J. COLMEZ

Sur certains systèmes triples orthogonaux paratingents

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 71-99
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__71_0>

SUR

CERTAINS SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX PARATINGENTS

PAR M. J. COLMEZ.

INTRODUCTION.

1. Les résultats classiques de la théorie des systèmes triples orthogonaux sont obtenus en supposant l'existence, sur les surfaces considérées, de dérivées d'ordre plus ou moins élevé.

C'est ainsi que, pour démontrer le théorème de Dupin, on suppose que $M(u, v, w)$ possède les dérivées croisées $\frac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v}$, ..., si $M(u, v, w) = M$ symbolise la transformation orthogonale

$$x(u, v, w) = x, \qquad y(u, v, w) = y, \qquad z(u, v, w) = z,$$

les surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, formant le système triple envisagé; la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces $u = \text{const.}$ forment une famille de Lamé, c'est-à-dire l'une des familles d'un système triple orthogonal, s'exprime par une équation aux dérivées partielles du troisième ordre; pour démontrer que toute solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\mathrm{Grad}(u)}\right)^2} = \frac{1}{S(M, u)},$$

où $S(M, u) = 0$ est l'équation d'une sphère dépendant du paramètre u, définit une famille de Lamé, on peut, de l'équation du troisième ordre, revenir à la définition géométrique, mais alors, on suppose au moins, l'existence de dérivées secondes sur les surfaces de niveau de u.

2. Cependant, la définition des systèmes triples orthogonaux n'exige que l'existence des dérivées premières, sur les surfaces considérées.

Il est utile de poser le problème d'une façon précise dans le langage de la géométrie infinitésimale directe, en nous servant de la notion *d'intégrale paratingente* d'un système d'équations aux dérivées partielles, introduite par M. Bouligand :

Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles, entre un certain nombre de variables et de fonctions, on appelle intégrale paratingente, dans un certain domaine R, *une multiplicité intégrale dans l'espace constitué par les fonctions et les variables qui, dans le domaine* R *de cet espace, admet, en chaque point, une multiplicité linéaire tangente continue; en conséquence :*

Soit u, v, w trois fonctions des variables x, y, z; nous dirons que ces trois fonctions définissent *un système triple orthogonal paratingent* (*S. T. O. P.*), dans un certain domaine R de l'espace, *si les équations*

$$u(x, y, z) = u, \qquad v(x, y, z) = v, \qquad w(x, y, z) = w$$

définissent, dans ce domaine, une transformation ayant une transformation linéaire tangente continue, orthogonale et à Jacobien non nul et sont, en outre, uniformes; ce qui revient à dire que *les trois fonctions sont uniformes dans la région et y possèdent des gradients continus, non nuls, vérifiant le système :*

$$(1) \qquad 0 = \overrightarrow{\text{Grad}(u)}.\overrightarrow{\text{Grad}(v)} = \overrightarrow{\text{Grad}(v)}.\overrightarrow{\text{Grad}(w)} = \overrightarrow{\text{Grad}(w)}.\overrightarrow{\text{Grad}(u)},$$

et nous dirons qu'une fonction u définit *une famille de Lamé paratingente* (*F. L. P.*), dans un domaine R, si, dans R, *on peut lui associer deux fonctions* v *et* w, *qui forment avec elle un S. T. O. P.* (¹).

3. On cherche, alors, dans quelles conditions certains des résultats classiques sont conservés. M. Bouligand (²) a en particulier, montré que, si une F. L. P. est formée de surfaces parallèles, celles-ci sont à courbure bornée et possèdent des éléments de contact du 2ᵉ ordre : *la normale à chaque surface est dérivable sur cette surface*, qui est dite alors, *surface* S_2 (une S_2 est encore *l'image d'un plan par une transformation de la topologie restreinte du* 2ᵉ *ordre*); et que, si une F. L. P. est composée de plans, les trajectoires orthogonales sont à *courbure bornée et possèdent un cercle de courbure continu.*

Il se produit le phénomène important que M. Bouligand appelle *superdérivabilité :* en supposant, seulement, l'existence des dérivées premières, on montre

(¹) On pourrait chercher à élargir encore les hypothèses : par exemple, supposer seulement que les surfaces $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$ possèdent un paratingent continu. Mais, on peut trouver des exemples de tels systèmes où le trièdre trirectangle, tangent en chaque point aux surfaces, n'est pas continu par rapport à l'ensemble des variables x, y, z. En tout cas, toutes les hypothèses que nous venons d'introduire sont effectivement utilisées dans les résultats jusqu'à présent obtenus.

(²) *Voir* G. BOULIGAND, *Bull. Soc. roumaine math.*, t. 35, p. 57-67.

l'existence de certaines dérivées secondes, en particulier l'existence des lignes de courbure sur les surfaces de la F. L. P.

Dans sa thèse [Paris, juin 1947 (1)], M. Llensa généralise ces résultats (en prolongeant les considérations du Chapitre III de l'Ouvrage de Darboux sur les systèmes triples orthogonaux) en cherchant les F. L. P., telles que la fonction u vérifie une équation du type

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}(u)}\right)^2} = \frac{1}{S(M, u)},$$

où $S(M, u) = 0$ est l'équation d'une sphère dépendant continuement du paramètre u : dans la théorie classique, on montre qu'on passe de la surface $u = \text{const.}$ à la surface infiniment voisine par une transformation par parallélisme, dans la géométrie de Poincaré d'absolu $S(M, u) = 0$ (transformation de Ribaucourt) et l'on en déduit que toute solution analytique de l'équation précédente définit une famille de Lamé.

M. Llensa étudie les solutions paratingentes de cette équation et démontre que, si R est un domaine de l'espace x, y, z, u, où $S(M, u)$ est $\neq 0$:

1° *Toute surface* $u = \text{const.}$, *dans ce domaine, est à courbure bornée, et, réciproquement, toute surface paratingente à courbure bornée dans ce domaine est surface de niveau d'une solution paratingente de l'équation.*

2° *Toute surface* $u = \text{const.}$, *où u définit une F. L. P. dans* R, *est une surface* S_2, *et, réciproquement, toute surface* S_2 *dans* R, *possédant un réseau de lignes de courbure orthogonal, est telle que la solution qu'on en déduit définit une F. L. P.*

3° Les résultats classiques sur la transformation de Ribaucourt sont conservés et, si un système possède deux F. L. P. de cette sorte, le théorème de Dupin est vrai.

4. Le phénomène de superdérivabilité est obtenu grâce à l'hypothèse que u vérifie l'équation précédente.

Nous nous proposons, dans le présent Mémoire, de montrer que :

I. Certains de ces résultats restent valables, si l'on astreint sans plus u à vérifier une équation du type élargi

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}(u)}\right)^2} = F(M, u) \quad (2), \tag{2}$$

(1) *Voir* le résumé des résultats de cette thèse aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 220, p. 297; t. 222, p. 261; t. 222, p. 845.

(2) L'adoption de ce type d'équation, en même temps qu'elle rattache à nos déductions ultérieures, développées sous forme autonome, l'équation du 1er ordre étudiée par M. Llensa, a encore l'avantage d'englober au moins des équations obtenues en éliminant un paramètre α entre deux relations de la

où $F(M, u)$, *le nouveau second membre*, est $\neq 0$ et *possède des dérivées secondes continues par rapport à* x, y, z *et est seulement continu par rapport à* u, dans un certain domaine R de l'espace x, y, z, u; d'une façon précise, nous montrons que, dans R :

1° *le résultat* (1) *de M. Llensa reste vrai;* 2° *que si une fonction* u *solution de l'équation définit en outre une F. L. P., ses surfaces de niveau sont des* S_2; 3° *que le résultat* (3) *de M. Llensa reste valable.*

La méthode employée est la généralisation naturelle de la méthode que M. Llensa a suivie dans l'étude de l'équation

$$\sqrt{\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}(u)}\right)^2}=\frac{1}{S(M, u)}.$$

Caractérisant les trajectoires orthogonales des intégrales paratingentes par la propriété *de rendre minima la solution d'une certaine équation différentielle*, définie sur toute courbe à tangente continue, il montre que *toute solution paratingente est enveloppe d'une certaine intégrale complète paratingente* à surface de niveau sphérique, qu'il obtient par analogie avec le cas classique. Nous remplaçons cette intégrale complète par une intégrale directement construite à partir des trajectoires orthogonales définies *a priori* par un certain système différentiel, mais cette intégrale n'étant pas paratingente en un point au moins nous introduisons *la notion d'intégrale semi-paratingente supérieure* (*inférieure*) *pour* $u = u_0$.

Une intégrale de l'équation (2) sera dite *semi-paratingente supérieure* (*inférieure*) *pour* $u_0 = u$, *si pour* $u > u_0$ ($u < u_0$) *elle est paratingente et si sa surface de niveau* $u = u_0$ *est réduite à un point* M_0, *où les conditions suivantes sont remplies : Si* $M \to M_0$ *suivant une direction déterminée,* $\overrightarrow{\operatorname{Grad}(u)}$ *tend vers une limite et, en* M_0 *les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau ont une tangente.*

Ces intégrales jouissent de toutes les propriétés des intégrales à surfaces de niveau sphérique utilisées par M. Llensa et simplifient les démonstrations [en supprimant la nécessité de n'utiliser que des intégrales paratingentes ([1])].

II. Les résultats obtenus précédemment par M. Bouligand, dans le cas des F. L. P. formées de surfaces parallèles ou de plans, peuvent se généraliser dans deux directions différentes.

---

forme $u(x, y, z, \alpha) = 0$ $|\operatorname{Grad} u| = F(x, y, z, \alpha)$, dont la première définit les familles de Lamé $\mathcal{L}\alpha$ en dépendance continue de ce paramètre et dont la seconde détermine, pour chaque α, la fonction $\operatorname{Grad} u$ du point x, y, z.

([1]) M. Llensa obtient ces intégrales dans son intégrale complète, mais il ne s'en sert que dans leurs parties paratingentes.

