $$P_i = \frac{1}{2}\sum_j \sum_k p_{ijk}(\xi_j\theta_k + \xi_k\theta_j + \lambda\theta_j\theta_k) + \sum_j q_{ij}\theta_j.$$

L'équation (76) devient

(84) $$A_i[T, G(\xi^p, t)] = -\lambda A_i(T, P^p + J^p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A première vue, le premier membre semble être un polynome du second degré en c_α^p. Mais, en réalité, il n'est que du *premier degré*. Le coefficient de $c_\alpha^p c_\beta^p$ dans $G_i(\xi^p, t)$ est

$$K_i(t) = \frac{1}{2}\sum_j \sum_k p_{ijk}(t) y_j^\alpha(t) y_k^\beta(t) = \frac{1}{2}\sum_j \sum_k p_{ijk}(t) \frac{\partial Z_j}{\partial \mu_\alpha}\frac{\partial Z_k}{\partial \mu_\beta}.$$

Je dis que $A_i(T, K) = 0$.

En effet, considérons la solution périodique $Z_i(t, \mu + \lambda\nu)$ du système principal, les ν_α désignant des constantes arbitraires. On peut écrire (67), en y remplaçant g_i par zéro et les x_j par

$$x_j = \frac{1}{\lambda}[Z_j(t, \mu + \lambda\nu) - Z_j(t, \mu)] = \sum_\alpha \frac{\partial Z_j}{\partial \mu_\alpha}\nu_\alpha + O(\lambda).$$

Avec ces x_j, les conditions (76) sont nécessairement vérifiées, quels que soient λ et les ν_α. Or, si λ tend vers zéro, le coefficient de $\nu_\alpha\nu_\beta$ dans G_i a pour limite $K_i(t)$; on a donc bien $A_i(T, K) = 0$, comme nous l'avons annoncé [1].

---

[1] On peut aussi faire une vérification directe. Posons

$$\sum_{k=1}^{m} H_k^i p_{kjh} = P_{jh}^i.$$

Il faut prouver que $\int_0^T \left(\sum_j \sum_h P_{jh}^i y_j^\alpha y_h^\beta\right) dt = 0$. En dérivant $\frac{\partial Z_k}{\partial t} = f_k$, on a

$$\frac{\partial^2 y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta\, \partial t} = \frac{\partial^3 Z_k}{\partial \mu_\alpha\, \partial \mu_\beta\, \partial t} = \sum_j \sum_h p_{kjh} y_j^\alpha y_h^\beta + \sum_j p_{kj}\frac{\partial y_j^\alpha}{\partial \mu_\beta}.$$

D'où

$$X = \sum_j \sum_h P_{jh}^i y_j^\alpha y_h^\beta = \sum_k H_k^i\left(\frac{\partial^2 y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta\, \partial t} - \sum_j p_{kj}\frac{\partial y_j^\alpha}{\partial \mu_\beta}\right),$$

$$\int_0^T X\, dt = \left[\sum_k H_k^i \frac{\partial y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta}\right]_0^T - \int_0^T\left[\sum_k \sum_j \frac{\partial y_j^\alpha}{\partial \mu_\beta}\left(\frac{dH_j^i}{dt} + \sum_k p_{kj} H_k^i\right)\right] dt.$$

L'intégrale du second membre est nulle, d'après (17). D'autre part, les fonctions $\frac{\partial y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta}$ sont périodiques. D'après (19), il en est de même des H_k^i, puisque $i \leq n$ et que le groupe correspondant à la racine $S = 1$ est un groupe simple. Donc, le terme intégré est également nul.

31. L'équation (84) se réduit à

$$\sum_{\alpha=1}^{n} C_i^\alpha c_\alpha^p = \rho_i,$$

avec

$$C_i^\alpha = \sum_{h=1}^{m} \int_0^T H_h^i \left[\sum_{j,k} p_{hjk}(y_j^\alpha \varphi_k + y_k^\alpha \varphi_j) + \sum_j q_{ij} y_j^\alpha \right] dt,$$

$$\rho_i = -L_i - \lambda A_i(T, P^p + J^p),$$

$$L_i = \sum_{h=1}^{m} \int_0^T H_h^i \left[\sum_{j,k} p_{hjk} \varphi_j \varphi_k + \sum_j q_{ij} \varphi_j \right] dt.$$

Écartons le cas exceptionnel où le déterminant $\| C_i^\alpha \|$ serait nul. En résolvant le système linéaire ci-dessus, nous obtenons

$$c_\alpha^p = \gamma_\alpha + \lambda Q_\alpha^p, \tag{85}$$

avec

$$\gamma_\alpha = \sum_{i=1}^{n} E_\alpha^i L_i, \qquad Q_\alpha^p = \sum_{i=1}^{n} E_\alpha^i A_i(T, P^p + J^p).$$

Les E_α^i sont des coefficients constants, résultant des formules de Cramer. Les γ_α sont également des constantes connues. Quant aux Q_α^p, ils contiennent les inconnues c_β^p par l'intermédiaire des x_i^p.

