

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL DECUYPER

## Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 64 (1947), p. 227-246

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1947\\_3\\_64\\_\\_227\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__227_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR

# L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

PAR M. MARCEL DECUYPER.

---

1. *Introduction.* — Nous allons, par les procédés de la géométrie élémentaire, esquisser une théorie complète de l'hypocycloïde à trois rebroussements que nous désignerons par  $H_3$ . Nous nous appuierons sur une proposition de M. Hadamard <sup>(1)</sup> : *Le segment intercepté sur une tangente fixe à  $H_3$  par deux tangentes rectangulaires variables a pour milieu un point fixe situé sur le cercle inscrit.*

Nous démontrerons d'abord ce théorème, puis, les principales propriétés de la courbe, entre autres, ce résultat dû à Cremona <sup>(2)</sup> : *l' $H_3$  découpe sur une tangente quelconque un segment de longueur constante*; nous signalerons ensuite une génération tangentielle nouvelle de  $H_3$  et quelques applications. Enfin, nous démontrerons, en nous plaçant successivement à deux points de vue différents, qu'il y a  $\infty^1 H_3$  tangentes à trois droites données et une seule  $H_3$  tangente à quatre droites données, en supposant bien entendu, que ces droites ont des directions distinctes.

2. *Définition tangentielle de  $H_3$ .* — Nous utilisons une définition tangentielle de la courbe à partir du cercle tritangent (ou inscrit). A étant un point fixe du cercle C, de centre O et de rayon R, on a la tangente générale en joignant un point M de C à un point P tel que  $\widehat{AP} = -2\widehat{AM}$  où les arcs sont évalués à un multiple près de la circonférence C. Chaque point de C peut être considéré comme un point M ou comme un point P; par un point M passe une seule tangente de  $H_3$ , par un point P, deux tangentes rectangulaires; en tout, par chaque point de C, passent trois tangentes de  $H_3$  dont deux sont rectangulaires.

Les symétriques des points M, P par rapport à l'axe OA vérifient également la relation  $2\widehat{AM} + \widehat{AP} = 0$ ; cette relation ne change pas de forme si l'on prend

---

<sup>(1)</sup> Journ. Math. spéciales, 1884, p. 226.

<sup>(2)</sup> Journ. Crelle, 1864, p. 106.

comme nouvelle origine sur C l'un des points  $A_1, A_2$  qui forment avec A un triangle équilatéral; donc  $H_3$  admet trois axes de symétrie  $OA, OA_1, OA_2$  et se reproduit par une rotation de  $\frac{2\pi}{3}$  autour de O.

Si  $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \alpha$ , la droite indéfinie  $\Delta$ , bissectrice de l'angle  $(\vec{OM}, \vec{OP})$  est caractérisée par

$$(OA, O\Delta) = \frac{1}{2} [(\vec{OA}, \vec{OM}) + (\vec{OA}, \vec{OP})] = -\frac{\alpha}{2} \pmod{\pi};$$

or, MP est perpendiculaire à  $\Delta$ , donc  $(OA, MP) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$ , ce qui prouve que  $H_3$  possède une tangente unique parallèle à une direction donnée. A une tangente quelconque MP, on peut associer une tangente perpendiculaire unique qui la coupe en P sur le cercle inscrit: le cercle C est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe.

Une  $H_3$  est parfaitement définie par le cercle C et une tangente MP particulière à condition de distinguer les points M et P de rencontre avec C. En effet, les trois sommets A,  $A_1, A_2$  s'obtiennent à partir de l'égalité  $2\widehat{AM} + \widehat{AP} = 0$ , c'est-à-dire par la division des arcs MP en trois arcs égaux.

Si deux tangentes MP et  $M_1P_1$  se coupent en Q (fig. 1), les deux triangles  $MQP_1$  et  $M_1QP$  sont isocèles, les angles en Q, P ou  $P_1$  de ces triangles ayant même mesure. Le point  $M_1'$  diamétralement opposé à  $M_1$  donne la tangente  $P_1M_1'$  perpendiculaire à  $P_1M_1$ ; le point  $Q'$  où  $P_1M_1'$  coupe MP donne  $MQ' = MQ = MP_1$ : donc le milieu du segment découpé par deux tangentes rectangulaires variables sur MP est fixe: c'est le point M de cette tangente fixe.

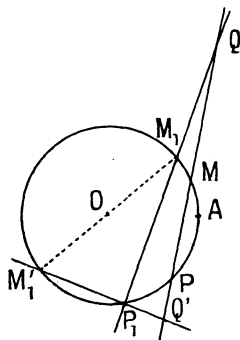


Fig. 1.

Si l'on fait tendre  $M_1$  vers M et  $P_1$  vers P, le point de contact T de MP avec  $H_3$  est tel que  $\vec{PM} = \vec{MT}$ .

L'enveloppe obtenue peut être engendrée par un point d'un cercle de rayon R roulant sans glisser sur un cercle fixe de centre O et de rayon  $3R$ : en effet, T est situé sur le cercle C' symétrique de C par rapport à M; avec le même sens de

parcours sur  $C'$  que sur  $C$ , on a  $\widehat{M'I} = \widehat{M'P} = -3\widehat{AM}$  et, si  $M'$  est diamétralement opposé à  $M$  sur  $C'$ ,

$$\widehat{TM'} = \widehat{TM} + \widehat{MM'} = \pi R + 3\widehat{AM} = 3\widehat{\sigma M},$$

où  $\sigma$  est défini sur  $C$  par  $\widehat{\sigma A} = \frac{\pi R}{3}$ . Appelons  $S$  l'homologue de  $\sigma$  sur le cercle  $\Gamma$  homothétique de  $C$  par rapport à  $O$  dans le rapport 3;  $\Gamma$  est tangent à  $C'$  en  $M'$ ; on a  $\widehat{SM'} = 3\widehat{\sigma M} = \widehat{TM'}$ , la proposition en résulte.

Le point  $A$ , considéré comme  $M$  donne  $P$  coïncidant avec  $A$ ;  $H_3$  est tangente à  $C$  en  $A$  (et en  $A_1$  et  $A_2$ );  $A$  considéré comme  $P$  donne deux tangentes rectangulaires, l'une tangente à  $C$  en  $A$  déjà trouvée, l'autre correspondant à  $M$  diamétralement opposé à  $A$ , touchant  $H_3$  en  $S_1$  à la distance  $4R$  de  $A$  dans la direction  $AO$ ,  $S_1$  est un point de rebroussement de  $H_3$ ;  $H_3$  se reproduisant par une rotation de  $\frac{2\pi}{3}$  autour de  $O$ , a trois points de rebroussement  $S, S_1, S_2$  situés sur  $\Gamma$ .

3. *Tangentes concourantes.* — Appliquons les résultats précédents au problème : *étant donné un point  $Q$  sur une tangente  $MP$  de  $H_3$ , trouver les autres tangentes à  $H_3$  issues de  $Q$ .*

De  $M$  comme centre, avec  $MQ$  pour rayon, traçons un cercle  $\Omega$  qui coupe  $C$  en  $P_1$  et  $P_2$  (fig. 2). De  $P_1$  sont issues deux tangentes rectangulaires qui coupent  $MP$ , l'une en  $Q$ , l'autre en  $Q'$  symétrique de  $Q$  par rapport à  $M$ . De même, de  $P_2$  sont issues deux tangentes rectangulaires  $P_2Q, P_2Q'$ . Les deux nouvelles tangentes issues de  $Q$  sont donc  $QP_1$  et  $QP_2$ .