1. *Si les surfaces de niveau d'une F. L. P. font partie d'une famille plus étendue de surfaces vérifiant certaines conditions de dérivabilité (par exemple, cas où ce sont des plans), les trajectoires orthogonales sont à courbure bornée et à cercle de courbure continu* [1].

2. *Si les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau de la F. L. P. font partie d'une famille plus étendue de courbes, vérifiant certaines conditions de dérivabilité (par exemple, cas des surfaces parallèles), les surfaces de la F. L. P. sont des* S *à courbure bornée* [1].

III. Dans les divers cas envisagés, en plus du phénomène de superdérivabilité envisagé, on montre que, dans les S. T. O. P. correspondants, *les dérivées* M''_{uv} *et* M''_{uw} *existent et sont continues.*

L'étude de la troisième dérivée croisée M''_{uv} (ou M''_{vu}) conduit au résultat suivant, qui généralise le théorème de Dupin au delà de sa forme classique :

Si, dans un S. T. O. P., M''_{uv} *et* M''_{uw} *existent et sont continues (en particulier dans les trois cas envisagés plus haut) et si* $\overrightarrow{\mathrm{Grad}(v)}$ *vérifie une condition de Lipschitz par rapport à* w, *les lignes d'intersection des surfaces du S. T. O. P. sont lignes de courbure sur chaque surface. Ces courbes sont, alors, à courbure géodésique bornée* [2]. *C'est le cas, en particulier, si deux des F. L. P. du système vérifient une des conditions énoncées plus haut.*

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $\sqrt{\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(u)\right)^2} = F(M, u)$.

I. — Lemmes sur les systèmes différentiels.

1. Nous rappelons les lemmes suivants :

Soit le système différentiel suivant :

$$\frac{dy_i}{dx} = F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad 1 \leqq i \leqq n.$$

Si les $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont continus, dans un domaine R [3] fermé de l'espace

---

(1) *Voir* Chapitre II, paragraphes 2 et 3; les familles dépendent d'un nombre fini de paramètres, le vecteur normal ou tangent étant fonction continuement dérivable de tous les paramètres; de plus, on suppose que les paramètres sont localement effectifs : Le déplacement différentiel d'un point quelconque d'une surface ou d'une courbe dépend effectivement des différentiels des paramètres.

(2) *Voir* la fin du paragraphe 4 du Chapitre II.

(3) Nous appelons domaine, une partie ouverte bornée et simplement connexe de l'espace et région, la fermeture d'un tel ensemble.

à $n+1$ dimensions $x, y_1, \ldots, y_n$, il existe une courbe intégrale, au moins, du système qui passe par un point $M_0(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ quelconque de R, prolongeable jusqu'à la frontière de R.

Soit $y_i(x, x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ une telle solution : si les $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ sont *continûment dérivables par rapport aux y_i,* alors cette solution est *unique* et les $y_i(x, x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$ sont *continuement dérivables par rapport à tous les arguments. De plus, le déterminant fonctionnel* $\left(\frac{\partial y_i}{\partial y_{0k}}\right)$ *est différent de zéro dans* R, ce qui veut dire que les paramètres y_{0k} sont effectifs.

2. Étant donnée une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

où $F(x, y)$ est continue dans une région R du plan, parmi toutes les intégrales passant par $M_0(x_0, y_0) \in R$, *il existe une intégrale maximale et une intégrale minimale,* c'est-à-dire une intégrale $Y_M \geqq y$ et une intégrale $Y_m \leqq y$ quel que soit x.

Soit, alors, les deux équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y), \tag{2}$$

où F et G sont continues dans une région R, avec $F \geqq G$ dans R.

Si y est une solution de (2) passant par M_0 et si $Y_M(Y_m)$ est la solution maximale (minimale) de (1) passant par M_0, on a

$$y \leqq Y, \quad \text{si} \quad x \geqq x_0,$$
$$y \geqq Y, \quad \text{si} \quad x \leqq x_0.$$

Ceci va nous permettre de démontrer :

3. Lemme. — *Si, dans un domaine* R, $F \geqq G$ *et si, pour tout point* M_0 *de* R, *l'équation* (1) *a une solution unique passant par* M_0, *toute solution de* (2) *passant par* M_0 *est*

$$y \leqq Y, \quad \text{si} \quad x \geqq x_0,$$
$$y \geqq Y, \quad \text{si} \quad x \leqq x_0,$$

et, si, pour une valeur $x_1 \geqq x_0$ $(x_1 \leqq x_0)$, *on a*

$$\textit{soit} \quad y < Y \; (y > Y);$$
$$\textit{soit} \quad F\big(x_1, y(x_1)\big) > G\big(x_1, y(x_1)\big);$$
$$\textit{soit} \quad F\big(x_1, Y(x_1)\big) > G\big(x_1, Y(x_1)\big),$$

alors

$$y < Y, \quad \text{pour} \quad x > x_1, \qquad (y > Y, \ \text{pour} \ x < x_1).$$

Démonstration. — La première partie est la conséquence du lemme précédent.

Supposons que, pour $x = x_1$,

$$y = y(x_1) < Y(x_1);$$

dans le domaine R, par le point $M(x_1, y_1)$, il passe une intégrale Y_1 et une seule de (1) et, en vertu de la première partie, $y \leqq Y_1$, si $x \geqq x_1$; mais,

$$Y_1(x) < Y(x), \qquad \text{si} \quad x \geqq x_1,$$

car ceci est vrai pour $x = x_1$ et, par tout point de R il ne passe qu'une intégrale de (1) : donc

$$y \leqq Y_1 < Y, \qquad \text{si} \quad x \geqq x_1.$$

Supposons, maintenant, que, pour une valeur $x = x_1$,

$$F\big(x_1, Y(x_1)\big) > G\big(x_1, Y(x_1)\big)$$

ou

$$F\big(x_1, y(x_1)\big) > G\big(x_1, y(x_1)\big),$$

ou bien

$$y(x_1) < Y(x_1),$$

alors, d'après ce qui précède, $y < Y$, si $x \geqq x_1$, ou bien

$$y(x_1) = Y(x_1), \qquad \text{alors} \quad \frac{dy}{dx} < \frac{dY}{dx}$$

et, pour $x > x_1$, suffisamment voisin de x_1, on a $y < Y$

$$\text{donc} \quad y < Y, \qquad \text{donc} \quad y < Y, \qquad \text{si} \quad x < x_1.$$

Remarque. — Si $x_1 \neq x_0$, $y < Y$, pour $x \geqq x_1$ ($y > Y$, si $x \leqq x_1$).

II. — Les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau des solutions paratingentes de $\sqrt{\left(\overrightarrow{\text{grad}(u)}\right)^2} = F(M, u)$.

1. *Dans toute la suite, l'équation*

$$(1) \qquad \sqrt{\left(\overrightarrow{\text{Grad}(u)}\right)^2} = F(M, u)$$

sera telle que, dans un domaine de l'espace (x, y, z, u), $F(M, u)$ *soit positive, continue par rapport à* u *et possède des dérivées secondes continues par rapport à* x, y, z.

Nous désignerons par $R(u_0)$, *la section, par le plan* $u = u_0$, dans l'espace (x, y, z, u), du domaine R.

Soit une *intégrale paratingente* de (1) dans une région $R' \subset R$, c'est-à-dire, *une fonction* $u(x, y, z)$, *telle que, si* x, y, z, u *est un point de* R', *u est uniforme et vérifie* (1) et $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$ *est continu par rapport à* x, y, z *ou, d'une façon moins stricte, soit une intégrale semi-paratingente* [1] *supérieure* (*inférieure*) pour $u = u_0$, c'est-à-dire *une fonction vérifiant toutes les conditions précédentes pour* $u > u_0$ ($u < u_0$), *suffisamment voisin de u, telle que la surface de niveau* $u = u_0$ *se réduise à un point* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\big((x_0, y_0, z_0, u_0)$ *est dans* $R'\big)$, *tel que, si* $M \to M_0$ *suivant une direction déterminée*, $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$ *ait une limite et que les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau aient une tangente en* M_0. Dans ce cas, nous ne considérons que les valeurs de $u > u_0$ ($u < u_0$), suffisamment voisines de u_0.

Soit un arc de courbe, à tangente continue, allant du point M_0 de la surface $u = u_0$ (surface notée (u_0)) au point M_1 de la surface (u_1). En tout point $M(x, y, z)$ de cet arc, il existe une valeur $u(x, y, z)$, qui vérifie la relation différentielle

$$du = \overrightarrow{\text{Grad}(u)} . \overrightarrow{dM},$$

c'est-à-dire, que u considéré comme fonction de l'arc, vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dT}{ds} = F\big(M(s), T\big) \cos(\varepsilon), \tag{2}$$

définie sur la courbe, où ε est l'angle de la tangente à la courbe avec $\overrightarrow{\text{Grad}(u)}$, qui est une fonction continue de l'arc, d'après les hypothèses.

Soit, d'autre part, l'équation différentielle

$$\frac{dT}{ds} = F\big(M(s), T\big). \tag{3}$$

D'après les hypothèses, le deuxième membre est dérivable par rapport à s et positif; donc, il n'existe qu'une seule solution T prenant une valeur déterminée, en un point déterminé.

Supposons que la courbe C ne soit pas trajectoire orthogonale des surfaces (u), en un point quelconque de l'arc fermé M_0M_1 : donc, en ce point, de paramètre s_1, $\cos(\varepsilon) < 1$, donc

$$F\big(M(s_1), u\big) \cos(\varepsilon) < F\big(M(s_1), u\big),$$

donc, si T est la solution de (3), qui prend la valeur u_0 au point M_0, $T > u$, si $s > s_1$, ou, si $s \geqq s_1$ avec $s_1 \neq s_0$. De toute façon,

$$T(M_1) > u_1.$$

(1) *Voir* Introduction, n° 4.

D'autre part, étant données les hypothèses, si C est trajectoire orthogonale, elle est à tangente continue, puisque $\overrightarrow{\mathrm{Grad}(u)}$ est continu et que, en M_0, elle possède une tangente. Les équations (2) et (3) coïncident, donc $T(M_1) = u_1$.