D'après (83), on a

$$\frac{\partial P_i^p}{\partial c_\beta^p} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk}(y_j^\beta \theta_k + y_k^\beta \theta_j).$$

D'où, d'après (80),

$$\left| \frac{\partial A_i(T, P^p)}{\partial c_\beta^p} \right| < A^2 m^3 M_3 Y R' \left[\frac{m R'}{2} M_2 + N_1 + \lambda(M_3 + N_2) \right].$$

Puis

$$\frac{\partial J_i^p}{\partial c_\beta^p} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial J_i}{\partial x_k} y_k^\beta.$$

D'où, d'après (74),

$$\left| \frac{\partial A_i(T, J^p)}{\partial c_\beta^p} \right| < A m^2 Y R' (M_3 + N_2).$$

Si l'on appelle E le plus grand des $| E_\alpha^i |$, on a donc

$$\left| \frac{\partial Q_\alpha^p}{\partial c_\beta^p} \right| < E n A m^2 Y R' \left[A m M_3 \left(\frac{m R'}{2} M_2 + N_1 + \lambda M_3 + \lambda N_2 \right) + M_3 + N_2 \right] = Q. \tag{86}$$

De plus, les dérivées $\frac{\partial Q_\alpha^p}{\partial c_\beta^p}$ sont des fonctions continues des c_β^p. Dès lors, on peut appliquer le *théorème des fonctions implicites* au système (84).

32. Utilisons la démonstration de ce théorème par la méthode des approximations successives [1]. Imposons aux c_α^p la condition d'avoir un module $< C$. On a, d'après (83),

$$|P_i^p| < m^2 M_2 \Theta\left(n YC + AN_0 + \frac{\lambda}{2}\Theta\right) + m N_1 \Theta = P.$$

En multipliant le second membre par A, on a une limite supérieure de $|A_i(T, P^p)|$. D'autre part, on a, d'après (73),

$$|A_i(T, J^p)| < A m R'(M_3 + N_2).$$

Donc,

$$|Q_\alpha^p| < n EA[P + m R'(M_3 + N_2)].$$

Appelons γ le plus grand des $|\gamma_\alpha|$; la condition $|c_\alpha^p| < C$ est entraînée par

$$\gamma + \lambda n EA m\left[R'(M_3 + N_2) + m M_2 \Theta\left(n YC + AN_0 + \frac{\lambda}{2}\Theta\right) + N_1 \Theta\right] < C$$

ou

$$\begin{aligned}(87)\qquad C(1 - \lambda n^2 m^2 EAM_2 Y\Theta) &> \gamma \\ &+ \lambda n m EA\left[R'(M_3 + N_2) + m M_2 \Theta\left(AN_0 + \frac{\lambda}{2}\Theta\right) + N_1 \Theta\right],\end{aligned}$$

ce qui exige

$$(88)\qquad \lambda n^2 m^2 EAM_2 Y\Theta < 1.$$

Ces conditions étant remplies, la convergence des approximations est assurée si l'on a

$$(89)\qquad \lambda Q < 1.$$

Le système (85) admet alors une solution fonction continue de λ et telle que $|c_\alpha^p| < C$; d'où $|x_i^p| < n YC + AN_0 + \lambda\Theta$. La condition $|x_i^p| < R'$ est donc assurée si l'on a

$$(90)\qquad n YC + AN_0 + \lambda\Theta < R'.$$

33. Examinons maintenant la convergence des x_i^p, c_α^p. Posons

$$u_i^p = x_i^p - x_i^{p-1}, \qquad v_\alpha^p = c_\alpha^p - c_\alpha^{p-1}$$

et supposons $|u_i^p| < U_p$ et $|v_\alpha^p| < V_p$. On a

$$u_i^{p+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^{p+1} y_i^\alpha(t) + \lambda(\theta_i^{p+1} - \theta_i^p).$$

Or,

$$\theta_i^{p+1} - \theta_i^p = B_i(t, F^p - F^{p-1}).$$

---

[1] *Cf.* VALIRON, *Théorie des fonctions*, n° 122.

Les fonctions F_k ont des dérivées premières continues par rapport aux x_j. D'après (68), (72) et (74), leurs modules sont bornés par

$$a = m R' M_2 + N_1 + \lambda m R' (M_3 + N_2); \tag{91}$$

on a donc

$$| F_k^p - F_k^{p-1} | < a U_p.$$

D'où

$$| \theta_i^{p+1} - \theta_i^h | < A a U_p.$$

Et l'on peut prendre

$$U_{p+1} = n Y V_{p+1} + \lambda A a U_p. \tag{92}$$

La formule (85) nous donne $v_\alpha^{p+1} = \lambda(Q_\alpha^{p+1} - Q_\alpha^p)$. Or,

$$| P_i^{p+1} - P_i^p | < \sum_{\beta=1}^{n} \left| \frac{\partial P_i}{\partial v_\beta} \right| V_{p+1} + \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right| A a U_p.$$

On a

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial v_\beta} \right| < m^2 M_2 Y \Theta.$$

Puis

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = \sum_k p_{ijk} (\xi_k + \lambda \theta_k) + q_{ij};$$

d'où

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right| < m M_2 R' + N_1.$$

Donc,

$$| P_i^{p+1} - P_i^p | < n m^2 M_2 Y \Theta V_{p+1} + m (m M_2 R' + N_1) A a U_p.$$

Puis, d'après (74),

$$| J_i^{p+1} - J_i^p | < m^2 R' (M_3 + N_2) U_{p+1}.$$

On peut donc prendre

$$V_{p+1} = \lambda (b V_{p+1} + c U_p + d U_{p+1}), \tag{93}$$

avec

$$b = A n m^2 M_2 Y \Theta, \qquad c = m A^2 a (m M_2 R' + N_1), \qquad d = A m^2 R' (M_3 + N_2). \tag{94}$$

De (92) et (93), on tire

$$U_{p+1} = \lambda U_p \frac{A a (1 - \lambda b) + n c Y}{1 - \lambda b - \lambda d n Y} < \lambda U_p \frac{A a + n c Y}{1 - \lambda b - \lambda d n Y}.$$

La convergence uniforme est assurée si l'on a

$$\lambda (A a + n c Y + b + d n Y) < 1. \tag{95}$$

34. En définitive, le système (64) admet certainement une solution périodique si les inégalités (71), (87), (88), (89), (90), (95) sont toutes vérifiées.