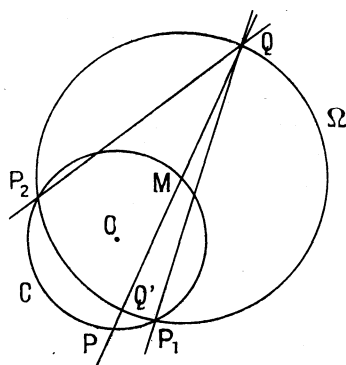


Fig. 2.

Pour que ces tangentes existent, il faut et il suffit que  $C$  et  $\Omega$  se coupent, c'est-à-dire que le rayon  $MQ$  de  $\Omega$  soit inférieur au diamètre  $2R$  de  $C$ . Si  $Q$  tend vers l'un des points  $\bar{Q}, \bar{Q}'$  définis par  $M\bar{Q} = M\bar{Q}' = 2R$ , les deux points  $P_1$  et  $P_2$  viennent se confondre avec le point  $\bar{P}$  de  $C$  diamétralement opposé à  $M$ , les deux tangentes  $QP_1, QP_2$  se confondent, donc  $\bar{Q}$  et  $\bar{Q}'$  sont les points de ren-

contre de la tangente  $MP$  avec  $H_3$ . Les tangentes à  $H_3$  en ces points sont les deux droites rectangulaires  $\overline{PQ}$  et  $\overline{PQ'}$ .

Nous avons ainsi fait apparaître des propriétés importantes :

- a.  $H_3$  est de classe 3 et de degré 4 ;
- b. la longueur du segment intercepté par  $H_3$  sur une tangente quelconque est constante et égale à  $4R$ , où  $R$  désigne le rayon du cercle tritangent.

Nous verrons au paragraphe 6 que les trois arcs  $SS_1$ ,  $S_1S_2$ ,  $S_2S$  limités aux points de rebroussement ont leur convexité tournée vers le centre  $O$  du cercle inscrit. Une tangente  $MP$  dont le point de contact  $T$  est sur l'arc  $SS_2$  recoupe la courbe en deux points  $\overline{Q}$ ,  $\overline{Q'}$  situés sur les arcs  $SS_1$  et  $S_1S_2$  (*fig. 3*). Considérons

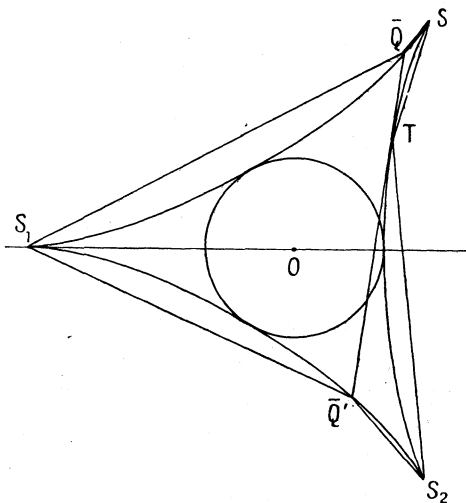


Fig. 3.

les triangles  $S_1\overline{QQ'}$ ,  $S_1\overline{QT}$  et  $S_2\overline{Q'T}$  et imaginons qu'une droite  $\Delta$  se déplace parallèlement à  $MP$  en coupant la courbe, donc l'un au moins des triangles précédents. Puisque la convexité de chaque arc est tournée vers l'intérieur de la courbe, si  $\Delta$  coupe  $S_1\overline{QQ'}$ , le segment découpé par la courbe est plus court que celui découpé par le triangle, donc plus court que  $\overline{QQ'}$ . De même, si  $\Delta$  coupe  $S_1\overline{QT}$  ou  $S_2\overline{Q'T}$  chaque segment découpé par la courbe est inférieur à  $\overline{QT}$  ou à  $\overline{Q'T}$ , et par suite, à  $\overline{QQ'}$ , c'est-à-dire à  $4R$ .

Si nous considérons le domaine  $\mathcal{D}$  fermé intérieur à  $H_3$ , on ne peut y placer aucun segment de longueur supérieure à  $4R$ . On y trouve une infinité de segments ayant la longueur  $4R$ ; chacun est tangent à la frontière et les extrémités en sont elles-mêmes sur la frontière. Remarquons que le domaine fermé limité par deux cercles concentriques jouit d'une propriété analogue, mais cette fois la frontière n'est plus d'un seul tenant et les deux cercles qui la constituent jouent des rôles différents.

Si  $Q$  est le point de concours des trois tangentes  $MP$ ,  $M_1P_1$ ,  $M_2P_2$  (*fig. 2*), nous venons de voir que  $M$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $QP_1P_2$ ; les trois tangentes jouant évidemment le même rôle,  $M_1$  et  $M_2$  sont les centres des cercles circonscrits aux triangles  $QP_2P$  et  $QP_1P$ , respectivement; la médiane de  $PQ$  porte donc les points  $M_1$  et  $M_2$ , d'où une autre construction des tangentes issues de  $Q$ ; de même les médiatrices de  $QP_1$  et  $QP_2$  sont les droites  $M_2M$  et  $MM_1$ . La perpendiculaire en  $P$  à  $MP$  est aussi tangente à  $H_3$ , elle rencontre en  $Q_1$  et  $Q_2$  les droites  $M_1P_1$  et  $M_2P_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont les milieux des côtés  $QQ_1$  et  $QQ_2$ ; le cercle  $C$  qui passe par  $M_1$ ,  $M_2$  et  $P$  est le cercle des neuf points du triangle  $QQ_1Q_2$ ;  $Q'$  symétrique de  $Q$  par rapport à  $M$  est l'orthocentre de ce triangle;  $Q'P_1$  et  $Q'P_2$  sont deux hauteurs.  $H_3$  est tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle  $QQ_1Q_2$ .

Nous déterminerons un point  $M_i$  sur  $C$  par la mesure de l'angle  $\alpha_i = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i})$ . Nous nous proposons de trouver la relation exprimant que les tangentes correspondant à  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  sont concourantes. Pour obtenir les nouvelles tangentes à  $H_3$  issues d'un point  $Q$  de  $MP$ , prenons les points  $M_1$ ,  $M_2$  où la médiane de  $PQ$  coupe  $C$ ; ces tangentes existent à la seule condition que  $Q$  soit intérieur au segment  $\overline{QQ'}$  découpé par  $H_3$  sur  $MP$ . Donc, pour que les tangentes correspondant à des points  $M_1$  et  $M_2$  du cercle  $C$  concourent avec une tangente particulière  $MP$ , il faut et il suffit que la corde  $M_1M_2$  soit perpendiculaire à  $MP$ . ou, ce qui est équivalent, que les bissectrices des angles  $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$  et  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$  soient perpendiculaires. Ceci donne

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (\text{mod. } \pi),$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

La tangente  $M'P$  perpendiculaire à  $MP$  forme avec  $M_1P_1$  et  $M_2P_2$  un triangle dont les côtés et les hauteurs sont tangents à  $H_3$ . Or,  $M'$  est sur  $C$ , diamétralement opposé à  $M$ , autrement dit  $\alpha = \alpha' + \pi$ ; la relation qui caractérise un tel triangle est

$$\alpha' + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (\text{mod. } 2\pi),$$

A une  $H_3$ , on peut associer  $\infty^2$  triangles présentant la disposition signalée.

