

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES DUFRESNOY

**Théorie nouvelle des familles complexes normales. Applications
à l'étude des fonctions algébroides**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 61 (1944), p. 1-44

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

THÉORIE NOUVELLE
DES
FAMILLES COMPLEXES NORMALES

APPLICATIONS A L'ÉTUDE DES FONCTIONS ALGÈBROÏDES

PAR M. JACQUES DUFRESNOY.



Introduction.

C'est l'exposé magistral et aujourd'hui classique de M. P. Montel ⁽¹⁾ sur les familles normales qui est le point de départ de notre étude. Après avoir appliqué la notion de famille normale aux fonctions holomorphes ou méromorphes, M. Montel étend cette notion aux *systèmes f de $n + 1$ fonctions f_0, f_1, \dots, f_n* : il dit que de tels systèmes forment une *famille complexe normale* si les $n + 1$ familles constituées respectivement par les fonctions f_0 , les fonctions f_1, \dots , les fonctions f_n sont elles-mêmes normales. Mais, sauf dans des cas particuliers, la théorie construite à partir de là ne permet pas d'atteindre les propriétés des familles dont tous les systèmes présentent un certain nombre de combinaisons linéaires exceptionnelles.

Pour y parvenir, nous avons dû apporter à la définition une modification sensible. Elle nous a été suggérée par la méthode que MM. H. et J. Weyl ⁽²⁾

⁽¹⁾ P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Gauthier-Villars, 1927).

⁽²⁾ H. et J. WEYL, *Meromorphic curves* (*Annals of mathematics*, II, 39, 1938, p. 516-538).

d'abord, puis M. L. Ahlfors ⁽¹⁾ ont utilisée dans l'étude d'une question voisine. Cette modification nous a permis de bâtir une théorie harmonieuse que nous exposons ici de façon synthétique en nous inspirant de ce qu'a fait M. Montel ⁽²⁾ pour les familles de fonctions méromorphes. Nous n'avons pas traité des familles complexes quasi normales, ce qu'on pourrait faire sans peine dans le même esprit.

Nous nous plaçons à un point de vue homogène, ne distinguant pas entre deux systèmes dont les éléments sont proportionnels. Après avoir introduit les notions de distance et de convergence pour des systèmes de $n + 1$ nombres complexes, nous définissons la continuité, la convergence, la normalité pour des systèmes de $n + 1$ fonctions quelconques et nous obtenons un premier critère de normalité à partir de l'égale continuité. Nous limitant ensuite aux systèmes de fonctions holomorphes, nous indiquons des propriétés des suites uniformément convergentes, un second critère de normalité et des propositions correspondant aux théorèmes de Schottky, Landau et Vitali (théorèmes I, II et III). Tout ceci fait l'objet du premier Chapitre.

Dans le Chapitre II interviennent les combinaisons exceptionnelles (ou lacunaires). Ce sont des combinaisons linéaires, homogènes,

$$a_0 f_0(z) + a_1 f_1(z) + \dots + a_n f_n(z),$$

où les a_p sont des constantes, et qui ne présentent pas de zéros dans le domaine où l'on se place. Conformément à la terminologie usuelle, nous dirons que plusieurs combinaisons sont linéairement indépendantes s'il est impossible de trouver entre elles une relation linéaire homogène, à coefficients non tous nuls, qui soit identiquement vérifiée *relativement à* f_0, f_1, \dots, f_n . Nous indiquons le nombre maximum de combinaisons exceptionnelles d'un système de fonctions entières (théorèmes IV et V, ce dernier étant amélioré dans l'Appendice : théorème XVI); puis nous étudions, à l'aide d'un théorème de M. Henri Cartan ⁽³⁾, les familles de systèmes de fonctions holomorphes présentant des combinaisons exceptionnelles (critère fondamental et théorème VI, celui-ci étant précisé dans l'Appendice : théorème XVII). Nous donnons enfin des extensions des théorèmes de Schottky (théorème VII) et de Landau (théorème VIII) et nous parvenons à mettre le premier sous une forme partiellement quantitative.

Dans le troisième et dernier Chapitre, nous précisons la proposition connue sous le nom de « continuité des racines d'une équation algébrique » (lemme IV), ce qui nous permet de ramener aux propriétés correspondantes des systèmes

⁽¹⁾ L. AHLFORS, *The theory of meromorphic curves* (*Acta Societatis scientiarum Fennicae*, Nova series A, III, 4, 1941).

⁽²⁾ P. MONTEL, *loc. cit.*

⁽³⁾ H. CARTAN, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications* [*Annales de l'École Normale Supérieure*, (3), 43, 1928, p. 256-346].

de fonctions, les différentes propriétés des algébroides — convergence, convergence uniforme, normalité, égale continuité, . . . , — définies directement de la façon la plus naturelle ⁽¹⁾. Après quoi toute l'étude des algébroides se déroule sans peine parallèlement à celle des systèmes de fonctions holomorphes, faite dans les Chapitres I et II. On est ainsi conduit à rassembler des résultats connus et à en établir de nouveaux qui, quoique prévus depuis longtemps, n'avaient jamais reçu de démonstration. Ici comme toujours, la méthode des familles normales apporte l'unité et la cohérence ⁽²⁾.

Signalons enfin que, pour ne pas alourdir les notations, nous n'avons presque jamais indiqué explicitement sur quels indices portaient les sommes, mais nous avons systématiquement désigné ceux-ci par les lettres i et j , ce qui évite toute ambiguïté.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

Systèmes de $n + 1$ nombres complexes.

1. A titre préliminaire nous allons donner quelques définitions sur les systèmes de $n + 1$ nombres complexes. Nous n'envisagerons que des systèmes formés de nombres non tous nuls et nous ne considérerons pas comme distincts deux systèmes dont les éléments correspondants sont proportionnels (*systèmes équivalents*).

Étant donnés deux systèmes, le premier $\alpha^{(1)}$ constitué par les nombres $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}$ et le second $\alpha^{(2)}$ constitué par les nombres $\alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}$, nous appellerons *distance* de ces deux systèmes et nous représenterons par $[\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]$ l'expression

$$\sqrt{\frac{\sum |\alpha_i^{(1)}\alpha_j^{(2)} - \alpha_j^{(1)}\alpha_i^{(2)}|^2}{\sum |\alpha_i^{(1)}|^2 \sum |\alpha_j^{(2)}|^2}}.$$

C'est une quantité qui ne change pas quand on remplace un système par un système équivalent; de plus, elle est indépendante de l'ordre dans lequel sont donnés les deux systèmes et enfin elle est positive ou nulle. Cette dernière éventualité se produit dans le cas où les deux systèmes sont équivalents et dans ce cas-là seulement. Si la distance de deux systèmes est petite, nous dirons que ceux-ci sont voisins.