D'où le théorème [1] :

Les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau d'une intégrale (semi-) paratingente (supérieure pour $u = u_0$) sont caractérisées, parmi les courbes à tangentes continues, comme minimisant, pour $u > u_0$, la solution de l'équation (3), qui, sur (u_0) prend la valeur u_0.

On a évidemment la propriété correspondante pour $u < u_0$, avec les intégrales (semi-) paratingentes (inférieures pour $u = u_0$).

2. Nous désignerons par *intégrale complète (semi-) paratingente (supérieure ou inférieure) dans* R, *une intégrale (semi-) paratingente (supérieure ou inférieure, pour $u = u_0$), dépendant d'un certain nombre de paramètres* [2], *et vérifiant les conditions suivantes* :

1° *Les trajectoires orthogonales $\mathcal{C}$ des surfaces de niveau de l'intégrale complète (paramétrées par rapport à u) sont déterminées d'une façon unique, si l'on se donne le point M_0 et la tangente $\vec{h}_0$* [3], *pour la valeur u_0 du paramètre $(M_0, u_0) \in R$.*

2° *Si M_0 et M_1 sont suffisamment voisins, il existe, au moins, une courbe $\mathcal{C}$ passant en M_0 pour la valeur u_0 du paramètre et en M_1, pour $u_1 > u_0$ (s'il s'agit d'intégrale semi-paratingente supérieure) ou pour $u_1 < u_0$ (s'il s'agit d'intégrale semi-paratingente inférieure).*

Nous désignerons, provisoirement, par $\mathfrak{U}$ une intégrale appartenant à l'intégrale complète.

Soit, alors, une intégrale quelconque, paratingente dans $R' \subset R$, et soient $M(x_0, y_0, z_0)$ sur (u_0) $\big((x_0, y_0, z_0, u_0) \in R\big)$ et $\mathcal{C}'$ trajectoire orthogonale aux surfaces (u), passant en M_0; soit M_1 sur $\mathcal{C}'$ pour $u = u_1$, suffisamment voisin de M_0 : il existe, alors, une courbe $\mathcal{C}$ passant par M_0 et M_1, correspondant à l'intégrale $\mathfrak{U}$ dont la surface $\mathfrak{U} = u_0$ passe par M_0. En M_1, l'intégrale u prend la valeur u_1 et l'intégrale $\mathfrak{U}$ la valeur u'_1.

Appliqué à $\mathcal{C}$, le théorème 1 montre que $u'_1 \geqq u_1$ et, appliqué à $\mathcal{C}'$, il montre que $u_1 \geqq u'_1$, donc $u_1 = u'_1$. Or, le même théorème dit que, si $\mathcal{C}'$ n'est pas ortho-

---

(1) Dû à M. Llensa, mais celui-ci ne fait pas intervenir les intégrales semi-paratingentes : elles simplifient beaucoup les démonstrations ultérieures.

(2) u_0 dépend évidemment des paramètres.

(3) Les courbes $\mathcal{C}$ sont toujours considérées comme orientées suivant les u croissants. Dans la démonstration ultérieure, u doit être $> u_0$ ($u < u_0$) s'il s'agit d'une intégrale semi-paratingente supérieure (inférieure).

gonale aux surfaces $\mathcal{U} = \text{const.}$, $u_1 > u'_1$, donc $\mathcal{C}'$ est orthogonale aux surfaces $\mathcal{U} = \text{const.}$, donc $\mathcal{C}'$ est une courbe $\mathcal{C}$ et, de même, $\mathcal{C}$ est orthogonale aux surfaces (u) : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ayant la même tangente en M_1 (la normale à (u_1)), elles sont confondues.

Donc, toute solution paratingente de (1) a pour trajectoires orthogonales à ses surfaces de niveau des courbes $\mathcal{C}$. Il en résulte que, si deux intégrales paratingentes ont leurs surfaces de niveau respectives, pour la même valeur de u, tangentes en un point, il en est de même en tout point de la courbe $\mathcal{C}$, normale en ce point aux surfaces de niveau.

D'où le théorème :

L'ensemble des courbes $\mathcal{C}$ est l'ensemble des trajectoires orthogonales aux intégrales paratingentes de (1) *dans toute région* $R' \subset R$. *Deux intégrales paratingentes dans* R', *considérées comme définissant des surfaces dans* R', *sont tangentes tout le long d'une courbe* $\mathcal{C}$ (*considérée comme appartenant à l'espace à quatre dimensions* x, y, z, u), *si elles sont tangentes en un point de cette courbe.*

III. — Existence d'une intégrale complète semi-paratingente supérieure (inférieure).

1. Le cône élémentaire de l'équation (1) est un cône de révolution, d'axe parallèle à l'axe des u : dans la théorie classique, les courbes $\mathcal{C}$ sont les supports ponctuels des caractéristiques. Elles sont définies par le système :

$$\Sigma \begin{cases} \vec{M}'_u = \dfrac{\vec{h}}{F}, \\ \vec{h}'_u = \left(\overrightarrow{\text{Grad}\left(\dfrac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}, \end{cases}$$

le paramètre étant u, $\vec{h}$ étant le vecteur unitaire tangent, orienté dans le sens des u croissants.

Considérons ici, *a priori*, le système Σ; puisque $F(M, u)$ est dérivable, continuement, jusqu'au 2[e] ordre et reste positif dans R, d'après le lemme rappelé en (1) du paragraphe 1, il existe une solution et une seule, telle que M et $\vec{h}$ prennent, pour $u = u_0$ les valeurs $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{h}_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, si $(M_0, u_0) \in R$ et quel que soit $\vec{h}_0$.

Soient

$$M = M(u, u_0, M_0, \vec{h}_0) = M(u, u_0, x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0),$$
$$\vec{h} = \vec{h}(u, u_0, M_0, \vec{h}_0) = \vec{h}(u, u_0, x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0),$$

M et $\vec{h}$ continuement dérivables pour tous leurs arguments, les paramètres x_0, y_0, z_0, α_0, β_0, γ_0 étant essentiels.

Si $(\vec{h}_0)^2 = 1$, $(\vec{h})^2 = 1$, car

$$\vec{h}'_u . \vec{h} = 0.$$

Nous appellerons courbes $\mathcal{C}$, *les courbes intégrales définies dans* R *avec* $(M_0,\ u_0) \in R$ *et* $(\vec{h}_0)^2 = 1$.

(M_0, u_0) étant quelconque dans la région $R' \subset R$, le champ total des variables M_0, u_0, $\vec{h}_0$ est un compact; donc on peut choisir u suffisamment voisin de u_0 pour que, quelles que soient ces variables dans ce champ, $|MM_0|$ soit $<$ à un nombre donné positif, donc pour que M soit dans R (car R est ouvert et R′ est fermé).

Considérons alors, pour M_0, u_0, et u donné, le lieu de M :

Si ce lieu admet, au point M, *un paratingent plan, ce paratingent est perpendiculaire à* $\vec{h}$.

En effet, M étant dérivable par rapport aux paramètres λ et μ du vecteur $\vec{h}_0$, nous avons

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial\lambda\,\partial u} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}\right) = \frac{1}{F}\,\frac{\partial\vec{h}}{\partial\lambda} + \vec{h}\left(\overrightarrow{\text{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}\right),$$

donc $\dfrac{\partial^2\vec{M}}{\partial\lambda\,\partial u}$ est continu par rapport à λ et u; donc $\dfrac{\partial^2\vec{M}}{\partial u\,\partial\lambda} = \dfrac{\partial^2\vec{M}}{\partial\lambda\,\partial u}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{h}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}\right) &= \vec{M}'_\lambda\cdot\left[\left(\overrightarrow{\text{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\wedge\vec{h}\right)\wedge\vec{h}\right] + \vec{h}\cdot\left[\frac{1}{F}\,\frac{\partial\vec{h}}{\partial\lambda} + \vec{h}\left(\left(\overrightarrow{\text{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\right)\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}\right)\right]\\ &= (\vec{h}.\vec{M}'_\lambda)\left(\overrightarrow{\text{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\cdot\vec{h}\right),\end{aligned}$$

d'où, la quantité $\vec{h}\cdot\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{h}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}\right) = \left(\vec{h}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}\right)\left(\overrightarrow{\text{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\cdot\vec{h}\right).$$

D'après les théorèmes classiques, cette équation étant homogène d'une part, et, d'autre part, pour $u = u_0$, $\vec{h}\cdot\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda} = 0$, puisque M_0 est indépendant de $\vec{h}_0$, d'où $\vec{h}\cdot\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda} = 0$. C. Q. F. D.

D'autre part, $\vec{h}$ est fonction dérivable des paramètres λ et μ; donc, si le lieu de M admet un paratingent plan, c'est une S_2.

2. *Étant donnée une région* R′ *fermée contenue dans* R, *il existe* η *tel que, si* $|u-u_0|<\eta$, *le lieu de* M, *envisagé plus haut, est une surface fermée, ayant un paratingent en tout point, contenue dans* R; *les divers lieux, obtenus pour* M_0 *et* u_0 *fixes et diverses valeurs de* u, *s'emboîtent les uns dans les autres, comme des sphères concentriques de rayons* $|u-u_0|$, *et ceci quel que soit* $(M_0, u_0) \in R'$.

Démonstration. — Soit $(M_0, u_0) \in R'$, fermée dans R, et considérons le point P défini par

$$P = M_0 + \frac{(u-u_0)\vec{h}_0}{F(M_0, u_0)} = \vec{M}_0 + \frac{(u-u_0)\vec{h}_0}{F(o)},$$

où nous mettons F(o) pour $F(M_0, u_0)$.

A tout point P, correspond $\vec{h}$ et $u-u_0>o$ (et $u-u_0<o$), déterminés d'une façon unique, donc un point $M(u, u_0, M_0, \vec{h}_0)$, si $|u-u_0|$ est assez petit et ceci indépendamment de $\vec{h}_0$ et de (M_0, u_0) dans R′.

Soit H cette transformation : HP = M et H dépend de u_0 et M_0, soit $H(M_0, u_0)$.

