TINH-QUAT PHAM

Sur les fonctions entières périodiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 11-70
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__11_0>

SUR

LES FONCTIONS ENTIÈRES PÉRIODIQUES

PAR M. PHAM TINH-QUAT.

INTRODUCTION.

La théorie des fonctions entières est, à l'heure actuelle, l'une des plus remarquables de l'analyse, au double point de vue de l'étendue et de la précision des résultats obtenus.

L'étude du module de la fonction a été inaugurée par MM. Borel et Hadamard. Après la notion de genre due à Laguerre, M. Borel a introduit la notion d'ordre qui s'avère plus commode pour rendre compte de la croissance de la fonction et du comportement de la suite de ses zéros.

L'étude des arguments des zéros de la fonction et des valeurs exceptionnelles liées au théorème fondamental de Picard sur le voisinage d'un point singulier essentiel isolé a été abordée avec succès par M. Julia.

Il n'est pas possible de citer ici tous les résultats généraux et remarquables qui ont été obtenus sur les fonctions entières.

Le but de ce travail est d'étudier un cas particulier : les fonctions entières périodiques. Il ne sera question ici que des fonctions d'ordre fini. Le cas des fonctions d'ordre infini, ainsi que le cas des fonctions méromorphes périodiques qui donnent lieu à maintes propriétés analogues à celles des fonctions périodiques d'ordre fini feront l'objet de mes prochains mémoires.

Certaines propriétés des fonctions entières périodiques sont intuitives dès que l'on a établi une correspondance entre ces fonctions et certaine classe de fonctions entières d'ordre nul.

Cependant, les méthodes directes employées ici permettent d'obtenir souvent une grande précision, notamment dans le problème des cercles de remplissage et des directions d'accumulation des zéros de la fonction.

Les deux premiers chapitres traitent de la construction des fonctions entières périodiques à partir de la donnée d'une suite de zéros « fondamentaux » ayant un exposant de convergence fini.

J'arrive aux propositions suivantes :

Toute fonction de genre fini s'exprime par un produit infini de facteurs sinusoïdaux, la convergence de ce produit étant absolue et uniforme dans tout domaine fini.

Toute fonction $f(z)$ de période 2π s'exprime par un produit de deux fonctions entières d'ordre nul, l'une en e^{iz}, l'autre en e^{-iz}.

L'expression de la fonction en produit infini de sinus permet, dans le Chapitre III, d'obtenir une valeur asymptotique du module maximum de la fonction sur un cercle de centre l'origine.

J'obtiens également une expression simple du module de la fonction à l'aide de x et y, valable dans tout le plan, en dehors de petits domaines entourant les zéros, domaines dont j'ai évalué les dimensions maxima.

Une application simple de cette dernière proposition est l'impossibilité pour une fonction entière périodique d'ordre fini d'admettre plus d'une valeur asymptotique.

Le Chapitre IV est consacré à la distribution des valeurs de la fonction et en particulier au cas des fonctions à croissance régulière.

Pour les fonctions ne se réduisant pas à une combinaison finie d'exponentielles, je démontre l'absence des valeurs exceptionnelles finies au sens de Picard. Pour celles qui sont à croissance régulière, il existe ce que j'appelle des domaines de régularité communs à $f(z)$ et $f(z)-x$. Dans un de ces domaines, le rapport des zéros de même rang de ces deux fonctions est fini et d'autant plus voisin de 1 que l'ordre de la fonction $f(z)$ est plus proche de l'unité.

Ce rapport tend effectivement vers 1 dans le cas particulier des fonctions d'ordre 1 à croissance régulière pour lesquelles le rapport $\log r_n : \log n$ finit par être constamment croissant (r_n désigne ici le module de la partie imaginaire du zéro « fondamental » de rang n).

Enfin, le Chapitre V traite des directions de Borel et des cercles de remplissage. Les méthodes employées sont inspirées des travaux de MM. Milloux et Valiron concernant les fonctions entières générales et particulièrement les fonctions d'ordre nul.

Pour les fonctions entières périodiques, toute demi-droite issue de l'origine et située d'un certain côté du plan est une direction de Borel. Pas plus qu'il n'y a de valeurs exceptionnelles finies au sens de Picard, il n'y a de valeurs exceptionnelles finies au sens de M. Borel. En dehors des directions de Borel, je montre l'existence de bandes de largeur arbitrairement petite dans chacune desquelles l'ordre du nombre de zéros de la fonction $f(z)-Z$ est inférieur d'une unité à l'ordre de la fonction, et ce, pour toutes les valeurs de Z sauf deux au plus.

Ces bandes contiennent des cercles de remplissage de rayon arbitrairement petit et d'ordre $\rho - 1$ pour les fonctions d'ordre $\rho + 1$ supérieur à 2.

Pour les fonctions d'ordre inférieur à 2, il existe simplement, dans ces bandes, des domaines de dimensions infiniment petites tels que dans chacun de ces domaines dont le rang est assez grand la fonction prend au moins une fois toute valeur donnée à l'avance.

Ces diverses propositions permettent de retrouver des cas particuliers des propriétés connues des fonctions entières d'ordre nul (théorèmes de MM. Littlewood et Valiron).

En terminant, je voudrais exprimer toute ma gratitude à M. Valiron qui m'a encouragé tout au long de ce travail, et m'a donné, à maintes reprises, de précieux conseils.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. *Définitions.* — Il s'agit ici de fonctions entières à une période. Je désigne par ω la période, réelle ou complexe, et je conviens de ranger les zéros de la forme $a + k\omega$ par modules croissants, par exemple

$$a, \quad a - \omega, \quad a + \omega, \quad a - 2\omega, \quad \ldots$$

Une telle suite est ce que j'appelle une suite primaire, et a le zéro fondamental de la suite primaire. Tout zéro fondamental est situé dans une bande de largeur ω symétrique par rapport à l'origine et perpendiculaire à la droite $O\omega$.

Une fonction entière périodique possède un nombre fini de suites primaires ou en possède une infinité. Je conviens de ranger les zéros fondamentaux tels que les modules des parties imaginaires soient croissants. La suite

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

sera appelée suite fondamentale de la fonction.

J'appelle suite complète de la fonction la suite de tous ses zéros rangés par modules croissants. Il est utile de considérer le tableau (T)

$$\begin{array}{|lllll}
a_1 & a_1 - \omega & a_1 + \omega & a_1 - 2\omega & \ldots \\
a_2 & a_2 - \omega & a_2 + \omega & a_2 - 2\omega & \\
\ldots & & & & \\
a_n & \ldots & & & \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

où les éléments de la première colonne représentent la suite fondamentale de la fonction.

2. *Exposants des diverses suites.* — L'exposant de convergence de la suite primaire est toujours l'unité. La série

$$\left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{a-\omega}\right| + \left|\frac{1}{a+\omega}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{a-p\omega}\right| + \ldots$$

est divergente. D'autre part

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{a-\omega} + \frac{1}{a+\omega} + \ldots + \frac{1}{a-p\omega} + \ldots = \frac{\pi}{\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi a}{\omega}.$$

Je suppose essentiellement que la suite fondamentale a un exposant de convergence fini ρ.

Quel est tout d'abord l'exposant de la suite complète ou du tableau (T)?

Remarque. — Si l'on pose

$$\omega = |\omega|\, e^{i\alpha}$$

la rotation

$$z = u\, e^{i\alpha}$$

ramène la fonction périodique de période ω à une fonction périodique de période réelle $|\omega|$.

Je peux donc supposer, dans toute la suite, et sans restreindre la généralité, que ω est réel.

D'autre part, pour chercher l'exposant de la suite complète, je peux faire une translation parallèle à l'axe réel qui amène le zéro fondamental a_n sur l'axe imaginaire; ceci revient en effet à remplacer les termes de la série positive

$$\sum\sum |a_n \pm p\omega|^{-1}$$

par des infiniment petits équivalents.

La suite fondamentale devient alors

$$ir_1, \quad ir_2, \quad ir_3, \quad \ldots, \quad ir_n, \quad \ldots.$$

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} |ir_n + p\omega|^{-2\mu} = \sum_n\sum_p (r_n^2 + p^2\omega^2)^{-\mu}$$

est de même nature que l'intégrale

$$\iint [r^2(y) + \omega^2 x^2]^{-\mu}\, dx\, dy$$

étendue à tout le demi-plan supérieur; $r(y)$ désigne une fonction continue, positive, décroissante, égale à r_n pour $y = n$. On écarte, bien entendu, le cas échéant, le zéro qui coïncide avec l'origine dans la série double.

L'intégrale s'écrit encore

$$\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^{\infty} [r^2(y) + \omega^2 x^2]^{-\mu}\, dx.$$

En posant

$$\omega x = r \operatorname{tg}\theta$$

on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} (r^2 + \omega^2 x^2)^{-\mu}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega r^{2\mu-1}} \cos^{2\mu-2}\theta\, d\theta.$$

Cette intégrale n'est convergente que si $\mu > \frac{1}{2}$.

Ensuite l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega r^{2\mu-1}}\, dy$$

est de même nature que la série $\Sigma r_n^{1-2\mu}$. Elle est donc convergente si

$$2\mu - 1 > \rho.$$

En résumé la série double est convergente si

$$2\mu > 1 + \rho.$$

Donc *l'exposant de la suite complète est la somme des exposants d'une suite primaire et de la suite fondamentale.*

Il est à remarquer encore que pour $2\mu = 1 + \rho$ la série double est convergente en même temps que la série

$$\Sigma\, |a_n|^{-\rho}.$$

3. *Quelques propriétés du tableau* (T). — Soit

$$A_n = \frac{1}{a_n} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - p\omega} + \frac{1}{a_n + p\omega} = \frac{\pi}{\omega} \operatorname{cotg} \frac{\pi a_n}{\omega}$$

et plus généralement, k étant un entier positif

$$A_n^k = a_n^{-k} + \sum_{p=1}^{\infty} [a_n - p\omega)^{-k} + (a_n + p\omega)^{-k}].$$

Comme cette dernière série est absolument convergente dès que k est supérieur ou égal à 2, on peut encore écrire

$$A_n^k = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (a_n + p\omega)^{-k}.$$

Si l'on écrit

$$A_n = A_n^1$$

en convenant d'associer dans la sommation les termes qui correspondent à deux valeurs symétriques de p, on voit que tous les A_n^k s'obtiennent à partir des A_n par des dérivations par rapport à la variable a_n.

Les dérivations successives donnent

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (z + p\omega)^{-h} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^h \sin^{-h}\frac{\pi z}{\omega}\, P_{h-2}\left(\cos\frac{\pi z}{\omega}\right),$$

$P_{h-2}(u)$ désigne un polynome de degré $h - 2$ par rapport à la variable u. Pour déterminer ce polynome, on a la formule de récurrence

$$h\, P_{h-1} = (1 - u^2)\, P'_{h-2} - h u\, P_{h-2}$$

d'où l'on déduit que le coefficient du terme de plus haut degré de P_{h-2} est

$$\frac{2^{h-2}}{(h-1)!}$$

et que $P_{h-2}(u)$ ne contient que des puissances de u de même parité que h.

$$A_n^k = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^k \sin^{-k}\frac{\pi a_n}{\omega}\, P_{k-2}\left(\cos\frac{\pi a_n}{\omega}\right) \qquad (k \geqq 2).$$

L'hypothèse faite sur la suite fondamentale, savoir qu'elle admet un exposant de convergence fini ρ, fournira des propriétés intéressantes sur le tableau (T).

Je dis que, quelle que soit la valeur de l'entier $k \geqq 2$, et quel que soit ρ, la série

$$A_1^k + A_2^k + A_3^k + \ldots + A_n^k + \ldots$$

est absolument convergente.

En effet, quand n augmente indéfiniment, le rapport de la partie réelle à la partie imaginaire de $\frac{a_n}{\omega}$ tend vers zéro, tandis que le module de ce nombre augmente indéfiniment. Si l'on désigne par $i r_n$ la partie imaginaire de $\frac{a_n}{\omega}$, $\sin\frac{\pi a_n}{\omega}$ et $\cos\frac{\pi a_n}{\omega}$ sont équivalents à

$$\frac{1}{2} e^{|r_n|}$$

et A_n^k est un infiniment petit équivalent à

$$\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^k \frac{2^k}{(k-1)!} e^{-2\pi |r_n|}.$$

La propriété sera démontrée si l'on montre que la série de terme général

$$u_n = e^{-2\pi |r_n|}$$

est convergente quelle que soit la suite r_n pourvu que cette suite admette un exposant de convergence fini.

On peut écrire

$$n^q u_n = e^{-2\pi |r_n| + q \log n}.$$

Or la série de terme général $|a_n|^{-\rho-\varepsilon}$ est convergente, à termes positifs et décroissants.

D'après une propriété connue

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} = 0 \quad (^1).$$

A partir d'une valeur suffisamment grande de n, on a

$$|a_n| > n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} \qquad \text{donc} \qquad |r_n| > \mathrm{A}\, n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}$$

(A constante positive). Ensuite

$$-2\pi |r_n| + q \log n < -2\pi \mathrm{A}\, n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} + q \log n.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers $-\infty$ quand n augmente indéfiniment. Il en est donc de même du premier membre. En prenant q supérieur à 1 on voit que la série de terme général u_n est convergente.

Quant à A_n, il est équivalent à $-\varepsilon_n i \frac{\pi}{\omega}$ quand n tend vers ∞.

$\left(\varepsilon_n = +1\right.$ ou -1 selon que le coefficient de la partie imaginaire de $\frac{a_n}{\omega}$ est positif ou négatif$\left.\right)$.

L'expression

$$\mathrm{A}_n + \varepsilon_n i \frac{\pi}{\omega}$$

est équivalente à

$$-2\varepsilon_n i \frac{\pi}{\omega} e^{-\frac{2\pi |a_n|}{i\omega}}.$$

D'après ce qui précède, la série de terme général

$$\mathrm{A}_n + \varepsilon_n i \frac{\pi}{\omega}$$

est encore absolument convergente.

Je désignerai, dans la suite, par B la somme de cette dernière série, et par B_k la somme de la série de terme général A_n^k.

---

(1) Borel, *Leçons sur les fonctions entières* (Gauthier-Villars, Paris).

CHAPITRE II.

CONSTRUCTION DES FONCTIONS ENTIÈRES PÉRIODIQUES DE GENRE FINI.

4. *Fonctions à suite fondamentale limitée.* — La période de la fonction est supposée égale à 2π.

Le produit infini

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a-2p\pi}\right)$$

où les facteurs sont groupés dans l'ordre

$$1-\frac{z}{a},\quad 1-\frac{z}{a-2\pi},\quad 1-\frac{z}{a+2\pi},\quad \dots$$

est semi-convergent et a pour valeur

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-z)}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Par suite

$$\prod_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a-2p\pi}\right)e^{\frac{z}{a-2p\pi}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-z)}{\sin\frac{1}{2}a}e^{z\cot\frac{1}{2}a}.$$

La convergence du produit infini est absolue et uniforme.

Il suit de là que toute fonction à suite fondamentale limitée est de la forme

$$f(z)=Ce^{F(z)}e^{\left(k-\frac{1}{2}\Sigma\varepsilon_p\right)iz}\prod_{p=1}^{n}\sin\frac{1}{2}(a_p-z)$$

dans laquelle $F(z)$ désigne une fonction entière périodique quelconque de période 2π, C une constante, k un entier arbitraire, ε_p ayant la même signification qu'au nº 3.

Lorsque $F(z)$ est constante, la fonction $f(z)$ est de nature élémentaire et ne fournit aucune transcendante nouvelle. Voici quelques conséquences immédiates qu'il suffit d'énoncer :

Il n'existe pas de fonction réelle entière périodique à une seule suite primaire et à période réelle; plus généralement, toute fonction entière réelle périodique admet un nombre pair de suites primaires si la période est réelle.