D'après (87), C doit être $>\gamma$; prenons $C = 2\gamma$. Puis $R' = AN_0 + 3nY\gamma$. Les inégalités (87) et (90) deviennent

$$(96)\qquad \lambda nm EA\left[nmM_2 Y\Theta + R'(M_3 + N_2) + (mM_2 AN_0 + N_1)\Theta + \frac{\lambda}{2} mM_2\Theta^2\right] < \gamma.$$

$$(97)\qquad \lambda\Theta < nY\gamma.$$

Le nombre λ doit maintenant vérifier les inégalités (71), (88), (89), (95), (96), (97). Il est évident qu'il suffit pour cela de prendre λ assez petit. Donc,

THÉORÈME. — *Le système* (64) *admet certainement une solution périodique si* λ *est inférieur à une certaine limite non nulle* λ_1.

La démonstration précédente nous donne le moyen de calculer cette solution avec une approximation théoriquement illimitée. Si l'on s'en tient à la *première approximation,* on a

$$(98)\qquad x_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t),$$

les φ_i étant donnés par (78) et les γ_α par le système linéaire

$$(99)\qquad A_i[T, G(\xi, t)] = 0, \qquad \xi_k = \sum_{\alpha=1}^{n} \gamma_\alpha y_k^\alpha + \varphi_k.$$

35. *Stabilité.* — Pour que la solution périodique soit stable, il faut et il suffit (n° 23) que les décréments du système associé à (64) aient tous leur module < 1. Ce système s'écrit

$$(100)\qquad \frac{dy_i}{dt} = \sum_j r_{ij}(t) y_j,$$

avec

$$r_{ij}(t) = f_{ij}(Z + \lambda x, t) + \lambda g_{ij}(Z + \lambda x, t),$$

les x_k étant les fonctions périodiques précédemment calculées. Cette formule s'écrit

$$r_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \lambda s_{ij}(t) + O(\lambda^2),$$

avec

$$(101)\qquad s_{ij}(t) = \sum_k p_{ijk}(t) x_k(t) + q_{ij}(t),$$

les $x_k(t)$ étant réduits à la première approximation, donnée par (98).

Pour $\lambda = 0$, l'un des décréments $S_1 = 1$; les autres ont un module < 1.

Comme les $r_{ij}(t)$ sont des fonctions continues de λ, il en est de même des coefficients de l'équation en S, d'après les formules (7) et la convergence uniforme des a_{ij}. Il s'ensuit que, pour λ très petit, on a n décréments voisins de *un*, soit $1+\lambda\sigma_h$, et m-n décréments voisins des autres S_j, donc de module <1, si λ est assez petit.

Or, si $\sigma_h = \alpha_h + i\beta_h$, on a

$$|1+\lambda\sigma_h|^2 = 1 + 2\lambda\alpha_h + \lambda^2(\alpha_h^2+\beta_h^2).$$

La condition cherchée est donc $\alpha_h < 0$; *tous les* σ_h *doivent avoir une partie réelle négative*, sous réserve *que* λ *soit assez petit.*

36. Voyons maintenant comment on peut calculer ces σ_h. Pour $\lambda = 0$, le système (100) admet la solution périodique $u_i(t) = \sum_{h=1}^{n} \rho_h y_i^h(t)$, les ρ_h désignant des coefficients constants arbitraires. Pour λ infiniment petit, il admet la solution voisine $y_i(t) = u_i(t) + \lambda v_i(t) + o(\lambda^2)$. Les fonctions v_i vérifient le système

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)v_j + \psi_i(t),$$

avec

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{m} s_{ij}(t)u_j(t).$$

L'intégrale générale de ce système est

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^{m} y_i^j(t)[a_j + K_j(t)], \qquad K_j(t) = \Lambda_j(t, \psi). \tag{102}$$

Écrivons que $y_i(T) = (1+\lambda\sigma)y_i(0)$, c'est-à-dire

$$u_i(T) + \lambda v_i(T) = (1+\lambda\sigma)[u_i(0) + \lambda v_i(0)] + O(\lambda^2).$$

En tenant compte de $u_i(T) = u_i(0)$, divisant par λ et faisant tendre λ vers zéro, il vient

$$v_i(T) = \sigma u_i(0) + v_i(0),$$

ou, d'après (102),

$$\sum_{j=1}^{m} S_j y_i^j(0)[a_j + K_j(T)] - \sigma u_i(0) - \sum_{j=1}^{m} y_i^j(0)a_j = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que $S_j = 1$ pour $j \leq n$ et posant $a_j(S_j - 1) = b_j$ pour $j > n$,

$$\sum_{j=n+1}^{m} b_j y_i^j(0) + \sum_{j=1}^{m} S_j K_j(T) y_i^j(0) - \sigma \sum_{\alpha=1}^{n} \rho_\alpha y_i^\alpha(0) = 0.$$

Ceci s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n}[K_j(T)-\sigma\rho_\alpha]y_i^\alpha(o)+\sum_{j=n+1}^{m}[b_j+S_jK_j(T)]y_i^j(o)=o.$$

Le déterminant $\|y_i^j(o)\|$ étant $\neq o$, on a

$$(103)\qquad K_j(T)-\sigma\rho_j=o,\qquad j\leqq n;\qquad b_j+S_jK_j(T)=o,\qquad j>n.$$

D'autre part,

$$K_j(T)=\sum_{\alpha=1}^{n}\rho_\alpha K_j^\alpha,$$

avec

$$K_j^\alpha=\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\int_0^T H_k^j(t)s_{kh}(t)y_h^\alpha(t)\,dt$$

ou, d'après (101) et (98),

$$K_j^\alpha=\sum_k\sum_h\int_0^T H_k^j(t)\left[\sum_i p_{khi}(t)\left(\sum_{\beta=1}^{n}\gamma_\beta y_i^\beta+\varphi_i\right)+q_{kh}(t)\right]y_h^\alpha(t)\,dt.$$