Les relations que nous venons d'établir entraînent des conséquences simples. Dans la première, si  $\alpha$  a une valeur constante,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont une somme constante, donc lorsque le point  $Q$  décrit une tangente  $MP$ , les bissectrices des angles formés par les deux nouvelles tangentes à  $H_3$  issues de  $Q$  ont des directions fixes, celles des tangentes à  $H_3$  aux points  $\overline{Q}$  et  $\overline{Q'}$  où  $MP$  recoupe  $H_3$ . De même, dans la deuxième formule, fixons  $\alpha'$ : les deux angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont encore une somme constante, donc dans les  $\infty^2$  triangles admettant la droite  $M'P$  pour un de leurs côtés et dont les côtés et les hauteurs sont tangents à  $H_3$ , les bissectrices de l'angle

*opposé au côté M'P ont des directions fixes.* Inversement, si  $\alpha_1 + \alpha_2 = C$ , où  $C$  désigne une constante, les tangentes correspondantes concourent sur une tangente fixe (T) de paramètre  $\alpha = \pi - C$  et la tangente (T') perpendiculaire à (T) forme avec les tangentes  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$  un triangle dont les hauteurs sont aussi tangentes à  $H_3$ .

M. Gambier <sup>(1)</sup> a étudié les triangles  $MM_1M_2$  inscrits dans un cercle et caractérisés par la relation  $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \text{const.}$ ; ces triangles sont dits *en position isogonale*. Nous reconnaissons alors que, si  $M, M_1, M_2$  sur le cercle  $C$  correspondent à trois tangentes concourantes, le triangle  $MM_1M_2$  est en position isogonale avec le triangle symétrique par rapport à  $O$  du triangle  $AA_1A_2$  formé par les sommets de  $H_3$ ; de même, si  $M', M_1, M_2$  correspondent à trois tangentes formant un triangle dont les hauteurs et les côtés sont tangents à  $H_3$ , le triangle  $M'M_1M_2$  est en position isogonale avec le triangle  $AA_1A_2$ .

La relation  $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \pmod{2\pi}$ , qui caractérise les  $\infty^2$  systèmes de trois tangentes concourantes peut, suivant Laguerre, être ainsi interprétée : *la somme des angles comptés depuis une direction fixe jusqu'à trois tangentes concourantes de  $H_3$  est constante.* Nous avons vu, en effet, que l'angle  $(Ox, MT)$  orienté de droites indéfinies est  $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  ( $\alpha$  est défini à  $2\pi$  près); pour les trois tangentes concourantes, la somme est  $\pi$ , ou plus simplement zéro. ( $Ox$  est la direction d'une tangente de rebroussement.)

*Réciproquement, si une courbe de classe 3 donne pour la somme en jeu, une valeur fixe, c'est une  $H_3$ .* D'abord, on ne pourra mener à cette courbe qu'une tangente de direction donnée : s'il en existait plus d'une, il y en aurait deux ou peut-être trois; envisageons alors deux tangentes parallèles  $T_1, T_2$ , puis un autre couple semblable  $\Theta_1, \Theta_2$ ; de chaque point  $(T_i, \Theta_j)$  serait issue une troisième tangente, de même direction dans les quatre cas : il y aurait donc des systèmes de quatre tangentes parallèles, d'où contradiction. La courbe est donc *unicursale*. En changeant l'orientation de la direction origine, on peut supposer la somme des angles nulle; la tangente  $T$  parallèle à cette direction origine est évidemment un axe de symétrie; en son point de contact, une nouvelle tangente se confond avec  $T$ , donc aussi la troisième :  $T$  est donc tangente de rebroussement. Il y a deux tangentes inclinées à  $\pm \frac{\pi}{3}$  sur  $T$ , chacune est un nouvel axe de symétrie et tangente de rebroussement; les trois points de rebroussement sont disposés aux sommets d'un triangle équilatéral. La courbe est nécessairement de degré 4, car si l'on prend une tangente quelconque  $t$ , aux points où cette tangente recoupe la courbe, la tangente ne peut être que l'une ou l'autre de deux tangentes rectangulaires (on connaît le double de l'angle compté de la direction origine vers une telle tangente); donc il n'y a que deux points d'intersection autres que le point de contact et les tangentes y sont rectangulaires. La

(1) Triangles en position isogonale (*Bull. Soc. Math. France*, 70, 1942, p. 31-39).

courbe étant de classe 3 et degré 4, coïncide nécessairement avec l' $H_3$  qui a les mêmes points de rebroussement.

En examinant la propriété démontrée plus loin au paragraphe 9, on verrait de même le résultat suivant : *soit une courbe telle que le triangle formé par trois tangentes donnant une valeur constante (donnée a priori) à la somme des angles déjà indiquée, ait un cercle circonscrit de rayon constant : cette courbe est une  $H_3$ .*

4. *Nouvelle génération tangentielle de  $H_3$ . Droites de Simson.* — Du théorème de M. Hadamard nous pouvons déduire une autre génération tangentielle de  $H_3$ . Soient un cercle C, deux droites perpendiculaires Px, Py issues d'un point P de ce cercle, Px coupant C en M, Py en  $M_1$ ; si une droite QQ' varie de sorte que le milieu m du segment QQ' déterminé sur elle par Px et Py soit un point de C, QQ' enveloppe une  $H_3$  tritangente à C.

Il y a une  $H_3$  et une seule qui admet C pour cercle inscrit, Px et Py pour tangentes particulières; de chaque point m de C, jouant le rôle de M, est issue une seule tangente à  $H_3$ , coupant Px et Py en Q, Q' et le segment QQ' admet m pour milieu; d'autre part, étant donné un point m du plan, il n'existe qu'une droite mQQ', issue de m telle que m soit milieu de QQ'. La propriété est alors évidente. Vérifions-la par un raisonnement direct qui donnera d'ailleurs la position des sommets de  $H_3$ ; pour cela, désignons par p le deuxième point de rencontre de mQQ' avec C (fig. 4); O étant le centre de C l'égalité des angles de

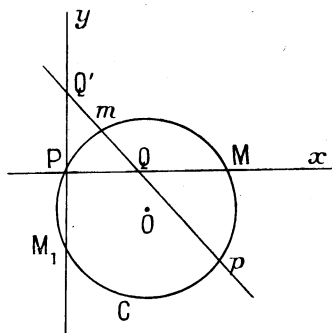


Fig. 4.

droites (PQ, Pm), (Qm, QP) entraîne, par la considération des angles doubles

$$(\vec{OM}, \vec{Om}) = (\vec{Op}, \vec{OM}) + (\vec{Om}, \vec{OP}) \pmod{2\pi}$$

et, en ajoutant de part et d'autre  $(\vec{OM}, \vec{Om})$

$$2(\vec{OM}, \vec{Om}) = (\vec{Op}, \vec{OM}) + (\vec{OM}, \vec{Om}) + (\vec{Om}, \vec{OP}) = (\vec{Op}, \vec{OP}).$$

Désignons par A l'un des sommets de l' $H_3$  définie par le cercle C et les tangentes particulières Px, Py; retranchons aux deux membres les quantités



égales  $2(\vec{OM}, \vec{OA}) = (\vec{OA}, \vec{OP})$  nous obtenons

$$2(\vec{OA}, \vec{Om}) = (\vec{Op}, \vec{OA}),$$

relation caractéristique entre les points  $m$  et  $p$  d'une tangente à l' $H_3$  considérée.