⁽¹⁾ Cf. G. RÉMOUNDOS, *Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Acta mathematica*, 37, 1914, p. 241-300); *Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine* [*Annali di matematica*, (3), 23, p. 1-24].

⁽²⁾ Aux auteurs déjà cités, il faut ajouter M. A. Bloch à qui sont dues des idées dont la fécondité s'est affirmée dans les travaux de MM. H. Cartan, H. et J. Weyl, L. Ahlfors.

2. Nous allons établir maintenant une propriété fondamentale de la distance de deux systèmes. A cet effet, remplaçons tout d'abord chacun d'eux par un système équivalent de façon à se ramener au cas où $\Sigma |\alpha_i^{(1)}|^2 = \Sigma |\alpha_i^{(2)}|^2 = 1$ (*systèmes normés*). Profitant de l'arbitraire qui subsiste, on peut encore multiplier tous les éléments du second système par exemple, par le nombre complexe $e^{i\theta}$ de module 1. Nous avons alors

$$\Sigma |\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)} e^{i\theta}|^2 = 2 [1 - \mathcal{R}(e^{-i\theta} \Sigma \alpha_i^{(1)} \bar{\alpha}_i^{(2)})].$$

Lorsque θ varie, cette quantité prend toutes les valeurs comprises entre les expressions

$$2 [1 \pm |\Sigma \alpha_i^{(1)} \bar{\alpha}_i^{(2)}|],$$

dont la plus petite est égale ⁽¹⁾ à

$$2 [1 - |\Sigma \alpha_i^{(1)} \bar{\alpha}_i^{(2)}|] = 2 [1 - \sqrt{1 - [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]^2}].$$

De sorte qu'après avoir éventuellement remplacé les deux systèmes $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$ par des systèmes normés équivalents convenablement choisis, on a

$$(1) \quad \Sigma |\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)}|^2 = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{si l'on pose} \quad [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}] = \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Il en résulte que des systèmes convenablement normés satisfont à

$$(2) \quad \Sigma |\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)}|^2 < 2 [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]^2$$

et que des systèmes normés quelconques vérifient l'inégalité

$$(3) \quad [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]^2 < \Sigma |\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)}|^2.$$

Pour des systèmes quelconques non normés, il n'y a pas de relation analogue à (2); par contre (3) peut s'étendre sous la forme

$$(3 \text{ bis}) \quad [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}]^2 < \frac{\Sigma |\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)}|^2}{\sqrt{\Sigma |\alpha_i^{(1)}|^2 \Sigma |\alpha_i^{(2)}|^2}},$$

car

$$\Sigma |\alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)}|^2 \geq \Sigma |\alpha_i^{(2)}|^2 + \Sigma |\alpha_i^{(1)}|^2 - 2 |\Sigma \alpha_i^{(1)} \bar{\alpha}_i^{(2)}| \geq 2 [\sqrt{\Sigma |\alpha_i^{(1)}|^2 \Sigma |\alpha_i^{(2)}|^2} - |\Sigma \alpha_i^{(1)} \bar{\alpha}_i^{(2)}|]$$

à partir d'où le calcul s'achève comme dans le cas des systèmes normés.

3 La propriété établie dans le numéro précédent entraîne deux conséquences très importantes :

a. Les distances de trois systèmes pris deux à deux vérifient l'inégalité triangulaire

$$(4) \quad [\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}] < [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}] + [\alpha^{(1)}, \alpha^{(3)}].$$

(1) En vertu de l'identité

$$\Sigma |\alpha_i^{(1)} \alpha_j^{(2)} - \alpha_j^{(1)} \alpha_i^{(2)}|^2 + \Sigma |\alpha_i^{(1)} \alpha_i^{(2)}|^2 = \Sigma |\alpha_i^{(1)}|^2 \Sigma |\alpha_i^{(2)}|^2.$$

En effet, après avoir convenablement normé les systèmes, on a

$$[\omega^{(1)}, \omega^{(2)}] = \sin \varphi_3, \quad \text{avec} \quad \Sigma |\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)}|^2 = 4 \sin^2 \frac{\varphi_3}{2} \quad \left(0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$[\omega^{(1)}, \omega^{(3)}] = \sin \varphi_2, \quad \text{avec} \quad \Sigma |\omega_i^{(3)} - \omega_i^{(1)}|^2 = 4 \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} \quad \left(0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

et

$$[\omega^{(2)}, \omega^{(3)}] = \sin \varphi_1, \quad \text{avec} \quad \Sigma |\omega_i^{(3)} - \omega_i^{(2)}|^2 > 4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \quad \left(0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Or on démontre aisément ⁽¹⁾ l'inégalité

$$\sqrt{\Sigma |\omega_i^{(3)} - \omega_i^{(2)}|^2} \leq \sqrt{\Sigma |\omega_i^{(3)} - \omega_i^{(1)}|^2} + \sqrt{\Sigma |\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)}|^2},$$

qui entraîne la suivante

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \leq \sin \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_3}{2}.$$

Celle-ci entraîne à son tour l'inégalité triangulaire

$$\sin \varphi_1 < \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3,$$

car, si φ_1 est supérieur à φ_2 et à φ_3 , seul cas où le résultat ne soit pas évident, $\cos \frac{\varphi_1}{2}$ est inférieur à $\cos \frac{\varphi_2}{2}$ et à $\cos \frac{\varphi_3}{2}$, d'où

$$2 \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \leq 2 \left(\sin \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_3}{2} \right) \cos \frac{\varphi_1}{2} < 2 \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + 2 \sin \frac{\varphi_3}{2} \cos \frac{\varphi_3}{2}.$$

b. Une substitution linéaire homogène fixe non dégénérée effectuée sur les éléments d'un système le transforme en un nouveau système. A deux systèmes voisins correspondent ainsi deux systèmes voisins.

La démonstration précisera cet énoncé. Soit

$$W_k = \Sigma a_{k,i} \omega_i \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

la substitution linéaire considérée et

$$\omega_k = \Sigma A_{k,i} W_i \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

la substitution inverse. L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$|W_k^{(2)} - W_k^{(1)}|^2 \leq \Sigma |a_{k,i}|^2 \Sigma |\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)}|^2$$

et

$$|\omega_k|^2 \leq \Sigma |A_{k,i}|^2 \Sigma |W_i|^2.$$

⁽¹⁾ La relation

$$\sqrt{\Sigma |a_i + b_i|^2} \leq \sqrt{\Sigma |a_i|^2} + \sqrt{\Sigma |b_i|^2},$$

que nous utilisons ici, peut s'établir en ajoutant membre à membre les inégalités

$$|a_j + b_j|^2 \leq \left[\sqrt{\Sigma |a_i|^2} + \sqrt{\Sigma |b_i|^2} \right] \left[\frac{|a_j|^2}{\sqrt{\Sigma |a_i|^2}} + \frac{|b_j|^2}{\sqrt{\Sigma |b_i|^2}} \right] \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

qui sont des cas particuliers de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

