

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN DIEUDONNÉ

## Sur les produits tensoriels

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 64 (1947), p. 101-117

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1947\\_3\\_64\\_\\_101\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__101_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR

# LES PRODUITS TENSORIELS

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

---

1. On doit à H. Whitney <sup>(1)</sup> la définition générale du *produit tensoriel* de deux *modules* unitaires <sup>(2)</sup> quelconques  $E, F$  sur un même anneau d'opérateurs commutatif  $A$  (supposé avoir un élément unité): c'est un  $A$ -module noté  $E \otimes F$ , dont nous ne reproduirons pas ici la définition, mais dont nous rappellerons la propriété fondamentale (qui le caractérise à une isomorphie près) : *il existe une application bilinéaire  $\varphi$  de  $E \times F$  dans  $E \otimes F$ , telle que : 1°  $\varphi(E \times F)$  engendre  $E \otimes F$ ; 2° si  $G$  est un  $A$ -module quelconque,  $f$  une application bilinéaire de  $E \times F$  dans  $G$ , il existe une application linéaire  $g$  de  $E \otimes F$  dans  $G$  telle que l'on ait identiquement  $g[\varphi(x, y)] = f(x, y)$ .*

On pose  $\varphi(x, y) = x \otimes y$ ; tout élément de  $E \otimes F$  est donc de la forme  $\sum_i (x_i \otimes y_i)$ , mais peut en général se mettre sous cette forme d'une infinité de manières.

Nous utiliserons les lemmes suivants, qu'on démontre dans la théorie générale des produits tensoriels <sup>(1)</sup> :

**LEMME 1.** — *Soit  $M$  un sous-module de  $E$ ,  $N$  un sous-module de  $F$ . Le module  $(E/M) \otimes (F/N)$  est isomorphe au module  $(E \otimes F)/\Gamma(M, N)$ , où  $\Gamma(M, N)$  est le sous-module de  $E \otimes F$  engendré par les éléments  $x \otimes y$  tels que  $x \in M$  ou  $y \in N$ .*

On définit un isomorphisme (dit canonique) de  $(E/M) \otimes (F/N)$  sur  $(E \otimes F)/\Gamma(M, N)$  en faisant correspondre au produit tensoriel  $\bar{x} \otimes \bar{y}$  d'une

---

<sup>(1)</sup> H. WHITNEY, *Tensor products of abelian groups* (*Duke Math. J.*, t. 4, 1938, p. 495-528). La définition de Whitney ne concerne que les modules par rapport à l'anneau des entiers rationnels, mais s'étend aussitôt au cas général. La forme sous laquelle nous utilisons la théorie générale des produits tensoriels est due à H. Cartan.

<sup>(2)</sup> Nous dirons qu'un  $A$ -module  $E$  est *unitaire* si (en désignant par  $\varepsilon$  l'élément unité de  $A$ ) on a, pour tout  $x \in E$ ,  $\varepsilon x = x$ .

classe  $\bar{x}$  modulo M et d'une classe  $\bar{y}$  modulo N, la classe modulo  $\Gamma(M, N)$  d'un élément (quelconque)  $x \otimes y$ , où  $x$  appartient à  $\bar{x}$  et  $y$  à  $\bar{y}$ .

**LEMME 2.** — Si E est somme directe d'une famille  $(E_i)$  de sous-modules, F somme directe d'une famille  $(F_j)$  de sous-modules, le module  $E \otimes F$  est isomorphe à la somme directe des modules  $E_i \otimes F_j$ . En particulier, si  $(a_i)$  est une base <sup>(3)</sup> de E,  $(b_j)$  une base de F, les éléments  $a_i \otimes b_j$  forment une base de  $E \otimes F$ .

**LEMME 3.** — Le produit tensoriel  $A \otimes E$  est isomorphe à E.

On définit un isomorphisme (dit canonique) de  $A \otimes E$  sur E en faisant correspondre au produit tensoriel  $\alpha \otimes x$  ( $\alpha \in A$ ,  $x \in E$ ) l'élément  $\alpha x$  de E.

2. Une particularité des produits tensoriels est qu'on peut avoir  $x \otimes y = 0$  bien que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$  [ce qui signifie que toute fonction bilinéaire définie dans  $E \times F$  s'annule nécessairement pour l'élément  $(x, y)$ ]. Un exemple classique est le suivant : E est le groupe cyclique d'ordre 2, F le groupe cyclique d'ordre 3 (l'anneau d'opérateurs A étant ici l'anneau des entiers rationnels); alors, quels que soient  $x \in E$ ,  $y \in F$ , on a

$$x \otimes y = 3(x \otimes y) - 2(x \otimes y) = x \otimes (3y) - (2x) \otimes y = 0$$

puisque  $2x = 0$  et  $3y = 0$ ; dans ce cas  $E \otimes F$  est réduit à zéro, il n'y a pas de fonction bilinéaire non identiquement nulle dans  $E \times F$ .

Dans cet exemple, les *annulateurs* <sup>(4)</sup> de  $x$  et de  $y$  ne se réduisent pas à zéro; on peut se demander si, lorsqu'on impose à  $x$  et  $y$  la condition d'être *libres* tous deux (c'est-à-dire d'avoir des annulateurs nuls), on a toujours  $x \otimes y \neq 0$ . Nous allons voir qu'il en est bien ainsi, en démontrant le théorème plus précis suivant :

**THÉORÈME 1.** — Si  $x$  est libre dans E, et  $y$  libre dans F, on a  $\lambda(x \otimes y) \neq 0$  pour tout  $\lambda \in A$  non nilpotent <sup>(5)</sup>.

On sait que, si un A-module G est engendré par une famille  $(x_\nu)_{\nu \in N}$ , où N est un ensemble d'indices quelconque, G est isomorphe au quotient  $H/M$  d'un module H ayant une base  $(a_\nu)_{\nu \in N}$  dont N est l'ensemble d'indices, l'isomorphisme de  $H/M$  sur G faisant correspondre à la classe modulo M de  $a_\nu$ , l'élément  $x_\nu$ .

<sup>(3)</sup> Rappelons qu'une base de E est définie de la façon suivante : c'est une famille (finie ou non)  $(a_i)$  d'éléments de E telle que tout élément  $x$  de E se mette d'une seule manière sous la forme  $\sum_i \lambda_i a_i$ , où les  $\lambda_i$  sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

<sup>(4)</sup> L'annulateur d'un élément  $x$  d'un A-module E est l'ensemble des éléments  $\lambda$  de A tels que  $\lambda x = 0$ ; c'est un idéal de A. On dit que  $x$  est libre si son annulateur se réduit à zéro.

<sup>(5)</sup> Rappelons qu'un élément  $\lambda$  d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier  $n$  tel que  $\lambda^n = 0$ .

Considérons donc  $E$  et  $F$  comme deux modules quotients  $E'/M$ ,  $F'/N$ , où  $E'$  admet une base  $(a_\alpha)$ ,  $F'$  une base  $(b_\beta)$ ; comme on peut toujours prendre  $x$  (resp.  $y$ ) parmi les générateurs de  $E$  (resp.  $F$ ), on peut toujours supposer que  $x$  (resp.  $y$ ) est la classe modulo  $M$  (resp. modulo  $N$ ) d'un élément de la base  $(a_\alpha)$  [resp.  $(b_\beta)$ ], que nous désignerons par  $a_1$  (resp.  $b_1$ ).