(Au paragraphe 2, nous avons déjà montré que l'égalité  $2(\vec{OM}, \vec{OA}) = (\vec{OA}, \vec{OP})$  définit  $A$  par trisection de l'arc  $MP$ .)

Les points de contact  $T$  et  $T_1$  de  $Px$  et  $Py$  avec  $H_3$  s'obtiennent en doublant  $PM$  et  $PM_1$ . Le segment découpé par  $Px$  et  $Py$  sur une tangente variable  $mQQ'$  est égal à  $2Pm$ ; il reste compris entre  $O$  et  $4R$ , la valeur maximum  $4R$  étant obtenue quand  $m$  est diamétralement opposé à  $P$  sur  $C$ , la tangente correspondante n'étant autre que la droite qui joint  $T_1$  et  $T_2$ .  $Px$  et  $Py$  sont deux tangentes rectangulaires quelconques de  $H_3$  et nous retrouvons un résultat déjà obtenu : un couple de tangentes rectangulaires de  $H_3$  a son sommet sur le cercle inscrit, le segment qui joint les points de contact a pour longueur  $4R$  et il est lui-même tangent à  $H_3$ .

Cette génération tangentielle permet de démontrer que toutes les droites de Simson relatives à un triangle  $ABC$  enveloppent une  $H_3$ . Soit un triangle  $ABC$ , d'orthocentre  $H$  (fig. 5); si  $P$  est le pied de la hauteur issue de  $A$ ,  $A_1$  le point de

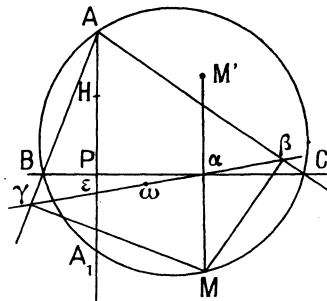


Fig. 5.

rencontre de cette hauteur avec le cercle circonscrit, on a  $\vec{A_1P} = \vec{PH}$ . Soit  $M$  un point du cercle circonscrit,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ses projections sur les côtés du triangle; les quadrilatères inscriptibles  $\alpha M \gamma B$  et  $ABA_1 M$  donnent

$$(\alpha\gamma, \alpha M) = (B\gamma, BM) = (BA, BM) = (A_1A, A_1M) = (M\alpha, MA_1).$$

Donc  $\alpha\gamma$  et  $A_1M$  ont des directions symétriques par rapport à  $\alpha M$  (ou  $BC$ ); même conclusion pour les droites  $\alpha\beta$  et  $A_1M$ , ce qui prouve que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont alignés.  $M'$  étant le symétrique de  $M$  par rapport à  $BC$ ,  $HM'$  est symétrique de  $A_1M$ , donc parallèle à la droite de Simson  $\alpha\beta\gamma$  ou encore homothétique de

cette droite par rapport à M, dans le rapport 2<sup>(1)</sup>. Si l'on appelle  $\varepsilon$  le point où la droite de Simson coupe AP, la figure HM' $\varepsilon$  est un parallélogramme,

$$\vec{\varepsilon H} = \vec{\alpha M'} = \vec{M\alpha};$$

donc H $\alpha$ M $\varepsilon$  est un parallélogramme,  $\alpha\varepsilon$  et HM se coupent en leur milieu  $\omega$  dont le lieu, quand M varie, est le cercle des neuf points de ABC. La droite de Simson rencontre BC, AP en deux points  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  tels que le milieu de  $\alpha\varepsilon$  soit sur le cercle des neuf points; elle enveloppe l' $H_3$  ayant pour cercle tritangent le cercle des neuf points de ABC, et tangente à BC et AH. Par raison de symétrie, cette  $H_3$  est tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs de ABC; le côté BC est la droite de Simson du point diamétralement opposé au sommet A, et la hauteur AH est droite de Simson de A; nous verrons plus loin qu'il existe  $\infty^1 H_3$  tangentes à BC, CA, AB et que c'est l'enveloppe des droites de Simson qui donne l' $H_3$  de plus petite dimension.

5. *Enveloppe des asymptotes d'un faisceau linéaire d'hyperboles équilatères.* — Signalons le théorème suivant : l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ABC est l'hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux côtés et aux hauteurs du triangle ABC. Ces hyperboles passent toutes par l'orthocentre H du triangle, le lieu de leur centre est le cercle  $\Gamma$  des neuf points du triangle ABC; trois d'entre elles sont dégénérées en un côté de ABC et la hauteur correspondante. Les deux asymptotes P $\alpha$ , P $\gamma$  de l'une de ces hyperboles se coupent en un point P de  $\Gamma$ ; le milieu de AB (ou CH) est aussi le milieu du segment découpé sur AB (ou CH) par P $\alpha$ , P $\gamma$ ; donc l' $H_3$  définie par  $\Gamma$  comme cercle tritangent et les tangentes particulières P $\alpha$ , P $\gamma$  est tangente à AB (ou CH) et par raison de symétrie, à BC, CA, AH, BH; elle coïncide avec l' $H_3$  enveloppe des droites de Simson de ABC et toutes les hyperboles en jeu ont pour asymptotes des tangentes de  $H_3$ .

6. *Développée de  $H_3$ .* — Le point de contact T (fig. 6) de la tangente MP est défini par  $\vec{MT} = \vec{PM}$ . Soit M' diamétralement opposé à M sur C, PM' est une autre tangente à  $H_3$ , dont nous désignons le point de contact par T'. La normale en T à  $H_3$  est parallèle à PT'; la médiatrice de MP est parallèle à ces deux droites, elle passe par O et coupe MP en son milieu  $\mu$ ; l'homothétie de centre O et de rapport (— 3) transforme PT' en la normale en T à  $H_3$ , la développée est la transformée de  $H_3$  dans cette homothétie. Si  $\Theta$  est le centre de courbure en T et  $\theta$

(1) Cette démonstration de l'existence de la droite de Simson  $\Delta$  et du fait que la parallèle à  $\Delta$  menée par H est à la distance double de M a été donnée autrefois par M. Schmidt. Les deux faits sont établis simultanément par une méthode assez élégante pour mériter d'être signalée incidemment.



droite  $\Theta$  perpendiculaire à  $T$  au point variable  $P$  (*fig. 7*), il existe une  $H_3$  et une seule tangente à  $T, T_1, T_2, \Theta$ ; en effet, soient  $Q_1, Q_1'$  les points où  $T_1$  rencontre  $T$  et  $\Theta, Q_2, Q_2'$  les points analogues fournis par  $T_2$ ; les milieux  $M_1, M_2$  de  $Q_1 Q_1', Q_2 Q_2'$  déterminent avec  $P$  un cercle  $C$  tritangent à une  $H_3$  cherchée.