De ces inégalités, sommées relativement à l'indice k , on déduit aussitôt

$$\frac{\sum |W_i^{(2)} - W_i^{(1)}|^2}{\sqrt{\sum |W_i^{(1)}|^2 \sum |W_i^{(2)}|^2}} \leq \sum |a_{i,j}|^2 \sum |A_{i,j}|^2 \frac{\sum |\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)}|^2}{\sqrt{\sum |\omega_i^{(1)}|^2 \sum |\omega_i^{(2)}|^2}}.$$

En remarquant que l'on peut toujours supposer les systèmes $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ convenablement normés avant de leur appliquer l'inégalité précédente, il vient, compte tenu des relations (2) et (3^{bis}),

$$(5) \quad [W^{(1)}, W^{(2)}]^2 \leq 2 \sum |a_{i,j}|^2 \sum |A_{i,j}|^2 [\omega^{(1)}, \omega^{(2)}]^2.$$

4. Nous dirons qu'un système variable ω tend vers un système fixe $\omega^{(0)}$, lorsque la distance $[\omega, \omega^{(0)}]$ tend vers zéro. On dira aussi, pour exprimer la même propriété, que ω est convergent et que $\omega^{(0)}$ est sa limite. On voit aussitôt qu'une substitution linéaire homogène fixe non dégénérée conserve la convergence et l'on démontre sans peine le critère de Cauchy : *Pour que la suite des systèmes $\omega^{(k)}$ soit convergente, il faut et il suffit que, ε étant arbitrairement petit, $[\omega^{(k+l)}, \omega^{(k)}] < \varepsilon$ dès que k est assez grand, quel que soit l positif.* Ce critère s'établit exactement comme le critère analogue relatif à la convergence ordinaire; on utilise l'inégalité (4) et la proposition suivante qui apparaît évidente si l'on commence par normer les systèmes sur lesquels on raisonne : tout ensemble infini de systèmes présente au moins un système limite.

Systèmes de $n + 1$ fonctions.

5. Soit maintenant un système de $n + 1$ fonctions complexes définies dans un même domaine. Nous supposons essentiellement que les fonctions du système ne s'annulent jamais simultanément et nous ne considérerons pas comme distincts deux systèmes dont l'un se déduit de l'autre en multipliant par une même fonction les $n + 1$ fonctions qui le composent. Tout ce que nous allons dire dans cette section s'applique quel que soit le nombre de variables réelles ou complexes dont dépendent les fonctions. Mais, pour simplifier l'exposé, nous nous placerons dès maintenant dans le cas de fonctions d'une seule variable complexe z , l'extension au cas général étant immédiate. Nous supposons d'autre part que le domaine de définition des fonctions est borné, cette hypothèse n'étant d'ailleurs pas essentielle (1).

6. Nous dirons qu'un système de fonctions est *continu en un point z_0* si la distance des systèmes des valeurs prises par les fonctions aux points z_0 et z

(1) Si l'on veut s'en affranchir, il suffit de remplacer, dans la suite, la distance $|z'' - z'|$ de deux points du domaine par leur distance sphérique

$$\frac{|z'' - z'|}{\sqrt{1 + |z'|^2} \sqrt{1 + |z''|^2}}.$$

tend vers zéro lorsque z tend vers z_0 . Un système de fonctions est dit *continu dans un domaine* s'il est continu en chaque point de ce domaine; il y est dit *uniformément continu* si, à tout nombre positif ε , on peut associer un nombre η tel que l'on ait $[f(z'), f(z'')] < \varepsilon$ pourvu que z' et z'' soient deux points du domaine satisfaisant à $|z'' - z'| < \eta$.

Un système continu dans un domaine fermé y est *uniformément continu*. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite de couples de points z'_k, z''_k appartenant au domaine, dont la distance $|z''_k - z'_k|$ tendrait vers zéro avec $\frac{1}{k}$ tandis que l'expression $[f(z'_k), f(z''_k)]$ demeurerait supérieure à une borne positive ε ; on pourrait extraire de la suite des couples z'_k, z''_k une suite partielle z'_{n_k}, z''_{n_k} qui tende vers un point z_0 du domaine fermé et, d'après la continuité au point z_0 , on aurait

$$[f(z_0), f(z'_{n_k})] < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad [f(z_0), f(z''_{n_k})] < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que k serait assez grand; il en résulterait

$$[f(z'_{n_k}), f(z''_{n_k})] < \varepsilon,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite.

Nous nous limiterons ici à l'étude des familles de systèmes continus. Nous dirons que les systèmes $f^{(k)}(z)$ appartenant à une telle famille sont *également continus dans l'intérieur* du domaine D si, à tout domaine D' complètement intérieur à D et à tout nombre positif ε , on peut faire correspondre un nombre η tel que, z' et z'' étant deux points quelconques de D' satisfaisant à $|z'' - z'| < \eta$, on ait $[f^{(k)}(z'), f^{(k)}(z'')] < \varepsilon$, quel que soit le système $f^{(k)}$ de la famille.

7. Une suite de systèmes $f^{(k)}(z)$ de fonctions est dite *convergente* dans un domaine D si, pour chaque point z de ce domaine, la suite des systèmes des valeurs prises par les fonctions converge elle-même vers un système de valeurs. L'ensemble, pour les différents z , de ces systèmes limites de valeurs définit le système limite de fonctions que nous représenterons par $f^{(0)}(z)$. Par définition, la convergence sera *uniforme dans* D si, à tout nombre positif ε , on peut faire correspondre un nombre N tel que $k > N$ entraîne $[f^{(k)}(z), f^{(0)}(z)] < \varepsilon$ quel que soit z dans D ; elle sera *uniforme dans l'intérieur de* D si, à tout nombre positif ε et à tout domaine D' complètement intérieur à D , on peut faire correspondre un nombre N tel que $k > N$ entraîne $[f^{(k)}(z), f^{(0)}(z)] < \varepsilon$ quel que soit z dans D' . On voit aussitôt que le critère de Cauchy relatif à la convergence uniforme s'applique.

Pour que la suite de systèmes $f^{(k)}(z)$ soit *uniformément convergente* dans D (ou dans l'intérieur de D) il faut et il suffit que $[f^{(k+l)}(z), f^{(k)}(z)] < \varepsilon$ dès que k est assez grand, quel que soit l positif, lorsque z est dans D (ou dans D' quelconque complètement intérieur à D).