M dépend de u et des deux paramètres λ et μ de $\vec{h}_0$. Considérons le jacobien $\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\mu}\right)$, le jacobien J de H est

$$\frac{\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\mu}\right)}{\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{P}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{P}}{\partial\mu}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\mu}\right)}{\left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)}, \frac{1}{F(o)}\frac{\partial\vec{h}_0}{\partial\lambda}, \frac{1}{F(o)}\frac{\partial\vec{h}_0}{\partial\mu}\right)(u-u_0)}.$$

Or, nous avons $M = \int_{u_0}^{u} \frac{\vec{h}\,du}{F} + M_0$, et alors

$$\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda} = \int_{u_0}^{u} \frac{\partial\vec{h}}{\partial\lambda}\frac{1}{F} + \vec{h}\left(\left(\overrightarrow{\mathrm{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial\lambda}\right)\right)du = \int_{u_0}^{u} G\left(u, u_0, \vec{M}_0, \vec{h}_0\right)du,$$

où $G(u, u_0, M_0, \vec{h}_0)$ est une fonction continue des sept variables $x, y, z_0, \lambda, \mu, u_0, u$ qui, lorsqu'on limite la variation de u à un intervalle fermé de milieu u_0, pour chaque valeur de u_0, parcourent un ensemble compact : la fonction G est alors uniformément continue sur ce compact. Donc, on peut poser

$$G\left(u, u_0, M_0, \vec{h}_0\right) = G\left(u_0, u_0, M_0, \vec{h}_0\right) + \alpha,$$

où α tend uniformément vers zéro, si $u \to u_0$.

Or,

$$G\left(u_0, u_0, M_0, \vec{h}_0\right) = \frac{\vec{h}_0}{F(o)}, \qquad \text{car} \quad \frac{\partial\vec{M}_0}{\partial\lambda} = o,$$

d'où

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{M}}}{\partial \lambda}=\int_{u_0}^{u}\left(\frac{\vec{h}_0}{\mathrm{F(o)}}+\alpha\right)du=\left(\frac{\vec{h}_0}{\mathrm{F(o)}}+\alpha_1\right)(u-u_0),$$

et finalement

$$\mathrm{J}=\frac{\left(\dfrac{\vec{h}_0}{\mathrm{F(o)}}+\alpha_3,\ \dfrac{\partial\vec{h}_0}{\partial\lambda}\,\dfrac{1}{\mathrm{F(o)}}+\alpha_1,\ \dfrac{\partial\vec{h}_0}{\partial\mu}\,\dfrac{1}{\mathrm{F(o)}}+\alpha_2\right)}{\left(\dfrac{\vec{h}_0}{\mathrm{F(o)}},\ \dfrac{\partial\vec{h}_0}{\partial\lambda}\,\dfrac{1}{\mathrm{F(o)}},\ \dfrac{\partial\vec{h}_0}{\partial\mu}\,\dfrac{1}{\mathrm{F}_0}\right)}=1+\beta,$$

où β tend uniformément vers zéro, si $u\to u_0$; donc, étant donné R', on peut trouver η tel que, si $|u-u_0|<\eta$, le jacobien J est $\neq 0$, quel que soit λ, μ, et $(\mathrm{M}_0, u_0)\in \mathrm{R}'$, donc la transformation

$$\mathrm{H}(\mathrm{M}_0, u_0)\mathrm{P}=\mathrm{M}_0$$

est une homéomorphie au voisinage de M et, comme, dans cette transformation, les lieux de M correspondent aux sphères concentriques de rayon $\frac{|u-u_0|}{\mathrm{F(o)}}$; le théorème en résulte immédiatement, puisque J est continu et différent de zéro.

3. De la démonstration précédente résulte également que, *étant donné* R', *il existe d telle que, si* $|\mathrm{M}_0\mathrm{M}|<d$, *à tout point* M *il correspond un seul point* P, *si l'on impose à u d'être* $>u_0$ (*ou* $<u_0$) *et tel que* $|u-u_0|$ *soit* $<\eta$, η *ayant le même sens que plus haut, u étant déterminé par* P. *Ce qui détermine une fonction uniforme* $u(\mathrm{M})$ *que nous appellerons*

$$\mathcal{U}(u_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{M})\big(\mathcal{V}(u_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{M})\big).$$

THÉORÈME. — *Les fonctions* $\mathcal{U}(u_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{M})\big(\mathcal{V}(u_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{M})\big)$, *que nous venons de définir, constituent une intégrale complète semi-paratingente supérieure (inférieure) pour* $u=u_0$, *si* $|u-u_0|<\eta$, *quel que soit* $(u_0, \mathrm{M}_0)\in\mathrm{R}'$.

Démonstration. — En effet, $\mathcal{U}(u_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{M})\big(\text{ou } \mathcal{V}(u_0, \mathrm{M}_0, \mathrm{M})\big)$ définit, dans l'espace x, y, z, u, une surface avec un paratingent continu, défini, en chaque point, par le paratingent de la surface de niveau en ce point et par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}'_u}$, donc, $\overrightarrow{\mathrm{Grad}(u)}$ est continu. D'autre part,

$$\overrightarrow{\mathrm{M}'_u}=\frac{\vec{h}}{\mathrm{F(o)}}$$

montre que les courbes $\mathcal{C}$ sont tangentes au cône élémentaire de (1), donc les fonctions considérées sont des intégrales de (1) et constituent des intégrales semi-paratingentes de 1 en $u=u_0$.

Enfin, les courbes $\mathcal{C}$ sont les seules trajectoires orthogonales aux surfaces $\mathfrak{U} = \text{const.}$ et $\mathfrak{V} = \text{const.}$, car le vecteur $\vec{h}$ est une fonction dérivable de x, y, z. En effet, si $|MM_0|$ est assez petit, u et $\vec{h}_0$ sont fonction dérivable de M (comme P), donc $\vec{h}$ est une fonction dérivable de M. Toute courbe $\mathcal{C}$ étant déterminée par u_0, $\vec{h}_0$, M_0 et tout point (M_0, u_0) de R appartenant à une région $R' \subset R$, les intégrales

$$\mathfrak{U}(u_0, M_0, M) \quad \text{et} \quad \mathfrak{V}(u_0, M_0, M)$$

constituent respectivement des intégrales complètes semi-paratingentes supérieures et inférieures en $u = u_0$ dans R.

4. Les théorèmes des paragraphes III.3 et II.2 montrent que :

Théorème. — *Si u est une intégrale paratingente de* (1) *dans un certain domaine* R, *elle est, dans toute sous-région, enveloppe des* $\mathfrak{U}(u_0, M_0, M)$ [*et des* $\mathfrak{V}(u_0, M_0, M)$] *pour $u > u_0$ (et pour $u < u_0$), si $|u - u_0| < \eta$ (η correspondant à cette sous-région), lorsque M_0 parcourt la surface (u_0), dans cette sous-région.*

Remarque. — Dans toute la suite, le nombre η aura le sens que l'on vient de lui donner.

IV. — Propriétés et détermination des intégrales paratingentes de 1 dans R.

1. Nous allons prouver que, *toute surface de niveau (u) d'une intégrale paratingente de* (1) *est, dans* $R(u)$, *à courbure bornée, et que, réciproquement, toute portion de surface à courbure bornée dans* $R(u_0)$ *est, dans* $R(u_0)$, *surface de niveau d'une intégrale paratingente de* (1), *qui est déterminée d'une façon unique.* Nous allons commencer par étudier les rayons de courbure des surfaces de niveau des intégrales semi-paratingentes déterminées ci-dessus, et prouver que, dans toute région $R' \subset R$, il existe η_1 tel que, si $|u - u_0| < \eta_1$, $(M_0, u_0) \in R'$, alors les sphères, tangentes au point M à la surface

$$\mathfrak{U}(M_0, u_0, u) = u \big(\mathfrak{V}(M_0, u_0, u) = u\big),$$

et de rayon respectif $A(u - u_0)$ et $B(u - u_0)$, sont contenues dans cette surface et contiennent cette surface respectivement, et n'ont avec cette surface que M en commun (A et B étant deux quantités > 0).

2. Les surfaces de niveau des intégrales semi-paratingentes étant des S_2, nous allons utiliser la formule d'Olinde Rodrigues

$$d\vec{M} + \rho \, d\vec{h} = 0$$

pour calculer les rayons de courbure ρ. M, sur la surface (u), est fonction de λ et μ (paramètres de $\vec{h}_0$); suivant le raisonnement fait au paragraphe III.2 :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} = \left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_1\right)(u - u_0), \qquad \left(\frac{\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_2\right)(u - u_0) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu},$$

où α_1 et $\alpha_2 \to o$, uniformément, quel que soit $(M_0, u_0) \in R'$ et $\vec{h}_0$, si $u \to u_0$,

$$d\vec{M} = \left(\frac{d\vec{h}_0}{F(o)} + \alpha_1\, d\lambda + \alpha_2\, d\mu\right)(u - u_0);$$

d'autre part,

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \int_{u_0}^{u} \left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right) du,$$

d'où

$$d\vec{h} = d\vec{h}_0 + \int_{u_0}^{u} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right)\right) d\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right)\right) d\mu \right] du;$$

or,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\left(\overrightarrow{\operatorname{Grad}\left(\frac{1}{F}\right)} \wedge \vec{h}\right) \wedge \vec{h}\right)$$

sont, si $|u - u_0|$ est assez petit, une fonction continue de u, u_0, x_0, y_0, z_0, λ, μ et, comme le champ des variables est, si on le veut, un ensemble compact, ces deux fonctions restent inférieures à un nombre K, quel que soit λ et μ et $(M_0, u_0) \in R'$; d'où

$$d\vec{h} = d\vec{h}_0 + \beta_1\, d\lambda + \beta_2\, d\mu,$$

où β_1 et $\beta_2 \to o$, uniformément si $u \to u_0$.