Le coefficient de γ_β est nul (n° 30). Donc

$$(104)\qquad K_j^\alpha=\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\int_0^T H_k^j(t)\left[\sum_i p_{khi}(t)\varphi_i(t)+q_{kh}(t)\right]y_h^\alpha(t)\,dt.$$

Portant dans (103), il vient

$$\sum_{h=1}^{n}\rho_hK_j^h(T)-\sigma\rho_j=o\qquad(j=1,2,\ldots,n).$$

Éliminons les ρ_h

$$(105)\qquad \begin{vmatrix} K_1^1(T)-\sigma & K_1^2(T) & \ldots & K_1^n(T)\\ K_2^1(T) & K_2^2(T)-\sigma & \ldots & K_2^n(T)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ K_n^1(T) & K_n^2(T) & \ldots & K_n^n(T)-\sigma \end{vmatrix}=o.$$

Telle est l'équation déterminant les σ_h; nous l'appellerons *l'équation de stabilité.*

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que toutes ses racines aient leur partie réelle négative, sous réserve *que λ soit assez petit.*

Remarque. — Supposons que *chaque fonction perturbatrice g_k soit la somme de plusieurs fonctions perturbatrices partielles* et tenons-nous en à la première approximation.

L'équation (75) peut être obtenue en additionnant les équations analogues correspondant aux différentes fonctions perturbatrices partielles. De même, la formule (104) nous montre que *chaque* K_j^α *peut être obtenu en additionnant les* K_j^α *correspondant aux différentes fonctions perturbatrices partielles*. Cela résulte de ce que cette formule contient φ_i et g_{kh} linéairement et de ce que la formule (78) est également linéaire par rapport aux g_k.

37. La condition de stabilité étant supposée remplie, appelons (Γ_0) la trajectoire fermée correspondant à $\lambda = 0$. Elle est parcourue par le point P_0, de coordonnées $Z_i(t, \mu)$. Appelons A_0 la position de P_0 pour $t = 0$.

Supposons maintenant $\lambda > 0$ et suffisamment petit. Nous avons une trajectoire fermée (Γ_λ), parcourue périodiquement par le point P_λ. Appelons A_λ la position de P_λ pour $t = 0$. Lorsque λ croît à partir de zéro, A_λ part de A_0 et décrit un certain arc A_0H.

Autour de A_λ existe un certain domaine de stabilité (Δ_λ), contenant le domaine linéaire (D_λ) du n° 23.

Supposons maintenant que λ tende vers zéro. Les n décréments $1 + \lambda\sigma_h$ tendent vers *un*. Donc (n° 23), le domaine (D_λ) se réduit, à la limite, au point A_0. Mais, on peut se demander quelle est la limite (Δ_0) du domaine complet (Δ_λ). Nous ne pouvons pas répondre à cette question d'une manière précise. Examinons seulement si (Δ_0) peut contenir un arc de (Γ_0) comprenant A_0. Soit B_0 un point de cet arc. Faisons partir, au temps zéro, M de B_0 et P de A_λ, en supposant λ assez petit pour que B_0 appartienne à (Δ_λ). Nous savons que la distance MP tend vers zéro pour $t = +\infty$. Faisons maintenant tendre λ vers zéro, en laissant B_0 fixe. A la limite, A_λ vient en A_0. La distance MP tend encore vers zéro pour $t = +\infty$. Ceci n'est possible que si B_0 appartient au domaine *restreint* de stabilité du point A_0. Il en résulte que ce domaine restreint contiendrait l'arc ci-dessus.

Il est probable que ceci n'a pas lieu en général; mais, nous n'en sommes pas sûrs. Il y a toutefois un cas où nous avons cette certitude; c'est le cas où les fonctions principales sont indépendantes de t (n° 37). En effet, dans ce cas, les points M et P décrivent tous deux périodiquement la trajectoire (Γ_0). Leur distance est fonction périodique de t et par conséquent ne peut pas tendre vers zéro.

38. *Cas où les fonctions principales sont indépendantes de t.* — Supposons qu'il existe *une seule solution périodique* $Z_i(t)$, à un changement près de l'origine des t. On en déduit la solution plus générale $Z_i(t + \mu)$, μ désignant une constante arbitraire. On rentre dans le cas du n° 26, avec $n = 1$.

Le système linéaire associé admet la solution périodique $Z'_i(t + \mu)$. L'équation en S admet la racine simple $S = 1$.

Si l'on change t en $t - \mu$, les $Z_i(t + \mu)$ deviennent $Z_i(t)$; les fonctions $p_{ij}(t, \mu)$ du n° 27 deviennent les fonctions $p_{ij}(t)$ obtenues en remplaçant les z_i par les

$Z_i(t)$ dans les $f_{ij}(z)$; *elles ne contiennent pas* μ. Les $g_i(Z, t)$ des équations (67) deviennent $g_i[Z(t), t-\mu]$. Les équations (75) se réduisent à la suivante :

$$(106) \qquad \sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t) g_k[Z(t), t-\mu]\,dt = 0.$$

L'équation (105) se réduit à $\sigma = K_1^1(T)$ ou, d'après (104),

$$\sigma = \sum_k \sum_h \int_0^T H_k^1(t)\left[\sum_i p_{khi}(t)\varphi_i(t) + g_{kh}(Z, t-\mu)\right] Z'_h\,dt.$$

Mais, on a

$$\frac{d(p_{ki})}{dt} = \sum_h p_{kih} Z'_h.$$

Donc,

$$(107) \qquad \sigma = \sum_k \sum_i \int_0^T H_k^1(t)\varphi_i(t)\,d(p_{ki}) + \sum_k \sum_h \int_0^T H_k^1(t) g_{kh}(Z, t-\mu)\,dZ_h.$$

La condition de stabilité est que le nombre σ, que nous appellerons *indice de stabilité*, soit < 0.