Cela étant, d'après le lemme 1, l'hypothèse  $\lambda(x \otimes y) = 0$  équivaut à une relation de la forme

$$(1) \quad \lambda(a_1 \otimes b_1) = \sum_{\mu} u_{\mu} \otimes u'_{\mu} + \sum_{\nu} v_{\nu} \otimes v'_{\nu},$$

où les familles (finies) d'éléments  $u_{\mu}$ ,  $u'_{\mu}$ ,  $v_{\nu}$ ,  $v'_{\nu}$  sont telles que  $u_{\mu} \in M$ ,  $u'_{\mu} \in F'$ ,  $v_{\nu} \in E'$ ,  $v'_{\nu} \in N$ . Si l'on remplace chaque  $u'_{\mu}$  par son expression  $\sum_{\beta} \rho_{\mu\beta} b_{\beta}$  à l'aide de la base  $(b_{\beta})$ , on a

$$\sum_{\mu} u_{\mu} \otimes u'_{\mu} = \sum_{\mu} \left( \sum_{\beta} (\rho_{\mu\beta} u_{\mu}) \otimes b_{\beta} \right) = \sum_{\beta} \left( \sum_{\mu} \rho_{\mu\beta} u_{\mu} \right) \otimes b_{\beta};$$

comme  $M$  est un  $A$ -module, chacun des éléments  $x_{\beta} = \sum_{\mu} \rho_{\mu\beta} u_{\mu}$  appartient à  $M$ ;

opérant de même sur la seconde somme du second membre de (1), on obtient la relation

$$(2) \quad \lambda(a_1 \otimes b_1) = \sum_{\beta} x_{\beta} \otimes b_{\beta} + \sum_{\alpha} a_{\alpha} \otimes y_{\alpha},$$

où  $x_{\beta} \in M$  et  $y_{\alpha} \in N$  pour tous les indices  $\alpha$ ,  $\beta$ ; naturellement, il n'y a qu'un nombre fini d'indices  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) tels que  $x_{\beta} \neq 0$  (resp.  $y_{\alpha} \neq 0$ ); en changeant les notations, on peut donc supposer que, dans (2), l'indice  $\beta$  varie de 1 à  $n$ , l'indice  $\alpha$  de 1 à  $m$ . Posons alors  $x_{\beta} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha\beta} a_{\alpha}$ ,  $y_{\alpha} = \sum_{\beta} \eta_{\alpha\beta} b_{\beta}$ ; d'après le

lemme 2 la relation (2) équivaut au système d'équations

$$(3) \quad \xi_{11} + \eta_{11} = \lambda, \quad \xi_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pour } (\alpha, \beta) \neq (1, 1).$$

L'hypothèse que  $x$  est libre dans  $E$  équivaut à la suivante : il n'existe aucun scalaire  $\rho \neq 0$  tel que  $\rho a_1$  appartienne à  $M$ ; de même le fait que  $y$  est libre dans  $F$  signifie qu'il n'existe aucun scalaire  $\sigma \neq 0$  tel que  $\sigma b_1$  appartienne à  $N$ . Or, nous allons voir que l'existence des relations (3) est incompatible avec ces hypothèses, ce qui prouvera le théorème.

Considérons pour cela la matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes formée par les  $\xi_{\alpha\beta}$ , que nous écrivons

$$A = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & & & \\ \xi_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ \xi_{m1} & & & \end{pmatrix} \quad B$$

$B$  étant la matrice à  $m - 1$  lignes et  $n - 1$  colonnes formée par les  $\xi_{\alpha\beta}$  dont les deux indices sont  $\neq 1$ . La colonne d'indice  $\beta$  de la matrice  $A$  n'est autre que le vecteur  $x_\beta$ ; d'après (3), la ligne d'indice  $\alpha$  de  $A$  est le vecteur  $-y_\alpha$ , sauf pour  $\alpha = 1$ , où cette ligne est égale à  $\lambda b_1 - y_1$ . Nous allons voir que, dans ces conditions (et compte tenu de l'hypothèse que  $\lambda$  n'est pas nilpotent), ou bien il existe  $\rho \neq 0$  tel que  $\rho a_1$  soit combinaison linéaire des  $x_\beta$ , ou bien il existe  $\sigma \neq 0$  tel que  $\sigma b_1$  soit combinaison linéaire des  $y_\alpha$ , conclusion incompatible avec l'hypothèse.

Supposons d'abord qu'il y ait un mineur  $\delta$  d'ordre  $r > 0$  de la matrice  $B$  tel que le produit de  $\delta$  et d'une puissance quelconque de  $\lambda$  ne soit pas nul, mais qu'il existe une puissance  $\lambda^p$  telle que les produits par  $\lambda^p$  de tous les mineurs de  $B$  d'ordre  $> r$  contenant  $\delta$ , soient tous nuls. On peut toujours supposer, par une permutation des lignes et des colonnes de  $A$ , que  $\delta$  est le déterminant de la matrice carrée  $C$  des  $\xi_{\alpha\beta}$  tels que  $2 \leq \alpha \leq r+1$ ,  $2 \leq \beta \leq r+1$ .

Supposons d'abord qu'il existe un indice  $\beta > r+1$  tel que le produit par  $\lambda^p$  du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} & \cdots & \xi_{1,r+1} & \xi_{1\beta} \\ & & & & \xi_{2\beta} \\ & & C & & \vdots \\ & & & & \xi_{r+1,\beta} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul. Alors, en vertu de l'hypothèse, on a

$$\lambda^p \Delta a_1 = \lambda^p \Delta_2 x_2 + \lambda^p \Delta_3 x_3 + \cdots + \lambda^p \Delta_{r+1} x_{r+1} + \lambda^p \Delta_\beta x_\beta,$$

où  $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{r+1}, \Delta_\beta$  désignent les cofacteurs des éléments de la première ligne de  $\Delta$ . De même, s'il existe un indice  $\alpha > r+1$  tel que le produit par  $\lambda^p$  du déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{31} \\ \vdots \\ \xi_{r+1,1} \\ \xi_{\alpha 1} & \xi_{\alpha 2} & \cdots & \xi_{\alpha,r+1} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul, on voit qu'il existe un  $\sigma \neq 0$  tel que  $\sigma b_1$  soit combinaison linéaire des  $y_\alpha$ .

Si maintenant les produits par  $\lambda^p$  de tous les déterminants tels que  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont nuls, considérons le déterminant

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1,r+1} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{r+1,1} \end{vmatrix}$$

Si le produit  $\lambda^p \Delta_0 \neq 0$ , on a encore

$$\lambda^p \Delta_0 a_1 = \lambda^p \Delta_1 x_1 + \lambda^p \Delta_2 x_2 + \cdots + \lambda^p \Delta_{r+1} x_{r+1},$$

où  $\Delta_1, \dots, \Delta_{r+1}$  sont les cofacteurs de la première ligne de  $\Delta_0$  ( $\Delta_1$  n'étant autre que  $\delta$ ). Si au contraire  $\lambda^\rho \Delta_0 = 0$ , on a cette fois

$$\lambda^{\rho+1} \delta b_1 = \lambda^\rho \Delta'_1 y_1 + \lambda^\rho \Delta'_2 y_2 + \dots + \lambda^\rho \Delta'_{r+1} y_{r+1},$$

où  $\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r+1}$  sont les cofacteurs de la première colonne de  $\Delta_0$  (avec  $\Delta'_1 = \delta$ ).

Il nous reste à examiner le cas où il existe une puissance  $\lambda^\rho$  dont le produit par tous les éléments de  $B$  est nul. Dans ce cas, s'il existe un indice  $\beta > 1$  tel que  $\lambda^\rho \xi_{1\beta} \neq 0$ , on a  $\lambda^\rho \xi_{1\beta} a_1 = \lambda^\rho x_\beta$ ; de même, s'il existe un indice  $\alpha > 1$  tel que  $\lambda^\rho \xi_{\alpha 1} \neq 0$ , on a  $\lambda^\rho \xi_{\alpha 1} b_1 = -\lambda^\rho y_\alpha$ . Si, pour tout  $\beta > 1$  et tout  $\alpha > 1$  on a  $\lambda^\rho \xi_{1\beta} = \lambda^\rho \xi_{\alpha 1} = 0$ , et si  $\lambda^\rho \xi_{11} \neq 0$ , on a  $\lambda^\rho \xi_{11} a_1 = \lambda^\rho x_1$ ; enfin, si l'on a aussi  $\lambda^\rho \xi_{11} = 0$ , on a  $\lambda^{\rho+1} b_1 = \lambda^\rho y_1$ . La démonstration du théorème est donc achevée.

3. On peut se demander si l'hypothèse que  $\lambda$  n'est pas nilpotent est essentielle pour la validité du théorème 1. Nous allons voir que tel est bien le cas, en construisant des exemples appropriés.