Si une fonction entière périodique réelle a toutes ses racines réelles, elle est évidemment à suite fondamentale limitée; elle rentre dans la catégorie précédente et s'exprime par un produit, en nombre pair, de sinus, multiplié par $e^{F(z)}$, $F(z)$ étant une fonction entière réelle périodique et de même période.

5. *Les fonctions générales de genre k.* — Si l'exposant ρ de la suite fondamentale n'est pas un nombre entier, je vais montrer qu'on peut construire effectivement une fonction entière périodique de genre $k < 1 + \rho$ (k désigne l'entier immédiatement inférieur à $1+\rho$) en multipliant le produit canonique de facteurs primaires de genre k admettant les mêmes zéros que la fonction par $e^{Q(z)}$, où $Q(z)$ désigne un polynome de degré k convenablement choisi.

Si ρ est entier, la seule différence est que l'on a $k = \rho$ ou $k = 1+\rho$ selon que ρ rend convergente ou divergente la série des inverses des modules des nombres de la suite fondamentale de la fonction.

Avant de passer au cas général, il est utile de considérer d'abord les fonctions de genre 1.

Supposons donc $\rho < 1$, et soit

$$v_n(z) = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n - 2p\pi}\right)e^{\frac{z}{a_n - 2p\pi}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin\frac{1}{2}a_n}e^{A_n z}.$$

Il est facile de vérifier que $v_n(z)$ tend vers 1 quand n augmente indéfiniment. En effet, le rapport des sinus est équivalent à $e^{\frac{1}{2}\varepsilon_n i z}$, et A_n est équivalent à $-\frac{1}{2}\varepsilon_n i$.

Et

$$v_n(z + 2\pi) = v_n(z)e^{\left(A_n + \frac{1}{2}\varepsilon_n i\right)2\pi}.$$

$v_n(z)$ tend donc à devenir périodique quand n augmente indéfiniment.

Ceci posé, une fonction de genre 1 peut se mettre sous la forme

$$f(z) = Ce^{-Bz}v_1(z)\,v_2(z)\ldots v_n(z)\ldots$$

où B a la signification du n° 3.

Si l'on pose

$$f_n(z) = Ce^{-D_n z}v_1(z)\,v_2(z)\ldots v_n(z)$$

avec

$$D_n = \sum_1^n\left(A_p + \frac{1}{2}\varepsilon_p i\right)$$

c'est-à-dire

$$f_n(z) = Cg_1(z)\,g_2(z)\ldots g_n(z)$$

avec

$$g_p(z) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a_p - z)}{\sin\frac{1}{2}a_p}e^{-\frac{i}{2}\varepsilon_p z}$$

on obtient une suite de fonctions $f_n(z)$ toutes périodiques à suite fondamentale limitée.

Il est facile de voir que cette suite de fonctions $f_n(z)$ tend uniformément vers la limite $f(z)$ dans tout domaine fini.

En effet, pour montrer que le produit infini

$$\prod_1^\infty g_p(z)$$

est absolument et uniformément convergent, il suffit de faire voir que la série de terme général

$$w_n(z) = g_n(z) - 1$$

est absolument et uniformément convergente. Or on a

$$w_n(z) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin\frac{1}{2}a_n} e^{-\frac{i}{2}\varepsilon_n z} - 1 = \frac{e^{-i\varepsilon_n z} - 1}{1 - e^{-i\varepsilon_n a_n}}.$$

Le numérateur de la dernière fraction est borné quand z décrit un domaine fini quelconque. Si l'on pose

$$a_n = b_n + \varepsilon_n i r_n \qquad (r_n \text{ positif})$$

on voit que le carré du module du dénominateur s'écrit

$$e^{2r_n} - 2e^{r_n}\cos b_n + 1.$$

Quand z décrit un domaine fini, la valeur absolue de $w_n(z)$ est majorée par

$$\frac{A}{e^{2r_n} - 1}$$

(A désigne une certaine constante indépendante de z).

D'après le n° 3, cette dernière série est convergente, ce qui démontre la proposition.

La fonction entière périodique de genre 1 la plus générale s'obtient en multipliant $f(z)$ par e^{tiz}, t désignant un entier arbitraire. D'où :

Théorème. — *Toute fonction entière périodique de genre* 1 *est la limite d'une suite de fonctions de même nature, à suite fondamentale limitée, cette limite étant atteinte uniformément dans tout domaine fini quelconque.*

Si l'on avait posé

$$F_n(z) = Ce^{-Bz} v_1(z)\, v_2(z) \ldots v_n(z)$$

on aurait eu une suite de fonctions dont aucune n'est périodique et dont la limite est la fonction périodique $f(z)$.

Passons maintenant aux fonctions de genre k. Posons

$$v_n(z) = \prod_{p=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n - 2p\pi}\right) e^{\frac{z}{a_n - 2p\pi} + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n - 2p\pi}\right)^k}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin \frac{1}{2} a_n} e^{A_n z + \frac{1}{2} A_n^2 z^2 + \ldots + \frac{1}{k} A_n^k z^k}.$$

On vérifie comme tout à l'heure que $v_n(z)$ tend à devenir périodique quand n augmente indéfiniment. Soit

$$V(z) = \lim_{n=\infty} v_1(z)\, v_2(z) \ldots v_n(z).$$

Une fonction de genre k est de la forme $f(z) = Ce^{Q(z)}V(z)$ où $Q(z)$ désigne un polynome de degré k au plus. En écrivant que $f(z)$ a pour période 2π on obtient immédiatement pour $Q(z)$ la valeur suivante

$$Q(z) = -(B + ti)z - \frac{1}{2} B_2 z^2 - \ldots - \frac{1}{k} B_k z^k$$

à une constante additive près, t désignant un entier arbitraire.

Si l'on pose maintenant

$$Q_n(z) = -\left[\sum_1^n \left(A_p + \frac{1}{2}\varepsilon_p\right) + ti\right] z - \frac{1}{2} \sum_1^n A_p^2 z^2 - \ldots - \frac{1}{k} \sum_1^n A_p^k z^k,$$

$$f_n(z) = Ce^{Q_n(z)} \prod_{p=1}^n v_p(z) = Ce^{tiz} \prod_{p=1}^n g_p(z),$$

$g_p(z)$ ayant la même signification que plus haut, on obtient une suite de fonctions toutes périodiques, $f_n(z)$, à suite fondamentale limitée. Cette suite tend uniformément, comme le prouve la démonstration de tout à l'heure, vers la limite $f(z)$, quand z décrit un domaine fini quelconque. D'où :

Théorème. — *Toute fonction entière périodique de genre k est la limite d'une suite de fonctions de genre 1 à suite fondamentale limitée, cette limite étant atteinte uniformément dans tout domaine fini.*

Si l'on avait posé, comme plus haut

$$F_n(z) = Ce^{Q(z)} v_1(z)\, v_2(z) \ldots v_n(z)$$

on aurait eu une suite de fonctions dont aucune n'est périodique et dont la limite est la fonction périodique $f(z)$ de genre k.

6. *Expression de $f(z)$ à l'aide de $u = e^{iz}$.* — Posons

$$u_p = e^{ia_p}.$$

La fonction $f_n(z)$ du numéro précédent, débarrassée du facteur exponentiel e^{tiz} s'écrit

$$f_n(z) = \mathrm{C}\, u^{-h_n} \prod_{p=1}^{n} \frac{u - u_p}{1 - u_p} \qquad \text{avec} \quad 2h_n = \sum_{1}^{n} (1 + \varepsilon_p).$$

Pour simplifier le langage, j'appelle zéro de la première catégorie, tout zéro situé du côté des y positifs, et zéro de la deuxième catégorie, tout zéro situé du côté des y négatifs.

La contribution à h_n d'un zéro de la deuxième catégorie est nulle, celle d'un zéro de la première catégorie est l'unité. L'entier h_n désigne par suite le nombre de zéros de la première catégorie.

En séparant les facteurs correspondant aux deux catégories de zéros, on obtient

$$f_n(z) = \mathrm{C} \prod \frac{1 - \dfrac{u_p}{u}}{1 - u_p} \prod \frac{1 - \dfrac{u}{u_p}}{1 - \dfrac{1}{u_p}}.$$

Le premier produit ne renferme que les zéros de la première catégorie, le second les zéros de la deuxième catégorie.

Je vais montrer maintenant que lorsque n augmente indéfiniment, les deux produits en $\frac{1}{u}$ et en u tendent respectivement vers deux frontières entières, l'une en $\frac{1}{u}$ l'autre en u, ces deux fonctions étant toutes les deux de genre zéro et d'ordre zéro.

Pour un zéro de la deuxième catégorie, on a

$$\frac{1}{u_p} = e^{-ib_p} e^{-r_p}.$$

Comme b_p est borné, la série de terme général $\frac{1}{u_p}$ est absolument convergente, puisque la suite r_p a un exposant fini. Donc le produit en u dans l'expression $f_n(z)$ tend uniformément vers une limite, qui est une fonction entière de u de genre zéro, soit

$$\mathrm{G}(u) = \prod^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_p}\right).$$

Un zéro de la première catégorie donne

$$u_p = e^{ib_p} e^{-r_p}.$$

La série de terme général u_p est encore absolument convergente; le produit en $\frac{1}{u}$ dans l'expression $f_n(z)$ tend encore uniformément vers une limite quand u décrit un domaine quelconque ne comprenant pas l'origine. Cette limite est une fonction entière en $\frac{1}{u}$ de genre zéro également, soit

$$F\left(\frac{1}{u}\right)=\prod^{\infty}\left(1-\frac{u_p}{u}\right).$$

Par suite, on a

$$f(z)=\frac{C}{F(1)G(1)}F\left(\frac{1}{u}\right)G(u).$$

Théorème. — *Toute fonction entière périodique de genre fini s'exprime par un produit de deux fonctions entières, l'une en $\frac{1}{u}$, l'autre en u, toutes les deux étant de genre zéro et d'ordre zéro.*

7. *Correspondance entre les fonctions entières périodiques et les fonctions entières d'ordre nul.* — Le quotient $\sin\frac{1}{2}(a_n-z):\sin\frac{1}{2}a_n$ ne change pas quand on remplace a_n par $a_n+2p\pi$. On peut remplacer un zéro fondamental par un zéro quelconque de la même suite primaire sans changer les deux fonctions $F\left(\frac{1}{u}\right)$ et $G(u)$.

Je conviens d'appeler encore suite positive et suite négative les deux suites fondamentales et fonction positive et fonction négative associées à $f(z)$ les deux fonctions $F\left(\frac{1}{u}\right)$ et $G(u)$.

Réciproquement, étant données deux fonctions entières $F(v)$ et $G(u)$ on peut faire correspondre une fonction entière périodique de période 2π et admettant comme zéros les nombres

$$-i\log u_p \quad \text{et} \quad i\log v_p$$

(u_p et v_p désignent les zéros de G et F), soit

$$f(z)=AF\left(\frac{1}{u}\right)G(u) \qquad (u=e^{iz}).$$

La fonction $f(z)$ sera d'ordre fini si F et G sont d'ordre nul et si en plus les exposants de convergence des suites $\log|u_p|$ et $\log\left|\frac{1}{v_p}\right|$ sont finis.

Remarque. — On peut encore mettre $f(z)$ sous la forme d'une somme de deux fonctions entières d'ordre nul en $\frac{1}{u}$ et u respectivement. En effet la transformation $u = e^{iz}$ transforme $f(z)$ en une fonction de u admettant $u = 0$ comme point singulier essentiel, donc

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n u^n = \mathrm{P}\left(\frac{1}{u}\right) + \mathrm{Q}(u)$$

avec

$$\mathrm{P}(v) = \sum_{1}^{\infty} c_{-n} v_n; \qquad \mathrm{Q}(u) = \sum_{0}^{\infty} c_n u^n.$$

Il est facile maintenant d'avoir des relations simples entre les modules maxima des fonctions f, F, G, P, Q sur des cercles centrés à l'origine.

Si $|z| = r$, on a

$$e^{-r} \leqq |u| \leqq e^r$$

et

$$\mathrm{M}(f, r) \leqq \mathrm{M}(\mathrm{P}, e^r) + \mathrm{M}(\mathrm{Q}, e^r),$$
$$\log \mathrm{M}(f, r) \leqq \log \mathrm{M}(\mathrm{F}, e^r) + \log \mathrm{M}(\mathrm{G}, e^r),$$

la notation $\mathrm{M}(f, r)$ désigne le module maximum de $f(z)$ sur le cercle $|z| = r$.

Si $|u| = e^{r'}$ $\left(r' = \sqrt{r^2 - \pi^2}\right)$ on a $\mathrm{I}z = -r'$ et

$$|f(z)| \leqq \mathrm{M}(f, r),$$
$$\mathrm{M}(\mathrm{Q}, e^{r'}) + \mathrm{O}(1) \leqq \mathrm{M}(f, r),$$
$$\log \mathrm{M}(\mathrm{G}, e^{r'}) + \mathrm{O}(1) \leqq \log \mathrm{M}(f, r),$$

et des inégalités analogues pour P et F. Par suite

$$\mathrm{M}(f, r') \leqq \mathrm{M}(\mathrm{P}, e^{r'}) + \mathrm{M}(\mathrm{Q}, e^{r'}) \leqq 2\mathrm{M}(f, r) + \mathrm{O}(1).$$
$$\log \mathrm{M}(f, r') \leqq \max[\log \mathrm{M}(\mathrm{F}, e^{r'}), \log \mathrm{M}(\mathrm{G}, e^{r'})] \leqq \log \mathrm{M}(f, r) + \mathrm{O}(1).$$

Ces inégalités permettent facilement d'avoir l'ordre de la fonction $f(z)$ si l'on connaît l'ordre d'infinitude des coefficients du développement de Taylor de P, Q ou de F, G,

Par exemple, si l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \log \left|\frac{1}{c_{-n}}\right|}{\log n} = 1 + k$$

on en déduit, d'après un calcul connu, en remarquant que pour toute fonction entière d'ordre fini ou nul le logarithme du module maximum est asymptotiquement équivalent au logarithme du terme maximum [1],

$$\overline{\lim_{\mathrm{R}=\infty}} \frac{\log_2 \mathrm{M}(\mathrm{P}, \mathrm{R})}{\log_2 \mathrm{R}} = 1 + \frac{1}{k}.$$

---

(1) VALIRON, *Thèse*, Paris, 1914.

Le calcul peut être conduit de la façon suivante : si l'on pose $g(n) = \log\left|\frac{1}{c_{-n}}\right|$ l'hypothèse se

De même, si l'on a une égalité analogue pour c_n (où k est remplacé par k'), on déduit une égalité analogue pour $M(Q, R)$.

L'exposant de convergence de la suite des zéros fondamentaux de $f(z)$ est par suite égal au plus grand des deux nombres $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k'}$ (*cf.* Chap. III).

On obtient des conclusions identiques en raisonnant sur les fonctions F et G.

CHAPITRE III.

LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES PERIODIQUES DE GENRE FINI.

8. On sait, depuis les travaux fondamentaux de Poincaré et de M. Borel, comment se comporte le module maximum d'une fonction entière de genre fini.

Si ρ désigne l'ordre de la fonction, on a

$$r^{\rho-\varepsilon} < \log M(r) < r^{\rho+\varepsilon},$$

la seconde inégalité étant satisfaite à partir d'une valeur suffisamment grande de r, la première, pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r.

Si la série

$$\Sigma |a_n|^{-\rho},$$

est convergente, on peut même remplacer la seconde inégalité par

$$\log M(r) < \varepsilon r^{\rho}.$$

Divers auteurs ont amélioré les limites du module maximum $M(r)$ en faisant des hypothèses plus ou moins restrictives sur la suite des zéros.

---

traduit par

$$(k+1-\varepsilon)\log n < \log g(n) < (k+1+\varepsilon)\log n,$$

la seconde inégalité est satisfaite pour une infinité d'indices n_p. Le logarithme du terme maximum, soit $\log m(R)$, satisfait à

$$n\log R - n^{k+1+\varepsilon} < \log m(R) < n\log R - n^{k+1-\varepsilon}.$$

Le maximum du dernier terme est égal à $A\,(\log R)^{1+\frac{1}{k-\varepsilon}}$ ($A = \text{const.}$).