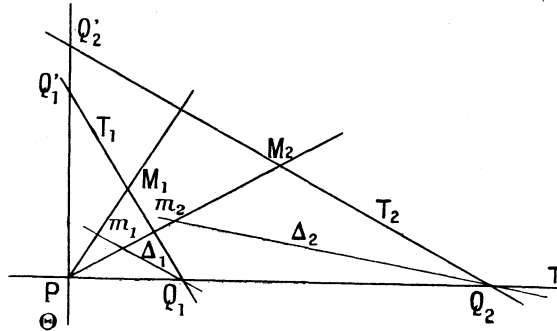


Fig. 7.

$P$  variant sur  $T$ , les droites  $PM_1, PM_2$  conservent chacune sa direction; le milieu  $m_1$  de  $PM_1$  décrit une droite  $\Delta_1$  issue de  $Q_1$ , le milieu  $m_2$  de  $PM_2$  décrit une droite  $\Delta_2$  issue de  $Q_2$ ;  $m_1$  et  $m_2$  décrivent sur  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  des divisions semblables à celle que  $P$  décrit sur  $T$ , les médiatrices de  $PM_1, PM_2$  ont encore des directions fixes, de sorte que le lieu du centre  $O$  de  $C$  est une droite.

8.  $H_3$  tangente à quatre droites. — Donnons-nous maintenant quatre droites. *Premier cas.* — Deux d'entre elles,  $T$  et  $\Theta$ , sont rectangulaires; le raisonnement précédent donne l'unique  $H_3$  tangente aux quatre droites  $T, T_1, T_2, \Theta$ .

*Cas général.* — Il n'existe aucun couple de droites rectangulaires parmi les droites données  $T, T_1, T_2, T_3$ . Prenons une droite  $\Theta$  perpendiculaire à  $T$  et cherchons comment il faut choisir son pied  $P$  sur  $T$  pour que les médiatrices de  $PM_1, PM_2, PM_3$  soient concourantes, auquel cas  $P, M_1, M_2, M_3$  seront sur un même cercle  $C$ , tritangent à une  $H_3$  tangente aux quatre droites; le point  $O$  de concours des médiatrices de  $PM_1, PM_2$  décrit, quand  $P$  varie, une droite; de même pour le point de concours des médiatrices de  $PM_1, PM_3$ ; en montrant que ces droites ne sont ni parallèles ni confondues, on peut conclure à l'existence d'une seule  $H_3$  répondant à la question. Mais les directions de ces droites n'étant pas simples, nous emploierons une méthode un peu différente.

Soit deux axes rectangulaires fixes  $Px, Py$ . Supposons que le système invariable  $T, T_1, T_2, T_3$  glisse dans le plan,  $T$  glissant sur  $Px$ ; chaque position du système fournit une  $H_3$  tangente à  $Py, T, T_1, T_2$  et une autre  $H_3'$  tangente à  $Py, T, T_1, T_3$ ; montrons qu'il y a une position unique pour laquelle  $H_3$  et  $H_3'$  coïncident.

Pour cela, cherchons le lieu du centre  $\omega$  du cercle tritangent à  $H_3$ , tangente à  $Py, T, T_1, T_2$ . Appelons  $\varphi_i$  l'angle des droites indéfinies ( $T_i, T$ ) de sorte que

( $Px, PM_i$ ) a aussi  $\varphi_i$  pour l'une de ses déterminations. Exprimons que le point  $\omega$  de coordonnées  $a, b$  se projette orthogonalement sur  $PM_1$  au milieu  $m_1$  de ce segment. On a

$$\overline{Pm_1} = a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1 \quad \text{d'où} \quad \overline{PM_1} = 2(a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1).$$

La projection de  $M_1$  sur  $Px$  est le milieu de  $PQ_1$ , donc

$$(1) \quad \overline{PQ_1} = 4(a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1) \cos \varphi_1$$

et, comme vérification, on constate que le résultat ne change pas quand on remplace  $\varphi_1$  par  $\varphi_1 + \pi$ . De même

$$\overline{PQ_2} = 4(a \cos \varphi_2 + b \sin \varphi_2) \cos \varphi_2$$

et, par soustraction

$$(2) \quad \begin{aligned} \overline{Q_1 Q_2} &= 4 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) [a \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - b \cos(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ a \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - b \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \frac{\overline{Q_1 Q_2}}{4 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

C'est l'équation de la droite lieu de  $\omega$  dans le plan  $Pxy$ . Pour le lieu de  $\omega'$ , centre de  $H_3$  tangente à  $P\gamma, T, T_1, T_3$ , on a l'équation

$$(3) \quad a \sin(\varphi_1 + \varphi_3) - b \cos(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{\overline{Q_1 Q_3}}{4 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}.$$

Ces deux droites ont des directions différentes;  $a$  et  $b$  sont calculés de façon unique; ensuite, (1) détermine  $\overline{PQ_1}$  et l'unique  $H_3$  tangente aux quatre droites données en résulte.

Étudions sans calcul les lieux des points  $\omega$  et  $\omega'$  lorsque le système des quatre droites glisse sur le plan  $Pxy$ . Cherchons plutôt le lieu du point  $O$  diamétralement opposé à  $P$  sur le cercle  $PM_1M_2$ , homothétique de  $\omega$  dans l'homothétie de centre  $P$ , et de rapport 2.  $Q_1Q_2$  glissant sur  $Px$ , le point  $M_1$  décrit sur la droite  $Px_1$ , ( $T, Px_1$ ) =  $\varphi_1$ , une division ( $M_1$ ) semblable à celle que  $Q_1$  décrit sur  $T$  (*fig. 8*); de même,  $M_2$  sur la droite  $Px_2$  définie par ( $T, Px_2$ ) =  $\varphi_2$  décrit une

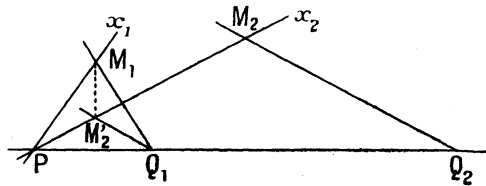


Fig. 8.