Alors la quantité

$$\frac{-\left(d\vec{M}\right)^2}{d\vec{M}.d\vec{h}} = -\frac{\left(\frac{\left(d\vec{h}_0\right)^2}{(F(o))^2} + a_1\, d\lambda^2 + 2 b_1\, d\mu\, d\lambda + c_1\, d\mu^2\right)}{\left(\frac{\left(d\vec{h}_0\right)^2}{F(o)} + d_1\, d\lambda^2 + 2 e_1\, d\mu\, d\lambda + f_1\, d\mu^2\right)}(u - u_0).$$

Or, λ et μ sont des paramètres de la sphère de rayon 1, donc on peut les choisir tels que

$$\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2 < 1 \qquad \text{si} \quad d\sigma^2 = \left(d\vec{h}_0\right)^2;$$

$$\frac{-\left(d\vec{M}\right)^2}{d\vec{M}.d\vec{h}} = -\frac{1}{F(o)} \frac{\left(1 + a\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 + 2b\frac{d\lambda\, d\mu}{d\sigma^2} + c\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2\right)}{\left(1 + d\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\right)^2 + 2e\frac{d\lambda\, d\mu}{d\sigma^2} + f\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2\right)}(u - u_0),$$

où $a, b, c, d, e, f \to 0$, uniformément, si $u \to u_0$; donc

$$\frac{-\left(d\vec{M}\right)^2}{d\vec{M}.d\vec{h}} = \frac{1}{F(0)}(1+\varepsilon')(u-u_0),$$

où $\varepsilon' \to 0$ uniformément.

Or, les rayons de courbure de (u) dans une des intégrales semi-paratingentes sont de cette forme. Donc, en particulier, si $|u-u_0|$ est suffisamment petit, les deux rayons de courbure sont de même signe (signe de $u-u_0$). Les surfaces de niveau sont donc convexes; de plus, en valeur absolue, ils sont inférieurs à $\frac{1}{F_m}(1+1)(|u-u_0|)$ et supérieurs à $\frac{1}{F_M}\left(1-\frac{1}{2}\right)(|u-u_0|)$, où (F_m) et (F_M) sont les maximum et minimum de F dans R′.

Donc, si l'on pose

$$A = \frac{1}{2F_M} \quad \text{et} \quad B = \frac{2}{F_m},$$

étant donné R′, il existe $\eta_1 < \eta$ tel que les surfaces (u) des intégrales semi-paratingentes aient leurs rayons de courbure du même signe (celui de $u_0 - u$) et soient, en valeur absolue, compris entre $A(|u-u_0|)$ et $B(|u-u_0|)$, quel que soit $(M_0, u_0) \in R'$, si $|u-u_0| < \eta_1$.

Donc, *la sphère de rayon* $(|u-u_0|)$, *tangente à la surface* (u) *du même côté que* M, *au point* M, *est intérieure à cette surface et la sphère de rayon* $B(|u-u_0|)$, *tangente en* M *et qui contient la première sphère, contient* (u) *et n'a en commun avec elle que le point* M.

3. Théorème. — *Si u est une intégrale paratingente de* (1), *dans* R, (u) *est à courbure bornée dans* $R(u)$ *et, par conséquent, à courbure uniformément bornée dans* $R''(u)$, *où* R'' *est fermée* $\subset$ R.

Démonstration. — En effet, soit $M \in (u)$; on peut choisir R′ fermée $\subset$ R, telle que (M, u) soit intérieur à R′; il existe, alors, $\eta_2 < \eta_1$ tel que, si $|u-u_0| < \eta_2$, (M, u_0) est intérieur à R′, M_0 et M étant sur la même courbe $\mathcal{C}$. Si S_0 est l'intérieur de $(u_0) \cap R'(u_0)$, $M_0 \in S_0$, soit $M'_0 \in S_0$ et M′ le point correspondant sur la même courbe $\mathcal{C}$. Je dis que $\mathcal{U}(M'_0, u_0, u)\left(\mathcal{V}(M'_0, u_0, u)\right)$, si $u > u_0$ (si $u < u_0$), est telle que sa surface de niveau

$$\mathcal{U}(M'_0, u_0, u) = u\left(\mathcal{V}(M'_0, u_0, u) = u\right)$$

ne contient à son intérieur, ni sur sa surface, aucun point de (u), sauf M′.

Supposons le contraire : Soit M″ un point de (u) à l'intérieur ou sur la surface de niveau de l'intégrale paratingente et $\mathcal{C}'$ la courbe $\mathcal{C}$ passant en M'_0, pour la valeur u_0, et en M″. En M″, la valeur du paramètre est $u' \leqq u$; mais $\mathcal{C}'$

n'est pas orthogonale (tout au moins en M_0) aux surfaces (u), donc $u < u'$, d'après la propriété minimale des courbes $\mathcal{C}$, il y a contradiction. Donc, la sphère de rayon $A(u - u_0)$, tangente en M', ne contient aucun point de (u), sauf M'. Et ceci est valable, quel que soit $M' \in S$, correspondant à S_0 sur (u).

Donc, la surface (u) est à courbure bornée sur S et, par conséquent, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, à courbure uniformément bornée dans tout $R''(u)$, si R'' est fermée $\subset R$.

4. Théorème réciproque. — *Si* S *est une surface paratingente à courbure bornée dans* $R(u_0)$ *dans toute région* $R' \subset R$, $R'(u_0) \cap S$ *est surface de niveau d'une intégrale paratingente de* (1), *pour* $|u - u_0|$ *suffisamment petit, intégrale qui est déterminée d'une façon unique.*

Démonstration. — Soit R' fermée $\subset R$ et $S \cap R'(u_0) = S_0$ et u tel que $|u - u_0| \leqq \eta_2 < \eta_1$ tel que $S \cap R'(u_0)$ possède la propriété $P(B\eta_2)$, c'est-à-dire que les sphères de rayon $B\eta_2$ tangente ne contiennent à leur intérieur ou sur leur surface aucun point de $S \cap R(u_0)$ autre que le point de contact. Considérons l'ensemble E des points (M, u) définis de la façon suivante :

En tout point M_0 de $S \cap R'(u_0)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$, normale en M, pour la valeur u du paramètre et M est le point de paramètre u sur $\mathcal{C}$, tel que $|u - u_0| < \eta_2$.

L'ensemble des points (M, u) est contenu dans R et est fermé. En effet, la correspondance $(M_0, u) \to (M, u)$ est continue et est définie sur le compact $S \cap R'(u_0) \times (u - \eta_2, u + \eta_2)$, elle est donc fermée, donc E est fermé ; donc, il existe R'' fermée $\in R$, qui contient E et R' ; et soit $\eta'_2 < \eta_2$, satisfaisant à l'énoncé du 2 pour R'', et E' l'ensemble des points (M, u) correspondant à (M_0, u), $M_0 \in S \cap R'(u_0) \times |u - u_0| < \eta'_2$. Montrons que la correspondance est biunivoque : supposons le contraire, supposons, en outre, qu'il existe deux valeurs u_1 et u'_1, associées à un même point M telles que $(M_1, u_1) \in E'$ et $(M_1, u'_1) \in E'$, il existe donc M_0 et M'_0, appartenant à $S \cap R'(u_0)$, et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passant par M_0 et M'_0 pour la valeur u_0 du paramètre et en M_1 respectivement pour u_1 et u'_1 ; supposons $u'_1 \leqq u_1$ (et, par exemple, u_1 et $u'_1 > u_0$), la sphère de rayon $B|u_1 - u_0|$ tangente en M_0 à S, du même côté que M_1, laissant tous les points de la surface, sauf M_0, à son extérieur, la surface $\mathcal{V}(u_1, M_1, u) = u_0$ passe par M_0 et laisse M'_0 à son extérieur. Considérons, le long de $\mathcal{C}'$, la solution de

$$\frac{dT}{ds} = F(M, T), \tag{3}$$

telle que $T = u_1$, en M_1 : comme M'_0 est à l'extérieur de $\mathcal{V}(u_1, M_1, u) = u_0$, et comme $\mathcal{C}'$ n'est pas forcément orthogonale aux surfaces de niveau de $\mathcal{V}$, la valeur de cette solution en M'_0 est $u'_0 < u_0$; alors que la solution de la même équation, prenant la valeur u'_1 en M_1, a la valeur u_0, avec $u'_1 \leq u_1$, ce qui est impossible, étant donné que l'équation (3) a ses solutions déterminées par les conditions initiales.

Donc M est tel que $(M_1, u_1) \in E'$ pour une seule valeur de u et ne correspond qu'à un point M_0.

La correspondance $(M_0, u) \rightarrow (M, u)$ est continue, fermée, biunivoque, donc c'est une homéomorphie et l'ensemble E', image de la surface $S \cap R'(u_0) \times (u - \eta_2, u + \eta_2)$ de l'espace x, y, z, u, est une surface dans cet espace.

Donc, au voisinage de $S \cap R'(u_0)$, la fonction $u(M)$ définie par cette surface est uniforme et continue et, de plus, les surfaces de niveau, image bicontinue des surfaces $S \cap R'(u_0)\{u\}$ de l'espace x, y, z, sont aussi des surfaces de cet espace, en ce sens que, s'il existe un paratingent plan, ce paratingent contient toutes les directions du plan (pour un point intérieur).

Montrons, enfin, que ces surfaces ont un paratingent plan perpendiculaire, en chaque point au vecteur $\vec{h}$ à la courbe $\mathcal{C}$ qui y passe; supposons ceci inexact en (M_1, u_1), correspondant à (M_0, u_0), il existe donc une suite de points M'_i, M''_i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$), telle que le vecteur $\overrightarrow{M'_iM''_i}$ fasse, avec $\vec{h}_1$ en M_1, un angle tendant vers un angle aigu; comme le vecteur $\vec{h}''_i$ (en M''_i) tend vers $\vec{h}_1$, l'angle $(\overrightarrow{M'_iM''_i}, \vec{h}''_i)$ est aigu, à partir d'une certaine valeur de i et, comme $M'_iM''_i \rightarrow 0$ et que les rayons de courbure de

$$\mathcal{U}(M''_{0i}, u_0, u) = u_1((\mathcal{U}_1))$$

restent $> A(|u - u_0|)$, à partir d'un certain i, M'_i est à l'intérieur de cette surface. Il passe alors une courbe $\mathcal{C}'$ par M''_{0i}, pour la valeur u_0, et en M'_i; comme M'_i est à l'intérieur de $(\mathcal{U}_1)$, M'_i est atteint pour une valeur $u'_1 < u_1$ du paramètre [c'est une solution de l'équation (3)]. Or, $\mathcal{V}(M_1, U_1, u) = u_0$ laisse M'_{0i} à son extérieur et, d'après la démonstration précédente, ceci est impossible.