Si l'on se borne aux valeurs de R correspondant aux indices n_p le maximum de $\log m(R)$ est supérieur au maximum du premier terme, soit

$$B(\log R)^{1+\frac{1}{k+\varepsilon}}$$

pour ces valeurs de R; ce qui démontre le résultat.

Je rappelle notamment les résultats de M. Boutroux (1)

$$\log M(r) < h\,N,$$

où N désigne le nombre de zéros de module inférieur à r, et h une constante. Ce résultat est valable dans le cas où l'ordre ρ n'est pas entier. Si l'ordre ρ est entier, la limite trouvée est un peu moins bonne, les arguments des zéros semblent devoir intervenir.

Dans le cas particulier des fonctions entières périodiques où les zéros fondamentaux se comportent comme ceux d'une fonction orientée, il est clair qu'on peut espérer resserrer les limites de $\log M(r)$; comme la notion de genre disparaît complètement ici en faveur de la notion d'ordre, on peut s'attendre *a priori* à ce qu'il n'y ait aucune différence entre le cas de l'ordre entier et le cas de l'ordre non entier.

On sait, d'autre part, qu'on peut construire des fonctions entières d'ordre fini, de croissance très irrégulière. D'une façon précise, $\log M(r)$ peut osciller entre r^p et r^q où p et q désignent deux nombres positifs arbitraires.

On verra qu'il n'en est rien pour les fonctions entières périodiques, et que la limite inférieure de $\log M(r)$ ne peut descendre au-dessous de $A\,r$, A désignant un nombre positif donné à l'avance.

Une autre notion importante qui caractérise la croissance de la fonction est le module de la fonction sur une droite parallèle aux suites primaires. Si pour le module maximum on obtient, en général, les mêmes limites sur un cercle de rayon r centré à l'origine et sur une parallèle aux suites primaires dont la distance à l'origine est équivalente à r, on obtient dans le second cas une limite très précise pour le module minimum, si l'on exclut du plan des petits rectangles entourant les zéros et dont les dimensions tendent vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Les méthodes que j'emploie, dans ce chapitre, sont toutes inspirées des méthodes de M. Borel, devenues depuis longtemps classiques.

9. La période de la fonction est encore supposée égale à 2π.

Je pose

$$a_n = b_n + \varepsilon_n i\, r_n \qquad (r_n \text{ positif}),$$
$$z = x + i y,$$

et j'appelle facteur primaire sinusoïdal la quantité

$$g(a_n, z) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin\frac{1}{2}a_n}\, e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_n i z}.$$

(1) Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Thèse*, Paris 1903, *Acta Math.*, t. 28, 1904).

On a immédiatement

$$g(a_n, z) = \frac{1 - e^{i\varepsilon_n(a_n - z)}}{1 - e^{i\varepsilon_n a_n}}.$$

Dans le cas où $\varepsilon_n = 1$, le numérateur s'écrit

$$1 - e^{y - r_n}\cos(b_n - x) - i\,e^{y - r_n}\sin(b_n - x).$$

Dans le cas où $\varepsilon_n = -1$, il suffit de changer de signe

$$b_n, \quad x \quad \text{et} \quad y.$$

Le carré du module du numérateur s'écrit

$$e^{2(y - r_n)} - 2\,e^{y - r_n}\cos(b_n - x) + 1,$$

b_n étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Le module du numérateur est par suite inférieur à

$$e^{y - r_n} + 1 \quad \text{ou encore à} \quad e^{r - r_n} + 1.$$

On a donc, quels que soient a_n et z

$$|g(a_n, z)| < \frac{1 + e^{r - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|}.$$

Soit à chercher maintenant une limite inférieure du module maximum de $g(a_n, z)$.

Si l'on fait $b_n = x_1 \pm \pi$, le numérateur de g se réduit à

$$1 + e^{y_1 - r_n},$$

où y_1 désigne la valeur de y correspondant à x_1.

Ceci prouve que la valeur du module maximum de g est au moins égale *à*

$$\frac{1 + e^{y_1 - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|}.$$

Le point x_1, y_1 est sur l'arc situé à l'intérieur de la bande hachurée, et si l'on désigne par ε l'angle que fait Oy avec le rayon aboutissant à l'une des extrémités de ces arcs, on a

$$y_1 > r\cos\varepsilon, \qquad \sin\varepsilon = \frac{\pi}{r}.$$

Quand r augmente indéfiniment ε tend vers zéro. On peut donc choisir r assez grand pour que, η étant donné à l'avance positif, on ait

$$y_1 > r - \eta.$$

Ceci revient en effet à écrire

$$\eta > r(1 - \cos\varepsilon) = r\left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots\right),$$

ε étant du premier ordre par rapport à $\frac{1}{r}$, cette inégalité est bien vérifiée pour r suffisamment grand. Par suite on aura constamment, pour des valeurs suffisamment grandes de r

$$e^{y_1 - r_n} > \lambda\, e^{r - r_n} \quad (\lambda = e^{-\eta}).$$

Comme η est positif et quelconque, λ désigne alors un nombre fixe quelconque compris entre o et 1, aussi voisin de 1 que l'on voudra.

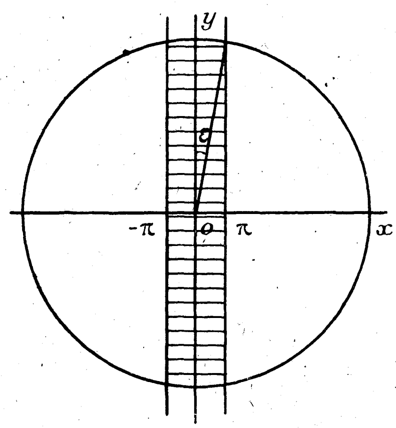

Fig. 1.

En résumé, le module maximum du facteur primaire sinusoïdal est compris entre

$$\frac{1 + \lambda e^{r - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|} \quad \text{et} \quad \frac{1 + e^{r - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|},$$

lorsque le module de z, soit r est constant et suffisamment grand.

Si l'on suppose maintenant que z décrit une parallèle aux suites primaires, c'est-à-dire que y est constant, on voit immédiatement que le maximum du module du facteur primaire sinusoïdal est égal à

$$\frac{1 + e^{\varepsilon_n y - r_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|},$$

tandis que le *minimum* du module de ce même facteur est égal à

$$\frac{|1 - e^{\varepsilon_n y - r_n}|}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|}.$$

Je désignerai par $M(y)$ le maximum du module de la fonction $f(z)$ pour y constant, et je suppose essentiellement que $f(z)$ est débarrassée du facteur exponentiel

$$e^{2i t\pi \frac{z}{\omega}}.$$

Avant de continuer, je démontre une propriété des suites des nombres arithmétiques croissants.

10. Si ρ désigne l'exposant de convergence de la suite

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots,$$

on sait qu'à partir d'une certaine valeur entière $n \geqq n_0$, on a constamment

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}},$$

tandis que l'inégalité

$$r_n < n^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}}$$

est satisfaite pour une infinité de valeurs de l'entier n.

La seconde inégalité est satisfaite comme la première à partir de $n \geqq n_0$ si l'ordre d'infinitude de r_n est déterminé.

La propriété que j'ai en vue est la suivante :

Théorème. — *L'ensemble des nombres entiers n pour lesquels on a*

$$r_n < n^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}} \tag{I}$$

et l'ensemble des nombres entiers n pour lesquels on a

$$r_{n+1} - r_n > (n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} \tag{II}$$

admettent une infinité d'éléments communs.

Il est tout d'abord aisé de montrer que l'inégalité (II) est satisfaite pour une infinité de valeurs de n.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi; à partir d'une certaire valeur n_0 on aura constamment

$$\begin{aligned}
r_{n_0+1} - r_{n_0} &< (n_0+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - n_0^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
r_n - r_{n-1} &< n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - (n-1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}, \\
r_{n+1} - r_n &< (n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - n^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}},
\end{aligned}$$

d'où en additionnant membre à membre

$$r_{n+1} < (n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} + \text{const.} < \mathrm{A}\,(n+1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}.$$

L'exposant de la suite r_n ne serait pas ρ.

On voit donc que l'inégalité (II) est, comme l'inégalité (I), satisfaite pour une infinité de valeurs de n. Mais rien ne prouve, *a priori*, qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles ces deux inégalités sont satisfaites *simultanément*.

Le théorème qui va être établi consiste en ce que cette circonstance se produit effectivement.

On peut écarter le cas où l'ordre d'infinitude de la suite r_n est déterminé; car alors la propriété est manifeste, l'inégalité (I) étant satisfaite constamment à partir d'une certaine valeur de n.

On peut donc supposer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles l'inégalité (I) n'est pas satisfaite. Soient

$$N_1, \quad N_2, \quad N_3, \quad \ldots, \quad N_p, \quad \ldots$$

les indices, en nombre infini, pour lesquels

$$r_{N_p} < N_p^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}}.$$

Les indices $N_p + 1$ ne peuvent pas tous vérifier cette inégalité sans quoi, à partir de $p \geqq q$, la suite des N coïnciderait avec la suite des entiers, cas que l'on vient d'écarter.

On a le droit de supposer, quitte à supprimer certains nombres de la suite des N qu'aucun des nombres de la forme $N_p + 1$ ne vérifie (I).

Autrement dit, chaque fois que l'on a

$$r_{N_p} < N_p^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}},$$

on a également

$$r_{N_p+1} > (N_p + 1)^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}},$$

d'où

$$r_{N_p+1} - r_{N_p} > (N_p + 1)^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}} - N_p^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}} > (N_p + 1)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}} - N_p^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}.$$

Les nombres

$$N_1, \quad N_2, \quad \ldots, \quad N_p, \quad \ldots,$$

considérés sont donc les indices qui vérifient simultanément les inégalités (I) et (II).

On peut encore écrire, pour ces indices

$$r_{n+1} - r_n > k\, n^{\frac{1}{\rho+1}-1},$$

k désignant une certaine constante.

11. Soient

$$a'_1 a'_2 \ldots a'_h \ldots,$$
$$a''_1 a''_2 \ldots a''_k \ldots,$$

les suites positive et négative associées à $f(z)$ (n° 7). J'appelle h et k les nombres de zéros fondamentaux de ces deux suites, zéros dont la partie imaginaire est moindre en module que

$$\sqrt{r^2 - \pi^2},$$

c'est-à-dire

$$\begin{matrix} r'_h \\ r''_k \end{matrix} \leqq \sqrt{r^2 - \pi^2} < \begin{matrix} r'_{h+1} \\ r''_{k+1} \end{matrix}.$$

Pour r donné, j'appelle

$$nr - \sum_1^n r_p$$

la plus grande des deux quantités

$$hr - (r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_h),$$
$$kr - (r''_1 + r''_2 + \ldots + r''_k).$$

Théorème. — *Pour toute fonction entière périodique, le logarithme du module maximum sur le cercle* $C(|z| = r)$ *est égal à*

$$nr - \sum_1^n r_p + k(r) r^{\rho+\varepsilon},$$

$k(r)$ *désigne une certaine fonction de r infiniment petite avec* $\frac{1}{r}$.

Si la fonction est à croissance régulière, ou bien si elle est d'ordre inférieur à deux, le logarithme du module maximum est équivalent à

$$nr - \sum_1^n r_p,$$

pour r infiniment grand.

Démonstration. — Le point P du cercle C où la fonction $f(z)$ atteint son module maximum est situé sur l'un ou l'autre des deux arcs $C'C''$ intérieurs à la bande $|x| \leqq \pi$, sinon on peut trouver un point P' dans cette bande et intérieur à C tel que $f(P) = f(P')$, et il en résulte que

$$M(r') \geqq M(r) \qquad (r' = OP' < r),$$

ce qui est absurde puisque l'on sait que $M(r)$ est une fonction croissante et convexe de $\log r$.

Sur l'arc C' (y positif) $\log f(z)$ ne dépend que de $F\left(\frac{1}{u}\right)$ puisque $G(u)$ est voisin de $G(0)$; de même sur C'' (y négatif) $\log f(z)$ ne dépend que de $G(u)$.

Il est aisé d'avoir une borne inférieure de $\log M(r)$. On a vu au n° 7 que

$$\log M(f, r) > \max \text{ de } [\log M(F, e^{r'}), \log M(G, e^{r'})] + O(1),$$
$$r' = \sqrt{r^2 - \pi^2}.$$

L'inégalité de Jensen donne immédiatement, grâce à la définition des nombres h et k,

$$\log M(F, e^{r'}) > hr - \sum_{1}^{h} r'_p + \log|F(O)|,$$

$$\log M(G, e^{r'}) > kr - \sum_{1}^{k} r'' + \log|G(O)|.$$

D'où, d'après les notations posées au début de ce numéro

$$\log M(r) > nr - \sum_{1}^{n} r_p + O(1).$$

Pour avoir une borne supérieure de $\log M(r)$ remarquons qu'il suffit de supposer que le maximum du module est atteint sur C' et de ne considérer par conséquent que la suite positive. Dans le cas contraire, on remplacera la suite positive par la suite négative.

Déterminons, en plus au nombre h, le nombre entier m par les inégalités

$$(m-1)^t \leqq r < m^t \qquad \left(t = \frac{1}{\rho' + \varepsilon}\right),$$

ρ' désigne l'exposant de convergence de la suite positive.

Comme

$$r'_m > m^t,$$

pour m suffisamment grand, on a, à partir d'une certaine valeur de r

$$r'_m > r > \sqrt{r^2 - \pi^2} > r'_h,$$

c'est-à-dire

$$m > h.$$

Écrivons

$$M(r) < A \prod_{p=1}^{h} \prod_{p=h+1}^{m} \prod_{p=m+1}^{\infty} (1 + e^{r - r'_p}).$$

Et comme à partir de

$$p \geqq h+1,$$

$$r - r'_p < r - \sqrt{r^2 - \pi^2} < \log(e-1)$$

(la dernière inégalité a lieu si r est suffisamment grand, ce que nous supposons), on a

$$1 + e^{r - r'_p} < e;$$

une limite supérieure du second produit est e^{m-h}.

D'autre part, une limite supérieure du logarithme du troisième produit est

$$e^r \sum_{m+1}^{\infty} e^{-r'_p}.$$

Or

$$\sum_{m+1}^{\infty} e^{-r'_p} < \int_m^{\infty} e^{-x^t}\, dx.$$

On a immédiatement une limite supérieure de l'intégrale en remarquant que, dans l'intervalle d'intégration

$$e^{-x^t} < e^{-x^t}(tx^t - 1),$$

puisque tx^t finit par dépasser tout nombre donné, t étant positif, si m est suffisamment grand.

Le second membre de l'inégalité est la dérivée de $-xe^{-x^t}$, par suite l'intégrale est moindre que me^{-m^t}.

Le troisième produit est donc limité supérieurement par

$$e^{m e^{r-m^t}} < e^m.$$

Quant au premier produit, il est inférieur à

$$e^h e^{hr - \Sigma r'_p},$$

car

$$1 + e^{r-r'_p} < 2e^{r-r'_p} < e\, e^{r-r'_p},$$

quand p est moindre que h.

En définitive, on a

$$\log \mathrm{M}(r) < hr - \sum_1^h r'_p + 2m + \log \mathrm{A}.$$

Comme

$$r^{\rho'+\varepsilon} < m \leqq r^{\rho'+\varepsilon} + 1,$$

on peut écrire

$$2m + \log \mathrm{A} = \mu(r) r^{\rho'+\varepsilon},$$

puis

$$\mu(r) r^{\rho'+\varepsilon} = \nu(r) r^{\rho'+\varepsilon'},$$

$\nu(r)$ étant une fonction infiniment petite avec $\frac{1}{r}$, ε' un autre nombre donné à l'avance, plus grand que ε.