division ( $M_2$ ) semblable à celle de  $Q_2$ ;  $Q_1$  et  $Q_2$  décrivent des divisions égales, donc les divisions ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) sont semblables. Soit  $\pi$  le centre de la similitude ( $M_1, M_2$ ). Considérons une position quelconque du système  $T, T_1, T_2$  et les points  $M_1$  et  $M_2$ ; par  $Q_1$ , menons la parallèle à  $T_2$  qui coupe  $Px_2$  en  $M'_2$ .  $Q_1$  variant, le

triangle  $PM_1M_2$  reste semblable à lui-même : la correspondance  $(M_1, M_2')$  est la similitude de centre P, de module  $\frac{PM_2'}{PM_1} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$  et d'argument  $\varphi_2 - \varphi_1$  ; la correspondance  $(M_2', M_2)$  est une translation, puisque le vecteur  $\overrightarrow{M_2'M_2}$  est la projection sur  $Px_2$ , parallèlement à  $T_2$ , du vecteur constant  $\overrightarrow{Q_1Q_2}$  ; un vecteur quelconque de la figure  $(M_1)$  a pour homologues dans les figures  $(M_2')$  et  $(M_2)$  des vecteurs équipollents, donc les similitudes  $(M_1, M_2')$  et  $(M_1, M_2)$  ont le même module et le même argument et les triangles  $PM_1M_2'$  et  $\pi M_1M_2$  sont directement semblables. L'égalité  $(PM_1, PM_2) = (\pi M_1, \pi M_2) \pmod{\pi}$  prouve que P,  $\pi$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  sont sur un même cercle ; sur ce cercle le point O est diamétralement opposé à P et la perpendiculaire élevée en  $\pi$  sur  $P\pi$  est une droite fixe, lieu du point O. Pour trouver la position du centre  $\pi$ , déplaçons  $T_1$  et  $T_2$  de façon que leur point commun vienne sur  $P\gamma$  (*fig. 9*) ; les deux triangles

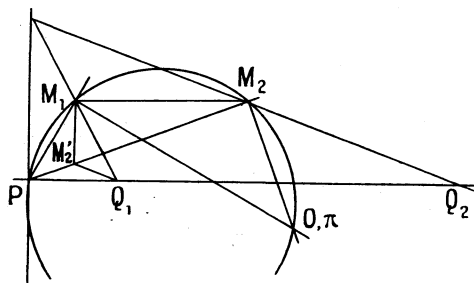


Fig. 9.

$PM_1M_2'$  et  $OM_1M_2$  sont alors directement semblables car leurs côtés homologues sont perpendiculaires, donc le point  $\pi$  n'est autre que le point O fourni par cette figure spéciale ; la droite, lieu du point variable O est la tangente en  $\pi$  au cercle spécial  $PM_1M_2$  qui est le cercle des neuf points du triangle  $TT_1T_2$ . On retrouve tous les résultats qui apparaissent par l'interprétation de l'équation (2) : l'angle de  $Px$  avec la droite (2) est  $\varphi_1 + \varphi_2$ , ce qui exprime que la droite (2) est parallèle à la tangente en P au cercle des neuf points du triangle  $TT_1T_2$  dans la position particulière considérée et la distance de P à la droite (2) est égale au rayon du cercle des neuf points.

On remarquera que le cercle tritangent à une  $H_3$  tangente à  $T, T_1, T_2$  a pour diamètre le segment PO dont le minimum est  $P\pi$ . Donc, de toutes les  $H_3$  tangentes à  $T, T_1, T_2$ , la plus petite est celle dont le cercle tritangent est le cercle des neuf points du triangle  $TT_1T_2$ , c'est-à-dire l'enveloppe des droites de Simson du triangle.

L'étude précédente permet de résoudre le problème suivant : étant donné un triangle  $TT_1T_2$ , trouver une  $H_3$  de grandeur donnée (dont le cercle inscrit a un rayon donné  $\rho$ ) tangente aux trois côtés du triangle. En procédant comme on vient de faire, on connaîtrait la distance  $PO = 2\rho$  ; si  $2\rho > P\pi$  on aurait deux positions de O symétriques par rapport à  $\pi$  ; de O, on déduirait  $M_1$  et  $M_2$  d'où les positions cherchées des droites  $T_1$  et  $T_2$ .

9. *Cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes de  $H_3$ .* — Nous retrouverons certains des résultats précédents en étudiant le triangle  $Q_{20}Q_{01}Q_{12}$  formé par trois tangentes quelconques de  $H_3$ ,  $MP$ ,  $M_1P_1$ ,  $M_2P_2$  (*fig. 10*). L'angle

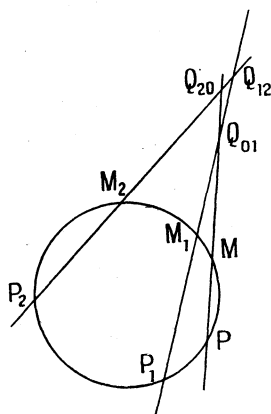


Fig. 10.

$(M_1P_1, MP)$  ou  $(Q_{01}Q_{12}, Q_{01}Q_{20})$  défini en grandeur et en signe à  $k\pi$  près est égal à  $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha)$ , comme l'angle  $(M_2M, M_2M_1)$ ,

$$(M_1P_1, MP) = (M_2M, M_2M_1).$$

De même,

$$(M_2P_2, M_1P_1) = (MM_1, MM_2),$$

donc les triangles  $Q_{12}Q_{20}Q_{01}$  et  $MM_1M_2$  sont directement semblables. Le rapport de similitude est le rapport de  $Q_{01}Q_{02}$  à  $M_1M_2$  ou le rapport des rayons des cercles circonscrits. Or

$$MQ_{01} = MP_1 = 2R \left| \sin \frac{\alpha + 2\alpha_1}{2} \right|.$$

En choisissant sur  $MP$  un sens positif convenable, nous aurons

$$\overline{MQ_{01}} = 2R \sin \frac{\alpha + 2\alpha_1}{2}.$$

(Ce sens positif sera celui de  $P$  vers  $M$ , aussi celui de  $M$  vers le point de contact de la tangente  $MP$  si  $\sin \frac{3\alpha}{2}$  est positif, le sens contraire, si  $\sin \frac{3\alpha}{2}$  est négatif.)

De même

$$\overline{MQ_{02}} = 2R \sin \frac{\alpha + 2\alpha_2}{2}$$

et

$$\overline{Q_{01}Q_{02}} = 2R \left( \sin \frac{\alpha + 2\alpha_2}{2} - \sin \frac{\alpha + 2\alpha_1}{2} \right) = 4R \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$Q_{01}Q_{02} = 4R \left| \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \right|.$$

Par ailleurs

$$M_1 M_2 = 2R \left| \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right|.$$

Le rapport de similitude est donc  $2 \left| \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \right|$  et le rayon du cercle circonscrit au triangle  $Q_{12} Q_{20} Q_{01}$  a pour valeur  $2R \cos \left| \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \right|$ . Notons que si l'on change  $\alpha$  en  $\alpha + 2\pi$ , ni le triangle circonscrit, ni le triangle  $MM_1 M_2$  ne change, mais  $\cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2}$  change de signe.

Nous retrouvons la condition  $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \pmod{2\pi}$  exprimant que les tangentes issues de  $M, M_1, M_2$  concourent; de même la condition

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \pmod{2\pi}$$

qui correspond au cas où  $H_3$  touche les côtés et les hauteurs du triangle  $Q_{12} Q_{20} Q_{01}$  exprime que le rayon du cercle circonscrit à ce triangle formé par trois tangentes a la valeur maximum  $2R$ .