Si une suite de systèmes continus de fonctions converge uniformément, le système limite est continu. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi; il existerait alors une suite de points z_p tendant vers un point z_0 de D et tels que les valeurs correspondantes du système limite satisfassent à $[f^{(0)}(z_p), f^{(0)}(z_0)] > \varepsilon$, où ε est un nombre positif fixe. Mais, à condition de prendre k assez grand, l'expression $[f^{(k)}(z), f^{(0)}(z)]$ est arbitrairement petite lorsque z est dans D et, par conséquent,

$$[f^{(k)}(z_p), f^{(0)}(z_p)] < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad [f^{(k)}(z_0), f^{(0)}(z_0)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, le système $f^{(k)}(z)$ étant continu au point z_0 , on a, dès que p est suffisamment grand,

$$[f^{(k)}(z_p), f^{(k)}(z_0)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'application de l'inégalité triangulaire nous conduit alors à une contradiction.

Dans l'énoncé de la propriété précédente et dans sa démonstration, il y aurait lieu de préciser si l'on se place sur le domaine D fermé ou dans l'intérieur du domaine D. Nous ne l'avons pas fait dans un but de simplification et parce que le raisonnement a exactement la même forme dans chacun des deux cas.

8. DÉFINITION. — Une famille de systèmes de fonctions définies dans un domaine D y est normale si, de toute suite infinie de systèmes de la famille, on peut extraire une suite partielle uniformément convergente dans l'intérieur de D.

Si l'on effectue sur les fonctions de tous les systèmes d'une famille une même substitution linéaire homogène fixe non dégénérée, on obtient une nouvelle famille qui est normale en même temps que la première. En effet, une telle substitution conserve la convergence uniforme d'une suite partielle, ainsi qu'il résulte de l'inégalité (5).

PREMIER CRITÈRE DE NORMALITÉ. — Pour qu'une famille de systèmes continus de fonctions soit normale dans un domaine D, il faut et il suffit qu'il y ait égale continuité dans l'intérieur de ce domaine.

La condition est nécessaire. Supposons en effet qu'il n'y ait pas égale continuité; on pourrait mettre en évidence une suite de systèmes $f^{(k)}(z)$ à chacun desquels serait associés deux points z'_k et z''_k situés dans un domaine D' complètement intérieur à D et tels que

$$[f^{(k)}(z'_k), f^{(k)}(z''_k)] > \varepsilon \quad \text{et} \quad |z''_k - z'_k| \rightarrow 0,$$

où ε est un nombre positif fixe. En remplaçant au besoin cette suite par une suite partielle, on peut toujours supposer que z'_k et z''_k tendent vers une limite z_0 . Puisque la famille est normale par hypothèse, on peut extraire de la suite une suite partielle $f^{(n_k)}(z)$ qui converge uniformément. Le système

limite $f^{(0)}$ étant continu, les expressions

$$[f^{(0)}(z_0), f^{(0)}(z'_{nk})] \quad \text{et} \quad [f^{(0)}(z_0), f^{(0)}(z''_{nk})]$$

sont inférieures à $\frac{\varepsilon}{4}$ dès que k est assez grand. Il en est de même de

$$[f^{(0)}(z'_{nk}), f^{(nk)}(z'_{nk})] \quad \text{et} \quad [f^{(0)}(z''_{nk}), f^{(nk)}(z''_{nk})]$$

en raison de la convergence uniforme. L'inégalité triangulaire nous montre alors que

$$[f^{(nk)}(z'_{nk}), f^{(nk)}(z''_{nk})] < \varepsilon,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

La condition est suffisante. Pour le montrer considérons un ensemble E de points $z_1, z_2, \dots, z_p, \dots$, dénombrable, dense dans D. D'après une remarque déjà faite (n° 4), d'une suite donnée de systèmes de fonctions on peut extraire une suite partielle qui soit convergente au point z_1 ; de celle-ci on peut extraire une nouvelle suite partielle qui soit convergente au point z_2 , puis de cette dernière une autre qui soit convergente au point z_3 et ainsi de suite. Le procédé diagonal, bien connu dans la théorie des familles normales, nous permet de former une suite partielle $f^{(nk)}(z)$ qui soit convergente aux différents points de E. La limite est un système $f^{(0)}(z)$ de fonctions définies sur l'ensemble E. Ce système limite est uniformément continu dans l'intérieur de D car, par hypothèse, à tout nombre positif ε , et à tout domaine D' complètement intérieur à D on peut faire correspondre un nombre η_1 tel que

$$|z_{p'} - z_p| < \eta_1 \quad \text{entraîne} \quad [f^{(nk)}(z_{p'}), f^{(nk)}(z_p)] < \varepsilon_1,$$

d'où, en passant à la limite, $[f^{(0)}(z_{p'}), f^{(0)}(z_p)] < \varepsilon_1$. Le système $f^{(0)}$ peut donc être prolongé par continuité dans tout l'intérieur du domaine D. Il nous reste à démontrer qu'il y est limite uniforme de la suite partielle qui a servi à le définir. Pour cela, donnons-nous arbitrairement un domaine D' complètement intérieur à D et un nombre positif ε . Il existe un nombre η tel que z et z' étant deux points quelconques de D' distants de moins de η , on ait

$$[f^{(nk)}(z), f^{(nk)}(z')] < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad [f^{(0)}(z), f^{(0)}(z')] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Choisissons un sous-ensemble E_1 de E, formé d'un nombre fini de points, de telle sorte qu'il existe au moins un point de E_1 à une distance moindre que η de tout point du domaine D'. On peut alors déterminer un nombre N tel que

$$k > N \quad \text{entraîne} \quad [f^{(nk)}(z'), f^{(0)}(z')] < \frac{\varepsilon}{3},$$

lorsque z' appartient à E_1 . Si z est un point quelconque de D', on a donc, en vertu de l'inégalité triangulaire,

$$[f^{(nk)}(z), f^{(0)}(z)] < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Systèmes de $n + 1$ fonctions holomorphes.

9. Étudions maintenant le cas particulier des systèmes de $n + 1$ fonctions holomorphes. Soit une suite de tels systèmes $f^{(k)}(z)$ uniformément convergente dans l'intérieur d'un domaine D . Les fonctions du système limite $f^{(0)}(z)$ ne sont pas complètement définies puisqu'on peut les multiplier toutes par une même fonction arbitraire. Nous allons démontrer que, en profitant de cette latitude, *il est possible de les transformer simultanément en fonctions holomorphes.*

Les zéros des fonctions du système limite sont parfaitement déterminés, car la multiplication par une même fonction (ne s'annulant pas) ne peut les modifier. Montrons que ces zéros sont isolés dans l'intérieur de D . Il nous suffit pour cela d'établir que, z_0 étant un point quelconque de D , les zéros sont isolés dans le voisinage de z_0 . Or, l'une au moins des fonctions limites n'est pas nulle en z_0 , soit $f_p^{(0)}(z_0) \neq 0$. En raison de la continuité du système limite, il existe un voisinage de z_0 dans lequel on a

$$|f^{(0)}(z_0), f^{(0)}(z)| < \frac{1}{3} \frac{|f_p^{(0)}(z_0)|}{\sqrt{\sum |f_i^{(0)}(z_0)|^2}}.$$