D'où, en chaque point M des surfaces (u), il existe un paratingent plan perpendiculaire à $\vec{h}$, tangent à la courbe $\mathcal{C}$. Donc, la fonction $u(M)$ est intégrale paratingente de (1) et, comme toute solution de (1) est obtenue de cette manière, la solution est unique.

Remarque. — Un point quelconque de R pouvant se trouver dans une région R', contenue dans R, *on peut prolonger la solution de telle sorte que* $S \cap R(u_0)$ *soit entièrement utilisée* et, il est alors immédiat que l'*on peut définir la solution en tout point de* R. *Il existe des solutions paratingentes en tout point de* R.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX PARATINGENTS ET FAMILLES DE LAMÉ PARATINGENTES VÉRIFIANT CERTAINES CONDITIONS.

I. — Familles de Lamé, formées à partir d'une solution de l'équation (1).

1. Soit, alors, une intégrale paratingente dans R de (1), qui définit une famille de Lamé. Étant données les hypothèses, si v et w sont les deux fonctions complémentaires, M sur une surface (u) est une fonction dérivable de v et w, soit $M_0(v, w)$ et $M(v, w)$ qui se correspondent sur la même courbe $\mathcal{C}$, pour les valeurs u et u_0

$$M = M\left(u, u_0, M_0(v, w), \vec{h}_0\right);$$

la dérivation formelle donne

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial v}$$

comme

$$\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu}\right) \neq 0, \qquad \text{si } |u - u_0| < \eta, \qquad u \neq u_0,$$

cette équation peut se résoudre en $\frac{\partial \lambda}{\partial v}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial v}$; donc $\vec{h}_0$ est dérivable par rapport à v et w. Donc les surfaces de niveau sont des S_2.

Théorème. — *Si u est une intégrale paratingente de (1) et définit une F. L. P., les surfaces (u) sont des S_2, a courbure bornée (phénomène de superdérivabilité).*

Remarque. — M. Llensa, dans le cas où

$$F(M, u) = \frac{1}{S(M, u)},$$

démontre la réciproque sous cette forme:

Toute S_2 à courbure bornée et possédant un réseau de lignes de courbure orthogonal, est surface de niveau (dans R) d'une F. L. P. définie par une intégrale de (1). Il ne nous est pas possible d'étendre ce résultat, puisqu'il n'est pas vrai dans le cas classique.

2. Soit un S. T. O. P. dont deux des systèmes de surfaces sont définies par des intégrales d'équations du type (1), u et v, soit $\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}$, les vecteurs normaux

respectifs, $\vec{h}$ et $\vec{k}$ sont dérivables par rapport à u, v, w, donc $\vec{l}$ également, le troisième système est donc formé de S_2. De plus,

$$\vec{M}'_u = \frac{\vec{h}}{F(M, u)}, \qquad \vec{M}'_v = \frac{\vec{k}}{G(M, u)},$$

d'où M''_{uv} et M''_{uw} et M''_{vw}, existent et sont continues, donc $M''_{uv} = M''_{vu}$, ... et, comme la démonstration du théorème de Dupin repose uniquement sur ces égalités nous avons :

Les surfaces du S. T. O. P. se coupent suivant leurs lignes de courbure.

Remarque. — Il resterait à prouver qu'il existe de telles F. L. P., non classiques, en dehors du cas approfondi par M. Llensa.

II. — Familles de Lamé faisant partie d'une famille plus étendue de surfaces sous certaines conditions de dérivabilité.

1. *Soit une F. L. P. qui, dans un certain domaine* R *de l'espace x, y, z, est soumise aux hypothèses suivantes :*

Elle fait partie d'une famille de surfaces, soit $\mathcal{F}$, dépendant d'un nombre fini de paramètres, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, chacune des surfaces de la famille $\mathcal{F}$ étant paramétrée, dans R, *de telle sorte que, si*

$$M = M(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{4}$$

représente l'équation de cette surface, les dérivées

$$\vec{M}''_{\alpha^2}, \quad \vec{M}''_{\beta^2}, \quad \vec{M}''_{\alpha\beta}, \quad \vec{M}''_{\alpha\lambda_k}, \quad \vec{M}''_{\beta\lambda_k},$$

soient continues par rapport à leurs arguments; dans R, *les surfaces de la F. L. P. sont régulièrement paramétrées, c'est-à-dire que*

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \beta} \neq 0;$$

enfin au voisinage de chaque surface de la F. L. P. les paramètres sont essentiels, la surface n'est pas stationnaire, si l'on donne aux paramètres λ_k des accroissements différentiels liés par moins de n relations linéaires indépendantes.

Nous dirons qu'alors, la F. L. P. est *régulière* dans $\mathcal{F}$.

2. Étant données les hypothèses, on peut éliminer α et β dans les équations (4) et mettre l'équation générale de la famille $\mathcal{F}$ sous la forme

$$F(x, y, z, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

F possédant ses dérivées premières continues. Dans R, soit v et w les deux fonctions définissant les deux autres familles de surfaces du S. T. O. P., on peut remplacer x, y, z par u, v, w et la famille est donnée par

$$G(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

possédant ses dérivées premières continues.

Par hypothèse, étant donné u, il existe $\lambda_k(u)$, $1 \leqq k \leqq n$, tels que

$$G\big(u, v, w, \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big) = 0$$

soit une identité en u, v, w; ce sont les valeurs qui déterminent la surface (u) de la F. L. P. Je dis que l'on peut choisir n points M_i, $1 \leqq i \leqq n$, sur (u) tels que le déterminant

$$\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial G\big(u, v_i, w_i, \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big)}{\partial \lambda_k}$$

soit $\neq 0$ pour les valeurs $\lambda_k(u)$ des paramètres; en effet, toutes les dérivées ne peuvent être nulles, car alors la surface (u) serait stationnaire; supposons que le rang du déterminant soit inférieur à n quels que soient les points M_i et soit p son son rang maximum, il existe donc $M_1, M_2, \ldots, M_p$ tels que

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_{k_j}}\right) \neq 0,$$

$k_1, \ldots, k_p$ étant p indices k des λ; alors quel que soit M sur la surface (u) (si l'on fait varier les λ)

$$dG(M, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = a_1\, dG_1 + \ldots + a_p\, dG_p, \qquad \text{avec} \quad p < n,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Donc le déterminant

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k}\right) \neq 0,$$

pour n points M_i, $1 \leqq i \leqq n$.

3. Dans ces conditions les $\lambda_k(u)$ sont dérivables; en effet, dérivons formellement les n identités

$$G\big(u, v_i, w_i, \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big) = 0,$$

où u, v_i, w_i sont les coordonnées de M_i, par rapport à u

$$\frac{\partial G_i}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k} \frac{d\lambda_k}{du} = 0, \tag{5}$$

comme les M_i sont choisis de telle sorte que le déterminant

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k}\right) \quad \text{soit} \neq 0,$$

on peut résoudre le système (5) par rapport aux $\frac{d\lambda_k}{du}$, qui existent donc et sont fonctions continues de u, dans R.

Si nous revenons à (4), système qui peut se résoudre par rapport à α et β, nous voyons que α et β sont des fonctions continuement dérivables de u, v, w. Et alors

$$\text{(6)} \qquad M = M\big(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big)$$

représente la transformation orthogonale définie par le S. T. O. P.

$$M = M(u, v, w).$$

4. Les trajectoires orthogonales aux surfaces de la F. L. P. ont pour tangentes, en chaque point, le vecteur

$$\vec{h} = \frac{\vec{M}'_\alpha \wedge \vec{M}'_\beta}{\left|\vec{M}'_\alpha \wedge \vec{M}'_\mu\right|}$$

qui, puisque les dérivées secondes M''_{α^2}, M''_{β^2}, $M''_{\alpha\beta}$, $M''_{\alpha\lambda_k}$ existent et sont continues, est continuement dérivable en u.

Alors

$$\left|\vec{h}'_u\right| = \frac{1}{\rho(u)} \frac{ds}{du} = \frac{1}{\rho(u)} \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right|$$

et, comme $\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}\right|$ est $\neq 0$, $\frac{1}{\rho(u)}$ est une fonction continue de u, ainsi que le vecteur normal principal $\rho_u \vec{h}'_u \frac{du}{ds}$, qui est le vecteur dirigeant de $\vec{h}'_u$, est aussi une fonction continue de u.

C'est en ce sens que nous dirons que la courbe admet un cercle de courbure continu, le rayon de celui-ci pouvant devenir infini, mais ne s'annulant pas, dans R *la courbe est à courbure bornée.*

Remarque. — Il n'est pas indispensable de supposer l'existence des dérivées secondes de M; *il suffit de supposer que le vecteur $\vec{h}$ normal à la surface générale de la famille $\mathfrak{F}$ est fonction continuement dérivable des paramètres α, β, λ_k.* On peut en déduire, par exemple, que les courbes $\mathcal{C}$ du paragraphe précédent sont à rayon de courbure continu.

III. — Familles de Lamé dont les trajectoires orthogonales font partie d'une famille de courbes sous certaines conditions de dérivabilité.