Ce résultat montre que si un cercle  $\Gamma$  quelconque du plan a un rayon  $\rho$  supérieur au diamètre  $2R$  du cercle tritangent, il n'existe aucun triangle réel inscrit dans  $\Gamma$  et circonscrit à  $H_3$ ; si  $\rho = 0$ ,  $\Gamma$  se réduit à son centre  $\omega$  et il y a une solution unique, formée par les tangentes à  $H_3$  issues de  $\omega$ ; si  $\rho = 2R$ , il y a encore une solution unique: du centre de similitude directe  $H$  de  $\Gamma$  et  $C$ , on mène les tangentes à  $H_3$  et les tangentes perpendiculaires à celles-ci donnent l'unique triangle cherché (réel si  $H$  est à l'intérieur de  $H_3$ ). Si  $\rho < 2R$ , un système de tangentes formant une solution doit d'abord satisfaire à l'équation

$$2 \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} = \pm \frac{\rho}{R},$$

ce qui revient à écrire à  $2\pi$  près.

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = u \quad \text{ou} \quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = -u,$$

où  $u$  est un argument connu.  $u = 0$ ,  $u = \pi$  correspondent aux deux cas spéciaux qui viennent d'être signalés. A un triangle  $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$  circonscrit à  $H_3$ , nous pouvons associer le triangle  $(-\alpha, -\alpha_1, -\alpha_2)$  symétrique par rapport à l'un des axes de symétrie  $OA$  de  $H_3$ : les deux séries de triangles correspondant à

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = u \quad \text{et} \quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = -u$$

sont formées de triangles deux à deux symétriques par rapport à  $OA$ .

*Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes à  $H_3$  correspondant aux angles  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  liés par la relation  $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = u$ , où  $u$  est donné, est*

$$\rho = 2R \left| \cos \frac{u}{2} \right|.$$



Étant donné un tel triangle, si nous remplaçons chaque angle  $\alpha$  par  $\alpha + \pi$  pour avoir la tangente perpendiculaire,  $u$  est remplacé par  $u + 3\pi$  et  $\frac{u}{2}$  par  $\frac{u}{2} + \frac{3\pi}{2}$  ou, ce qui est équivalent, par  $\frac{u}{2} - \frac{\pi}{2}$ ; le nouveau rayon  $\rho'$  vérifie

$$\rho' = 2R \left| \sin \frac{u}{2} \right|,$$

on a donc

$$\rho^2 + \rho'^2 = 4R^2,$$

ce qui a été obtenu pour  $u = 0$ ,  $u = \pi$  ( $\rho = 0$ ,  $\rho' = 2R$ ).

Ce qui précède permet d'obtenir toutes les  $H_3$  inscrites dans un triangle donné  $T$ : en effet, par des similitudes, on peut ramener le problème au suivant: *circonscrire à une  $H_3$  donnée un triangle directement semblable à un triangle donné*; il suffit d'inscrire dans le cercle tritangent  $C$  un triangle  $MM_1M_2$  directement semblable au triangle donné  $T$  et de tracer les tangentes à  $H_3$  issues des points  $M, M_1, M_2$  considérés comme points  $M$ ; on fait glisser le système invariable des trois points  $M, M_1, M_2$  sur le cercle  $C$ , autrement dit on remplace les angles  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  par  $\alpha + h, \alpha_1 + h, \alpha_2 + h$  où  $h$  désigne un angle quelconque; le triangle des trois tangentes issues de  $M, M_1, M_2$  reste directement semblable à lui-même;  $H_3$  se reproduisant par une rotation de  $\frac{2\pi}{3}$  autour de son centre  $O$ , il suffit de faire varier  $h$  dans un intervalle d'amplitude  $\frac{2\pi}{3}$ , puis de faire subir à la série des triangles obtenus deux rotations successives de  $\frac{2\pi}{3}$  autour de  $O$  pour avoir tous les triangles cherchés. Parmi les triangles d'une série, celui qui est le plus petit correspond à

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = \pi \quad (\text{mod } 2\pi);$$

et se réduit à un point, celui qui a la dimension maximum correspond à

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = 0 \quad (\text{mod } 2\pi)$$

entre ces deux extrêmes, il y a pour chaque taille, deux triangles solutions correspondant à des valeurs de  $h$  telles que

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = u \quad \text{et} \quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = 2\pi - u.$$

On obtient enfin toutes les  $H_3$  inscrites dans le triangle  $T$  en prenant chaque triangle  $t$  de la série étudiée et faisant la similitude transformant  $t$  en  $T$ ; on trouve ainsi  $\infty^1 H_3$ ; celle qui a la plus petite dimension est tangente aux côtés et aux hauteurs de  $T$ ; pour toute dimension supérieure, on trouve deux  $H_3$  inscrites.

Pour obtenir une  $H_3$  tangente à quatre droites données, formant le quadrilatère complet  $Q$ , on procédera ainsi: on mènera à une  $H_3$  particulière quatre tan-

gentes formant une figure  $q$  directement semblable à  $Q$ , puis la similitude transformant  $q$  en  $Q$  donnera l' $H_3$  cherchée. Plaçons (*fig. 11*) deux droites rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$  de façon que  $Oy$  soit parallèle à un côté du quadrilatère  $Q$ , traçons le cercle unité  $C$  de centre  $O$ , et désignons par  $A$  le point d'abscisse 1 sur  $Ox$ ; considérons l' $H_3$  de cercle tritangent  $C$ , de sommet  $A$ ;

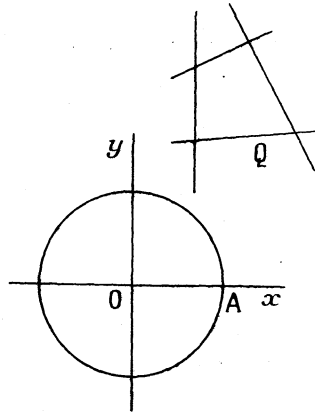


Fig. 11.

menons à cette  $H_3$  les tangentes parallèles aux côtés de  $Q$ , soient  $\alpha_0, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$ , les abscisses curvilignes des points  $M$  relatifs à ces tangentes, en adoptant des notations telles que

$$0 < \alpha_1^0 < \alpha_2^0 < \alpha_3^0 < 2\pi.$$

Le quadrilatère cherché  $q$ , semblable à  $Q$  sera formé par les tangentes à  $H_3$  correspondant à des valeurs du paramètre  $\alpha$  de la forme

$$\alpha_0 = h, \alpha_1 = \alpha_1^0 + h, \alpha_2 = \alpha_2^0 + h, \alpha_3 = \alpha_3^0 + h.$$

On peut supposer  $h = \alpha_0 < \frac{2\pi}{3}$ . En orientant la tangente  $M_0P_0$  de paramètre  $\alpha_0$ , de  $P_0$  vers  $M_0$ , on a

$$\overline{M_0Q_{10}} = 2 \sin \frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{2},$$

de même

$$\overline{M_0Q_{20}} = 2 \sin \frac{\alpha_0 + 2\alpha_2}{2},$$

$$\overline{Q_{10}Q_{20}} = 4 \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$\overline{Q_{10}Q_{30}} = 4 \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3}{2}.$$

La donnée du quadrilatère  $Q$  fournit le rapport

$$\frac{\overline{Q_{10}Q_{20}}}{\overline{Q_{10}Q_{30}}} = m \geq 0$$

et l'on trouve l'équation

$$\frac{\sin \frac{\alpha_2^0 - \alpha_1^0}{2} \cos \frac{3h + \alpha_1^0 + \alpha_2^0}{2}}{\sin \frac{\alpha_3^0 - \alpha_1^0}{2} \cos \frac{3h + \alpha_1^0 + \alpha_3^0}{2}} = m,$$

qui donne  $\operatorname{tg} \frac{3h}{2}$ , d'où  $h$  à  $2\pi$  près.