Finalement $\log \mathrm{M}(r)$ est inférieur au plus grand des deux nombres

$$hr - \sum_1^h r'_p + \nu(r) r^{\rho'+\varepsilon'},$$

$$kr - \sum_1^k r''_p + \nu(r) r^{\rho''+\varepsilon''}.$$

En tenant compte de la limite inférieure de $\log M(r)$, et en remarquant que ρ' et ρ'' sont aux plus égaux à ρ, on peut écrire

$$\log M(r) = nr - \sum_1^n r_p + k(r) r^{\rho+\varepsilon},$$

$k(r)$ désigne une certaine fonction de r infiniment petite avec $\frac{1}{r}$.

Chaque terme du second membre de l'égalité précédente est moindre que $r^{1+\rho+\varepsilon}$. En rapprochant cette propriété du fait que l'exposant de convergence de la suite complète des zéros de $f(z)$ est $1+\rho$, on déduit (Chap. IV, n° 15)

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = 1 + \rho.$$

D'après les propriétés de la plus grande des limites, il existe des valeurs de r indéfiniment croissantes assurant l'inégalité

$$\log M(r) < r^{1+\rho+\varepsilon},$$

en même temps que

$$\log M(r) > r^{1+\rho-\varepsilon}.$$

Pour ces valeurs de r on peut écrire

$$\log M(r) \sim nr - \sum^n r_p,$$

car le terme $k(r) r^{\rho+\varepsilon}$ est négligeable devant $r^{1+\rho-\varepsilon}$.

On peut donc compléter le théorème par la proposition suivante :

Il existe des valeurs de r indéfiniment croissantes pour lesquelles le logarithme du module maximum est équivalent à la plus grande des deux quantités

$$hr - \sum^h r'_p, \qquad kr - \sum^k r''_p.$$

Maintenant si la fonction est à croissance régulière, cette équivalence a lieu constamment à partir d'une certaine valeur de r.

La dernière partie du théorème annoncé résultera d'une propriété qui sera établie au numéro suivant.

Cherchons maintenant le nombre total N de zéros de module inférieur à r.

La suite primaire positive de rang p donne $\frac{1}{\pi}\sqrt{r^2 - r_p'^2}$ tranches de 2π, donc, comme le radical est supérieur à $r - r'_p$, on a

$$N > C\left(nr - \sum^n r_p\right).$$

Par suite, si l'on se borne aux fonctions à croissance régulière, on a

$$\log M(r) < A.N.$$

C'est le résultat de M. Boutroux, et ici ce résultat est valable que ρ soit entier ou non. On sait que dans la théorie générale de M. Boutroux, quand ρ n'est pas entier ce résultat est valable; mais si ρ est entier, il faut remplacer, en général, le second membre par

$$AN \log N + \ldots.$$

Considérons une fonction d'ordre 1 pour laquelle

$$r_n > e^{n^\sigma},$$

$$nr < r(\log r)^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\log M(r) < r(\log r)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

La limite supérieure trouvée pour $\log M(r)$ est meilleure que

$$r^{1+\varepsilon}.$$

12. *Les limites de la croissance irrégulière.* — Je vais montrer que, quelle que soit la distribution des zéros, on a, à partir d'une valeur suffisamment grande de r,

$$\log M(r) > Ar.$$

A étant une constante donnée, aussi grande que l'on voudra.

Je vais montrer d'abord qu'à partir d'une certaine valeur de r l'inégalité

$$hr - \sum_1^h r'_p > Br,$$

est constamment satisfaite, B, comme A, est un nombre positif donné à l'avance que l'on peut toujours supposer entier.

L'inégalité à démontrer s'écrit

$$(r - r'_{B+1}) + (r - r'_{B+2}) + \ldots + (r - r'_h) > r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_B.$$

Si B est fixé, le second membre est une quantité fixe, et le premier membre est supérieur à $r - r'_{B+1}$. Cette dernière différence augmente indéfiniment avec r; l'inégalité à démontrer est vérifiée à partir d'une valeur suffisamment grande de r.

Une inégalité analogue concerne la suite négative.

Ceci posé, la limite inférieure trouvée au numéro précédent pour $\log M(r)$ montre que

$$\log M(r) > Ar.$$

Il résulte de là, comme il a été annoncé à la fin du numéro précédent, que pour les fonctions d'ordre inférieur à 2, on a constamment à partir d'une certaine valeur de r

$$\log M(r) \sim nr - \sum^n r_p,$$

quel que soit le mode de croissance de la fonction, car alors

$$k(r)\, r^{\rho+\varepsilon},$$

est négligeable devant Ar, ρ étant inférieur à 1.

13. *Le module sur une parallèle aux suites primaires.* — Je rappelle la convention faite relativement au facteur primaire sinusoïdal

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a_n - z)}{\sin\frac{1}{2}a_n} e^{-\frac{1}{2}i\varepsilon_n z},$$

où $\varepsilon_n = 1$ ou -1 selon que le coefficient de i dans a_n est positif ou négatif. Dans le cas où ce coefficient est nul, on peut prendre indifféremment $+1$ ou -1.

J'appelle encore suite primaire de première catégorie la suite positive, et suite de deuxième catégorie la suite négative.

Quand z décrit une parallèle à Ox, d'ordonnée y, il est clair que seules les suites d'ordonnées de même signe que y interviennent pour donner l'ordre de grandeur au module de la fonction. Ainsi, si y est positif, dans l'expression

$$f(z) = F\left(\frac{1}{u}\right) G(u),$$

u tend vers zéro, $G(u)$ tend vers 1. L'ordre de grandeur de $f(z)$ est celui de $F\left(\frac{1}{u}\right)$.

Encore une remarque évidente : l'exposant de la suite

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots,$$

est égal à ρ; des deux suites de première et deuxième catégorie, l'une au moins a un exposant de convergence égal à ρ, l'autre pouvant avoir un exposant inférieur.

Ainsi, d'un côté de Ox, la fonction se comporte comme une fonction d'ordre $1+\rho$, tandis que de l'autre côté la fonction peut se comporter comme une fonction d'ordre inférieur.

La propriété suivante va préciser ce mode de croissance :

Théorème. — *Pour toute fonction entière périodique d'ordre fini, on a*

$$\log|f(z)| = n|y| - \sum_1^n r_p + k(x, y)\,|y|^{\rho+\varepsilon},$$

pourvu que l'on exclue du plan des cercles entourant les zéros et dont le rayon tend vers zéro quand le rang augmente indéfiniment.

n désigne le nombre de suites primaires d'ordonnée inférieure à $|y|$ en valeur absolue et de même signe que y; $k(x, y)$ désigne une certaine fonction dont la valeur absolue est inférieure à tout nombre donné à l'avance, pourvu que $|y|$ soit suffisamment grand.

On peut se borner aux suites positives et supposer y positif.

On a vu que

$$M(y) \leqq A_1 \prod_{p=1}^{\infty} (1 + e^{y-r_p}),$$

$$m(y) \geqq A_1 \prod_{1}^{\infty} |1 - e^{y-r_p}|,$$

$m(y)$ désigne le minimum du module de $f(z)$ pour y constant.

Pour évaluer une limite supérieure de $M(y)$, il suffit de reprendre la démonstration du numéro précédent où l'on remplacera r par y. Par suite

$$\log M(y) < ny - \sum_{1}^{n} r_p + \mu(y) y^{\rho+\varepsilon}.$$

Pour évaluer une limite inférieure de $m(y)$, astreignons-nous d'abord à prendre

$$y - r_n > \eta_n,$$
$$r_{n+1} - y > \eta_n,$$

avec

$$\eta_n = r_n^{-A}.$$

A désigne un nombre positif donné quelconque.

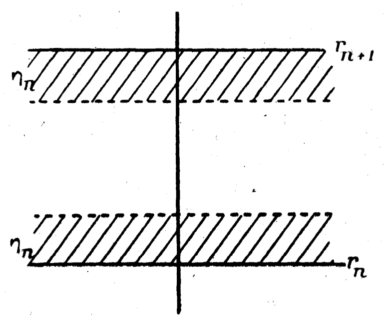

Fig. 2.

Soit encore l'entier m défini par

$$(m-1)^k \leqq y + \log 2 < m^k \qquad \left(k = \frac{1}{\rho + \varepsilon}\right).$$

On a encore, comme au n° 11, $n < m$.

Puis

$$m(y) \geqq A_1 \prod_{1}^{n} (e^{y-r_p} - 1) \prod_{n+1}^{m} \prod_{m+1}^{\infty} (1 - e^{y-r_p}).$$

Pour le troisième produit $r_p - y > \log 2$

$$e^{r_p - y} < e^{-2} < \frac{1}{2}.$$

Et comme

$$1 - u > e^{-2u},$$

dès que u reste compris entre o et $\frac{1}{2}$, on a

$$\prod_{m+1}^{\infty}(1 - e^{y - r_p}) > e^{-2e^y \sum_{m+1}^{\infty} e^{-r_p}}.$$

Mais

$$\sum_{m+1}^{\infty} e^{-r_p} < m\, e^{-m^k}.$$

Une limite inférieure du troisième produit est

$$e^{-2me^{y-m^k}} \qquad \text{ou} \qquad e^{-2m}.$$

Une limite inférieure du second produit est

$$(1 - e^{-\eta_n})^{m-n}$$

car tous les facteurs sont supérieurs à

$$1 - e^{y - r_{n+1}} > 1 - e^{-\eta_n}.$$

Pour avoir une limite inférieure du premier produit, il suffit de remarquer que l'on a, puisque $p \leqq n$

$$e^{y - r_p} - 1 > (1 - e^{-\eta_n})\, e^{y - r_p}.$$

Ceci revient en effet à écrire

$$y - r_p - \eta_n > 0,$$

ce qui est conforme au choix de y.

Une limite inférieure du premier produit est par suite

$$(1 - e^{-\eta_n})^n\, e^{ny - \Sigma r_p}.$$

D'où, en définitive

$$\log m(y) > ny - \Sigma r_r + m[\log(1 - e^{-\eta_n}) - 2] + \log A_1.$$

Comme on a pris

$$\eta_n = r_n^{-A} > y^{-A},$$

le coefficient de m dans l'avant-dernier terme de l'inégalité précédente est supérieur à $B \log y$ (B constante négative).

Comme

$$m < 1 + (y + \log 2)^{\rho + \varepsilon},$$

on peut écrire, en majorant le nombre ε

$$\log m(y) > ny - \sum_1^n r_p + \nu(y)\, y^{\rho+\varepsilon},$$

$\nu(y)$ étant une fonction dont la valeur absolue peut être prise aussi petite que l'on veut, pourvu que y soit suffisamment grand.

En comparant les bornes obtenues pour $\log \mathrm{M}(y)$ et $\log m(y)$, on voit que

$$\log |f(z)| = ny - \sum_1^n r_p + u(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon}$$

$u(x, y)$ est analogue à $\nu(y)$.

L'égalité est valable à l'extérieur des bandes de largeur infiniment petite entourant les suites primaires.

Maintenant si l'on prend z dans la bande d'ordre n, le module du facteur

$$g(a_n, z),$$

est compris entre

$$\frac{\left|2 \sin \frac{1}{2}(b_n - x)\right|}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|} \quad \text{et} \quad \frac{1 + e^{2\eta_n}}{|1 - e^{i\varepsilon_n a_n}|}.$$

La contribution de ce facteur $g(a_n, z)$ dans $\log |f(z)|$ se traduit par l'adjonction d'une certaine fonction $h(x, y)$

$$\log |f(z)| = ny - \sum_1^n r_p + u(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon} + h(x, y)$$

$h(x, y)$ étant compris entre

$$\log \left|\sin \frac{1}{2}(b_n - x)\right| \quad \text{et} \quad \log(1 + e^{2\eta_n}),$$

à une constante près. La seconde expression est bornée.

Si l'on prend

$$\left|\frac{1}{2}(b_n - x)\right| > e^{-y^\rho},$$

ce qui revient à exclure du plan des domaines entourant les zéros et de dimensions infiniment petites, $h(x, y)$ sera inférieur en module au module de

$$u(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon},$$

lorsque y sera suffisamment grand. La somme des deux derniers termes de l'égalité précédente est bien de la forme

$$k(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon},$$

Le théorème est par suite établi.

Le terme complémentaire est négligeable devant

$$ny - \Sigma r_p$$

dans les deux cas suivants :

ou bien la fonction est d'ordre inférieur à 2; ou bien la fonction est à croissance régulière.

Dans l'un ou l'autre de ces deux cas, on peut écrire

$$\log|f(z)| \sim ny - \Sigma r_p.$$

Il est à remarquer que si la fonction contient des suites négatives, le facteur $G(u)$ correspondant à ces suites reste borné en module pour y positif, le théorème n'est pas altéré. De plus, on voit que ρ désigne l'exposant de la suite fondamentale positive.

14. *Application.* — Soit

$$f(z) = F\left(\frac{1}{u}\right) = A + A_1 \frac{1}{u} + \ldots \qquad (u = e^{iz}).$$

Tout chemin s'éloignant indéfiniment du côté des y négatifs est un chemin de détermination A pour $f(z)$.

Il est facile de voir dans le cas général qu'*une fonction entière périodique de genre fini ne peut admettre plus d'une valeur asymptotique*.

En effet, d'après le théorème précédent, si la suite fondamentale positive est illimitée, $\log|f(z)|$ augmente indéfiniment pour une suite de valeurs de y indéfiniment croissantes et positives, il ne saurait avoir de chemin de détermination s'éloignant indéfiniment du côté des y positifs.

Peut-il exister un chemin C de détermination a restant compris entre deux parallèles à Ox? (du côté des x positifs, par exemple).

Soit la droite $x = X$ (X donné). A tout nombre ε_1 il correspond un x_1 tel que $x > x_1$ entraîne

$$|f(z) - a| < \varepsilon_1$$

($z = x + iy$ désigne l'affixe d'un point du chemin C). Soit k_1 le plus petit entier positif tel que

$$X + 2k_1\pi > x_1,$$

C coupe la droite

$$x = X + 2k_1\pi$$

en M_1. Marquons sur la droite $x = X$ le point P_1 d'affixe z_1 et de même ordonnée que M_1. Alors

$$|f(z_1) - a| < \varepsilon_1.$$

A toute suite

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots,$$

tendant vers zéro, il correspond sur la droite $x = X$ une suite de points

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n, \quad \ldots,$$

à ordonnées finies donc admettant un point d'accumulation P d'affixe z tel que

$$f(z) - a = 0.$$

La fonction $f(z) - a$ admet par suite un zéro à distance finie sur toute droite parallèle à Oy, ce qui est manifestement impossible.

Un tel chemin de détermination a ne saurait donc exister.

De plus, on voit que si les deux suites fondamentales positive et négative sont infinies, la fonction $f(z)$ n'admet aucune valeur asymptotique.

Remarquons encore que dans le cas où $f(z) = F\left(\frac{1}{u}\right)$ la fonction entière correspondante est d'ordre nul, tout point du plan des u correspond à un point du plan des z du côté des y positifs et tout chemin de détermination pour F correspond à un chemin de détermination pour f situé du côté des y positifs. Or, on sait, d'après un théorème classique de Wimann que les fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ n'admettent aucune valeur asymptotique.

CHAPITRE IV.

LA DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA FONCTION $f(z)$.

15. J'ai dit au Chapitre précédent (n° 11) que l'ordre du produit canonique $f(z)$ était $1 + \rho$. Il n'est pas inutile de préciser ce point.

L'inégalité

$$\log M(r) < r^{1+\rho+\varepsilon},$$

satisfaite pour r suffisamment grand prouve d'abord que l'ordre de la fonction est au plus $1 + \rho$. D'autre part, l'exposant de convergence de la suite complète des zéros est $1 + \rho$. On conclut de là que l'ordre de la fonction est exactement $1 + \rho$.

Donc pour une fonction entière périodique d'ordre fini, il y a égalité entre l'ordre et l'exposant de convergence de la suite des zéros, car l'introduction d'un facteur exponentiel

$$e^{Az},$$

ne modifie pas l'ordre du produit canonique $f(z)$.