Remarque. — Si chaque g_k est la somme de plusieurs fonctions partielles, *l'indice de stabilité est la somme des indices partiels* correspondant aux différents termes de g_k. Cela résulte de la remarque du n° 36.

39. *Cas où les fonctions principales et la période dépendent d'un paramètre.* — Supposons que les f_i dépendent d'un certain paramètre α, tout en restant *indépendantes de t*. Supposons en outre que le système principal admette une solution périodique $Z_i(t, \alpha)$, quelle que soit la valeur attribuée à ce paramètre. La période de cette solution est une fonction déterminée $T = \varphi(\alpha)$, que nous supposons continue et à dérivée continue.

Voyons d'abord les conséquences analytiques résultant de ces hypothèses.

Les $Z_i(t, \alpha)$ étant considérées comme des fonctions des variables indépendantes t et α, posons $u_i = \frac{\partial Z_i}{\partial \alpha}$. En dérivant $\frac{\partial Z_i}{\partial t} = f_i(Z, \alpha)$ par rapport à α, on a

$$u'_i(t) = \sum_j p_{ij}(t) u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}.$$

D'où

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^{m} [a_j + A_j(t)] y_i^j(t),$$

les $A_j(t)$ étant obtenus par la formule (24), en remplaçant f_k par $\frac{\partial f_k}{\partial \alpha}$. Dérivons l'identité $Z_i(T, \alpha) = Z_i(0, \alpha)$ par rapport à α :

$$Z'_i(T)\varphi'(\alpha) + u_i(T) = u_i(0).$$

En tenant compte de l'expression ci-dessus de $u_i(t)$, ceci s'écrit

$$\sum_{j=1}^{m} y_i^j(0)a_j(S_j-1)+\sum_{j=1}^{m} A_j(T)S_j y_i^j(0)+\varphi'(\alpha)Z_i'(0)=0.$$

Convenons que $y_i^1(t)$ est $Z_i'(t)$ de sorte que $S_1=1$. Nous avons

$$y_i^1(0)[A_1(T)+\varphi'(\alpha)]+\sum_{j=2}^{m} y_i^j(0)[a_j(S_j-1)+S_jA_j(T)]=0.$$

On en conclut que tous les crochets sont nuls, en particulier le premier. On a donc l'identité

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)\frac{\partial f_k}{\partial \alpha}\,dt+\varphi'(\alpha)=0. \tag{108}$$

40. Supposons maintenant que les fonctions perturbatrices $g_i(z, t)$ aient une période déterminée $T=\varphi(\alpha)$. Supposons d'autre part que la valeur numérique α' attribuée à α dans les fonctions $f_i(z, \alpha)$ soit voisine de α, de telle sorte que la période $T'=\varphi(\alpha')$, que nous appellerons la *période propre* du système principal, soit voisine de T. Posons $\alpha'=\alpha+\lambda\beta$. Les équations (64) peuvent s'écrire

$$\frac{dz_i}{dt}=f_i(x, \alpha)+\lambda[g_i(z, t)+h_i(z)],$$

avec

$$h_i(z)=\frac{f_i(z, a+\lambda\beta)-f_i(z, \alpha)}{\lambda}.$$

A ce système nous pouvons appliquer la théorie générale précédente, les fonctions perturbatrices étant g_i+h_i, de période T par rapport à t. L'équation (106) s'écrit

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)[g_k(Z, t-\mu)+h_k(z)]\,dt=0.$$

C'est l'équation en μ, qui *détermine un certain nombre de solutions admettant la période* T *des fonctions perturbatrices* $g_k(z, t)$.

Si λ est très petit, on a approximativement $h_k(Z)=\beta\frac{\partial f_k}{\partial\alpha}$. En tenant compte de (108), l'équation ci-dessus s'écrit alors *approximativement*

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)\,g_k(Z, t-\mu)\,dt=\beta\varphi'(\alpha).$$

Or, si l'on pose $\Delta T=T'-T$, on a *approximativement* $\Delta T=\lambda\beta\varphi'(\alpha)$. Donc, l'équation précédente s'écrit

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^T H_k^1(t)g_k(Z, t-\mu)\,dt=\frac{\Delta T}{\lambda}. \tag{109}$$

41. Supposons maintenant *que les fonctions perturbatrices g_k soient indépendantes de t*. Dans ce cas, l'équation (109) ne contient plus l'inconnue μ. Par contre, la période T du n° 40 est indéterminée. Nous pouvons alors la considérer comme une inconnue. La théorie précédente nous prouve que *le système* (64) *admet une solution périodique* dont la période s'obtient en ajoutant ΔT à la période propre T'. La formule (109) nous donne, à $o(\lambda^2)$ près, la *perturbation de période apportée par les fonctions perturbatrices g_k*.

42. L'*indice de stabilité* σ est donné par la formule (107). D'après la remarque du n° 38, c'est la somme des indices partiels correspondant aux fonctions g_i et aux fonctions $h_i = \beta \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} + o(\lambda)$. Or, le second de ces indices partiels est identiquement nul. En effet, la solution $Z_i(t, \alpha)$ étant périodique quel que soit α, l'équation en S admet la racine $S = 1$ quel que soit α. Comme cette racine vaut asymptotiquement $1 + \lambda\sigma$, on a nécessairement $\sigma = 0$.

Il résulte de là que *l'indice de stabilité peut être calculé en tenant compte uniquement des fonctions perturbatrices g_i*.