1. *Soit une F. L. P. qui, dans un certain domaine* R *de l'espace x, y, z, est soumise aux hypothèses suivantes :*

Les trajectoires orthogonales $\mathcal{C}$ des surfaces de la famille font partie d'une *famille $\mathcal{F}$ de courbes, dépendant d'un nombre fini de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, chaque courbe de la famille étant paramétrée, dans* R, *de telle sorte que, si*

$$M = M(\theta, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{7}$$

représente l'équation de cette courbe, les dérivées $\overrightarrow{M''_{\theta^2}}$, $\overrightarrow{M''_{\theta\lambda_k}}$ soient continues par rapport à leurs arguments; dans R *les courbes $\mathcal{C}$ sont régulièrement paramétrées, c'est-à-dire que $\overrightarrow{M'_0}$ est $\neq 0$; enfin, au voisinage de chaque courbe $\mathcal{C}$, les paramètres sont essentiels* (même définition que pour les surfaces au paragraphe précédent).

Alors *les surfaces* (u) *sont à courbure bornée, dans* R.

2. Dans R, si v et w sont les deux fonctions définissant les deux autres familles du S. T. O. P., le système (2) peut être remplacé par

$$\mu = \mu(\theta, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{8}$$

où μ, point de coordonnées u, v, w, est fonction continuement dérivable de ses arguments. Par hypothèse, on peut éliminer θ entre les équations du système (8), de telle sorte que le résultat de l'élimination se mette sous la forme

$$F(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0,$$
$$G(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0,$$

où F et G sont continuement dérivables par rapport à leurs arguments.

Par hypothèse, étant donnés v et w, il existe $\lambda_k(v, w)$, $1 \leqq k \leqq n$, tels que

$$\begin{cases} F\big(u, v, w, \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big) = 0, \\ G\big(u, v, w, \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

soient des identités en u, v, w; ce sont les valeurs qui déterminent les courbes.

Je dis que, étant donnés v et w, on peut choisir n points M_i, de paramètres u_i, $1 \leqq i \leqq n$, tels que le tableau formé avec les dérivées

$$\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial F(u_i, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial G(u_i, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \lambda_k}$$

soit de rang n [pour les valeurs $\lambda_k(v, w)$ des paramètres λ]; toutes ces dérivées ne peuvent être nulles, puisque $\mathcal{C}$ n'est pas stationnaire; supposons que le rang du tableau soit, au maximum, $p < n$, il existe donc $M_1, M_2, \ldots, M_p$ pour des valeurs de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$ tels qu'on peut extraire du tableau un déterminant non nul de rang p où interviennent des dérivées partielles de F ou G pour les valeurs précédentes des u par rapport à p des paramètres $\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_p}$ ($k_1, k_2, \ldots, k_p$ étant p des indices des λ); tout déterminant de rang $> p$ étant nul, quel que soit u,

$$dF(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{et} \quad dG(u, v, w, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

est combinaison linéaire des différentiels des F_i et des G_i qui interviennent dans le déterminant non nul; ce qui contredit l'hypothèse.

Donc on peut trouver n valeur de u tel que le tableau soit de rang n.

3. Si l'on dérive formellement les identités obtenues en v et w en remplaçant dans (9) u successivement les n valeurs précédentes, le tableau précédent est le tableau des coefficients $\frac{\partial\lambda_k}{\partial v}$, $\frac{\partial\lambda_k}{\partial w}$; donc on peut résoudre le système par rapport à ces dérivées et les fonctions $\lambda_k(v, w)$ sont fonctions continuement dérivables de v et w.

Mais, alors, le système (8) peut être résolu en θ et, puisque M'_θ est $\neq 0$, θ est continuement dérivable de u, v, w.

$$M = \vec{M}\big(\theta(u, v, w), \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big)$$

représente la transformation

$$M = M(u, v, w).$$

4. Le vecteur normal à la surface (u) est le vecteur $\vec{h} = \frac{\vec{M}'_\theta}{|M'_\theta|}$ et, étant donné que M''_{θ^2}, $M''_{\theta\lambda_k}$ sont continues pour leurs arguments, ainsi que $\lambda_k(v, w)$ pour v et w, ce vecteur est continuement dérivable pour v et w. *Donc les surfaces* (u) *sont des* S_2.

De plus, l'équation qui donne les rayons de courbure s'écrit

$$\frac{(\vec{M}'_v)^2(\vec{M}'_w)^2}{(\rho(u))^2} + \frac{1}{\rho(u)}\Big[(\vec{M}'_v)^2(\vec{h}'_w.\vec{M}'_w) + (\vec{M}'_w)^2(\vec{h}'_v.\vec{M}'_v)\Big] - (\vec{h}'_v.\vec{M}''_w)(\vec{h}'_w.\vec{M}'_v) = 0$$

et, comme M'_v et M'_w sont $\neq 0$ dans R, les rayons de courbure ne sont jamais nuls.

Donc *les surfaces* (u) *sont à courbure bornée, dans* R.

Remarque. — Les courbes $\mathcal{C}$ du paragraphe 1 vérifient les hypothèses posées au début de ce paragraphe et la démonstration, alors donnée, se ramène aisément à celle-ci.

IV. — Lignes de courbure.

1. Dans les cas traités aux trois paragraphes précédents, les dérivées M''_{uv} *et* M''_{uw} *existent et sont continues (donc égales à* M''_{vu} *et* M''_{wu} *respectivement).*

En effet, dans le premier cas,

$$M'_u = \frac{\vec{h}}{F(M, u)}$$

est continuement dérivable par rapport à v et w, puisque h et M le sont.

Dans le deuxième cas,

$$M = M\big(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)\big)$$

et

$$\vec{M}'_u = \vec{M}'_\alpha \alpha'_u + \vec{M}'_\beta \beta'_u + \vec{M}'_{\lambda_1} \lambda'_{1_u} + \ldots + \vec{M}'_{\lambda_n} \lambda'_{n_u};$$

comme

$$\vec{M}'_u . \vec{M}'_\alpha = \vec{M}'_u . \vec{M}'_\beta = 0,$$

donc

$$0 = \big(\vec{M}'_\alpha\big)^2 \alpha'_u + \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_\beta\big) \beta'_u + \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_{\lambda_1}\big) \lambda'_{1_u} + \ldots + \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_{\lambda_n}\big) \lambda'_{n_u},$$
$$0 = \big(\vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_\beta\big) \alpha'_u + \big(\vec{M}'_\beta\big)^2 \beta'_u + \big(\vec{M}'_\beta . \vec{M}'_{\lambda_1}\big) \lambda'_{1_u} + \ldots + \big(\vec{M}'_\beta . \vec{M}'_{\lambda_n}\big) \lambda'_{n_u}.$$

$\vec{M}'_\alpha \wedge \vec{M}'_\beta$ étant $\neq 0$, on peut résoudre par rapport à α'_u et β'_u. Donc des deux fonctions sont dérivables par rapport à v et w, puisque

$$\vec{M}''_{\alpha^2}, \quad \vec{M}''_{\alpha\beta}, \quad \vec{M}''_{\beta^2}, \quad \vec{M}''_{\alpha\lambda_k}, \quad \vec{M}''_{\beta\lambda_k},$$

existent et sont continues, d'où

$$\alpha''_{uv} \quad \text{et} \quad \alpha''_{uw}$$

existent et sont continues; donc M'_u est dérivable continuement par rapport à v et w.

Dans le troisième cas,

$$M = M\big(\theta(u, v, w), \lambda_1(v, w), \ldots, \lambda_n(v, w)\big);$$

donc

$$\vec{M}'_v = \vec{M}'_\theta \theta'_v + \vec{M}'_{\lambda_1} \lambda'_{1_v} + \ldots + \vec{M}'_{\lambda_n} \lambda'_{n_v} \qquad \text{or} \qquad \vec{M}'_v . \vec{M}'_\theta = 0,$$

d'où

$$0 = \big(\vec{M}'_\theta\big)^2 \theta'_v + \big(\vec{M}'_\theta . \vec{M}'_{\lambda_1}\big) \lambda'_{1_v} + \ldots + \big(\vec{M}'_\theta . \vec{M}'_{\lambda_n}\big) \lambda'_{n_v};$$

M'_θ étant $\neq 0$, on peut résoudre par rapport à θ'_v et, comme M''_{θ^2} et $M''_{\theta\lambda_n}$ existent et sont continues, θ'_v est continuement dérivable par rapport à u. Donc M'_v est continuement dérivable par rapport à u, de même M'_w.

2. *Supposons donc* M''_{uv} *et* M''_{uw}, *fonctions continues de* u, v, w, *et étudions les autres dérivées croisées.*

Considérons l'expression suivante :

$$F(\Delta v, \Delta w) = \vec{h}(v, w) . \left[\frac{\vec{M}(v + \Delta v, w + \Delta w) - M(v + \Delta v, w) - M(v, w + \Delta w) + M(u, v)}{\Delta v \, \Delta w}\right]$$

considérée comme fonction de Δv et Δw, soit d'autre part les deux expressions suivantes :

$$G(\Delta w) = \vec{h}(v, w).[M(v + \Delta v, w + \Delta w) - M(v, w + \Delta w)]$$

et

$$H(\Delta v) = \vec{h}(v, w).[M(v + \Delta v, w + \Delta w) - M(v + \Delta w, w)],$$

considérées comme fonctions respectives de Δw et Δv, on a alors les égalités

$$\begin{aligned} F(\Delta v, \Delta w) &= \frac{G(\Delta w) - G(o)}{\Delta v \, \Delta w} = \frac{1}{\Delta v} G'(\theta \, \Delta w) = \frac{H(\Delta v) - H(o)}{\Delta v \, \Delta w} = \frac{1}{\Delta w} H'_{v}(\theta' \Delta v) \\ &= \vec{h}(v, w).\left[\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \, \Delta w) - \vec{M}'_w(v, w + \theta \, \Delta w)\right]\frac{1}{\Delta v} \\ &= \vec{h}(v, w).\left[\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w)\right]\frac{1}{\Delta w}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons les identités

$$\vec{h}.\vec{M}'_v = o \quad \text{et} \quad \vec{h}.\vec{M}'_w = o;$$

par conséquent

$$\vec{h}(v + \Delta v, w + \theta \, \Delta w).\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \, \Delta w) - \vec{h}(v, w + \theta \, \Delta w).\vec{M}'_w(v, w + \theta \, \Delta w) = o,$$

$$\vec{h}(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w).\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w).\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w) = o,$$

ou encore

$$\left[\frac{\vec{h}(v + \Delta v, w + \theta \, \Delta w) - \vec{h}(v, w + \theta \, \Delta w)}{\Delta v}\right].[\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \, \Delta w)]$$
$$+ \vec{h}(v, w + \theta \, \Delta w).\left[\frac{\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \, \Delta w) - \vec{M}'_w(v, w + \theta \, \Delta w)}{\Delta v}\right],$$

$$\left[\frac{\vec{h}(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w)}{\Delta w}\right].\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w)$$
$$+ \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w).\left[\frac{\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w)}{\Delta w}\right].$$