Dans ce voisinage, supposé complètement intérieur à D , on peut trouver un nombre N tel que $k > N$ entraîne

$$|f^{(0)}(z), f^{(k)}(z)| < \frac{1}{3} \frac{|f_p^{(0)}(z_0)|}{\sqrt{\sum |f_i^{(0)}(z_0)|^2}}.$$

Il en résulte que

$$|f^{(0)}(z_0), f^{(k)}(z_0)| < \frac{2}{3} \frac{|f_p^{(0)}(z_0)|}{\sqrt{\sum |f_i^{(0)}(z_0)|^2}},$$

ce qui nous montre que les fonctions $f_p^{(k)}(z)$ ne s'annulent pas dans le voisinage [non plus que la fonction $f_p^{(0)}(z)$] car on voit immédiatement, à partir de la définition de la distance, que la relation $f_p^{(k)}(z_1) = 0$ entraînerait

$$|f^{(0)}(z_0), f^{(k)}(z_1)|^2 \geq \frac{|f_p^{(0)}(z_0)|^2}{\sum |f_i^{(0)}(z_0)|^2}.$$

Dans le voisinage considéré nous pouvons mettre les systèmes de fonctions holomorphes sous la forme

$$\varphi_0^{(k)} \equiv \frac{f_0^{(k)}}{f_p^{(k)}}, \quad \varphi_1^{(k)} \equiv \frac{f_1^{(k)}}{f_p^{(k)}}, \quad \dots, \quad \varphi_p^{(k)} \equiv 1, \quad \dots, \quad \varphi_n^{(k)} \equiv \frac{f_n^{(k)}}{f_p^{(k)}},$$

et opérer de même sur le système limite qui s'écrit alors

$$\varphi_0^{(0)}, \varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_p^{(0)} \equiv 1, \dots, \varphi_n^{(0)}.$$

La somme des carrés des modules des fonctions de chacun de ces systèmes est bornée supérieurement dans le voisinage. En effet, la distance du système $\varphi^{(k)}$

au système $\varphi^{(k)*}$ qui s'en déduit en remplaçant $\varphi_p^{(k)}$ par 0 est donnée par

$$[\varphi^{(k)}(z), \varphi^{(k)*}(z)] = \frac{1}{\sqrt{\sum |\varphi_i^{(k)}(z)|^2}},$$

tandis que, d'après une remarque déjà faite,

$$[\varphi^{(k)*}(z), \varphi^{(0)}(z_0)] > \frac{|\varphi_p^{(0)}(z_0)|}{\sqrt{\sum |\varphi_i^{(0)}(z_0)|^2}},$$

L'inégalité triangulaire

$$|\varphi^{(k)*}(z), \varphi^{(0)}(z_0)| < |[\varphi^{(k)*}(z), \varphi^{(k)}(z)]| + |[\varphi^{(k)}(z), \varphi^{(0)}(z_0)]|$$

nous conduit alors à

$$\frac{|\varphi_p^{(0)}(z_0)|}{\sqrt{\sum |\varphi_i^{(0)}(z_0)|^2}} < \frac{1}{\sqrt{\sum |\varphi_i^{(k)}(z)|^2}} + \frac{2}{3} \frac{|\varphi_p^{(0)}(z_0)|}{\sqrt{\sum |\varphi_i^{(0)}(z_0)|^2}},$$

d'où

$$\sum |\varphi_i^{(k)}(z)|^2 < 9 \frac{\sum |\varphi_i^{(0)}(z_0)|^2}{|\varphi_p^{(0)}(z_0)|^2}.$$

On verrait de même que $\sum |\varphi_i^{(0)}(z)|^2$ est borné supérieurement.

Cette propriété étant établie, l'inégalité

$$|\varphi^{(0)}, \varphi^{(k)}|^2 = \frac{\sum |\varphi_i^{(0)} \varphi_i^{(k)} - \varphi_i^{(0)*} \varphi_i^{(k)*}|^2}{\sum |\varphi_i^{(0)}|^2 \sum |\varphi_i^{(k)}|^2} > \frac{\sum |\varphi_i^{(k)} - \varphi_i^{(0)*}|^2}{\sum |\varphi_i^{(0)}|^2 \sum |\varphi_i^{(k)}|^2},$$

conséquence de $\varphi_p^{(0)} = \varphi_p^{(k)} = 1$, nous montre qu'il y a convergence uniforme, au sens ordinaire du mot, des fonctions holomorphes $\varphi_q^{(k)}(z)$ vers les fonctions $\varphi_q^{(0)}(z)$. Celles-ci sont donc holomorphes dans le voisinage considéré. Il en résulte en particulier que leurs zéros, donc ceux des fonctions $f_q^{(0)}(z)$, sont isolés.

Considérons alors dans tout le domaine D les fonctions

$$1, \frac{f_1^{(0)}}{f_0^{(0)}}, \frac{f_2^{(0)}}{f_0^{(0)}}, \dots, \frac{f_n^{(0)}}{f_0^{(0)}}.$$

Elles sont holomorphes au voisinage de tout point qui n'annule pas $f_0^{(0)}$; or ces derniers sont isolés et, dans le voisinage de chacun d'eux, les fonctions précédentes multipliées par $\frac{f_0^{(0)}}{f_p^{(0)}}$ (avec p bien choisi) deviennent holomorphes. Finalement, les fonctions considérées sont méromorphes. En les multipliant toutes par un même facteur convenable $\chi^{(0)}$ on obtient bien un système de fonctions holomorphes dans D. C'est la propriété annoncée.

10. Ce résultat peut être précisé de façon utile. Nous allons montrer qu'il existe une suite de fonctions holomorphes $\psi^{(k)}(z)$ telle que les $n+1$ suites de termes généraux

$$\psi^{(k)} f_0^{(k)}, \psi^{(k)} f_1^{(k)}, \dots, \psi^{(k)} f_n^{(k)},$$

convergent uniformément (au sens ordinaire) dans l'intérieur de D respectivement vers les $n+1$ fonctions holomorphes constituant le système limite $f^{(0)}(z)$.

D'après l'étude locale que nous venons de faire et les propriétés connues des suites uniformément convergentes de fonctions holomorphes, on voit aussitôt que les zéros de $f_0^{(k)}(z)$ tendent vers ceux de $f_0^{(0)}(z)$. D'autre part, nous avons été conduit à utiliser une fonction holomorphe $\chi^{(0)}(z)$ qui présente les mêmes zéros que $f_0^{(0)}(z)$. On peut déterminer une suite de fonctions holomorphes $\chi^{(k)}(z)$, tendant uniformément vers $\chi^{(0)}(z)$ dans l'intérieur de D, la fonction $\chi^{(k)}(z)$ ayant mêmes zéros que $f_0^{(k)}(z)$ (1). Il suffit alors de prendre

$$\psi^{(k)}(z) \equiv \frac{\chi^{(k)}(z)}{f_0^{(k)}(z)}$$

pour que la propriété énoncée devienne évidente.