Remarque. — On peut supposer que les f_i du n° 39 dépendent de t, mais que la solution périodique Z dépend, comme au n° 26, de n paramètres μ_β. On a, dans ce cas, n équations analogues à (109) et l'équation de stabilité (105). Bien entendu, les y_i^β sont les $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_\beta}$, comme au n° 26. La démonstration ci-dessus ne subit aucune modification.

43. *Couplage de plusieurs systèmes*. — Considérons n systèmes (Σ_1), (Σ_2), ..., (Σ_n) analogues à celui du n° 39. Réunissons-les en un système unique (Σ) par l'introduction des fonctions perturbatrices $g_i(z, t)$ dépendant à la fois des coordonnées de tous les (Σ_j) et admettant la période T par rapport à t. Nous dirons que les (Σ_j) sont *couplés* par ces fonctions.

Les coordonnées z_i seront numérotées de telle manière que pour

$$s'_j = s_{j-1} + 1 \leq i \leq s_j,$$

z_i soit une coordonnée de (Σ_j). Le nombre des coordonnées de (Σ_j) est donc $s_j - s_{j-1}$. Nous convenons bien entendu que $s_0 = 0$. Les indices vérifiant la double inégalité ci-dessus constitueront *le groupe* (j).

La fonction principale f_i dépend uniquement des z_k dont l'indice appartient au même groupe que i. Elle dépend aussi du paramètre α_j si i appartient au groupe (j). La solution périodique principale $Z_i(t, \alpha_j)$ a la période $T_j = \varphi_j(\alpha_j)$.

Choisissons les α_j de telle manière que l'on ait $\frac{T_j}{T} = \frac{N}{N_j}$, N et les N_j désignant des nombres entiers premiers entre eux. Supposons maintenant que les α_j

prennent des valeurs $\alpha'_j = \alpha_j + \lambda\beta_j$ voisines des précédentes. Nous appellerons *période propre* de (Σ_j) la période $T'_j = \varphi_j(\alpha'_j)$, voisine de T_j. Nous posons

$$T'_j = T_j(1 + \lambda\varepsilon_j), \tag{110}$$

de sorte que

$$\varepsilon_j \varphi_j(\alpha_j) = \beta_j \varphi'_j(\alpha_j) + O(\lambda).$$

44. Faisons le changement de variable $t = N\theta$ et posons

$$h_i(z) = \frac{1}{\lambda}[f_i(z, \alpha'_j) - f_i(z, \alpha_j)] = \beta_j \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} + O(\lambda),$$

l'indice i appartenant au groupe (j). Les équations différentielles deviennent

$$\frac{dz_i}{d\theta} = N f_i(z, \alpha_j) + \lambda N[g_i(z, N\theta) + h_i(z)]. \tag{111}$$

Les fonctions entre crochets *jouent le rôle de fonctions perturbatrices pour le système* (Σ); *elles admettent* évidemment *la période* T *par rapport à* θ.

Le système principal admet la *solution périodique principale* $Z_i(N\theta + \mu_j, \alpha_j)$, qui admet bien la période T par rapport à θ, car si θ augmente de T, $N\theta$ augmente de $NT = N_j T_j$, c'est-à-dire d'un multiple de la période T_j de $Z_i(t + \mu_j, \alpha_j)$.

Le système (111) *rentre donc dans le type du système* (64) et nous pouvons lui appliquer les résultats obtenus aux n^os 26 à 36.

Le système linéaire associé se décompose en n systèmes partiels, correspondant aux différents (Σ_j). Les fonctions $p_{ik}(t)$ et $p_{ikh}(t)$ ne sont $\neq 0$ que si les indices i, k, h appartiennent au même groupe. Il en est de même des $y_i^k(t)$ et des $H_i^k(t)$. Nous conviendrons de ranger les y_i^k du groupe (j) par exemple, de telle manière que, pour $k = s_j$, on ait $y_i^k = Z'_i(t)$. Bien entendu, dans toutes ces fonctions, t doit être remplacé par $N\theta + \mu_j$, si les indices appartiennent au groupe (j).

45. A chaque (Σ_j) correspond une équation en μ, qui s'écrit, en divisant par N,

$$\sum_{k=s'_j}^{s_j} \int_0^T H_k^{s_j}(t + \mu_j)[g_k(Z, t) + h_k(Z)]\, d\theta = 0.$$

Le terme $h_k(Z)$ dépend seulement des Z_i d'indice appartenant au groupe (j), il admet la période T_j par rapport à t, de même que $H_k^{s_j}$. L'intégrale correspondante peut se calculer en prenant t pour variable d'intégration; elle vaut, en tenant compte de la périodicité ci-dessus, puis de (109) et (110),

$$-\frac{N_j}{N}\int_0^{T_j} H_k^{s_j}(t + \mu_j) h_k(Z)\, dt = -T\varepsilon_j.$$

L'équation en μ s'écrit donc

$$(112)\qquad \sim \sum_{k=s'_j}^{s_j} \int_0^T \mathrm{H}_k^{'j}(\mathrm{N}\theta + \mu_j)\, g_k(\mathrm{Z}, \mathrm{N}\theta)\, d\theta = \mathrm{T}\varepsilon_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Elle contient tous les μ_h, qui figurent dans les g_k. On obtient ainsi le système des *équations en* μ.