Dans l'expression

$$\log M(r) = nr - \sum_{1}^{n} r_p + k(r)\, r^{\rho+\varepsilon},$$

le dernier terme

$$k(r)\,r^{\rho+\varepsilon},$$

est négligeable devant les deux premiers dans tous les intervalles qu'on pourrait appeler de croissance régulière, c'est-à-dire où $\log M(r)$ reste compris entre

$$r^{1+\rho-\varepsilon} \quad \text{et} \quad r^{1+\rho+\varepsilon}.$$

Par contre, il pourrait intervenir dans les régions de croissance irrégulière.
Mais même dans les régions de croissance régulière le terme

$$\Sigma r_p,$$

est loin de se comporter d'une façon simple par rapport au terme

$$nr.$$

Des exemples simples de fonctions à croissance régulière montrent que pour $\rho = 0$, le terme

$$\Sigma r_p,$$

est en général négligeable devant nr; que pour ρ fini et non nul

$$\Sigma r_p,$$

est une fraction de nr; tandis qu'il est facile de construire des fonctions à croissance tant régulière qu'irrégulière pour lesquelles le rapport

$$\frac{\Sigma r_p}{nr}$$

a effectivement pour limites d'indétermination 0 et 1.

Je me borne à étudier ce rapport, avec quelques détails, pour les fonctions à croissance régulière.

16. Soit la suite r_n telle que

$$n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} < r_n < n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon};$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Soit

$$u_n = r_n\, n^{-\alpha},$$

où α désigne un nombre donné, positif, et *inférieur* à $\frac{1}{\rho}$.

La suite u_n n'est pas bornée supérieurement, mais elle *n'est pas en général constamment croissante*.

Marquons les points M_n de coordonnées n et u_n et construisons, comme l'indique la figure ci-dessus, une ligne brisée dont les sommets sont certains points M_n et dont la pente des côtés est positive ou nulle.

Tous les points M_n sont situés ou bien sur les côtés ou bien en dessous des côtés de la ligne.

Les indices n_i correspondant aux sommets M_{n_i} de cette ligne sont appelés les indices principaux de la suite.

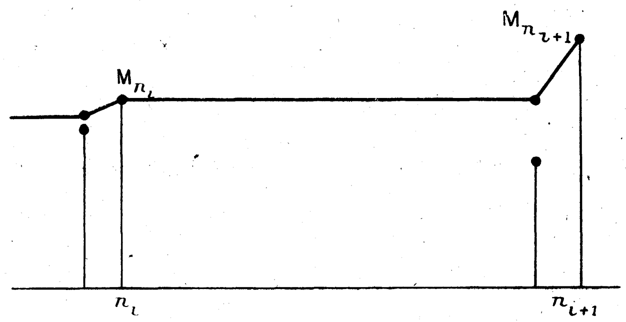

Fig. 3.

Tous les points M_n finissent par être à l'intérieur de la région délimitée par les courbes

$$y = x^{\lambda-\varepsilon} \quad \text{et} \quad y = x^{\lambda+\varepsilon} \qquad \left(\lambda = \frac{1}{\rho} - \alpha\right).$$

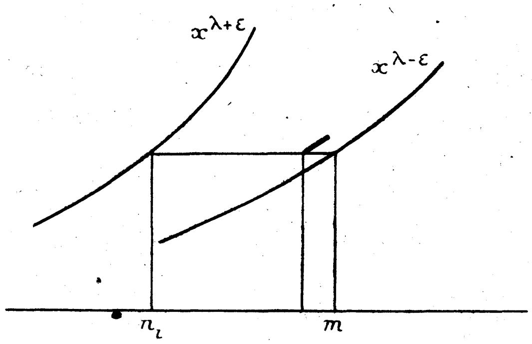

Fig. 4.

Cherchons une limite supérieure du rapport de deux indices principaux consécutifs

$$n_i \quad \text{et} \quad n_{i+1}.$$

Posons

$$n_{i+1} = n_i + p_i + 1.$$

On a

$$u_{n_i+p_i} < u_{n_i},$$

sans quoi $n_i + p_i$ serait indice principal ou bien il y aurait d'autres indices principaux entre n_i et n_{i+1}.

Si m désigne l'abscisse du point de la courbe

$$y = x^{\lambda-\varepsilon},$$

dont l'ordonnée est égale à u_{n_i} c'est-à-dire

$$n_i^{\lambda+\varepsilon} = m^{\lambda-\varepsilon},$$

on a

$$n_{i+1} \leqq m+1$$

$$\frac{n^{i+1}}{n_i} \leqq \frac{m+1}{n_i} \leqq \frac{1+n_i^{1+\varepsilon'}}{n_i},$$

$$\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{\lambda-\varepsilon},$$

ε' comme ε est un nombre très petit, inférieur à tout nombre donné à l'avance, pourvu que λ soit fixé.

Limite supérieure de $\sum_1^n r_p$. — Désignons par

$$y = x^{\psi(x)},$$

la fonction qui représente la ligne brisée précédente; c'est une fonction non décroissante, et l'on a

$$u_n \leqq n^{\psi(n)},$$

l'égalité est assurée pour une infinité d'indices (les indices principaux) et

$$\lambda - \varepsilon < \psi(x) < \lambda + \varepsilon.$$

La fonction $\psi(x)$ continue tend donc vers λ quand x augmente indéfiniment.

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ présente une infinité dénombrable de points de discontinuité de première espèce, il en est donc de même de $\frac{d\psi}{dx}$;

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{\psi(x)}{x}\right).$$

D'autre part, la non-décroissance de y se traduit par

$$-\psi'(x)\, x \log x \leqq \psi(x);$$

on a

$$\sum_1^n r_p \leqq \int^n x^{\psi(x)+\alpha}\, dx + n^{\psi(n)+\alpha}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int^n x^{\psi+\alpha}\, dx + \int^n (\psi+\alpha)\, x^{\psi+\alpha}\, dx = n^{\psi(n)+\alpha+1} - \int^n x^{\psi+\alpha+1}\psi' \log x\, dx.$$

La seconde intégrale s'écrit

$$\int^n (\psi+\alpha)\, x^{\psi+\alpha}\, dx = \left(\frac{1}{\rho} + \omega\right)\int^n x^{\psi+\alpha}\, dx,$$

ω étant une fonction de n infiniment petite avec $\frac{1}{n}$.

Le premier membre de l'égalité est égale à

$$\left(1+\frac{1}{\rho}+\omega\right)\int^{n} x^{\psi+\alpha}\,dx;$$

puis

$$\int^{n} x^{\psi+\alpha}(-x\psi'\log x)\,dx < \int^{n} x^{\psi+\alpha}\psi\,dx < \left(\frac{1}{\rho}-\alpha+\varepsilon\right)\int^{n} x^{\psi+\alpha}\,dx;$$

d'où finalement

$$(1+\alpha+\omega_1)\int^{n} x^{\psi+\alpha}\,dx < n^{\psi(n)+\alpha+1}.$$

Et comme

$$n^{\psi(n)+\alpha+1}$$

est infiniment grand par rapport à $n^{\psi(n)+\alpha}$ on peut écrire

$$\sum_{1}^{n} r_p < \frac{1+\varepsilon'}{1+\alpha}\, n^{\psi(n)+\alpha+1}.$$

Comme α peut être choisi aussi voisin de $\frac{1}{\rho}$ que l'on veut, on peut remplacer, dans l'expression précédente,

$$\frac{1+\varepsilon'}{1+\alpha} \quad \text{par} \quad \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\rho}}.$$

Et

$$\frac{\Sigma r_p}{nr} \leqq \frac{\Sigma r_p}{nr_n} < \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\rho}}\,\frac{n^{\psi(n)}}{u_n}.$$

Pour un indice principal $n=n_i$ on a $u_n=n^{\psi(n)}$. Pour un indice $n=n_i+q$ tel que n_i soit principal et $\frac{q}{n_i}$ infiniment petit, par exemple $q \leqq n_i^{1-\varepsilon_1}$, on a, puisque $r_{n_i+q} \geqq r_{n_i}$,

$$(n_i+q)^{\alpha}\, u_{n_i+q} \geqq n_i^{\alpha}\, u_{n_i},$$

$$\frac{u^{n_i}}{u_{n_i+q}} = \frac{n_i^{\psi(n_i)}}{u_{n_i+q}} = \frac{(n_i+q)^{\psi(n_i+q)}}{u_{n_i+q}} \leqq \left(\frac{n_i+q}{n_i}\right)^{\alpha}.$$

D'après le choix de q la dernière fraction tend vers 1 quand n_i augmente indéfiniment.

On a donc, pour les indices tels que n_i ou n_i+q,

$$(1) \qquad \frac{\sum_{1}^{n} r_p}{nr} < \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{\rho}}.$$

Considérons maintenant deux indices principaux consécutifs n_i et n_{i+1}; on a vu que

$$n_i < n_{i+1} < 1 + n_i^{1+\varepsilon'}.$$

De deux choses l'une, ou bien

$$n_i < n_{i+1} < n_i + n_i^{1-\varepsilon_1},$$

et tous les indices entre n_i et n_{i+1} satisfont à l'inégalité (1), ou bien

$$n_i + n_i^{1-\varepsilon_1} < n_{i+1} < n_i^{1+\varepsilon'}$$

et le rapport $\frac{n^{\psi(n)}}{u_n}$ pour les indices n supérieurs à $n_i + n_i^{1-\varepsilon_1}$ n'est pas nécessairement voisin de 1. Le raisonnement employé ne montre pas que l'inégalité (1) est satisfaite pour de tels indices.

Si donc, le rapport de deux indices principaux consécutifs n'est pas infiniment voisin de 1, il pourrait exister, *a priori*, des indices intermédiaires pour lesquels on ne peut rien dire du rapport $\frac{\Sigma r_p}{nr}$ sinon qu'il est inférieur à 1.

Il en est ainsi, s'il existe, quelque grand que soit n, une racine multiple d'ordre q, de rang n tel que q soit très grand par rapport à n.

On peut cependant chercher un ordre de grandeur des intervalles de r pour lesquels l'inégalité (1) est satisfaite.

Soit r une valeur telle que l'indice n correspondant soit principal; $r + \Delta r$ la valeur correspondant à l'indice immédiatement inférieur à $n + n^{1-\varepsilon_1}$. Dans tout l'intervalle $r + \Delta r$ l'inégalité (1) est satisfaite. Comme

$$r^{\rho-\varepsilon} < n < r^{\rho+\varepsilon},$$
$$(r + \Delta r)^{\rho-\varepsilon} < n + n^{1-\varepsilon_1} < (r + \Delta r)^{\rho+\varepsilon},$$

Δr est de l'ordre de $r^{1-\varepsilon'}$.

Ainsi, si r correspond à un indice principal, l'inégalité (1) est satisfaite dans tout un intervalle d'épaisseur Δr infiniment grande avec r.

En résumé, pour les fonctions à croissance régulière, il existe une infinité de couronnes r, $r + \Delta r$ indéfiniment croissantes et d'épaisseur infiniment grande dans lesquelles on a

$$\log M(r) = A n r,$$

A étant une certaine fonction dont la valeur est comprise entre

$$\frac{1 - \varepsilon''}{1 + \rho} \quad \text{et} \quad 1.$$

De plus, l'intervalle entre deux couronnes consécutives (distance des circonférences intérieures) est moindre que $r^{1+\varepsilon_2} - r$, puisque si n est indice principal, l'indice principal suivant est moindre que $n^{1+\varepsilon'}$, ε_2 désignant un certain nombre qui peut être choisi à l'avance pourvu que l'on ait fixé λ c'est-à-dire α.

En d'autres termes, si r est une valeur qui correspond à un indice principal, la valeur qui correspond à l'indice principal suivant est moindre que $r^{1+\varepsilon_1}$.

Remarque. — Dans le cas particulier où il existe un nombre α compris entre 0 et $\frac{1}{\rho}$ tel que la suite

$$u_n = r_n n^{-\alpha},$$

soit constamment croissante à partir d'un certain rang n, tous les indices sont principaux à partir de ce rang et l'inégalité

$$\frac{\Sigma r_p}{nr} < \frac{1+\varepsilon}{1+\alpha},$$

est constamment satisfaite à partir d'une valeur suffisamment grande de n.

Cas des fonctions d'ordre 1 *à croissance régulière.* — Tout ce qui a été dit précédemment subsiste sauf qu'il faut remplacer, dans l'inégalité (1), $\frac{1}{\rho}$ par α, où α désigne un nombre positif, fixe, qui peut être choisi aussi grand que l'on voudra.

Autrement dit, dans les couronnes déjà mentionnées on a

$$\frac{\Sigma r_p}{nr} < \eta,$$

η désigne un nombre donné, aussi petit que l'on veut.

17. *Hypothèse particulière.* — Si l'on suppose que le rapport

$$\Phi(n) = \frac{\log r_n}{\log n},$$

finit par être constamment croissant, on a

$$\int^n x^{\Phi(x)}\,dx < \frac{1}{1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon}\, n^{\Phi(n)+1},$$

car la dérivée du second membre s'écrit

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon}\, n^{\Phi(n)+1}\left[\frac{\Phi(n)+1}{n} + \Phi'(n)\log n\right]$$

et l'inégalité à assurer s'écrira encore

$$\left(1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right) n^{\Phi(n)} < [\Phi(n)+1]\, n^{\Phi(n)} + n^{\Phi(n)+1}\Phi'(n)\log n,$$

ou

$$\frac{1}{\rho} - \varepsilon - \Phi(n) < n\Phi'(n)\log n,$$

ce qui a effectivement lieu, car le premier membre finit par être négatif et le second membre est positif.

Par suite l'inégalité (1) est satisfaite pour toutes les valeurs de r au delà d'une certaine limite.

Et dans le cas encore plus particulier des fonctions d'ordre 1 le rapport

$$\frac{\Sigma r_p}{nr},$$

tend vers o lorsque r augmente indéfiniment.

Autrement dit, pour de telles fonctions $\log M(r)$ est équivalent à nr.

18. *Étude d'un exemple.* — Voici un exemple de fonction à croissance irrégulière.

Considérons, avec M. Borel, la suite des entiers définis de la façon suivante :

$$\begin{gathered} n_1 = 1, \\ e^{n_1} \leqq n_2 - 1 < e^{n_1} + 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{n_{p-1}} \leqq n_p - 1 < e^{n_{p-1}} + 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Soit la ligne brisée joignant les points d'abscisses n_i situés sur la courbe exponentielle

$$y = e^x,$$

aux points d'abscisses $n_i - 1$ situés sur la droite $y = x$.

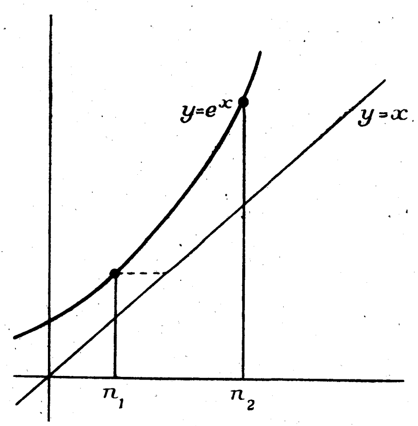

Fig. 5.

Définissons la suite r_n telle que les points de coordonnées n, r_n sont tous situés sur la ligne brisée précédente. La suite r_n est non décroissante et admet pour exposant de convergence l'unité.

Envisageons une fonction entière périodique, d'ordre 2, de période 2π, et dont la suite fondamentale correspond à la suite r_n qui vient d'être définie.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$n_{p-1} = a; \qquad n_p = b; \qquad n_{p+1} = c;$$
$$n = b + \mathrm{N} < c.$$

On voit facilement que

$$\sum_{1}^{n} r_p = \mathrm{N}e^b(1+\varepsilon).$$

Le rapport

$$\frac{\Sigma r_p}{n r_p}$$

est alors équivalent à

$$\frac{\mathrm{N}}{b+\mathrm{N}}.$$

Comme N peut varier de o à $c-b$, c'est-à-dire peut être infiniment grand par rapport à b, on voit que les limites d'intermination du rapport $\frac{\Sigma r_p}{n r_n}$, par suite celles de $\frac{\Sigma r_p}{nr}$ sont effectivement o et 1.