II. On en déduit deux lemmes importants pour les *suites uniformément convergentes de systèmes de fonctions holomorphes*.

LEMME I. — *Considérons pour chacun des systèmes de la suite une même combinaison linéaire*

$$a_0 f_0^{(k)} + a_1 f_1^{(k)} + \dots + a_n f_n^{(k)}.$$

Si le système limite n'annule pas identiquement cette combinaison, les zéros des combinaisons relatives aux systèmes de la suite tendent vers les zéros relatifs au système limite. En particulier, si les combinaisons formées avec les systèmes de

(1) On peut toujours se ramener au cas où le domaine D est le cercle $|z| < 1$. Soit alors $|z| = r < 1$ une circonférence ne passant par aucun zéro de $\chi^{(0)}(z)$. Dès que k est suffisamment grand, il est possible de trouver une fonction $h^{(k)}(z)$, méromorphe dans $|z| < 1$, ayant mêmes zéros que $f_0^{(k)}(z)$, ayant pour pôles les zéros de $\chi^{(0)}(z)$, et différant de 1 de moins de ε' lorsque $|z| = r$. En effet, pour k assez grand, $\chi^{(0)}(z)$ et $f_0^{(k)}(z)$ présentent dans $|z| < r$ le même nombre de zéros qu'on peut associer deux à deux, soit z_q avec $z_q^{(k)}$, de façon que la distance de deux zéros associés soit inférieure à un nombre arbitrairement petit; il en résulte que l'expression

$$\prod \frac{z - z_q^{(k)}}{z - z_q},$$

où le produit est étendu aux couples de zéros que nous venons de considérer, est arbitrairement voisine de 1 sur la circonférence $|z| = r$. D'autre part, il existe une fonction $g^{(k)}(z)$, méromorphe dans $|z| < 1$, et ayant pour zéros et pôles respectivement les zéros de $f_0^{(k)}(z)$ et de $\chi^{(0)}(z)$ qui sont situés dans la couronne $r < |z| < 1$. La fonction $\log g^{(k)}(z)$ est holomorphe dans $|z| \leq r$; avec dans ce cercle une erreur aussi petite que l'on veut, on peut remplacer $\log g^{(k)}(z)$ par un polynôme $P^{(k)}(z)$ section de sa série de Taylor. On a ainsi démontré l'existence de la fonction

$$h^{(k)}(z) \equiv g^{(k)}(z) e^{-P^{(k)}(z)} \prod \frac{z - z_q^{(k)}}{z - z_q}.$$

A r et ε donnés correspond donc un entier $k_0(r, \varepsilon)$ tel que, pour $k > k_0(r, \varepsilon)$ il existe une fonction $h^{(k)}(z) \chi^{(0)}(z)$, holomorphe dans $|z| < 1$, ayant mêmes zéros que $f_0^{(k)}(z)$, et différant de $\chi^{(0)}(z)$ de ε lorsque $|z| = r$, donc aussi lorsque $|z| \leq r$. Choisissons alors une suite $r_1, r_2, \dots, r_p, \dots$, tendant vers 1 et une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p, \dots$, tendant vers 0; on leur fait correspondre la suite croissante d'entiers $k_p = k_0(r_p, \varepsilon_p)$. Tout nombre entier k supérieur à k_1 détermine un entier p tel que $k_p \leq k < k_{p+1}$; et l'on peut calculer $\chi^{(k)}(z) \equiv h^{(k)}(z) \chi^{(0)}(z)$ par le procédé précédent où l'on a fixé $r = r_p, \varepsilon = \varepsilon_p$.

la suite ne présentent pas de zéros, il en est de même de la combinaison formée avec le système limite, à moins que celle-ci ne soit identiquement nulle.

C'est là une application immédiate de la propriété de convergence des zéros pour une suite uniformément convergente (au sens ordinaire) de fonctions holomorphes.

LEMME II. — Si la suite des systèmes $f^{(k)}(z)$ tend uniformément vers le système $f^{(0)}(z)$, la suite des systèmes constitués par les fonctions

$$f_p^{(k)}(z) f_q^{(k)'}(z) - f_q^{(k)}(z) f_p^{(k)'}(z)$$

est uniformément convergente (au sens que nous avons attribué à ce terme) et a pour limite le système des fonctions $f_p^{(0)} f_q^{(0)'} - f_q^{(0)} f_p^{(0)'}$; il y a toutefois exception aux points z , où ces dernières fonctions s'annulent simultanément (et ne constituent donc plus un système suivant notre terminologie).

En effet, les suites

$$\Psi_{(k)2} [f_p^{(k)} f_q^{(k)'} - f_q^{(k)} f_p^{(k)'}] \equiv \Psi_{(k)} f_p^{(k)} [\Psi_{(k)} f_q^{(k)'}]' - \Psi_{(k)} f_q^{(k)} [\Psi_{(k)} f_p^{(k)'}]'$$

sont uniformément convergentes au sens ordinaire.

Plus généralement, la suite des systèmes constitués par les Wronskiens $\Delta_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r}^{(k)}$ des fonctions $f_p^{(k)}$ prises r à r ($r \leq n$) est uniformément convergente et a pour limite le système constitué de la même façon à l'aide des fonctions limites $f_p^{(0)}$. Il y a exception si ce « système limite » de Wronskiens comprend des éléments tous nuls (ne constituant donc pas un système à proprement parler).

Le même raisonnement nous démontre aussi la proposition suivante :

LEMME III. — Dans les mêmes conditions, on peut affirmer sans exception la convergence uniforme au sens ordinaire des expressions

$$\frac{|f_p^{(k)}|}{[\sum |f_i^{(k)}|^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{|f_p^{(k)} f_q^{(k)'} - f_q^{(k)} f_p^{(k)'}|}{\sum |f_i^{(k)}|^2}, \quad \dots, \quad \frac{|\Delta_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r}^{(k)}|}{[\sum |f_i^{(k)}|^2]^{\frac{r}{2}}}, \quad \dots, \quad \frac{|\Delta_{0, 1, 2, \dots, n}^{(k)}|}{[\sum |f_i^{(k)}|^2]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Les limites respectives de ces suites sont formées de la même façon à partir de $f^{(0)}$.

12. DEUXIÈME CRITÈRE DE NORMALITÉ. — Pour qu'une famille de systèmes $f(z)$ de $n+1$ fonctions holomorphes soit normale dans un domaine D , il faut et il suffit que l'expression

$$\frac{\sqrt{\sum |f_i f_j' - f_i' f_j|^2}}{\sum |f_i|^2}$$

soit également bornée dans l'intérieur de D pour tous les systèmes de la famille.