46. Pour la *stabilité*, on écrit l'équation (105), chaque K_j^α se calculant par la formule (104). Les indices j et α doivent être choisis parmi les s_r; prenons par exemple $j = s_r$ et $\alpha = s_\beta$. Comme au n° 42, le terme $h_k(\mathrm{Z})$ de la fonction perturbatrice totale ne donne rien. Remarquons maintenant que, d'après (111), les fonctions f et g doivent être multipliées par N; donc aussi p_{khi} et q_{kh}, ainsi que φ_i, d'après (78). D'autre part, l'indice k doit appartenir au groupe (r) et h doit appartenir au groupe (β). Le terme en φ_i n'existe que si i, k, h appartiennent au même groupe, ce qui n'est possible que si $r = \beta$, donc $j = \alpha$. On a dès lors

$$(113)\qquad \mathrm{K}_j^\alpha = \mathrm{NA}_j^\alpha, \quad \text{si } j \neq \alpha; \qquad \mathrm{K}_j^j = \mathrm{NA}_j^j + \mathrm{N}^2\mathrm{A}'_j,$$

en posant

$$(114)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_j^\alpha &= \sum_{k=s'_r}^{s_r} \sum_{h=s'_\beta}^{s_\beta} \int_0^T \mathrm{H}_k^j(\mathrm{N}\theta + \mu_r)\, y_h^\alpha(\mathrm{N}\theta + \mu_\beta)\, q_{kh}(\mathrm{N}\theta)\, d\theta, \\ \mathrm{A}'_j &= \sum_{k=s'_r}^{s_r} \sum_{h=s'_r}^{s_r} \sum_{i=s'_r}^{s_r} \int_0^T p_{khi}(\mathrm{N}\theta + \mu_r)\varphi_i(\mathrm{N}\theta)\mathrm{H}_k^j(\mathrm{N}\theta + \mu_r)\, y_h^j(\mathrm{N}\theta + \mu_r)\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

Portons dans l'équation (105), en posant $\sigma = \mathrm{N}\sigma'$; nous obtenons

$$(115)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{NA}'_1 + \mathrm{A}_1^1 - \sigma' & \mathrm{A}_1^2 & \ldots & \mathrm{A}_1^n \\ \mathrm{A}_2^1 & \mathrm{NA}'_2 + \mathrm{A}_2^2 - \sigma' & \ldots & \mathrm{A}_2^n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_n^1 & \mathrm{A}_n^2 & \ldots & \mathrm{NA}'_n + \mathrm{A}_n^n - \sigma' \end{vmatrix} = 0.$$

47. Les T'_j et T étant donnés, les rapports $\frac{\mathrm{T}'_j}{\mathrm{T}}$ peuvent être approchés autant qu'on le veut et d'une infinité de manières, par des nombres commensurables. On peut donc se demander si le problème du couplage admet une infinité de solutions, quelles que soient les valeurs des T'_j et T. En réalité, il n'en est rien, parce que *le nombre* N *ne doit pas dépasser une certaine limite*.

Reportons-nous en effet à la démonstration des n^{os} 27 à 34, en l'appliquant au système (111), dans le cas où N est très grand.

Les nombres appelés M_i, N_i sont tous multipliés par N. D'après (78) et (79), il en est de même des φ_i et des θ_i^p. Les p_{hjk} et q_{ij} le sont également. On en conclut (n° 31) que $\mathrm{C}_i^\alpha = \mathrm{O}(\mathrm{N}^2)$; d'où $\mathrm{E}_\alpha^i = \mathrm{O}(\mathrm{N}^{-2})$ et $\mathrm{E} = \mathrm{O}(\mathrm{N}^{-2})$. Or $\mathrm{L}_i = \mathrm{O}(\mathrm{N}^3)$;

donc $\gamma_\alpha = O(N)$ et par suite $\gamma = O(N)$; d'où (n° 34) $R' = O(N)$. D'après (71), on en conclut que λ vaut au plus $O(N^{-1})$. De (80) on déduit ensuite $\Theta = O(N^3)$. Portant dans (88), on a $\lambda = O(N^{-2})$. De (86) on déduit $Q = O(N^2)$ et (89) donne de nouveau $\lambda = O(N^{-2})$. On a ensuite (n° 33) : $a = O(N^2)$, $b = O(N^4)$ $c = O(N^4)$, $d = O(N^2)$. Portant dans (95), on obtient $\lambda = O(N^{-4})$. Enfin (96) et (97) donnent $\lambda = O(N^{-2})$.

En définitive, on voit que la limite supérieure $\lambda_1 = O(N^{-4})$ peut devenir, si N est trop grand, inférieure à la valeur numérique attribuée à λ, auquel cas notre démonstration est en défaut.

Signalons encore que, pour N très grand, les racines de l'équation (115) sont asymptotiquement $\sigma'_i = NA'_i$; d'où $\sigma_i = N^2 A'_i$. En se reportant au n° 35, on en conclut d'abord que les A'_i doivent être < 0; puis, si cette condition est remplie, que la limite imposée à λ par la stabilité vaut $O(N^{-2})$. Elle est donc très petite si N est très grand.

48. *Méthode de la variation des constantes.* — Revenons au système (64) en supposant les f_i *indépendantes de t.* Admettons *que l'on connaisse l'intégrale générale du système principal*

$$z_i = \varphi_i(t + y_m, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \tag{116}$$

les y_i désignant les constantes d'intégration. Supposant maintenant $\lambda \neq 0$, faisons le changement de variables

$$z_i = \varphi_i(\theta, y_1, \ldots, y_{m-1}), \qquad t + y_m = \theta. \tag{117}$$

La nouvelle variable indépendante est θ; les nouvelles fonctions inconnues sont les y_i. Les nouvelles équations s'écrivent

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\,d\theta + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\,dy_j = [f_i(z) + \lambda g_i(z, \theta - y_m)]\,(d\theta - dy_m)$$

ou, en tenant compte de $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta} = f_i$,

$$(f_i + \lambda g_i)\,dy_m + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\,dy_j = \lambda g_i\,d\theta.$$

D'où l'on tire

$$\frac{dy_i}{d\theta} = \lambda G_i(y, \theta, \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{118}$$

Dans le cas général, les φ_i ne sont périodiques par rapport à θ que pour certaines valeurs particulières de $y_1, \ldots, y_{m-1}$, par exemple zéro. Donc, les G_i ne sont pas périodiques par rapport à θ, quand on suppose que les y_j ont des valeurs constantes quelconques. *Le système* (118) *ne rentre pas dans la catégorie du système* (64).