Les premiers « monômes » des premiers membres de ces deux égalités tendent respectivement, lorsque Δv et Δw tendent vers zéro, indépendamment, vers

$$\vec{h}'_v.\vec{M}'_w \quad \text{et} \quad \vec{h}'_w.\vec{M}'_v,$$

donc les quantités

$$K(\Delta v, \Delta w) = \vec{h}(v, w + \theta \, \Delta w).\left[\frac{\vec{M}'_w(v + \Delta v, w + \theta \, \Delta w) - \vec{M}'_w(v, w + \theta \, \Delta w)}{\Delta v}\right]$$

$$L(\Delta v, \Delta w) = \vec{h}(v + \theta' \Delta v, w).\left[\frac{\vec{M}'_v(v + \theta' \Delta v, w + \Delta w) - \vec{M}'(v + \theta' \Delta v, w)}{\Delta w}\right]$$

tendent, dans les mêmes conditions, respectivement vers

$$-\vec{h}'_v.\vec{M}'_w \quad \text{et} \quad -\vec{h}'_w.\vec{M}'_v,$$

les différences F — K et F — L, s'écrivent respectivement

$$-\left[\vec{h}(v, w+\theta\,\Delta w)-\vec{h}(v, w)\right].\left[\frac{\vec{M}'_w(v+\Delta v, w+\theta\,\Delta w)-\vec{M}'_w(v, w+\theta\,\Delta w)}{\Delta v}\right],$$

$$-\left[\vec{h}(v+\theta'\,\Delta v, w)-\vec{h}(v, w)\right].\left[\frac{\vec{M}'_v(v+\theta'\,\Delta v, w+\Delta w)-\vec{M}'_v(v+\theta'\,\Delta v, w)}{\Delta w}\right].$$

Supposons qu'une de ces quantités tende vers zéro, si Δv et Δw tendent vers zéro indépendamment; alors, l'autre également: supposons F — K tendant vers zéro, donc F, donc F — L tend vers une limite, si Δv et Δw tendent vers zéro indépendamment, limite qui est nulle, puisque F — L est nulle, si Δv est nul.

Donc F tend vers

$$-\vec{h}'_v.\vec{M}'_w \quad \text{et} \quad -\vec{h}'_w.\vec{M}'_v$$

qui sont donc égaux.

Or, si l'on dérive l'égalité $M'_v.M'_w = 0$, par rapport à u, on a

$$\vec{M}''_{uv}.\vec{M}'_w+\vec{M}''_{uw}.\vec{M}'_v,$$

ou

$$\vec{h}'_v.\vec{M}'_w+\vec{h}'_w.\vec{M}'_v=0,$$

car

$$\vec{M}''_{uv}=\vec{h}'_v\left|\vec{M}'_u\right|+\vec{h}\frac{\partial}{\partial v}\left|\vec{M}'_u\right| \quad \text{et} \quad \vec{M}''_{uw}=\vec{h}'_w\left|\vec{M}'_u\right|+\vec{h}\frac{\partial}{\partial w}\left|\vec{M}'_u\right|:$$

donc, finalement,

$$\vec{M}''_{uv}.\vec{M}'_w=\vec{M}''_{uw}.\vec{M}'_v=0$$

et ces égalités signifient, en particulier, que

$$\vec{h}'_v.\vec{M}'_w=\vec{h}'_w.\vec{M}'_v=\vec{k}'_u.\vec{M}'_w=\vec{l}'_u.\vec{M}'_v=0, \tag{10}$$

si $\vec{k}$ et $\vec{l}$ sont les vecteurs normaux respectifs des surfaces $v =$ const. et $w =$ const. ($\vec{k}$ étant dérivable avec $\vec{M}'_v$, par rapport à u).

3. Si, avec M. Llensa, on appelle *ligne de courbure sur une surface paratingente, une courbe telle que la surface engendrée par la normale à* S, *s'appuyant sur la courbe, ait un même plan tangent le long d'une normale au voisinage de la courbe, alors les conditions* (10) *signifient que les lignes* $v =$ const., *et* $w =$ const. *sont lignes de courbure sur les surfaces* (u) *et que les trajectoires orthogonales à ces surfaces sont lignes de courbure sur les autres surfaces du système.*

D'où le théorème :

Si une des quantités envisagées ci-dessus tend vers zéro, avec Δv et Δw (considérés comme variant indépendamment) M''_{uv} et M''_{uw} étant supposées continues, alors les surfaces (u) sont coupées suivant des lignes de courbure par les autres surfaces et leurs trajectoires orthogonales sont lignes de courbure sur ces autres surfaces.

4. *L'hypothèse précédente est en particulier vérifiée si le vecteur*

$$\frac{\vec{M}'_{w}(v+\Delta v,\, w+\theta\,\Delta w) - M'(v,\, w+\theta\,\Delta w)}{\Delta v}$$

est borné, si Δv et Δw sont suffisamment petits, donc *si ce vecteur vérifie une condition de Lipschitz* pour v, c'est-à-dire *d'une façon précise, pour chaque valeur (v_0, w_0), il existe un voisinage de cette valeur et un nombre $A > 0$, tels que, si (v, w) appartient à ce voisinage et si Δv et Δw sont suffisamment petits, alors*

$$\left|\vec{M}'_{w}(v+\Delta v,\, w) - \vec{M}'_{w}(v,\, w)\right| < A\,|\Delta v|.$$

Cette condition entraîne, dans les mêmes conditions, que la quantité

$$\vec{n}.[M(v+\Delta v,\, w+\Delta w) - M(V,\, w+\Delta w) - M(v+\Delta v,\, w) + M(v,\, w)]$$

reste inférieure à $|\Delta v\,\Delta w|$, quel que soit le vecteur unitaire $\vec{n}$ (même raisonnement que pour la quantité F au n° 2). Cette quantité, à son tour, entraîne, dans les mêmes conditions, que

$$\vec{n}.\left[\vec{M}'_{v}(v,\, w+\Delta w) - \vec{M}'_{v}(v,\, w)\right] < A\,|\Delta w|,$$

quel que soit le vecteur n, *ce qui entraîne immédiatement que le vecteur M'_v vérifie une condition de Lipschitz par rapport à w. Donc le vecteur*

$$\vec{M}'_{v}\,\frac{(v+\theta'\,\Delta v,\, w+\Delta w) - \vec{M}'_{v}(v+\theta'\,\Delta v,\, w)}{\Delta w}$$

est borné.

5. Les quantités K et L du n° 2 tendant vers zéro, si Δv et Δw tendent vers zéro indépendamment,

$$\vec{h}(v,\, w).\left[\frac{M'_{v}(v,\, w+\Delta w) - M'(v,\, w)}{\Delta w}\right]$$

et

$$\vec{h}(v,\, w).\left[\frac{M'(v+\Delta v,\, w) - M'(v,\, w)}{\Delta v}\right]$$

tendent vers zéro.

Si l'on pose $\vec{P} = \vec{M} + \lambda \vec{M}'_w$, il en résulte que, si λ reste constant et si l'on donne à v un accroissement Δv, la quantité $\vec{h} \cdot \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta v}$ tend vers zéro, avec Δv. Or, puisque $\vec{M}'_w$ vérifie une condition de Lipschitz pour v, on peut prendre λ assez petit pour qu'aucune des limites de $\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta v}$ ne soit nulle, donc chacune des limites de la droite support de ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{h}$. Il en résulte immédiatement que la surface engendrée par la normale à la surface $w = \text{const.}$, s'appuyant sur la courbe $u = \text{const.}$, a son plan tangent le long de $\vec{M}'_w$ perpendiculaire à $\vec{h}$, tout au moins au voisinage de la courbe.

Donc, *cette courbe est ligne de courbure de la surface* $w = \text{const.}$ *Il en est de même, pour les lignes* $u = \text{const.}$ *sur les surfaces* $v = \text{const.}$, d'après (4).

Enfin, supposer une condition de Lipschitz sur $\vec{M}'_v$, c'est supposer une condition de Lipschitz sur $\overrightarrow{\text{Grad}}(v)$. Nous énoncerons donc :

THÉORÈME (Dupin). — *Si, dans un S. T. O. P.,* $\vec{M}''_{uv}$ *et* $\vec{M}''_{uw}$ *existent et sont continues et si* $\overrightarrow{\text{Grad}}(v)$ $\big($*ou* $\overrightarrow{\text{Grad}}(w)\big)$ *vérifie une condition de Lipschitz pour* w (*pour* v), *les lignes d'intersection des surfaces du S. T. O. P. sont lignes de courbure sur chacune des surfaces.*

En particulier, dans les cas traités aux paragraphes 1, 2 et 3, le résultat est valable, si une des conditions de Lipschitz citées est vérifiée.

Remarque. — La condition $M'_w \cdot \frac{(v + \Delta v, w) - \vec{M}'(v, w)}{\Delta v}$ bornée, entraîne la la même condition sur le vecteur dirigeant $\vec{l}$ de $\vec{M}'_w$ et cette condition peut s'exprimer *en disant que les lignes* $u = \text{const.}$ *sont à courbure géodésique bornée sur des surfaces* $w = \text{const.}$

Il y aurait lieu de chercher, si des conditions de ce genre, sur les courbes d'intersection des surfaces d'un S. T. O. P. (par exemple courbure géodésique bornée, d'une façon uniforme, pour les lignes d'intersection de chacune des surfaces, avec les autres surfaces du système) n'entraînent pas la validité du théorème de Dupin.