Cette condition est nécessaire, car si elle n'était pas satisfaite pour une famille normale on pourrait extraire de celle-ci une suite de systèmes $f^{(k)}(z)$

à chacun desquels correspondrait un point z_k d'un domaine D' complètement intérieur à D , de sorte que l'expression

$$\frac{\sqrt{\sum |f_i^{(k)}(z_k) f_j^{(k)'}(z_k) - f_j^{(k)}(z_k) f_i^{(k)'}(z_k)|^2}}{\sum |f_i^{(k)}(z_k)|^2}$$

augmente indéfiniment avec k . Quitte à extraire de cette suite une suite partielle, on peut toujours supposer que les points z_k tendent vers un point z_0 intérieur à D et que les systèmes $f^{(k)}$ convergent uniformément vers un système limite $f^{(0)}$. Si l'on pose alors

$$\frac{\sqrt{\sum |f_i^{(0)}(z_0) f_j^{(0)'}(z_0) - f_j^{(0)}(z_0) f_i^{(0)'}(z_0)|^2}}{\sum |f_i^{(0)}(z_0)|^2} = \Lambda,$$

on peut déterminer dans D un voisinage de z_0 dans lequel l'expression figurant au premier membre de la dernière relation reste inférieure à $A + 1$. Dans ce même voisinage, l'expression correspondante relative au système $f^{(k)}$ sera, d'après le lemme III, inférieure à $A + 2$ dès que k sera assez grand, ce qui nous conduit à la contradiction cherchée.

La condition est suffisante, car elle entraîne l'égalité en vertu de l'inégalité

$$|f(z_0), f(z_1)| \leq \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{\sum |f_i(z) f_j'(z) - f_j(z) f_i'(z)|^2}}{\sum |f_i(z)|^2} |dz|.$$

Celle-ci est une conséquence de l'inégalité triangulaire, car le module de la différentielle du premier membre par rapport à z_1 satisfait à

$$\begin{aligned} |[f(z_0), f(z_1) + f'(z_1) dz_1] - [f(z_0), f(z_1)]| &\leq |[f(z_1), f(z_1) + f'(z_1) dz_1]| \\ &= \frac{\sqrt{\sum |f_i(z_1) f_j'(z_1) - f_j(z_1) f_i'(z_1)|^2}}{\sum |f_i(z_1)|^2} |dz_1|. \end{aligned}$$

13. Voici maintenant deux propriétés importantes des familles complexes normales.

THÉORÈME I. — Soit une famille normale dans le domaine $|z| < R$, dont chacun des systèmes $f(z)$ présente une même combinaison linéaire exceptionnelle ⁽¹⁾

$$a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n,$$

l'expression

$$\delta = \frac{|a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n|}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2} \sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}}$$

étant, au point $z = 0$, supérieure à un nombre positif fixe. Dans ces conditions, δ reste, dans le domaine $|z| < r < R$, supérieure à une borne positive ne dépendant que de r .

⁽¹⁾ Nous entendons par là que la combinaison $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ ne s'annule dans $|z| < R$ pour aucun système $f(z)$.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait alors une suite de systèmes pour lesquels δ prendrait, dans $|z| < r$, des valeurs tendant vers zéro. La famille étant normale, on pourrait en extraire une suite partielle uniformément convergente et qui jouirait de la même propriété. La combinaison linéaire relative au système limite, n'étant pas identiquement nulle (puisqu'à l'origine on a $\delta > m > 0$), ne peut présenter de zéros, d'après le lemme I. Le δ correspondant au système limite, étant une fonction de z continue et dépourvue de zéros, présente dans $|z| < r$ une borne inférieure positive. Vu la convergence uniforme, il en est de même, à partir d'un certain rang, pour les δ relatifs aux systèmes de la suite; ce qui nous conduit à une contradiction.

THÉORÈME II. — *Si une famille de systèmes $f(z)$ est normale dans $|z| < R$, les expressions*

$$\frac{|f_p f'_q - f_q f'_p|}{\sum |f_i|^2}, \quad \dots, \quad \frac{|\Delta_{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r}|}{[\sum |f_i|^2]^{\frac{r}{2}}}, \quad \dots, \quad \frac{|\Delta_{0, 1, \dots, n}|}{[\sum |f_i|^2]^{\frac{n+1}{2}}}$$

relatives à tous les systèmes de la famille présentent dans $|z| < r < R$ une borne supérieure ne dépendant que de r .

La démonstration se fait encore par l'absurde. Si la propriété n'était pas vérifiée, il existerait une suite de systèmes pour laquelle l'une des expressions précédentes prendrait des valeurs augmentant indéfiniment, et l'on peut toujours supposer que cette suite est uniformément convergente. Mais l'expression considérée serait bornée pour le système limite, et, d'après le lemme III, il en serait de même pour les systèmes de la suite. C'est la contradiction cherchée.

14. Pour montrer par un nouvel exemple que notre théorie peut recevoir un développement parallèle à celui que M. Montel a donné à la théorie des familles normales de fonctions méromorphes, nous terminerons ce Chapitre en étendant le théorème de Vitali.

THÉORÈME III. — *Si une suite de systèmes, appartenant à une famille normale dans un domaine D, converge en une infinité E de points complètement intérieure à ce domaine, elle converge uniformément dans tout l'intérieur du domaine D. (Par infinité de points complètement intérieure au domaine D, nous entendons une infinité de points qui sont tous intérieurs à D, ainsi que leurs points d'accumulation.)*

Montrons d'abord qu'il y a convergence dans l'intérieur de D. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver deux suites partielles convergeant uniformément dans l'intérieur de D vers deux systèmes limites distincts. Mais ces deux systèmes coïncident nécessairement sur l'ensemble E; nous allons voir qu'il en résulte leur coïncidence dans tout D, ce qui établit la propriété. Considérons,

en effet, deux systèmes $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ coïncidants sur E; en un point z_0 d'accumulation de l'ensemble E les deux systèmes coïncident forcément en raison de leur continuité. Soit, par exemple, $f_0^{(1)}(z_0) \neq 0$ et $f_0^{(2)}(z_0) \neq 0$. Les fonctions $f_0^{(1)}(z)$ et $f_0^{(2)}(z)$ ne s'annulent pas dans le voisinage de z_0 et les fonctions appartenant à chacun des couples suivants

$$\frac{f_1^{(1)}}{f_0^{(1)}} \text{ et } \frac{f_1^{(2)}}{f_0^{(2)}}, \quad \frac{f_2^{(1)}}{f_0^{(1)}} \text{ et } \frac{f_2^{(2)}}{f_0^{(2)}}, \quad \dots, \quad \frac{f_n^{(1)}}{f_0^{(1)}} \text{ et } \frac{f_n^{(2)}}{f_0^{(2)}}$$

sont égales aux points de E situés dans le voisinage considéré. Or ce sont des fonctions méromorphes; elles sont donc égales dans tout l'intérieur de D.