Si l'on prend

$$b + \mathrm{N} < c - 1,$$

le signe égalité étant exclu, on a

$$r \sim r_b \sim e^b; \quad n \sim (\log r + \mathrm{N}),$$

et $nr - \Sigma r_p$ est au plus de l'ordre de $r \log r$. Dans l'expression de $\log \mathrm{M}(r)$ du n° 11 le terme complémentaire $k(r) r^{\rho+\varepsilon}$ peut contribuer à donner l'ordre de grandeur au module. Quoi qu'il en soit, la fonction se comporte, dans ces intervalles, comme une fonction d'ordre 1.

Mais si l'on prend

$$n = b + \mathrm{N} = c - 1,$$

on a

$$n \sim c \sim e^b.$$

Posons

$$r = e^b + \mathrm{R} < e^c.$$

Pour des valeurs de r infiniment voisines de e^b ou e^c on voit facilement que $nr - \Sigma r_p$ est encore de l'ordre de $r \log r$.

Mais pour des valeurs de r telles que

$$\mathrm{R} = (e^b)^{\mathrm{A}} \sim n^{\mathrm{A}},$$

A désignant un nombre supérieur à 1, on a

$$nr \sim n^{1+\mathrm{A}},$$
$$\Sigma r_p \sim \mathrm{N}e^b \sim (e^b)^2 \sim n^2.$$

Donc le terme Σr_p est négligeable devant n^{1+A}; par suite

$$nr - \Sigma r_p \sim n^{1+A} \sim r^{\frac{1+A}{A}}.$$

Le logarithme du module maximum se comporte alors comme une fonction d'ordre $\frac{(1+A)}{A}$.

L'inégalité

$$\log M(r) > r^{2-\varepsilon}$$

est satisfaite toutes les fois que A est compris entre

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

19. *La distribution des valeurs de la fonction.* — D'après ce qui a été dit au Chapitre précédent, si une fonction entière périodique n'est pas à suite fondamentale limitée, $\log M(r)$ ne saurait être égal à kr où k désigne une fonction bornée de r; puisque si ρ est inférieur à 1 on a constamment $\log M(r) > A.r$ à partir d'une valeur suffisamment grande de r, et si ρ n'est pas nul il existe une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes assurant l'inégalité

$$\log M(r) > r^{1+\rho-\varepsilon}.$$

Pour les fonctions à suite fondamentale limitée, au contraire, $\log M(r)$ reste équivalent à $n_0 r$ à partir d'une valeur suffisamment grande de r, n_0 désignant le nombre de suites primaires de la fonction d'un certain signe.

Par suite, une égalité de la forme

$$\log M(r) = k.r,$$

où k désigne une fonction bornée de r caractérise les fonctions à suite fondamentale limitée.

Si l'on considère maintenant la fonction

$$f(z) - x,$$

où x est une constante donnée, l'ordre de cette fonction est naturellement égal à celui de $f(z)$. Il en résulte que l'exposant de convergence de la suite des zéros de cette fonction est $1+\rho$. Dans le cas où ρ est nul la suite fondamentale ne peut être limitée sans quoi le logarithme du module maximum de $f(z) - x$ par suite de $f(z)$ est équivalent à Ar (cas sans intérêt).

On déduit de là le théorème suivant :

Théorème. — *Pour toute fonction entière périodique ne se réduisant pas à une combinaison finie d'exponentielles, il ne saurait y avoir de valeurs exceptionnelles finies au sens de Picard.*

Application. — Supposons que $f(z)$ ne comporte que des suites négatives. Elle s'écrit $f(z) = G(u)$, $G(u)$ désigne une fonction entière en u d'ordre 0 et de genre o. On sait qu'une telle fonction ne peut admettre de valeurs exceptionnelles au sens de Picard. L'application du théorème précédent nous montre qu'en plus si R_n désigne le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction $G(u)$ et si R'_n désigne le module dn $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction $G(u) - v$ (où v désigne une constante arbitraire), la série de terme général

$$(\log R'_n)^{-\rho-\varepsilon} \qquad \text{comme} \qquad (\log R_n)^{-\rho-\varepsilon}$$

est convergente.

Autrement dit, non seulement on peut affirmer que l'exposant de convergence de la suite des zéros de $G(u) - v$ est nulle, mais que l'exposant de convergence de la suite de leurs logarithmes est ρ, c'est-à-dire le même que celui de la suite des logarithmes des zéros de $G(u)$.

Nature des suites primaires de $f(z) - x$. Cas particulier. — Supposons d'abord que $f(z)$ n'a que des suites négatives.

$$f(z) = G(u).$$

A chaque zéro de $f(z) - x$ correspond un zéro de $G(u) - v$; à une suite positive de $f(z) - x$ correspond un zéro de $G(u) - v$ de module inférieur à 1.

Comme $G(u)$ ne peut admettre qu'un nombre fini de zéros de module inférieur à 1, $f(z) - x$ n'admet qu'un nombre fini de suites primaires négatives.

Cas général. — On a vu au n° 13 que

$$\log|f(z)| = n|y| - \Sigma r_p + k(x, y)|y|^{\rho+\varepsilon},$$

égalité valable en dehors des domaines entourant les zéros et de dimensions infiniment petites quand le rang de la suite primaire augmente indéfiniment.

L'expression ρ qui intervient dans cette égalité désigne l'exposant de la suite des zéros fondamentaux situés du même côté que z par rapport à l'axe Ox.

Ainsi, du point de vue de la croissance du module de la fonction, tout se passe comme si l'on a affaire à une fonction d'ordre $1 + \rho$.

Cet ordre peut être inférieur à l'ordre réel de la fonction.

Convenons de dire que dans la région envisagée, la fonction est d'ordre relatif $1 + \rho$. Il est clair que des deux ordres relatifs de chaque côté de Ox, l'un au moins est égal à l'ordre réel de la fonction.

Cela dit, si l'on considère les deux fonctions

$$f(z) \qquad \text{et} \qquad f(z) - x,$$

de chaque côté de Ox ces deux fonctions ont même ordre relatif, car leurs modules sont équivalents sur une parallèle à Ox, en dehors des domaines d'exclusion entourant leurs zéros.

Autrement dit, de chaque côté de Ox, les suites primaires de ces deux fonctions ont même exposant de convergence relatif.

Pour un produit canonique de facteurs primaires sinusoïdaux, on a naturellement, du côté des y positifs,

$$\log M(y) \sim h_0 y,$$

h_0 désigne le nombre de suites primaires positives.

En écartant le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire de l'exponentielle

$$e^{tiz},$$

(où $f(z) - x$ peut ne pas admettre de zéros) on voit que la fonction

$$f(z) - x,$$

admet, quel que soit x, le même nombre de suites primaires positives que $f(z)$ puisque les logarithmes du module maximum de ces deux fonctions sur une parallèle à Ox sont équivalents.

De même ces deux fonctions admettent le même nombre de suites primaires négatives.

20. *Les domaines de régularité d'une fonction à croissance régulière.* — On a vu plus haut qu'il existe une infinité de couronnes de centre O, de rayon et d'épaisseur indéfiniment croissants dans lesquelles on a

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\rho} nr < \log M(r) < nr.$$

J'appellerai ces couronnes les domaines de régularité de la fonction. Dans le cas particulier où

$$\frac{\log r_n}{\log n},$$

finit par être constamment croissant, le domaine de régularité couvre tout le plan, à l'extérieur d'un certain cercle de centre O.

Je me propose de montrer la propriété suivante :

Théorème. — *Étant données deux fonctions entières périodiques à croissance régulière, $f(z)$ et $F(z)$, il existe une infinité de domaines de régularité communs de rayon indéfiniment croissant.*

Étant donné ε quelconque, on peut trouver un domaine de régularité (d_1) de rayon intérieur r pour $f(z)$ tel que les rayons intérieurs des domaines de régularité suivants (d_2) (d_3) sont inférieurs respectivement à $r^{1+\varepsilon}$ et $r^{(1+\varepsilon)^2}$.

Si l'on suppose qu'il existe, entre (d_1) et (d_2), un domaine de régularité (D_1) pour $F(z)$ n'empiétant pas sur (d_1) (d_2), je dis que le domaine suivant pour $F(z)$, soit (D_2), empiétera sur (d_2) ou (d_3).

En effet, si R désigne le rayon intérieur de (D_1), celui de (D_2) est moindre que $R^{1+\varepsilon'}$ $(R > r)$. On peut choisir ε' pour que $R^{1+\varepsilon'}$ soit inférieur à $r^{1+\varepsilon}$ ou supérieur à $r^{(1+\varepsilon)^2}$, ce qui signifie que (D_2) empiétera sur (d_2) ou (d_3).

Ainsi si un domaine (D_1) n'empiète sur aucun domaine de $f(z)$, le domaine suivant (D_2) empiétera sur un domaine de $f(z)$. Les deux fonctions admettent donc bien une infinité de domaines de régularité communs, aussi loin de l'origine que l'on voudra.

Application. — Soient

$$f(z) \quad \text{et} \quad f_1(z) = f(z) - x.$$

Dans l'un de leurs domaines de régularité communs, on a

$$\log M(r) = A(r)\, nr,$$
$$\log M_1(r) = A_1(r)\, n_1 r,$$

$A(r)$ et $A_1(r)$ sont deux fonctions de r comprises entre

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\rho} \quad \text{et} \quad 1.$$

Comme $\log M(r)$ est équivalent à $\log M_1(r)$, le rapport $\frac{n_1}{n}$ est équivalent à $\frac{A_1}{A}$, c'est-à-dire reste compris entre

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\rho} \quad \text{et} \quad \frac{1+\rho}{1-\varepsilon}.$$

Donc si l'on se borne aux fonctions $f(z)$ qui admettent par exemple une suite limitée d'un certain côté de Ox, le rapport des nombres de zéros des deux fonctions

$$f(z) \quad \text{et} \quad f(z) - x,$$

de module inférieur à r, lorsque z décrit un cercle C situé dans l'un des domaines de régularité communs, est compris entre deux valeurs finies et non nulles, valeurs d'autant plus voisines l'une de l'autre que ρ est plus petit.

En d'autres termes, le rapport des zéros de même rang n de ces deux fonctions est fini et non infiniment petit pour une infinité d'indices n.

Et si la fonction $f(z)$ est d'ordre 1 le rapport des zéros de même rang n est infiniment voisin de 1 pour une infinité de valeurs de l'entier n.

CHAPITRE V.

CERCLES DE REMPLISSAGE ET DIRECTIONS DE BOREL DES FONCTIONS ENTIÈRES PÉRIODIQUES.

21. Le point de vue élémentaire adopté dans les quatre premiers chapitres a suffi pour préciser certaines particularités des fonctions entières périodiques, pour lesquelles la distribution spéciale des zéros permet en quelque sorte de prévoir certains résultats.

La transformation

$$u = e^{-iz},$$

qui fait correspondre à toute fonction entière périodique à suite fondamentale positive une fonction entière d'ordre nul peut servir à deux fins.

Les propriétés démontrées dans les chapitres précédents permettent de retrouver quelques résultats simples des fonctions entières d'ordre nul.

Il est vrai que cette méthode laisse en dehors les fonctions entières d'ordre nul pour lesquelles la suite des logarithmes des modules des zéros n'a pas un exposant de convergence fini.

En se basant sur les propriétés classiques des fonctions entières d'ordre nul, il est possible d'avoir certaines propriétés particulières des fonctions entières périodiques.

Notamment, en ce qui concerne la distribution des zéros dans une direction arbitraire, ainsi que l'existence des cercles de remplissage et l'ordre de ces cercles, les propriétés connues des fonctions entières d'ordre nul ont immédiatement leur équivalent ici.

Cependant, il suffit d'appliquer quelques résultats du Chapitre III, et de suivre la méthode employée par MM. Milloux et Valiron dans le problème des directions de Borel des fonctions méromorphes, pour arriver à résoudre directement le problème posé sur les fonctions entières périodiques avec une grande précision (¹).

22. Reprenons le résultat du nº 13 :

On a, pour toutes les fonctions entières périodiques,

$$\log|f(z)| = n|y| - \sum_{1}^{n} r_p + k(x, y)|y|^{\rho+\varepsilon},$$

à l'extérieur des cercles entourant les zéros et dont les rayons tendent vers o lorsque le rang augmente indéfiniment.

Pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de $|y|$ on a

$$|y|^{1+\rho-\varepsilon} < n|y| - \Sigma r_p < |y|^{1+\rho+\varepsilon}.$$

Pour ces valeurs, le rapport

$$\frac{k(x,y)|y|^{\rho+\varepsilon}}{|y|^{1+\rho-\varepsilon}},$$

(¹) Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul et en particulier les fonctions à correspondance régulière* (*Thèse*, Paris, 1914 et *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1913); Valiron, *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul* (*Bull. Sc. Math.*, t. LIX, 1935, 1ʳᵉ partie); Milloux, *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta Math.*, t. 52, 1929). Dans tout ce chapitre, les renvois à ces écrits sont indiqués respectivement par : (V. T.), (V. B.) et (M. A.).

est infiniment petit, donc

$$\log|f(z)| \sim n|y| - \Sigma r_p,$$

et l'on obtient, pour la fonction entière d'ordre nul correspondant à $f(z)$ le théorème suivant :

Il existe une suite de valeurs indéfiniment croissantes de R *pour lesquelles le logarithme du module de la fonction est équivalent à*

$$\log \frac{R^n}{R_1 R_2 \ldots R_n}.$$

On reconnaît là l'énoncé du théorème de Littlewood (1) valable d'ailleurs pour toutes les fonctions entières d'ordre nul.

$G(u)$ désignant la fonction entière d'ordre nul correspondant à $f(z)$, $M(R)$ son module maximum pour $|u| = R$, on a

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log M(R)}{(\log R)^2} = \begin{cases} \infty & \text{si } \rho > 1, \\ 0 & \text{si } \rho < 1. \end{cases}$$

Pour $\rho = 1$, on ne peut rien dire de cette limite sans faire d'autres hypothèses sur la croissance de la suite $\log R_p$.

Et si l'on remarque que pour ρ inférieur à 1, on a constamment pour y positif et suffisamment grand :

$$ny - \Sigma r_p > Ay,$$

A désignant un nombre positif donné (n° 12), Donc

$$\log|f(z)| \sim ny - \Sigma r_p \sim \log M(y),$$

et l'on obtient la proposition suivante :

Pour toute fonction entière d'ordre nul telle que la suite $\log R_p$ *a un exposant de convergence inférieur à* 1, ce qui exige

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log M(R)}{(\log R)^2} = 0,$$

le logarithme du module de la fonction est équivalent au logarithme du module maximum pour R *suffisamment grand, à condition d'exclure du plan, autour de chaque zéro de rang n, un domaine vu de l'origine sous un angle infiniment petit avec* $\frac{1}{n}$ *et dont la plus grande dimension est de l'ordre de* $\varepsilon(n) R_n$, $\varepsilon(n)$ *tendant vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$.

(1) Littlewood, *On the asymptotic approximation of integral functions of zero order* (*Proc. Lon. Math. Soc.*, t. V).