Soit  $K$  un corps commutatif quelconque; prenons pour  $A$  une algèbre commutative sur  $K$ , ayant une base formée de l'élément unité  $1$ , et de deux éléments  $c_1, c_2$ , avec la table de multiplication  $c_1^2 = c_1 c_2 = c_2 c_1 = c_2^2 = 0$ . Nous prendrons pour  $E$  le module  $A^2/M$ , où  $M$  est le sous-module de  $A^2$  engendré par les éléments  $(c_1, c_1)$  et  $(c_1, c_2)$ ; pour  $F$  le sous-module  $A^2/N$ , où  $N$  est le sous-module de  $A^2$  engendré par les éléments  $(0, -c_1)$  et  $(-c_1, -c_2)$ ; si  $x$  est la classe modulo  $M$  de l'élément  $a_1 = (1, 0)$  de  $A^2$ ,  $y$  la classe modulo  $N$  du même élément, on a  $c_1(x \otimes y) = 0$ , car on établit aussitôt dans  $A^2 \otimes A^2$  une relation de la forme (2). D'autre part,  $x$  est libre dans  $E$ ; en effet, si pour un élément  $\rho \neq 0$  de  $A$ ,  $\rho a_1$  était de la forme  $\alpha(c_1, c_1) + \beta(c_1, c_2)$ , on aurait  $\alpha c_1 + \beta c_1 = \rho$ ,  $\alpha c_1 + \beta c_2 = 0$  pour des éléments convenables  $\alpha, \beta$  de  $A$ ; or, on a par hypothèse  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ ,  $\beta = \beta_0 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$ , les  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  étant dans  $K$ ; d'après la table de multiplication de  $A$ , on ne peut avoir  $\alpha c_1 + \beta c_2 = 0$  que si  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ; mais alors on a nécessairement  $\alpha c_1 + \beta c_1 = 0$ . On démontre de la même manière que  $y$  est libre dans  $F$ .

Dans cet exemple, on a  $E \neq F$ ; en le modifiant légèrement, on peut faire en sorte que  $E = F$ , et  $y = x$ . On prendra cette fois pour  $A$  l'algèbre commutative ayant une base formée de l'élément unité  $1$  et de quatre éléments  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , le produit de deux quelconques des  $c_i$  étant nul;  $E$  sera le module  $A^3/M$ , où  $M$  est le module engendré par les six éléments  $(c_1, c_1, 0)$ ,  $(c_2, 0, c_4)$ ,  $(0, c_3, 0)$ ,  $(0, -c_2, 0)$ ,  $(-c_1, 0, -c_3)$ ,  $(0, -c_4, 0)$ ; enfin  $x$  est la classe modulo  $M$  de l'élément  $(1, 0, 0)$  de  $A^3$ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, dans ces conditions,  $x$  est libre, et que  $c_1(x \otimes x) = 0$ .

4. Ajoutons encore deux remarques au sujet du théorème 1. En premier lieu, supposons que chacun des modules  $E, F$  admette un système de générateurs *fini*, ayant au plus  $r$  éléments. Alors, en reprenant la démonstration du

théorème 1, on voit sans peine que l'on peut remplacer l'hypothèse que  $\lambda$  n'est pas nilpotent par celle que  $\lambda^{r+1} \neq 0$ .

D'autre part, si l'un des deux modules  $E, F$  admet une *base*, on peut démontrer très simplement une propriété plus précise que le théorème 1 : si par exemple  $F$  admet une base  $(b_\mu)$ , et si  $x$  est libre dans  $E$ , et  $y \neq 0$  dans  $F$ , on a  $x \otimes y \neq 0$ ; en effet, si  $y = \sum_{\mu} \eta_{\mu} b_{\mu}$  on a  $x \otimes y = \sum_{\mu} \eta_{\mu} x \otimes b_{\mu}$ , et comme  $\eta_{\mu} x \neq 0$  pour un indice  $\mu$  au moins, il résulte du lemme 2 que  $x \otimes y \neq 0$ . Si l'on suppose en outre que  $y$  est libre dans  $F$ , alors le résultat précédent, appliqué à  $x$  et à  $\rho y$ , où  $\rho \neq 0$  est quelconque, montre que  $x \otimes y$  est libre dans  $E \otimes F$ .

5. Le théorème 1 montre que, si  $A$  n'a pas d'élément nilpotent autre que zéro,  $x \otimes y$  est libre dans  $E \otimes F$  lorsque  $x$  est libre dans  $E$  et  $y$  libre dans  $F$ . Il en est ainsi en particulier lorsque  $A$  est un *anneau d'intégrité* (c'est-à-dire sans diviseur de zéro).

Dans ce dernier cas, on pourrait croire que, si tout élément  $\neq 0$  de chacun des modules  $E, F$  est libre (ce qu'on exprime en disant que  $E$  et  $F$  sont des modules réguliers), le module  $E \otimes F$  est aussi un module régulier. Nous allons voir, par un exemple, qu'il n'en est rien en général : chacun des éléments  $x \otimes y$  ( $x \neq 0, y \neq 0$ ) est bien libre, mais il y aura des combinaisons linéaires  $\sum_i x_i \otimes y_i$  non nulles, qui ne seront pas libres.

Prenons pour  $A$  l'anneau  $K[X, Y]$  des polynômes à deux indéterminées sur un corps  $K$ , pour  $E$  l'idéal  $(X) + (Y)$  de l'anneau  $A$  (ensemble des polynômes sans terme constant). Nous allons voir que, dans le produit tensoriel  $E \otimes E$ , l'élément  $X \otimes Y - Y \otimes X$  n'est pas nul; il est immédiat par ailleurs que cet élément n'est pas libre, car on a  $XY(X \otimes Y - Y \otimes X) = (XY) \otimes (XY) - (XY) \otimes (XY) = 0$ .

Pour voir que  $X \otimes Y \neq Y \otimes X$ , il suffit de prouver qu'il existe une application bilinéaire  $f$  de  $E \times E$  dans un  $A$ -module convenable  $F$ , telle que  $f(X, Y) \neq f(Y, X)$ . Prenons pour  $F$  le module quotient  $A/E$ ; comme tout polynôme de  $A$  est congru modulo  $E$  à son terme de degré zéro, on peut identifier  $A/E$  à  $K$ , en convenant que le produit d'un élément de  $K$  par un élément quelconque de l'idéal  $E$  est nul. Comme tout élément de  $E$  est de la forme  $PX + QY$ , où  $P$  et  $Q$  sont quelconques dans  $A$ , il suffit, pour définir une application bilinéaire  $f$  de  $E \times E$  dans  $F$ , de connaître  $f(X, X), f(X, Y), f(Y, X)$  et  $f(Y, Y)$ ; en outre, il faut vérifier que pour  $PX + QY = 0$ , on a

$$f(PX + QY, Z) = f(Z, PX + QY) = 0$$

quel que soit  $Z$  dans  $E$ ; mais comme la relation  $PX + QY = 0$  dans  $A$  entraîne  $P = RY$  et  $Q = -RX$  ( $R$  élément de  $A$ ), on a

$$f(PX + QY, Z) = RY f(X, Z) = RX f(Y, Z),$$

et tout élément de  $F$  est annulé par  $X$  et par  $Y$ ; on vérifie de même que  $f(Z, PX + QY) = 0$ , et on voit donc qu'on peut prendre *arbitrairement* dans  $F$  les éléments  $f(X, X)$ ,  $f(X, Y)$ ,  $f(Y, X)$  et  $f(Y, Y)$ , et en particulier  $f(X, Y) \neq f(Y, X)$ .

6. L'exemple que nous venons de donner illustre une autre particularité importante des produits tensoriels. Considérons deux modules  $E$  et  $F$ , et soit  $M$  un sous-module de  $E$ ,  $N$  un sous-module de  $F$ . A tout élément du produit tensoriel  $M \otimes N$ , de la forme  $x \otimes y$ , on peut faire correspondre l'élément  $x \otimes y$  du produit tensoriel  $E \otimes F$  ( $x$  et  $y$  étant considérés comme des éléments de  $M$  resp.  $N$  dans le premier cas, comme des éléments de  $E$  resp.  $F$  dans le second); on définit ainsi une application linéaire  $\varphi$ , que nous appellerons l'application *canonique* de  $M \otimes N$  dans  $E \otimes F$ . L'exemple du n° 5 prouve que cette application *n'est pas nécessairement un isomorphisme*; en effet,  $E \otimes E$  n'est pas un module régulier, et  $A \otimes A$ , qui est isomorphe à  $A$  d'après le lemme 3, est régulier; l'application canonique de  $E \otimes E$  dans  $A \otimes A$  ne peut donc être biunivoque.

Dans l'anneau d'opérateurs  $A$  de cet exemple, on sait que la théorie des idéaux est déjà assez complexe. C'est sans doute là qu'il faut chercher la raison du comportement paradoxal des produits tensoriels de modules sur un tel anneau. Nous allons voir en effet que de tels phénomènes ne peuvent se produire lorsque  $A$  est un *anneau de Dedekind*, c'est-à-dire un anneau d'intégrité dans lequel tout idéal se décompose d'une seule manière en un produit d'idéaux premiers [ou, ce qui revient au même, un anneau d'intégrité dans lequel les idéaux entiers et fractionnaires (non nuls) forment un *groupe multiplicatif*]. De façon précise, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $A$  un anneau de Dedekind,  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  deux idéaux (non nuls) dans  $A$ . L'application canonique  $\varphi$  du produit tensoriel  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$  dans  $A \otimes A$  (identifié à  $A$ ) est un isomorphisme, et l'image  $\varphi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$  est l'idéal produit  $\mathfrak{ab}$ .*

La dernière partie du théorème est vraie sans aucune hypothèse sur l'anneau  $A$ , et résulte aussitôt de la définition de  $\varphi$  et de la définition du produit de deux idéaux.