Le rapport précédent ne change pas si l'on augmente de  $2\pi$  l'un des angles  $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$ .

L'étude faite à partir d'un triangle  $T$  permettrait aussi de trouver toutes les  $H_3$  tangentes à deux droites données  $T_1$  et  $T_2$ , le point de contact de  $T_1$  étant donné; de même, l'étude faite pour le quadrilatère  $Q$  permettrait de construire l' $H_3$  tangente à deux droites  $T_1$  et  $T_2$ , les points de contact avec  $T_1$  et  $T_2$  étant donnés.

10. *Triangles admettant les mêmes droites de Simson.* — Nous avons montré au paragraphe 4 que les droites de Simson relatives à un triangle  $ABC$  enveloppent une  $H_3$  dont le cercle inscrit est le cercle des neuf points du triangle de base, et dans le paragraphe 3, que, à une  $H_3$  quelconque, on peut associer  $\infty^2$  triangles dont les côtés et les hauteurs sont tangents à  $H_3$ , c'est-à-dire admettant  $H_3$  pour enveloppe de leurs droites de Simson. Nous venons enfin de trouver qu'il existe une  $H_3$  unique tangente à quatre droites données,  $T, T_1, T_2, T_3$ . Donc :

*Étant donné quatre droites  $T, T_1, T_2, T_3$  de directions différentes, il existe toujours  $\infty^1$  triangles admettant ces droites pour droites de Simson; tous ces triangles ont le même cercle des neuf points; toute droite de Simson de l'un d'eux est droite de Simson pour les autres.*

11. *Définition de certaines courbes unicursales qui ne sont pas courbes de direction.* — Si nous fixons sur une normale de  $H_3$  un sens positif et si nous nous déplaçons sur  $H_3$  de façon à parcourir toute la courbe, la demi-normale positive étant suivie par continuité, nous reviendrons au point de départ avec changement de sens sur cette demi-normale. Cependant les cosinus directeurs de la demi-normale peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre, en même temps que les coordonnées du point courant; en effet, en prenant l'origine des coordonnées au centre du cercle tritangent,  $Ox$  joignant ce centre à l'un des trois sommets de  $H_3$ , puis prenant le rayon de ce cercle pour unité de longueur, l'équation de la tangente  $MP$  est  $x \cos \frac{\alpha}{2} - y \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} = 0$  et les coordonnées du point de contact  $T$ , obtenu en écrivant  $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{PM}$  sont

$$x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha, \quad y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha,$$

de sorte que les coordonnées de  $T$  s'expriment rationnellement en  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ; or, en

fonction de  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , les paramètres directeurs  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $-\sin \frac{\alpha}{2}$  de la normale sont irrationnels; ce n'est qu'en prenant  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$  comme nouveau paramètre que les cosinus directeurs deviennent rationnels et pour revenir au point de départ avec le même sens positif, il faut avoir parcouru deux fois la courbe. Toute courbe unicursale, telle que l'équation de la tangente générale puisse être ramenée à la forme  $y - tx - f(t) = 0$ , où  $f(t)$  est une fraction rationnelle en  $t$ , jouit évidemment de la même propriété et est la courbe unicursale la plus générale de ce type.

Dans le même ordre d'idées, à une courbe *plane*  $C$  unicursale quelconque,  $x = f(t)$ ,  $y = \varphi(t)$ , où  $f$  et  $\varphi$  sont des fractions rationnelles en  $t$ , nous pouvons faire correspondre, par les formules  $t = F(\theta)$ ,  $z = \psi(\theta)$ , où  $F$  et  $\psi$  sont des fractions rationnelles, une nouvelle courbe *gauche*  $\Gamma$ ,  $x = f[F(\theta)]$ ,  $y = \varphi[F(\theta)]$ ,  $z = \psi(\theta)$ , dont la projection sur le plan  $z = 0$  est la courbe  $C$  parcourue  $p$  fois,  $p$  étant le degré de  $F(\theta)$  par rapport à  $\theta$ . Pour le cas de  $H_3$ , il est intéressant de prendre  $p = 2$ ; les formules  $x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha$ ,  $y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha$  seront complétées par une formule

$$z = F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

où  $F$  est une expression rationnelle en  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$  et nous aurons une courbe unicursale où le paramètre unicursal sera  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$ ; si, de plus,  $F$  admet la *demi-période*  $2\pi$ , la courbe  $\Gamma$  aura le plan  $xOy$  comme plan de symétrie. Or, notre étude élémentaire nous donne deux exemples particulièrement simples: nous avons vu, au paragraphe 6, que l'arc de  $H_3$  peut être pris égal à

$$\frac{4}{3} \text{ PM ou } \frac{8}{3} \sin \frac{3\alpha}{2};$$

donc, si  $k$  est une constante numérique quelconque, les formules

$$x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha \quad y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha \quad z = k \sin \frac{3\alpha}{2}$$

définissent une *hélice unicursale* dont  $H_3$ , parcourue deux fois est la projection horizontale. D'ailleurs la puissance du point de contact  $T$  de la tangente  $MP$  de  $H_3$  par rapport au cercle  $C$  est, d'une part  $x^2 + y^2 - 1$ , d'autre part

$$\overline{TM} \cdot \overline{TP} = 2 \overline{MP}^2 = 8 \sin^2 \frac{3\alpha}{2};$$

en prenant  $k = 2\sqrt{2}$ , l'hélice en jeu sera située sur l'hyperboloïde à une nappe  $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ .

Si maintenant on calcule  $z_1$  par la formule  $z_1^2 + z^2 = 8$  de façon que  $z_1$  soit égal à  $2\sqrt{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$ , on aura  $z_1^2 = 9 - x^2 - y^2$ ; la nouvelle courbe unicursale

$$x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha, \quad y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha, \quad z_1 = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\alpha}{2},$$

sera tracée sur la sphère de centre O et rayon 3, contenant les trois points de rebroussement de  $H_3$ .

Quelle que soit la valeur de  $k$ , les cosinus directeurs de la tangente à l'hélice que nous avons indiquée,

$$\frac{8}{\sqrt{64 + 9k^2}} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{8}{\sqrt{64 + 9k^2}} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{3k}{\sqrt{64 + 9k^2}}$$

sont exprimés rationnellement au moyen du même paramètre que les coordonnées  $(x, y, z)$ .