On peut même préciser, d'après l'analyse du n° 13, que l'angle sous lequel on voit, de l'origine, ces domaines est de l'ordre de

$$e^{-(\log R_n)^\rho},$$

et que la plus grande de ses dimensions est inférieure à

$$(\log R_n)^{-A} R_n \qquad \text{(A positif donné).}$$

Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème de M. Valiron concernant les fonctions d'ordre nul pour lesquelles

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log M(R)}{(\log R)^2} < \infty \quad (^1).$$

Et si l'on suppose maintenant que la fonction $f(z)$, d'ordre quelconque, est à croissance régulière, on a encore

$$\log|f(z)| \sim \log M(y),$$

à l'extérieur des mêmes domaines d'exclusion. Le théorème précédent s'applique encore à ces fonctions, et celui de M. Valiron s'applique à leurs transformées, qui sont à croissance régulière. Et pour ces dernières, aucune condition n'est imposée à

$$\frac{\log M(R)}{(\log R)^2}.$$

23. *Directions de Borel.* — Je rappelle qu'étant données une fonction entière et une direction d du plan issue de l'origine, cette direction est appelée direction de Borel de la fonction si dans tout angle (d) de sommet l'origine d'ouverture arbitrairement petite et de bissectrice d le théorème de M. Borel reste vrai, c'est-à-dire

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log r} = \text{l'ordre de la fonction.}$$

n désigne le nombre de zéros de la fonction $f(z) - a$ de module inférieur à r et contenus dans l'angle (d).

On a la proposition suivante :

Étant donnée une fonction entière périodique ne se réduisant pas à une combinaison finie d'exponentielles, toute droite Δ issue de l'origine contient une direc- de Borel de la fonction.

Il suffit de montrer que le théorème de Borel reste vrai dans l'ensemble des deux angles (Δ) de bissectrice Δ et d'ouverture 2ε arbitrairement petite.

La période de la fonction est encore supposée égale à 2π.

---

(1) (V. T.).

Soit α l'angle que fait Δ avec Ox. Toute suite primaire d'ordonnée $r_n < r \sin \alpha$ comporte $A r_n$ zéros situés dans (Δ), A désigne une certaine constante qu'il est inutile de préciser; ces zéros sont situés à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon r.

Le nombre total de zéros de la fonction intérieurs à (Δ) et de module inférieur à r est par suite :

$$N = A \sum_1^n r_p,$$

$$(r_n < r \sin \alpha < r_{n+1}).$$

On a, par définition,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log r_n}{\log n} = \frac{1}{\rho}.$$

Je dis que l'on a

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \sum_1^n r_p}{\log n} = 1 + \frac{1}{\rho}.$$

En effet, on sait qu'il existe une infinité d'indices

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots,$$

assurant l'inégalité

$$r_N > N^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon}.$$

Les points d'accumulation de la suite $N_{k-1} : N_k (k = 2, 3, \ldots)$ peuvent être arbitrairement distribués sur le segment $0, 1$.

A. Supposons que ce rapport ne tend pas vers 0. Il existe donc une infinité d'indices k assurant les inégalités

$$0 < p < \frac{N_{k-1}}{N_k} < q < 1.$$

(On peut ramener à ce cas celui où le rapport tend vers 1, par suppression de certains nombres de la suite N.)

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$N_{k-1} = n', \qquad N = n.$$

On a

$$\Sigma r_p > (n - n') n'^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon} > (1 - q) p^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon} n^{1 + \frac{1}{\rho} - \varepsilon}.$$

Par suite

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \Sigma r_p}{\log n} = 1 + \frac{1}{\rho}.$$

B. Supposons que le rapport d'un indice N au suivant tend vers o, et prenons

$$n = N_{k-1} + N' < N_k,$$

On a

$$\Sigma r_p > N' N_{k-1}^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}.$$

On peut prendre N′ infiniment grand par rapport à N_{k-1}. Le second membre de l'inégalité sera supérieur à

$$N'^{1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon-\varepsilon'} \quad \text{si} \quad N' < N_{k-1}^{1+\varepsilon''} \qquad \left(\varepsilon'' = \frac{\varepsilon'}{\frac{1}{\rho} - \varepsilon - \varepsilon'}\right).$$

Il suffira de prendre N′ inférieur au plus petit des deux nombres

$$N_{k-1}^{1+\varepsilon''} \quad \text{et} \quad N_k,$$

ce qui est possible. Alors n sera équivalent à N′, et pour ces indices n la somme Σr_p sera supérieure à

$$B\, n^{1+\frac{1}{\rho}-\varepsilon-\varepsilon'} \qquad (B = \text{const.}).$$

Il en résulte que, dans tous les cas

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log \Sigma r_p}{\log n} = 1 + \frac{1}{\rho}.$$

Ceci posé, on a, d'après les propriétés de l'ordre,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log r} = \rho;$$

d'où

$$\overline{\lim} \frac{\log N}{\log r} = \overline{\lim} \frac{\log \Sigma r_p}{\log r} \leq \overline{\lim} \frac{\log r_p}{\log n} \overline{\lim} \frac{\log n}{\log r} = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)\rho = 1 + \rho.$$

D'autre part, si l'on se borne aux valeurs de r équivalentes à r_n, dans le rapport précédent on peut remplacer

$$\log r \quad \text{par} \quad \log r_n.$$

Et pour la suite des indices n satisfaisant à

$$r_n > n^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon},$$

$\frac{\log n}{\log r_n}$ tend vers la limite ρ. Par suite, on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log N}{\log r} = 1 + \rho.$$

La proposition est donc démontrée.

Applications. — La transformation $u = e^{-iz}$ fait correspondre à toute droite issue de l'origine une spirale logarithmique de point asymptote O permet de retrouver la propriété connue suivante relative aux fonctions d'ordre nul correspondant à $f(z)$:

Il existe une famille de courbes de Borel constituées par des spirales logarithmiques admettant l'origine comme point asymptote.

La propriété qui vient d'être démontrée est intuitive si l'on remarque que tout angle formé par deux droites issues de l'origine et d'ouverture arbitrairement petites est un domaine de remplissage pour la fonction. Si l'on considère un angle arithmétique, formé par deux demi-droites, il peut ne contenir qu'un nombre fini de zéros de la fonction (s'il est situé du côté de Ox où la fonction n'admet qu'un nombre fini de suites primaires.)

Remarque. – La démonstration de la propriété précédente est valable pour toutes les fonctions $f(z) - Z$ quelle que soit la valeur de Z, puisque l'exposant des zéros de toutes ces fonctions est $1 + \rho$.

Ceci montre que *les fonctions entières périodiques d'ordre fini n'admettent pas de valeurs exceptionnelles finies au sens de M. Borel.*

Le fait que toute droite du plan contient une direction de Borel pour une fonction entière périodique peut être considéré comme une conséquence immédiate d'une propriété classique, savoir :

Toute fonction méromorphe d'ordre fini positif possède au moins une direction de Borel.

En effet, soit (D) la direction de Borel fournie par ce théorème, pour notre fonction qui est d'ordre $1 + \rho$. (Δ) désigne une direction quelconque du plan. A l'angle (Δ) d'ouverture arbitrairement petite, on fait correspondre un angle (D) tel que tout point de (D) correspond à un point de (Δ) où la fonction prend la même valeur. Il est alors clair que si le théorème de Borel est vrai dans (D) il est vrai dans (Δ).

24. Supposons, sans d'ailleurs restreindre la généralité, que la fonction entière périodique ne contient que des suites positives.

Soit T(R, G) la caractéristique de Nevanlinna de la fonction $G(u)$ correspondant à $f(z)$.

Quand u décrit une fois le cercle $|u| = R$, z décrit un segment de longueur 2π parallèle aux suites primaires.

On a immédiatement, avec les notations déjà employées,

$$\log m(y) < T(R, G) < \log M(y).$$

D'après les résultats du n° 13, on peut écrire

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log T(R, G)}{\log\log R} = 1 + \rho,$$

et

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2} = \begin{cases} \infty & \text{si } \rho > 1, \\ 0 & \text{si } \rho < 1. \end{cases}$$

Si l'on introduit la moyenne logarithmique de Jensen

$$\int_0^R \frac{n(x, G) - n(0, G)}{x} dx + n(0, G) \log R = N(R, G) = n \log R - \Sigma \log R_p,$$

où $n(x, G)$ désigne le nombre de zéros de $G(u)$ de module inférieur à x.

On voit que

$$T(R, G - v) = N(R, G - v) + k(R).(\log R)^{\rho+\varepsilon},$$

$k(R)$ désigne une fonction bornée.

On retrouve par suite une propriété connue :

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{N(R, G - v)}{T(R, G - v)} = 1,$$

et ici la propriété est vraie pour toute valeur finie de v, sans aucune valeur exceptionnelle.

Revenons à notre fonction périodique $f(z)$.

Toute bande de largeur égale à une période et perpendiculaire aux suites primaires, ainsi que tout angle (Δ) formé par deux droites issues de O d'ouverture arbitrairement petite est un domaine de remplissage pour la fonction.

La différence entre ces deux sortes de domaines réside en ce que, pour le premier, le théorème de Borel doit être remplacé par

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n}{\log r} = \rho,$$

et non $1 + \rho$.

Le second domaine est un domaine de remplissage d'ordre $1 + \rho$ tandis que le premier n'est qu'un domaine de remplissage d'ordre ρ.

L'intérêt ici est de trouver un domaine de remplissage constitué par une bande de largeur moindre qu'une période ou bien une suite de cercles de remplissage de rayon constant assez petit ou même de rayon infiniment petit.

Une remarque simple qu'on peut faire immédiatement est qu'il n'existe pas une suite de cercles de remplissage de rayon borné et d'ordre supérieur à $\rho - 1$, car l'existence d'une telle suite de cercles implique l'existence d'un domaine de remplissage constitué par une bande de largeur finie perpendiculaire aux suites primaires et d'ordre supérieur à ρ, ce qui est impossible.

25. *Directions d'accumulation.* — Soient

$$a_n(Z) = b_n(Z) + i\varepsilon_n r_n(Z),$$

les zéros fondamentaux de la fonction $f(z) - Z$

$$|b_n(Z)| < \pi.$$

La suite $b_n(Z)$ admet au moins un point d'accumulation X. La droite $x = X$ possède la propriété suivante :

Dans toute bande

$$D\ |x - X| < \varepsilon,$$

aussi petit que soit ε la fonction $f(z)$ prend une infinité de fois la valeur Z.

Je désigne par

$$n(t, X, \varepsilon, Z) \qquad \text{ou} \qquad n(t, D, Z),$$

le nombre de racines de $f(z) - Z$ situées dans le rectangle défini par

$$D\ |x - X| < \varepsilon,$$
$$|y| < t.$$

On a

$$n(t, X, \varepsilon, Z) \leqq n(t, o, \pi, Z) \qquad [= n(t, Z)].$$

Comme

$$\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log n(t, Z)}{\log t} = \rho,$$

on a

$$\overline{\lim_{\varepsilon=0}} \left[\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log n(t, X, \varepsilon, Z)}{\log t} \right] = \rho(X, Z) \leqq \rho.$$

$\rho(X, Z)$ sera appelé l'ordre de la direction $x = X$ et cet ordre n'est autre que la limite de l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - Z$ dans la bande D quand ε tend vers zéro.

26. *Fonctions d'ordre supérieur à 2.*

Théorème. — *Dans toute direction $x = X$ si l'ordre du nombre de zéros de la fonction $f(z) - Z$ est inférieur à ρ pour trois valeurs de Z, cet ordre est inférieur à ρ pour toutes les valeurs de Z, sauf peut-être pour des Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère.*

La démonstration qui suit est inspirée d'une méthode employée par M. Valiron (¹) basée sur une égalité due à M. Milloux (²).

(¹) (V. B.).
(²) (M. A.).

Couvrons le rectangle défini par

$$D(\varepsilon) \quad \begin{array}{l} |y| < Y \\ |x - X| < \varepsilon \end{array}$$

à l'aide de p cercles C_q centrés sur $x = X$ et de même rayon $\varepsilon\sqrt{2}$. Chaque point de ce rectangle appartient à deux cercles au plus. Traçons les cercles Γ_q concentriques à C_q et de rayon $k\varepsilon\sqrt{2}\,(k > 1)$. Ces cercles couvrent entièrement le rectangle

$$D(k\varepsilon) \quad \begin{array}{l} |y| < Y \\ |x - X| < k\varepsilon \end{array}$$

et le couvrent moins de deux fois.

Soient

$$n(C_q, Z), \quad n(\Gamma_q, Z)$$

les nombres de zéros de $f(z) - Z$ respectivement dans C_q et Γ_q. On a, d'aprés l'inégalité de M. Milloux,

$$n(C_q\, Z) < A \sum_{u=a,b,c} n(\Gamma_q, u) + B - D \log|Z, Z_q|,$$

A, D, sont des constantes ne dépendant pas de a, b, c, Z, q; B ne dépend que de a, b, c; et $|Z, Z_q|$ désigne la distance sphérique de Z à une certaine valeur Z_q qui peut évidemment varier avec l'entier q. D'où

$$\sum_{q=1}^{p} n(C_q, Z) < A \sum_{q=1}^{p} \sum_{u=a,b,c} n(\Gamma_q, u) + pB - D \sum_{q=1}^{p} \log|Z, Z_q|.$$

Astreignons-nous à prendre $|Z, Z_q| > \eta q^{-2}$, η étant donné arbitrairement petit, de sorte que Z sera représenté sur la sphère à l'extérieur des cercles dont la somme des rayons est inférieure à 2η. Une limite supérieure du dernier terme de l'inégalité précédente est

$$-Dp \log\eta + 2D \log(p\,!).$$

D'où

$$n[Y, D(\varepsilon), Z] < 2 \sum_{u=a,b,c} n[Y, D(k\varepsilon\sqrt{2}), u] + pB - Dp\log\eta + 2D\log(p\,!).$$

On a, par hypothèse,

$$\varlimsup_{Y=\infty} \frac{\log n[Y, D(k\varepsilon\sqrt{2}), u]}{\log Y} \leq \rho' < \rho \qquad (u = a, b, c)$$

pour ε suffisamment petit, ce que nous supposons. Puis

$$p \sim \frac{Y}{\varepsilon}, \qquad \log(p\,!) < \frac{Y}{\varepsilon} \log \frac{Y}{\varepsilon}.$$

Donc

$$pB - Dp \log \eta + 2D \log(p!) < A' Y \log Y < Y^{1+\alpha}$$

pour Y suffisamment grand, α étant un nombre positif donné tel que $1+\alpha$ soit inférieur à ρ. Donc

$$\overline{\lim_{Y=\infty}} \frac{\log n[Y, D(\varepsilon), Z]}{\log Y}$$

égale au plus grand des deux nombres ρ' et $1+\alpha$, est inférieure à ρ pour toutes les valeurs de Z, à l'exception peut-être des Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère.

Le théorème est ainsi démontré.

Conséquences. — Si une direction $x = X$ est d'ordre inférieur à ρ pour trois valeurs de Z, on peut trouver $\varepsilon(X)$ tel que

$$\frac{\log n[Y, D(\varepsilon), Z]}{\log Y}$$

reste inférieur à ρ, dès que ε est inférieur ou égal à $\varepsilon(X)$, et Y suffisamment grand, pour tous les Z, sauf peut-être pour les Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère.

Théorème. — *Il existe au moins une direction d'ordre maximum ρ pour tous les Z, sauf pour deux Z au plus.*

En effet, supposons que toutes les directions sont d'ordre inférieur à ρ (sauf pour les Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère).

Pour chaque X compris entre $-\pi+\pi$ il correspond un $\varepsilon(X)$ tel que l'inégalité

$$\overline{\lim_{Y=\infty}} \frac{\log n[Y, D(\varepsilon), Z]}{\log Y} < \rho$$

soit vérifiée pour tous les Z (sauf pour un ensemble de mesure linéaire nulle).

Ces $\varepsilon(X)$ ont une borne supérieure ε_1, et il existe un X_1 tel que $\varepsilon(X_1) > k\varepsilon_1$ (k donné inférieur à 1). Supprimons le domaine

$$D_1 \, | x - X_1 | < \varepsilon(X_1).$$

Pour les X restants, les $\varepsilon(X)$ ont une nouvelle borne supérieure $\varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$. Il existe un X_2 tel que $\varepsilon(X_2) > k\varepsilon_2$. Supprimons le domaine

$$D_2 \, | x - X_2 | < \varepsilon(X_2)$$

et ainsi de suite.