Pour démontrer la première partie, nous nous appuierons sur le lemme classique suivant de la théorie des anneaux de Dedekind :

**LEMME 4.** — *Étant donnés deux idéaux  $\mathfrak{l}$ ,  $\mathfrak{m}$  dans un anneau de Dedekind, il existe un idéal  $\mathfrak{n}$ , premier à  $\mathfrak{m}$ , et tel que l'idéal produit  $\mathfrak{ln}$  soit principal.*

De ce lemme, on déduit le résultat suivant, qui nous servira aussi :

**LEMME 5.** — *Étant donnés deux idéaux  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$  dans un anneau de Dedekind  $A$ , le module quotient  $\mathfrak{a}/\mathfrak{ab}$  est isomorphe à  $A/\mathfrak{b}$ .*



En effet, il existe un idéal  $\mathfrak{c}$  premier avec  $\mathfrak{b}$  et tel que  $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (d)$  soit principal; de la relation  $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (\mathfrak{r})$ , on tire  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ , autrement dit  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + (d)$ ; dans toute classe modulo  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$  contenue dans  $\mathfrak{a}$ , il existe donc un élément de la forme  $xd$ ; si à tout  $x \in A$  on fait correspondre la classe de  $xd$  modulo  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ , on définit donc un homomorphisme de  $A$  sur  $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ; en outre, la relation  $xd \equiv yd \pmod{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$  signifie que  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$  divise l'idéal  $(x-y)(d) = (x-y)\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ , donc que  $\mathfrak{b}$  divise  $(x-y)\mathfrak{c}$ ; comme  $\mathfrak{b}$  est premier avec  $\mathfrak{c}$ , la relation précédente équivaut à  $x \equiv y \pmod{\mathfrak{b}}$ , ce qui démontre le lemme.

Cela posé, nous distinguerons plusieurs cas dans la démonstration du théorème 2.

(A) :  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ . Il est bien connu que l'idéal  $\mathfrak{a}$  peut toujours se mettre sous la forme  $(a) + (b)$ , autrement dit, est engendré par deux éléments. Nous aurons besoin ici d'une forme un peu plus précise de ce résultat, qui dérive également du lemme 4. Soit  $a$  un élément de  $\mathfrak{a}$ ; on peut donc écrire  $(a) = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ ; d'après le lemme 4, il existe un idéal  $\mathfrak{b}$  premier avec  $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ , et tel que  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (b)$  soit principal;  $\mathfrak{b}$  étant *a fortiori* premier avec  $\mathfrak{c}$ , de la relation  $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (\mathfrak{r})$ , on déduit  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{a} = (a) + (b)$ .

Étudions les applications bilinéaires de  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$  dans un  $A$ -module quelconque  $F$  : comme tout élément de  $\mathfrak{a}$  est de la forme  $\lambda a + \mu b$ , il est clair qu'une telle application  $f$  est déterminée lorsqu'on connaît  $f(a, a)$ ,  $f(a, b)$ ,  $f(b, a)$  et  $f(b, b)$ . Réciproquement, si l'on se donne ces éléments dans  $F$ , ils déterminent une application bilinéaire de  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$  dans  $F$ , pourvu que, pour tout couple d'éléments  $\alpha, \beta$  de  $A$  tels que  $\alpha a = \beta b$ , on ait

$$f(\alpha a - \beta b, x) = f(x, \alpha a - \beta b) = 0$$

quel que soit  $x$  dans  $\mathfrak{a}$ , ce qui revient aux quatre conditions

$$\begin{aligned} (4) \quad & \alpha f(a, a) = \beta f(b, a), \\ (5) \quad & \alpha f(a, b) = \beta f(b, b), \\ (6) \quad & \alpha f(a, a) = \beta f(a, b), \\ (7) \quad & \alpha f(b, a) = \beta f(b, b). \end{aligned}$$

Nous allons déduire de ces relations qu'on a nécessairement  $f(a, b) = f(b, a)$ . En effet, de la relation  $\alpha a = \beta b$ , on déduit  $(\alpha)\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (\beta)\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ , donc  $(\alpha)\mathfrak{c} = (\beta)\mathfrak{b}$ , et comme  $\mathfrak{b}$  est premier avec  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{b}$  divise  $(\alpha)$ , autrement dit  $\alpha \in \mathfrak{b}$ ; réciproquement, si  $\alpha \in \mathfrak{b}$ , on a  $(\alpha a) \subset (a)\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (b)\mathfrak{c} \subset (b)$ , donc il existe  $\beta \in A$  tel que  $\alpha a = \beta b$ ; donc l'ensemble des  $\alpha$  tels qu'il existe  $\beta$  satisfaisant  $\alpha a = \beta b$  est l'idéal  $\mathfrak{b}$ , et l'on voit de même que l'ensemble des  $\beta$  est l'idéal  $\mathfrak{c}$ . Cela étant, on tire de (5) et (7) que  $\alpha[f(a, b) - f(b, a)] = 0$ , et de (4) et (6) que  $\beta[f(a, b) - f(b, a)] = 0$ ; l'élément  $f(a, b) - f(b, a)$  de  $F$  est par suite annulé par tous les éléments de  $\mathfrak{b}$  et tous ceux de  $\mathfrak{c}$ ; il est donc annulé par

tous les éléments de  $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = (\mathfrak{r})$  et en particulier par  $\mathfrak{r}$ , ce qui signifie que  $f(a, b) = f(b, a)$ .

Les relations (4), (5), (6), et (7) se réduisent donc aux deux relations

$$(8) \quad \alpha f(a, a) = \beta f(a, b),$$

$$(9) \quad \alpha f(a, b) = \beta f(b, b)$$

pour tout couple d'éléments  $\alpha, \beta$  tels que  $\alpha a = \beta b$ .

Nous allons déduire de là la structure du produit tensoriel  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ . Considérons le  $A$ -module  $A^3$ , et sa base canonique formée des éléments  $e_1 = (\mathfrak{r}, \mathfrak{o}, \mathfrak{o})$ ,  $e_2 = (\mathfrak{o}, \mathfrak{r}, \mathfrak{o})$  et  $e_3 = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}, \mathfrak{r})$ ; soit  $M$  le sous-module de  $A^3$  engendré par les éléments de l'une des formes  $\alpha e_1 - \beta e_2$ ,  $\alpha e_2 - \beta e_3$ , lorsque  $(\alpha, \beta)$  parcourt l'ensemble des couples tels que  $\alpha a = \beta b$ ; le module  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$  est *isomorphe au module quotient*  $A^3/M$ . En effet, soient  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  les classes modulo  $M$  de  $e_1, e_2, e_3$ , éléments qui engendrent  $A^3/M$ ; on définit une application bilinéaire  $\theta$  de  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$  dans  $A^3/M$  en prenant  $\theta(a, a) = \bar{e}_1$ ,  $\theta(a, b) = \theta(b, a) = \bar{e}_2$ ,  $\theta(b, b) = \bar{e}_3$ , car les conditions (8) et (9) sont vérifiées par définition de  $M$ . Il est clair que  $\theta(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$  engendre  $A^3/M$ . Enfin, soit  $N$  un  $A$ -module quelconque,  $f$  une application bilinéaire quelconque de  $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$  dans  $N$ ; soit  $h$  l'application linéaire de  $A^3$  dans  $N$  telle que  $h(e_1) = f(a, a)$ ,  $h(e_2) = f(a, b) = f(b, a)$ ,  $h(e_3) = f(b, b)$ ; d'après les conditions (8) et (9),  $h$  s'annule dans le sous-module  $M$  de  $A^3$ , donc peut se mettre d'une seule manière sous la forme  $h = g \circ \omega$ , où  $\omega$  est l'homomorphisme canonique de  $A^3$  sur  $A^3/M$ , et  $g$  une application linéaire de  $A^3/M$  dans  $N$ ; cela étant, on a  $g[\theta(a, a)] = f(a, a)$ ,  $g[\theta(a, b)] = f(a, b)$ ,  $g[\theta(b, b)] = f(b, b)$ , donc  $g[\theta(x, y)] = f(x, y)$  quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathfrak{a}$ ; l'isomorphie de  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$  et de  $A^3/M$  est donc établie, en raison de ce qui a été rappelé au n° 1; dans cette isomorphie, l'élément  $(\lambda a + \mu b) \otimes (\lambda' a + \mu' b)$  de  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$  correspond à l'élément  $\lambda \lambda' \bar{e}_1 + (\lambda \mu' + \lambda' \mu) \bar{e}_2 + \mu \mu' \bar{e}_3$  de  $A^3/M$ .