Supposons maintenant que *l'intégrale générale* (116) *admette la période* T. Dans ce cas, le système (118) est de la forme (64), avec cette particularité que *les fonctions principales f_i sont nulles*. On y peut prendre $y_i^j(t) = 0$ si $j \neq i$ et $y_i^i(t) = 1$. On a alors $H_i^j = 0$ si $j \neq i$ et $H_i^i(t) = 1$. Les fonctions $Z_i(t)$ sont des constantes arbitraires μ_i. Tous les décréments sont égaux à *un*. Les équations (75) deviennent

$$\int_0^T g_k(\mu, t)\, dt = 0. \tag{119}$$

La formule (104) devient

$$K_j^\alpha(T) = \int_0^T g_{j\alpha}(\mu, t)\, dt. \tag{120}$$

En portant dans (105), on obtient *l'équation de stabilité*.

Si toutes ses racines sont simples, le domaine de stabilité reste fini quand λ tend vers zéro, comme on l'a vu au n° 23.

On retrouve exactement les résultats de l'étude directe faite dans un des Mémoires précités.

La méthode de variation des constantes que nous venons de signaler constitue une généralisation de la méthode employée dans ma théorie générale de la synchronisation des oscillateurs harmoniques.

49. *Cas $m = 2$.* — Supposons les *fonctions principales indépendante de t*. Le système linéaire associé admet pour solutions fondamentales la solution périodique $Z_i'(t)$ et la solution $U_i(t)$ donnée par les formules

$$U_1(t) = Z_1'(t) \int \frac{p_{12}(t) H(t)}{Z_1'^2(t)}\, dt, \qquad U_2(t) = \frac{H(t) + Z_2'(t) U_1(t)}{Z_1'(t)}, \tag{121}$$

$$H(t) = e^{\Delta(t)}, \qquad \Delta(t) \int_0^t [p_{11}(t) + p_{22}(t)]\, dt. \tag{122}$$

L'intégrale générale est

$$x_i(t) = a Z_i'(t) + b U_i(t) \qquad (i = 1, 2).$$

Formons l'équation en S. Les équations $x_i(T) = S x_i(0)$ s'écrivent

$$a(1 - S) Z_i'(0) + b[U_i(T) - S U_i(0)] = 0.$$

La racine $S = 1$ saute aux yeux. L'autre est donnée par

$$Z_1'(0)[U_2(T) - S U_2(0)] - Z_2'(0)[U_1(T) - S U_1(0)] = 0,$$

soit

$$S = H(T) = e^{\Delta(T)}. \tag{123}$$

La *condition de stabilité* est donc (¹)

(124) $$\Delta(T) < 0.$$

On a ensuite

$$y_i^1(t) = Z_i'(t), \qquad y_i^2(t) = U_i(t) \qquad (i = 1 \text{ et } 2);$$

en choisissant la constante d'intégration de la première formule (121) de telle manière que l'on ait

(125) $$U_1(t+T) = SU_1(t).$$

L'équation (109) et la formule (107) deviennent

(126) $$\int_0^T [U_2(t)g_1(Z, t-\mu) - U_1(t)g_2(Z, t-\mu)]\, e^{-\Delta(t)}\, dt = \frac{\Delta T}{\lambda},$$

(127) $$\sigma = \int_0^T [(U_2 p'_{11} - U_1 p'_{21})\varphi_1 + (U_2 p'_{12} - U_1 p'_{22})\varphi_2 + (U_2 q_{11} - U_1 q_{21})Z'_1 + (U_2 q_{12} - U_1 q_{22})Z'_2]\, e^{-\Delta(t)}\, dt,$$

avec

(128) $$\begin{cases} \varphi_i = Z_i' A_1(t) + U_i\left[A_2(t) + \dfrac{S}{1-S} A_2(T)\right], \\ A_1(t) = \displaystyle\int_0^t (U_2 g_1 - U_1 g_2) e^{-\Delta}\, dt, \qquad A_2(t) = \displaystyle\int_0^t (-Z'_2 g_1 + Z'_1 g_2) e^{-\Delta}\, dt. \end{cases}$$

La *première approximation de la solution périodique* est donnée par (nº 34)

(129) $$x_i(t) = \gamma Z_i'(t) + \varphi_i(t),$$

la constante γ se calculant par l'équation

$$\int_0^T (A x_1^2 + 2B x_1 x_2 + C x_2^2 + 2D x_1 + 2E x_2)\, e^{-\Delta}\, dt = 0,$$

avec

$$A = U_2 p_{111} - U_1 p_{211}, \qquad B = U_2 p_{112} - U_1 p_{212}, \qquad C = U_2 p_{122} - U_1 p_{222},$$
$$D = U_2 q_{11} - U_1 q_{21}, \qquad E = U_2 q_{12} - U_1 q_{22}.$$

Nous savons que le coefficient de γ^2 est nul, il reste, en tenant compte de (127),

(130) $$2\gamma\sigma = -\int_0^T (A\varphi_1^2 + 2B\varphi_1\varphi_2 + C\varphi_2^2 + 2D\varphi_1 + 2E\varphi_2)\, e^{-\Delta}\, dt.$$

(¹) On peut aussi l'obtenir en appliquant la théorie de H. Poincaré à l'équation différentielle

$$f_2\, dx_1 - f_1\, dx_2 = 0.$$