Au bout d'un nombre fini p d'opérations, toute la bande $-\pi+\pi$ est couverte, sinon en continuant indéfiniment on pourrait définir une suite infinie X_q telle que $\varepsilon(X_q)$ tend vers zéro et X_q aurait une limite X' n'appartenant pas aux domaines exclus. A X' correspond

$$\varepsilon(X') > \frac{1}{k}\varepsilon(X_q)$$

dès que q est assez grand, ce qui est impossible car les $\varepsilon(X_q)$ ne tendraient pas vers zéro.

On a donc p domaines D_q recouvrant entièrement la bande $-\pi + \pi$ et

$$n(Y, Z) \leqq \Sigma n[Y, D_q, Z] \leqq pn[Y, D_m, Z],$$

D_m désigne le domaine qui correspond au maximum des n pour une valeur de Y considérée.

D'après la remarque faite plus haut, on a, pour les p domaines D_q,

$$\frac{\log n[Y, D_q, Z]}{\log Y} < \rho$$

lorsque Y est suffisamment grand. Et

$$\frac{\log n(Y, Z)}{\log Y} \leqq \frac{\log p}{\log Y} + \frac{\log n[Y, D_m, Z]}{\log Y}.$$

Comme p est fixe, le second membre de cette inégalité sera inférieur à ρ dès que Y sera suffisamment grand. La limite supérieure d'indétermination du premier membre serait donc inférieure à ρ pour tous les Z sauf peut-être pour des Z formant un ensemble de mesure linéaire nulle sur la sphère, ce qui est impossible.

Il existe donc au moins une direction d'ordre maximum ρ pour tous les Z sauf deux Z au plus.

Ces directions jouent un rôle analogue aux directions de Borel d'espèce maximum pour les fonctions méromorphes générales. Mais il s'agit ici non d'angle arbitrairement petit mais de bande arbitrairement petite.

En supposant que $f(z)$ ne contient que des suites de même signe on retombe, pour la fonction entière d'ordre nul correspondante, sur la proposition suivante de M. Valiron :

Pour les fonctions entières d'ordre nul vérifiant

$$\overline{\lim_{p=\infty}} \frac{\log R_p}{\log p} > 1$$

ce qui entraîne

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2 \log_2 R} = \infty$$

il existe au moins une direction θ *telle que dans l'angle* $|\arg u - \theta| < \varepsilon$ (ε *arbi-*

trairement petit) on a, pour tous les v, sauf deux au plus,

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{N(R, \theta, \varepsilon, v)}{T(R, G)} = k > 0$$

$N(R, \theta, \varepsilon, v)$ désigne la moyenne de Jensen des zéros de la fonction $G(u) - v$ contenus dans le secteur

$$|u| < R$$
$$|\arg u - \theta| < \varepsilon.$$

Cette direction est ce que M. Valiron nomme direction de caractère positif.

27. *Fonctions d'ordre inférieur à* 2. — On généralise sans peine les démonstrations du numéro précédent aux fonctions d'ordre inférieur à 2.

Montrons d'abord que toute direction d'accumulation des zéros de $f(z)$ est direction d'accumulation de $f(z) - Z$ quelle que soit la valeur de Z.

On a vu que tous les zéros de $f(z) - Z$ finissent par s'accumuler dans les domaines d'exclusion de dimensions arbitrairement petites. S'il y a un nombre fini de zéros de $f(z) - Z$ dans le domaine

$$D\,|x - X| < \varepsilon$$

c'est qu'il y a un nombre fini de domaines d'exclusion dans D [on définit les domaines d'exclusion à partir des zéros de $f(z) - Z$], par suite la direction $x = X$ ne peut être direction d'accumulation pour les zéros de $f(z)$.

Les deux théorèmes du numéro précédent sont encore valables ici. Il suffit de modifier la démonstration du premier de ces théorèmes de la façon suivante, le deuxième s'applique sans modification une fois le premier établi :

Circonscrivons aux domaines d'exclusion situés dans $D(\varepsilon)$ des cercles C_q et considérons les cercles Γ_q concentriques et de rayon k fois plus grand ($k > 1$).

Quand q est suffisamment grand C_q est intérieur à $D(\varepsilon)$ et Γ_q est intérieur à $D(k\varepsilon)$.

On a encore, en remarquant que, dans $D(\varepsilon)$, les zéros de $f(z) - Z$ finissent par être dans C_q

$$n[Y, D(\varepsilon), Z] \leq 2 \sum_{u=a,b,c} n[Y, D(k\varepsilon), u] + pB - Dp\log\eta + 2D\log(p!) + n_0,$$

n_0 désigne le nombre, fini, de zéros de $f(z) - Z$ du domaine $D(\varepsilon)$ en dehors des C_q. Ici p désigne le nombre de domaines d'exclusion intérieurs à $D(\varepsilon)$.

Si l'on définit les domaines d'exclusion à partir des zéros de $f(z) - a$, p est du même ordre que

$$n[Y, D(k\varepsilon), a].$$

Comme

$$\overline{\lim_{Y=\infty}} \frac{\log n[Y, D(k\varepsilon), u]}{\log Y} \leq \rho' < \rho \qquad (u = a, b, c)$$

dès que ε est suffisamment petit, ce que nous supposons, on peut écrire

$$2D\log(p!) < Y^{\rho'+\varepsilon'}$$

pour Y suffisamment grand, ε' étant choisi tel que $\rho'+\varepsilon'$ soit inférieur à ρ. Donc

$$\overline{\lim_{Y=\infty}} \frac{\log n[Y, D(\varepsilon), Z]}{\log Y} < \rho.$$

Le reste de la démonstration est le même qu'au numéro précédent. D'où :

Il existe au moins une direction d'ordre maximum ρ pour tous les Z sauf deux Z au plus.

En passant aux fonctions $G(u)$, on voit encore que si

$$\overline{\lim} \frac{\log R_p}{\log p} < 1$$

ce qui entraîne

$$\overline{\lim} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2} = 0$$

il existe au moins une direction de caractère positif.

M. Valiron a donné une limite inférieure précise de

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{N(R, 0, \varepsilon, \varphi)}{T(R, G)}$$

en fonction de ε (1).

La méthode employée ici, bien que calquée sur celle de M. Valiron, ne permet pas de conclure dans le cas des fonctions entières périodiques d'ordre 2. On sait que le théorème de M. Valiron s'applique à toutes les fonctions d'ordre nul, par suite pour les fonctions entières périodiques d'ordre 2, il existe encore au moins une direction d'ordre maximum pour tous les Z sauf deux Z ou plus.

28. *Les cercles de remplissage des fonctions d'ordre supérieur à 2.* — Soit $x = X$ une direction d'accumulation d'ordre maximum ρ pour $f(z)$.

Un cercle de rayon constant, aussi petit que l'on veut, et de centre suffisamment loin dans la direction X contient en moyenne

$$K n^{1-\frac{1}{\rho}} \quad (\text{de l'ordre de } K y^{\rho-1})$$

suites primaires (K étant une certaine constante et y étant l'ordonnée du centre du cercle).

---

(1) (V. B).

Il faut donc s'attendre à ce qu'il existe une suite de cercles de remplissage d'ordre $\rho - 1$ de rayon arbitrairement petit dans toute direction d'accumulation d'ordre maximum.

Montrons d'abord que dans toute direction d'ordre maximum $D(x = X)$, il existe, pour chaque valeur donnée de Z sauf pour deux Z au plus, une suite infinie de cercles de rayon arbitrairement petit

$$|z - z_n| < \varepsilon \qquad (z_n \text{ tend vers } \infty)$$

tels que dans chacun de ces cercles la fonction $f(z)$ prend au moins

$$|z_n|^{\rho-1-\eta_n}$$

fois la valeur Z, η_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

En effet, appelons $D(\varepsilon)$ le domaine $|x - X| < \varepsilon$ et découpons $D(\varepsilon)$ en carrés de côté 2ε puis circonscrivons à ces carrés des cercles C_n.

Si, à partir d'un certain rang n, chacun de ces cercles contient moins de

$$|z_n|^{\rho-1-\eta_n}$$

zéros de $f(z) - Z$, le nombre de zéros de cette fonction dans le rectangle

$$|y| < Y, \qquad |x - X| < \varepsilon$$

est moindre que

$$hY|z_n|^{\rho-1-\eta_n} \sim hY^{\rho-\eta_n},$$

$$n[Y, D(\varepsilon), Z] < hY^{\rho-\eta_n},$$

$$\frac{\log n[Y, D(\varepsilon), Z]}{\log Y} < \rho - \eta_n + \frac{\log h}{\log Y}.$$

Cette inégalité est valable, quelle que soit la suite η_n pourvu que les valeurs de Y soient suffisamment grandes.

L'ordre de la direction $x = X$ ne serait donc pas ρ.

La proposition est ainsi établie.

Soit maintenant une suite de cercles C_q de rayon 2ε et recouvrant complètement le domaine

$$D(\varepsilon), \quad |x - X| < \varepsilon.$$

La direction $x = X$ étant une direction d'ordre maximum.

Considérons les racines de l'équation $f(z) - Z = 0$ situées dans un cercle Γ_q (Γ_q concentrique à C_q et de rayon double).

Pour les divers Z le nombre de ces racines a un minimum n'' atteint pour Z''; supprimons dans le voisinage sphérique de Z'' un cercle de rayon d (aussi petit que l'on voudra). Pour les Z restants, ce nombre a encore un minimnm n' supérieur ou égal à n'', minimum atteint pour une valeur Z' dont on supprime encore le voisinage sphérique par un cercle de même rayon d. Les Z en dehors de ces deux cercles de rayon d admettent un nouveau minimum $n(\mathrm{Z})$ atteint pour une valeur que nous appelons Z. Les distances sphériques mutuelles des trois valeurs Z, Z′, Z″, sont supérieures à d (¹).

On sait que dans C_q, $f(z)$ prendra au plus (²)

$$\mathrm{A}\left[n(\mathrm{Z}) + \log\frac{2}{d} + \log^+ \frac{1}{|a, a_q|}\right]$$

fois toute valeur a, a_q dépendant de q.

Si $n(a)$ désigne le nombre des racines de $f(z) - a$ dans C_q, on a

$$n(\mathrm{Z}) > \frac{1}{\mathrm{A}}\left[n(a) - \log\frac{2}{d} - \log^+ \frac{1}{|a, a_q|}\right].$$

Prenons

$$|a, a_q| > dq^{-2}$$

ce qui revient à exclure encore de la sphère des cercles dont la somme des rayons est moindre que $2d$. D'où

$$n(\mathrm{Z}) > \frac{1}{\mathrm{A}}\left[n(a) - \log\frac{2}{d^2} - 2\log q\right]$$

q est équivalent à

$$\frac{|z_q|}{2\varepsilon},$$

z_q désigne le centre du cercle C_q.

D'après la propriété précédente on peut trouver une suite de cercles C_q tels que dans chacun de ces cercles la fonction prend au moins

$$|z_q|^{\rho-1-\eta'_q}$$

fois la valeur a. Le nombre $n(a)$ est par suite infiniment grand par rapport à $\log q$. Et

$$n(\mathrm{Z}) > \mathrm{K}\,|z_q|^{\rho-1-\eta'_q} > |z_q|^{\rho-1-\eta_q}$$

η_q est une suite tendant vers zéro comme η'_q.

On obtient donc le théorème suivant :

Dans toute direction d'ordre maximum il existe une suite infinie de cercles C_q *de rayon arbitrairement petit tels que dans chacun de ces cercles la fonction prend au moins*

$$|z_q|^{\rho-1-\eta_q} \quad (z_q \text{ centre de } C_q)$$

fois toute valeur Z représentée à l'extérieur de deux cercles de rayon d_q *sur la sphère,* η_q *et* d_q *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{q}$.

(¹) Ce raisonnement est emprunté à M. Valiron [*voir* VALIRON, *Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 186, 1928)].

(²) (M. A.).

Le fait que d_q tend vers zéro résulte immédiatement de la possibilité de choisir, dans l'inégalité écrite plus haut, le nombre d de l'ordre de $\frac{1}{q}$.

Ces cercles sont des cercles de remplissage d'ordre $\rho - 1$, et ce sont des cercles de remplissage de rayon borné d'ordre maximum, d'après une remarque du n° 24.

On sait d'ailleurs qu'il existe des cercles de remplissage de rayon arbitrairement petit pour toute fonction méromorphe telle que

$$\overline{\lim_{r=0}} \frac{T(r, f)}{r^2} = \infty$$

condition manifestement satisfaite ici pour la fonction $f(z)$.

29. *Fonctions d'ordre inférieur à* 2. — Ici, la distance entre deux suites primaires consécutives grandit indéfiniment en général.

Il ne saurait exister de cercles de remplissage de rayon borné et d'ordre non nul.

Cependant, comme les zéros de $f(z) - Z$ finissent par s'accumuler dans des domaines de dimensions infiniment petites, il faut s'attendre à ce que, dans chacun de ces domaines, la fonction prenne au moins une fois toute valeur Z donnée, pourvu que le rang du domaine soit suffisamment élevé.

Ce point est aisé à démontrer :

En effet, partons des zéros fondamentaux de $f(z)$, et traçons autour du zéro a_n comme centre, un rectangle D_n de côtés

$$e^{-|a_n|^\rho} \qquad \text{et} \qquad |a_n|^{-A}$$

parallèles respectivement à Ox et Oy; A étant un nombre positif donné quelconque.

On a vu que les zéros de $f(z) - Z$ finissent par être situés entièrement à l'intérieur de ces domaines D_n. (En effet, dans le reste du plan $\log f(z)$ reste équivalent à $\log M(y)$ pour y suffisamment grand.)

Soit maintenant Z donné quelconque de module inférieur à un nombre fixe N, aussi grand que l'on veut.

Je dis qu'à partir d'un certain rang, $n(A, N)$, chaque domaine D_n contient au moins un zéro de

$$f(z) - Z.$$

Partons des zéros fondamentaux de $f(z) - Z$ et définissons autour de chacun de ces zéros $a_p(Z)$, un domaine Δ_p comme on a défini D_n.

Tous les zéros de $f(z)$ finissent par être entièrement à l'intérieur de ces domaines Δ_p.

Si donc il y a une suite infinie de domaines D_n ne contenant aucun zéro de $f(z) - Z$, les centres de ces domaines D_n, c'est-à-dire les zéros de $f(z)$, finissent par être à l'extérieur des domaines Δ_p, ce qui est impossible.

On obtient par suite la proposition suivante :

Il existe une suite infinie de domaines D_n *de dimensions*

$$e^{-|a_n|^2} \quad |a_n|^{-A}$$

tels que, à partir d'un certain rang $n(A, N)$ *dans chaque domaine* D_n *la fonction prend au moins une fois toute valeur* Z *donnée de module inférieur à* N.

Dans toute direction d'accumulation $x = X$ il existe naturellement une telle suite de domaines D_n.

Application. — En passant aux fonctions entières d'ordre nul, on voit que, pour celles de ces fonctions qui satisfont à la condition

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{T(R, G)}{(\log R)^2} = 0$$

les points pour lesquels

$$|G(u)| < N \qquad (\text{N nombre positif donné})$$

forment une suite de domaines D_m fermés, vus de l'origine sous un angle infiniment petit et tels que si u_m et u'_m désignent deux points quelconques d'un tel domaine, on a

$$\lim_{m=\infty} \left| \frac{u'_m - u_m}{u_m} \right| = 0.$$

On reconnaît une proposition de M. Valiron [1].

Ici, on peut donner un ordre de grandeur des dimensions de ces domaines :

L'angle sous lequel on voit D_m est de l'ordre de $e^{-(\log|u_m|)^2}$, et la plus grande dimension de D_m est de l'ordre de

$$(\log|u_m|)^{-A}|u_m|.$$

On trouve de tels domaines dans toutes les directions de Borel de la fonction.

---

[1] (V. T.).