Cela étant, l'application canonique  $\varphi$  de  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$  sur  $\mathfrak{a}^2$  fait correspondre à  $(\lambda a + \mu b) \otimes (\lambda' a + \mu' b)$  l'élément  $\lambda \lambda' a^2 + (\lambda \mu' + \lambda' \mu) ab + \mu \mu' b^2$  de  $A$ ; identifiant  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$  et  $A^3/M$ , on voit donc que  $\varphi$  fait correspondre à l'élément  $\lambda \bar{e}_1 + \mu \bar{e}_2 + \nu \bar{e}_3$  l'élément  $\lambda a^2 + \mu ab + \nu b^2$ ; le théorème sera démontré (pour  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ) si l'on établit que la relation  $\lambda a^2 + \mu ab + \nu b^2 = \mathfrak{o}$  entraîne  $\lambda \bar{e}_1 + \mu \bar{e}_2 + \nu \bar{e}_3 = \mathfrak{o}$ , c'est-à-dire  $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 \in M$ . Or, de  $\lambda a^2 + \mu ab + \nu b^2 = \mathfrak{o}$ , on déduit que dans  $A$ ,  $b$  divise  $\lambda a^2$ , donc que  $ab$  divise  $(\lambda) a^2 \mathfrak{r}^2$ , et par suite que  $b$  divise  $(\lambda)$ , puisque  $b$  a été pris premier avec  $\mathfrak{a} \mathfrak{r}$ ; on en déduit que  $(b) = ab$  divise  $(\lambda) a$ , et *a fortiori*  $(\lambda) a \mathfrak{r} = (\lambda a)$ ; autrement dit, il existe  $\alpha$  tel que  $\lambda a = \alpha b$ ; l'hypothèse entraîne que  $(\alpha + \mu) a + \nu b = \mathfrak{o}$ , donc on peut écrire

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = (\lambda e_1 - \alpha e_2) + ((\alpha + \mu) e_2 + \nu e_3),$$

et le raisonnement précédent prouve que  $\lambda e_1 - \alpha e_2$  et  $(\alpha + \mu) e_2 + \nu e_3$  appartiennent à  $M$ , ce qui achève dans ce cas la démonstration.

(B) :  $\mathfrak{b}$  divise  $\mathfrak{a}$ . Posons  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ; nous allons considérer le produit tensoriel  $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{a}$ ; d'après le lemme 5, il est isomorphe à  $(A/\mathfrak{c}) \otimes \mathfrak{a}$ ; nous allons d'abord voir que ce produit tensoriel est *isomorphe* à  $A/\mathfrak{c}$ . En effet, d'après le lemme 1, il est isomorphe à  $(A \otimes \mathfrak{a})/\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a})$ ,  $\psi$  désignant l'application canonique de  $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a}$  dans  $A \otimes \mathfrak{a}$ ; or, d'après le lemme 3, l'application canonique de  $A \otimes \mathfrak{a}$  dans  $A$  est un isomorphisme, et le composé de cet isomorphisme et de  $\psi$  n'est autre que l'application canonique  $\theta$  de  $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a}$  dans  $A$ ;  $(A \otimes \mathfrak{a})/\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a})$  est donc isomorphe à  $\mathfrak{a}/\theta(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a})$ , qui est identique à  $\mathfrak{a}/\mathfrak{ac}$ , et par suite isomorphe à  $A/\mathfrak{c}$  d'après le lemme 5.

Cela étant, le produit tensoriel  $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{a}$  est d'autre part, d'après le lemme 1, isomorphe à  $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ ,  $\omega$  désignant l'application canonique de  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a}$ . Soit  $\varphi$  l'application canonique de  $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a}$  dans  $A \otimes A = A$ ; l'application canonique  $\chi$  de  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$  dans  $A$  est composée de  $\varphi$  et de  $\omega$ ; comme on a vu dans la partie (A) de la démonstration que cette application est un isomorphisme, il s'ensuit que l'intersection du sous-module  $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{o})$  de  $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a}$ , et du sous-module  $\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ , se réduit à zéro; si  $M$  n'est pas réduit à zéro, le sous-module  $[M + \omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})]/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$  du module  $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$  n'est donc pas réduit à zéro. D'autre part, le module quotient  $\varphi(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\chi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ , identique à  $\mathfrak{ab}/\mathfrak{a}^2$ , et par suite (lemme 5), isomorphe à  $A/\mathfrak{c}$ , est isomorphe au module quotient  $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/[M + \omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})]$ , c'est-à-dire au module quotient de  $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$  par le sous-module  $[M + \omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})]/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ .

En résumé, nous voyons que si  $M$  n'est pas réduit à zéro, le module quotient  $A/\mathfrak{c}$  est isomorphe à son quotient par un de ses sous-modules non réduit à zéro; cela est impossible en raison du théorème de Jordan-Hölder, car le module  $A/\mathfrak{c}$  a une longueur finie.

(C) :  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  quelconques. Soit  $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  le plus petit commun multiple des idéaux  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$ ;  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  divisent  $\mathfrak{c}$ ; nous poserons  $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}$ . Considérons le produit tensoriel  $(\mathfrak{a}/\mathfrak{c}) \otimes \mathfrak{b}$ ; il est isomorphe (lemme 5) à  $(A/\mathfrak{d}) \otimes \mathfrak{b}$ , donc à  $A/\mathfrak{d}$  d'après le raisonnement fait dans la partie (B) de la démonstration.

D'autre part (lemme 1), ce produit tensoriel est isomorphe à  $(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})/\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b})$ ,  $\psi$  désignant l'application canonique de  $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ . Soit  $\varphi$  l'application canonique de  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$  dans  $A$ ; l'application canonique  $\theta$  de  $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b}$  dans  $A$  est composée de  $\varphi$  et de  $\psi$ ; or,  $\theta$  est un isomorphisme d'après la partie (B) de la démonstration ( $\mathfrak{b}$  divisant  $\mathfrak{c}$ ); donc l'intersection du sous-module  $M = \varphi^{-1}(\mathfrak{o})$  de  $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$  et du sous-module  $\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b})$  se réduit à zéro. D'autre part, le module quotient  $\varphi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})/\theta(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b})$  est identique à  $\mathfrak{ab}/\mathfrak{cb}$ , donc isomorphe à  $A/\mathfrak{d}$ . On en déduit, par le même raisonnement que dans (B), que si  $M$  n'était pas réduit à zéro, le module  $A/\mathfrak{d}$  serait isomorphe à son quotient par un sous-module non réduit à zéro, ce qui est absurde. Le théorème 2 est ainsi complètement démontré.

7. En nous appuyant sur le théorème 2, nous allons maintenant démontrer le théorème général suivant :

THÉORÈME 3. — Soient  $A$  un anneau de Dedekind,  $E$  et  $F$  deux modules réguliers sur  $A$ . Le produit tensoriel  $E \otimes F$  est un module régulier sur  $A$ ; en outre, si  $M$  est un sous-module quelconque de  $E$ ,  $N$  un sous-module quelconque de  $F$ , l'application canonique de  $M \otimes N$  dans  $E \otimes F$  est un isomorphisme.

Remarquons d'abord que la première partie du théorème est une conséquence de la seconde. En effet, on sait <sup>(6)</sup> que  $E$  et  $F$  peuvent être « plongés » respectivement dans deux espaces vectoriels  $E'$ ,  $F'$  par rapport au corps des quotients  $K$  de l'anneau  $A$ . Or, le produit tensoriel  $E' \otimes F'$  des  $A$ -modules  $E'$  et  $F'$  est régulier : en effet, en vertu de l'existence d'une base dans tout espace vectoriel,  $E'$  et  $F'$  sont sommes directes de modules isomorphes à  $K$ ; d'après le lemme 2, tout revient à considérer le produit  $K \otimes K$ , et l'on voit sans peine que ce dernier est isomorphe à  $K$ ; donc le  $A$ -module  $E' \otimes F'$  est somme directe de sous-modules isomorphes à  $K$ , et par suite est régulier. Alors (en vertu de la seconde partie du théorème),  $E \otimes F$ , isomorphe à un sous-module du module régulier  $E' \otimes F'$ , est lui-même régulier.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, nous allons nous ramener au cas où chacun des modules  $E$  et  $F$  admet un nombre fini de générateurs. Supposons en effet qu'il existe des éléments  $x_i$  de  $M$  et des éléments  $y_i$  de  $N$  tels que  $\sum_i x_i \otimes y_i$  ne soit pas nul quand on considère les produits tensoriels  $x_i \otimes y_i$  dans  $M \otimes N$ , mais soit nul quand on les considère dans  $E \otimes F$ ; il existe alors un sous-module  $E_1$  de  $E$  et un sous-module  $F_1$  de  $F$ , ayant chacun un nombre fini de générateurs, tels que les  $x_i$  appartiennent à  $E_1$ , les  $y_i$  à  $F_1$ , et qu'on ait

$$\sum_i x_i \otimes y_i = 0$$

lorsqu'on considère les produits tensoriels dans  $E_1 \otimes F_1$  <sup>(7)</sup>. En effet, d'après la définition des produits tensoriels <sup>(1)</sup>, la somme formelle  $\sum_i (x_i, y_i)$  est identique à une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments  $z_j$ , de l'une des formes

$$\begin{aligned} (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), & \quad (x + x', y) - (x, y) - (x', y), \\ (\alpha x, y) - \alpha(x, y), & \quad (x, \alpha y) - \alpha(x, y). \end{aligned}$$

<sup>(6)</sup> Cf. C. CHEVALLEY, *L'arithmétique dans les algèbres de matrices* (Actual. Scient. et Ind., n° 323, Paris, Hermann, 1936), p. 27-30.

<sup>(7)</sup> Je dois cette remarque à A. Weil.

Si  $E_1$  (resp.  $F_1$ ) est le sous-module de  $E$  (resp.  $F$ ) engendré par les  $x_i$  (resp.  $y_i$ ) et par tous les éléments de  $E$  (resp.  $F$ ) qui figurent dans l'expression (de l'une des formes précédentes) de l'un au moins des éléments  $z_i$ ,  $E_1$  et  $F_1$  répondent à la question. Cela étant, il est clair qu'on a  $\sum_i (x_i \otimes y_i) \neq 0$  lorsqu'on considère les produits tensoriels dans  $(E_1 \cap M) \otimes (F_1 \cap N)$ ; on est donc bien ramené au cas où  $E$  et  $F$  admettent chacun un système fini de générateurs.

Mais on sait alors <sup>(8)</sup> que  $E$  est somme directe d'un nombre fini de sous-modules  $E_i$ , dont chacun est isomorphe à un idéal (non nul) de  $A$ , et  $M$  somme directe de sous-modules  $M_i$ , tels que  $M_i = \alpha_i E_i$  pour chaque indice  $i$ ,  $\alpha_i$  étant un idéal (éventuellement nul) de  $A$ ; on a une décomposition analogue pour  $F$  et  $N$ . D'après le lemme 2, tout revient donc à démontrer le théorème lorsque  $E$  et  $F$  sont deux idéaux  $\alpha$ ,  $\beta$  de  $A$ ,  $M$  et  $N$  deux idéaux  $\alpha$ ,  $\beta$  tels que  $\alpha \subset \alpha$  et  $\beta \subset \beta$ . Or, l'application canonique  $\theta$  de  $\alpha \otimes \beta$  dans  $A$  est composée de l'application canonique  $\psi$  de  $\alpha \otimes \beta$  dans  $A$ , et de l'application canonique  $\varphi$  de  $\alpha \otimes \beta$  dans  $\alpha \otimes \beta$ . Comme le théorème 2 prouve que  $\theta$  est un isomorphisme,  $\varphi$  est nécessairement lui aussi un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

8. A l'aide des résultats qui précèdent, nous allons maintenant considérer le produit tensoriel  $E \otimes F$  de deux modules unitaires *quelconques* sur un anneau de Dedekind  $A$ , et montrer comment on peut déterminer l'annulateur d'un élément  $z$  de ce module, de la forme  $x \otimes y$ .

Nous utiliserons le fait qu'un idéal  $\alpha$  dans un anneau de Dedekind est entièrement déterminé quand on connaît la puissance ( $\geq 0$ ) de chaque idéal premier qui figure dans la décomposition de l'idéal  $\alpha$ , ce que nous appellerons la *contribution* de l'idéal premier dans  $\alpha$ . On convient que la contribution de tout idéal premier dans l'idéal nul est  $+\infty$ .

D'autre part, nous introduirons, pour simplifier, la terminologie suivante : pour tout  $x \in E$  et tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , nous dirons que l'*ordre* de  $x$  par rapport à  $\mathfrak{p}$  est la contribution de  $\mathfrak{p}$  dans l'idéal annulateur de  $x$ ; nous appellerons d'autre part la *hauteur* de  $x$  par rapport à  $\mathfrak{p}$  la borne supérieure des contributions de  $\mathfrak{p}$  dans les idéaux principaux  $(\lambda)$ , lorsque  $\lambda$  parcourt l'ensemble des éléments de  $A$  tels qu'il existe un  $y \in E$  et un  $\alpha \in A$  non divisible par  $\mathfrak{p}$ , satisfaisant à la relation  $\alpha x = \lambda y$ ; la hauteur de  $x$  par rapport à  $\mathfrak{p}$  est donc un entier fini ou  $+\infty$ . On peut la définir de façon légèrement différente : soit  $\pi$  un élément de  $\mathfrak{p}$  n'appartenant pas à  $\mathfrak{p}^2$  (lemme 4); supposons qu'on ait  $\alpha x = \lambda y$ , où  $\alpha$  est premier avec  $\mathfrak{p}$  et où la contribution de  $\mathfrak{p}$  dans  $(\lambda)$  est  $h$ ; on peut écrire  $(\lambda) = \mathfrak{p}^h \mathfrak{b}$ , où  $\mathfrak{b}$  est premier avec  $\mathfrak{p}$ ; par hypothèse on a  $(\pi) = \mathfrak{p} \alpha$ , où  $\alpha$  est premier avec  $\mathfrak{p}$ ; on a donc  $(\lambda) \alpha^h = (\pi^h) \mathfrak{b}$ ; soit  $\mathfrak{c}$  un idéal premier avec  $\mathfrak{p}$ ,

<sup>(8)</sup> C. CHEVALLEY, *loc. cit.*, p. 32-33.

tel que l'idéal  $\alpha^h \mathfrak{c}$  soit un idéal principal ( $\beta$ ); on aura  $(\lambda\beta) = (\pi^h)\mathfrak{bc}$ , ce qui montre que  $\mathfrak{bc}$  est un idéal principal, autrement dit,  $\lambda\beta = \pi^h\gamma$ , où  $\beta$  et  $\gamma$  sont premiers avec  $\mathfrak{p}$ . De l'hypothèse  $\alpha x = \lambda\gamma$  on tire donc  $\alpha\beta x = \pi^h(\gamma\gamma)$ , et comme  $\alpha\beta$  est premier avec  $\mathfrak{p}$ , on peut dire que la hauteur de  $x$  est la borne supérieure des entiers  $h$  tels qu'il existe un  $z \in E$  et un  $\delta \in A$  non divisible par  $\mathfrak{p}$ , satisfaisant à  $\delta x = \pi^h z$ .

Cette nouvelle forme de la définition permet d'établir aisément le lemme suivant, qui nous sera utile.

LEMME 6. — Soit  $E$  un module sur un anneau de Dedekind  $A$ , somme directe d'un nombre fini de sous-modules  $E_i$ . Soit  $x$  un élément de  $E$ ,  $x_i$  le composant de  $x$  dans  $E_i$ , de sorte que  $x = \sum_i x_i$ . Si  $\nu_i$  est l'ordre et  $\mu_i$  la hauteur de  $x_i$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ , l'ordre de  $x$  est égal au plus grand des  $\nu_i$  et sa hauteur au plus petit des  $\mu_i$ .

La première partie est immédiate, l'annulateur de  $x$  étant le p. p. c. m. des annulateurs des  $x_i$ . En second lieu, il est immédiat que la hauteur de  $x$  est au plus égale à  $\min(\mu_i)$ ; soit d'autre part  $h$  un entier quelconque  $\leq \min(\mu_i)$ ; par hypothèse, pour chaque  $i$ , il existe  $z_i \in E_i$  et  $\alpha_i \in A$ , non divisible par  $\mathfrak{p}$ , tels que  $\alpha_i x_i = \pi^h z_i$ . On en déduit

$$\left( \alpha_1 + \sum_{i \neq 1} \alpha_i \pi \right) x = \pi^h \left( z_1 + \sum_{i \neq 1} \pi z_i \right)$$

et comme  $\alpha_1 + \sum_{i \neq 1} \alpha_i \pi$  n'est pas divisible par  $\mathfrak{p}$ , la hauteur de  $x$  est au moins égale à  $h$ , et par suite au moins égale à  $\min(\mu_i)$ .

9. Pour déterminer l'annulateur de  $x \otimes y$ , on peut supposer que l'un au moins des deux éléments  $x, y$  n'est pas libre, car dans le cas contraire, on sait (n° 5) que  $x \otimes y$  est libre.

Nous commencerons par le cas où ni  $x$  ni  $y$  ne sont libres.

THÉORÈME 4. — Soient  $E$  et  $F$  deux modules sur un anneau de Dedekind  $A$ ,  $x$  un élément lié de  $E$ ,  $y$  un élément lié de  $F$ . Dans le produit tensoriel  $E \otimes F$ , l'ordre de  $x \otimes y$  par rapport à un idéal premier  $\mathfrak{p}$ , est donné par la formule

$$(10) \quad \max(\min(\nu - \mu', \nu' - \mu), 0),$$

où  $\nu, \nu'$  sont les ordres de  $x$  et  $y$  respectivement,  $\mu, \mu'$  les hauteurs de  $x$  et  $y$  respectivement, par rapport à  $\mathfrak{p}$ .

Nous allons d'abord montrer qu'on peut se ramener au cas où chacun des modules  $E, F$  admet un système fini de générateurs.

Supposons en effet le théorème démontré dans ce cas. Il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers  $\mathfrak{p}_i$  qui divisent, soit l'annulateur de  $x$ , soit l'annulateur de  $y$ . Pour chaque indice  $i$ , soient  $\nu_i, \nu'_i, \mu_i, \mu'_i$  les ordres et les hauteurs respectives de  $x$  et de  $y$  par rapport à  $\mathfrak{p}_i$ . Définissons une famille  $(u_i)$  d'éléments de  $E$  et une famille  $(v_i)$  d'éléments de  $F$ , de la manière suivante : si  $\mu_i > \nu'_i$ , on prend  $u_i \in E$  tel qu'il existe  $\beta_i \in A$  premier avec  $\mathfrak{p}_i$  et satisfaisant à  $\beta_i x = \pi_i^{\nu'_i} u_i$ ; si au contraire  $\mu_i \leq \nu'_i$ , on prend  $u_i \in E$  tel qu'il existe  $\beta_i \in A$  premier avec  $\mathfrak{p}_i$  et satisfaisant à  $\beta_i x = \pi_i^{\mu_i} u_i$ ; on définit de même la famille des  $v_i$  en intervertissant les rôles de  $x$  et de  $y$ . Soit alors  $E_1$  le sous-module de  $E$  engendré par  $x$  et les  $u_i$  (qui sont en nombre fini),  $F_1$  le sous-module de  $F$  engendré par  $y$  et les  $v_i$ ; pour chaque idéal premier  $\mathfrak{p}$ , l'expression (10) est la même, que l'on considère  $x$  et  $y$  comme éléments de  $E$  et  $F$  respectivement, ou comme éléments de  $E_1$  et  $F_1$  respectivement; en vertu de l'hypothèse, l'ordre de  $x \otimes y$ , où le produit tensoriel est pris dans  $E_1 \otimes F_1$ , est donné par l'expression (10) pour chaque idéal premier  $\mathfrak{p}$ ; il s'ensuit que l'ordre de  $x \otimes y$ , où le produit tensoriel est pris dans  $E \otimes F$ , est au plus égal à l'expression (10), pour chaque idéal premier  $\mathfrak{p}$ .

D'autre part, soit  $\lambda$  un élément de  $A$  tel que  $\lambda(x \otimes y) = 0$ , le produit tensoriel étant pris dans  $E \otimes F$ . Alors, le raisonnement du théorème 3 montre qu'il existe un sous-module  $E_2$  de  $E$  contenant  $x$ , un sous-module  $F_2$  de  $F$  contenant  $y$ , tels que  $E_2$  et  $F_2$  aient chacun un système fini de générateurs, et que  $\lambda(x \otimes y) = 0$  quand on prend le produit tensoriel dans  $E_2 \otimes F_2$ ; on peut en outre supposer que  $E_2$  contient  $E_1$  et que  $F_2$  contient  $F_1$ . Il en résulte que, pour chaque idéal premier  $\mathfrak{p}$ , l'expression (10) est la même, que l'on considère  $x$  et  $y$  comme éléments de  $E$  et  $F$ , ou comme éléments de  $E_2$  et  $F_2$ ; en vertu de l'hypothèse, la contribution de  $\mathfrak{p}$  dans  $(\lambda)$  est donc au moins égale à l'expression (10) et comme l'annulateur de  $x \otimes y$  est le p. g. c. d. des idéaux  $(\lambda)$ , on voit que, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$ , l'ordre de  $x \otimes y$  par rapport à  $\mathfrak{p}$  est au moins égal à l'expression (10), d'où l'on conclut, d'après ce qu'on a vu plus haut, qu'il lui est égal.

Considérons donc désormais le cas où  $E$  et  $F$  sont chacun engendré par un nombre fini d'éléments. On sait alors <sup>(8)</sup> que  $E$  (resp.  $F$ ) est somme directe d'un nombre fini de sous-modules  $E_i$  (resp.  $F_j$ ) dont chacun est, soit isomorphe à un idéal de  $A$ , soit isomorphe à un module quotient  $A/\mathfrak{a}$ , où  $\mathfrak{a}$  est une puissance d'un idéal premier. Soit  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) le composant de  $x$  (resp.  $y$ ) dans  $E_i$  (resp.  $F_j$ ); d'après les lemmes 2 et 6, l'ordre de  $x \otimes y$  relatif à un idéal premier  $\mathfrak{p}$  est le plus grand des ordres des éléments  $x_i \otimes y_j$  relatifs à  $\mathfrak{p}$ . L'hypothèse que  $x$  et  $y$  sont liés entraîne d'ailleurs que les seuls composants  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) non nuls sont relatifs à des  $E_i$  (resp.  $F_j$ ) qui sont isomorphes à des modules quotients de  $A$ .

Or (lemme 1) le produit tensoriel  $(A/\mathfrak{a}) \otimes (A/\mathfrak{b})$ , où  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  sont deux idéaux de  $A$ , est isomorphe à  $A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ ; donc, si  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$  sont deux idéaux premiers distincts,  $(A/\mathfrak{p}^m) \otimes (A/\mathfrak{q}^n)$  est réduit à zéro, et  $(A/\mathfrak{p}^m) \otimes (A/\mathfrak{p}^n)$  est isomorphe à

$A/\mathfrak{p}^{\min(m,n)}$ . Les seuls éléments  $x_i \otimes y_j$  dont l'ordre par rapport à  $\mathfrak{p}$  peut être  $\neq 0$  sont donc ceux pour lesquels  $E_i$  et  $F_j$  sont isomorphes à des modules de la forme  $A/\mathfrak{p}^n$ .

D'autre part, l'élément  $\pi$  étant choisi comme dans le n° 8, on a  $\mathfrak{p} = (\pi) + \mathfrak{p}^2$ , d'où résulte aisément que tout élément  $z$  de  $A/\mathfrak{p}^n$  est la classe modulo  $\mathfrak{p}^n$  d'un élément de  $A$  de la forme  $\alpha_0 + \alpha_1 \pi + \alpha_2 \pi^2 + \dots + \alpha_{n-1} \pi^{n-1}$ , où les  $\alpha_i$  sont premiers à  $\mathfrak{p}$ ; si  $h$  est le plus petit indice tel que  $\alpha_h \neq 0$ , l'ordre de  $z$  par rapport à  $\mathfrak{p}$  est  $n - h$ , et sa hauteur par rapport à  $\mathfrak{p}$  est  $h$ ; pour tout autre idéal premier  $\mathfrak{q}$ , l'ordre de  $z$  par rapport à  $\mathfrak{q}$  est zéro, et sa hauteur par rapport à  $\mathfrak{q}$  est  $+\infty$ : ce dernier point provient de ce que, pour tout entier  $k > 0$ , tout élément  $\alpha$  de  $A$  et tout élément  $\rho$  de  $\mathfrak{q}$ , premier avec  $\mathfrak{p}$  (lemme 4), il existe un  $\gamma_k \in A$  tel que  $\alpha \equiv \rho^k \gamma_k \pmod{\mathfrak{p}^n}$ .

Tenant compte de ces remarques, on voit, d'après le lemme 6, que, dans le calcul de l'ordre et de la hauteur de  $x$  (relatifs à  $\mathfrak{p}$ ), on peut ne tenir compte que des composants  $x_i$  tels que  $E_i$  soit de la forme  $A/\mathfrak{p}^{n_i}$ ; de même pour le calcul de l'ordre et de la hauteur de  $y$ . En d'autres termes, pour démontrer le théorème, on peut se ramener au cas où  $E_i = A/\mathfrak{p}^{n_i}$ , et  $F_j = A/\mathfrak{p}^{n'_j}$ . Soit alors  $m_i$  la hauteur de  $x_i$ ,  $m'_j$  celle de  $y_j$ ; l'ordre de  $x_i$  est donc  $n_i - m_i$ , l'ordre de  $y'_j$  est  $n'_j - m'_j$ . Dans le produit tensoriel  $(A/\mathfrak{p}^{n_i}) \otimes (A/\mathfrak{p}^{n'_j})$ , il résulte du lemme 1 que l'ordre de  $x_i \otimes y_j$  est égal à

$$\min(n_i, n'_j) - m_i - m'_j = \min(n_i - m_i - m'_j, n'_j - m'_j - m_i)$$

si ce nombre est  $> 0$ , et à zéro dans le cas contraire. D'après le lemme 6, l'ordre de  $x \otimes y$  est donc égal à

$$\max(\min(n_i - m_i - m'_j, n'_j - m'_j - m_i), 0);$$

comme (en vertu du lemme 6)  $\nu$  est égal au plus grand des  $n_i - m_i$ ,  $\nu'$  au plus grand des  $n'_j - m'_j$ ,  $\mu$  au plus petit des  $m_i$ ,  $\mu'$  au plus petit des  $m'_j$ , un raisonnement élémentaire montre que l'expression précédente de l'ordre de  $x \otimes y$  coïncide bien avec l'expression (10).

10. Le calcul de l'annulateur de  $x \otimes y$  est plus compliqué lorsque  $x$  est libre et  $y$  lié.

**THÉORÈME 5.** — Soient  $E$  et  $F$  deux modules sur un anneau de Dedekind  $A$ ,  $x$  un élément libre de  $E$ ,  $y$  un élément lié de  $F$ . Dans le produit tensoriel  $E \otimes F$ , l'ordre de  $x \otimes y$  par rapport à un idéal premier  $\mathfrak{p}$ , est donné par la formule

$$(11) \quad \max(\min(\nu' - \mu, \rho), 0),$$

où  $\nu'$  est l'ordre de  $y$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ ,  $\mu$  la hauteur de  $x$  par rapport à  $\mathfrak{p}$ , et où le nombre  $\rho$  se calcule comme suit : pour chaque entier  $h \geq 0$ , on désigne par  $h + \theta_h$



la hauteur de  $\pi^h x$  dans E;  $\mu'$  désignant la hauteur de  $y$ ,  $\rho$  est le plus petit des nombres

$$(12) \quad \max(\nu' - \theta_h, h - \mu')$$

lorsque  $h$  prend toutes les valeurs entières  $\geq 0$ .

On a évidemment  $\theta_0 = \mu$ , et  $\theta_h$  est fonction non décroissante de  $h$ ; dans le cas où  $\theta_h = \theta_0 = \mu$  pour tout  $h$ , la formule (11) se réduit à  $\max(\nu' - \mu, 0)$ ; c'est ce qui se passe lorsque E est un module régulier.

Pour démontrer le théorème, on commence par se ramener, comme dans le théorème 4, au cas où E et F sont chacun engendré par un nombre fini d'éléments; cela tient à ce que l'expression (11) ne peut être  $\neq 0$  que pour les idéaux premiers en nombre fini, qui divisent l'annulateur de  $y$ , et que, d'autre part, pour chacun de ces idéaux, le calcul du nombre  $\rho$  ne fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments de E; il en résulte qu'il y a un sous-module  $E_i$  de E contenant  $x$ , un sous-module  $F_i$  de F contenant  $y$ , tels que  $E_i$  et  $F_i$  n'aient chacun qu'un nombre fini de générateurs, et tels que, pour chaque idéal premier  $\mathfrak{p}$ , l'expression (11) soit la même, que l'on considère  $x$  et  $y$  comme éléments de E et F, ou comme éléments de  $E_i$  et  $F_i$ ; la fin du raisonnement est alors identique à celle du raisonnement analogue du théorème 4.

Supposons donc que E et F soient chacun engendré par un nombre fini d'éléments, et considérons d'abord le cas où E est régulier. Il est alors somme directe d'un nombre fini de sous-modules  $E_i$ , chaque  $E_i$  étant isomorphe à un idéal  $\mathfrak{a}_i$  de A; F peut d'autre part (puisque  $y$  est lié) être supposé somme directe d'un nombre fini de modules  $F_j$ , isomorphes à des quotients de A par des puissances d'idéaux premiers. Soit  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) le composant de  $x$  (resp.  $y$ ) dans  $E_i$  (resp.  $F_j$ ); ici encore, l'ordre de  $x \otimes y$  par rapport à  $\mathfrak{p}$  sera le plus grand des ordres des  $x_i \otimes y_j$ .

Or, nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème 2, que le produit tensoriel  $\mathfrak{a} \otimes (A/\mathfrak{b})$  est isomorphe à  $A/\mathfrak{b}$ ; les seuls éléments  $x_i \otimes y_j$  dont l'ordre par rapport à  $\mathfrak{p}$  peut être  $\neq 0$  sont donc ceux pour lesquels  $F_j$  est isomorphe à un  $A/\mathfrak{p}^n$ . On peut donc se ramener au cas où  $F_j = A/\mathfrak{p}^{n_j}$  pour tout indice  $j$ ; nous désignerons encore par  $m'_j$  la hauteur de  $y_j$ , de sorte que l'ordre de  $y_j$  est  $n_j - m'_j$ ; nous désignerons d'autre part par  $m_i$  la hauteur de  $x_i$ . Cela étant, d'après la forme des éléments des modules quotients  $A/\mathfrak{p}^n$ , et la démonstration du lemme 5, on voit aisément que l'ordre de  $x_i \otimes y_j$  est égal à  $\max(n'_j - m'_j - m_i, 0)$ ; on en déduit aussitôt que l'ordre de  $x \otimes y$  est  $\max(\nu' - \mu, 0)$  en vertu du lemme 6. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

Passons enfin au cas où E et F sont chacun engendré par un nombre fini d'éléments, mais où E n'est pas régulier. Alors E est somme directe d'un module régulier H (lui-même somme directe d'un nombre fini de sous-modules

isomorphes à des idéaux de  $A$ ), et d'un module  $S$ , somme directe d'un nombre fini de modules isomorphes à des quotients de  $A$  par des puissances d'idéaux premiers. Posons  $x = u + v$ , où  $u \in H$  et  $v \in S$ ; l'ordre de  $x \otimes y$  est égal au plus grand des ordres des deux éléments  $u \otimes y$  et  $v \otimes y$ .

Soient  $q$  l'ordre de  $v$ , et  $r, s$  les hauteurs respectives de  $u$  et  $v$ ; d'après ce qui précède, l'ordre de  $u \otimes y$  est  $\max(v' - r, 0)$ ; d'après le théorème 4, l'ordre de  $v \otimes y$  est  $\max[\min(q - \mu', v' - s), 0]$ . Reste à voir que le plus grand de ces deux nombres est donné par la formule (11). Supposons d'abord  $r \leq s$ ; alors le plus grand des deux nombres précédents est  $\max(v' - r, 0)$ ; on a d'autre part  $\mu = r$ , et  $\theta_h = \mu$  pour tout  $h$ , donc  $\rho = v' - \mu$ , et la formule (11) se réduit alors à  $\max(v' - \mu, 0)$ , qui concorde bien avec le résultat précédent. En second lieu, supposons  $s < r$ ; l'ordre de  $x \otimes y$  est égal à

$$\begin{array}{ll} \max(v' - r, 0) & \text{si } q - \mu' \leq v' - r, \\ \max(q - \mu', 0) & \text{si } v' - r < q - \mu' \leq v' - s, \\ \max(v' - s, 0) & \text{si } v' - s < q - \mu'. \end{array}$$

Or, on a alors  $\theta_h = s$  pour  $h < q$ , et  $\theta_h = r$  pour  $h \geq q$ ; comme d'autre part  $\mu = s$ , on vérifie aisément dans les trois cas possibles la concordance de l'ordre de  $x \otimes y$  que nous venons de trouver, avec l'ordre donné par la formule (11).