La convergence est uniforme dans l'intérieur de D. Sinon on pourrait extraire de la suite considérée (que nous savons maintenant être convergente dans l'intérieur de D vers un système limite $f^{(0)}$) une suite partielle de systèmes $f^{(k)}$ à chacun desquels serait associé un point z_k appartenant à un domaine D' complètement intérieur à D et tel que

$$[f^{(k)}(z_k), f^{(0)}(z_k)] > \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif fixe. Or, la famille étant normale, on peut extraire de cette suite une nouvelle suite partielle $f^{(n_k)}$ uniformément convergente; par conséquent

$$[f^{(n_k)}(z_k), f^{(0)}(z_k)] < \varepsilon,$$

dès que n_k est assez grand. L'hypothèse de convergence non uniforme est donc absurde et le théorème se trouve complètement démontré.

CHAPITRE II.

LE CRITÈRE FONDAMENTAL DE NORMALITÉ.

Résultats relatifs aux systèmes de fonctions entières.

15. Nous allons d'abord énoncer des propositions concernant les systèmes de fonctions entières et en donner des démonstrations sous une forme qui va préparer nos considérations ultérieures.

THÉORÈME IV. — Soit un système de $n+1$ fonctions entières $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$. Il ne peut exister entre ces fonctions $2n+1$ combinaisons linéaires homogènes exceptionnelles qui soient linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, à moins que les fonctions ne soient proportionnelles entre elles ⁽¹⁾.

(1) Dans les théorèmes IV et V, et par conséquent aussi dans les théorèmes X et XI, si le quotient de deux des fonctions f_p est transcendant le mot « exceptionnel » peut être pris au sens large, une combinaison exceptionnelle étant seulement une combinaison n'ayant qu'un nombre fini de zéros. La démonstration n'est que peu modifiée.

Nous croyons que le théorème IV est nouveau. On peut toutefois en rapprocher un résultat de M. P. MONTEL [voir *Leçons sur les familles normales...* (*loc. cit.*), § 428].

partielle identiquement nulle au moins. Ces dernières seront donc au moins au nombre de n . Nous allons montrer d'autre part qu'elles sont linéairement indépendantes. Il en résultera aussitôt que les fonctions F_q sont proportionnelles, donc aussi les fonctions f_p .

Pour établir l'indépendance linéaire des combinaisons partielles, il suffit d'établir l'indépendance de celles qui portent sur les fonctions F_q appartenant à une même classe; or ceci est une conséquence immédiate de la propriété des déterminants extraits du tableau des $a_{p,q}$.

16. Ce résultat peut être précisé comme suit.

THÉORÈME V. — *S'il n'existe entre les $n + 1$ fonctions f_q que λ relations linéaires homogènes indépendantes au plus ($\lambda < n$), le nombre de combinaisons exceptionnelles (linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$) que peuvent présenter ces fonctions f_q est au plus égal à $n + \lambda + 1$.*

En effet s'il y avait $n + \lambda + 2$ combinaisons exceptionnelles entre les f_q , il resterait, en opérant comme précédemment, $\lambda + 1$ combinaisons exceptionnelles proprement dites entre les F_q ; or chacune d'elles doit comprendre une combinaison partielle identiquement nulle et ces dernières sont linéairement indépendantes. On est ainsi conduit à une contradiction qui établit le théorème annoncé. Celui-ci peut être amélioré; c'est là un point sur lequel nous reviendrons dans l'Appendice.

Le critère fondamental de normalité.

17. Nous étudierons maintenant des systèmes de fonctions holomorphes dans un domaine D .

CRITÈRE FONDAMENTAL. — *Si entre les $n + 1$ fonctions de chaque système d'une famille, il existe $2n + 1$ mêmes combinaisons linéaires exceptionnelles, linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$, la famille est normale.*

Comme dans le n° 15, nous commencerons par faire une transformation linéaire homogène en introduisant les fonctions F_q au lieu des fonctions f_q . Pour chacun des nouveaux systèmes nous aurons n combinaisons linéaires exceptionnelles proprement dites.

Soit alors $F^{(k)}(z)$ une suite de systèmes de la famille. Les fonctions F_0, F_1, \dots, F_n se répartissent en un certain nombre de classes, chacune de celles-ci comprenant au moins une fonction de première catégorie et éventuellement des fonctions de seconde catégorie caractérisées par les propriétés suivantes : dans chaque classe, les fonctions de première catégorie (si elles sont plusieurs) ont des rapports mutuels qui convergent uniformément vers des limites qui ne

sont ni la constante zéro, ni la constante ∞ , tandis que les rapports des fonctions de seconde catégorie à celles de première tendent uniformément vers zéro.

A chacune de ces classes, et pour chaque combinaison exceptionnelle, correspond une combinaison partielle. Le quotient de celle-ci par une fonction de première catégorie de la classe convergente converge uniformément vers une fonction limite qui ne peut être la constante zéro que pour $n - 1$ combinaisons partielles au plus, en raison de l'indépendance linéaire de ces dernières. Pour l'une des n combinaisons exceptionnelles, aucune des combinaisons partielles ne conduit donc à une fonction limite identiquement nulle. Soient $F_{\rho_1} \Phi_1, F_{\rho_2} \Phi_2, \dots, F_{\rho_c} \Phi_c$, les combinaisons partielles correspondantes, en désignant par F_{ρ_1} une fonction de première catégorie de la première classe, par F_{ρ_2} une fonction de première catégorie de la seconde classe, etc. L'expression

$$F_{\rho_1}^{(k)} \Phi_1^{(k)} + F_{\rho_2}^{(k)} \Phi_2^{(k)} + \dots + F_{\rho_c}^{(k)} \Phi_c^{(k)}$$

ne s'annule pas dans D et les $\Phi_q^{(k)}$ tendent uniformément vers des limites $\Phi_q^{(0)}$ qui ne sont ni la constante zéro, ni la constante ∞ . Si nous écartons du domaine D les voisinages des zéros des fonctions $\Phi_q^{(0)}$, il nous reste un domaine D* dans lequel les fonctions $F_{\rho_q}^{(k)} \Phi_q^{(k)}$ ne s'annulent pas dès que k est assez grand. Un théorème de M. Henri Cartan (1) montre qu'on peut extraire de la suite $F^{(k)}$ une suite partielle $F^{(n_k)}$ pour laquelle le rapport de deux des fonctions $F_{\rho_q}^{(n_k)} \Phi_q^{(n_k)}$ converge uniformément dans D*; il en sera de même du rapport des deux fonctions $F_{\rho_q}^{(n_k)}$ correspondantes; mais, comme ce rapport est holomorphe dans D, la propriété subsiste dans tout ce domaine. D'une suite $F^{(k)}$ donnant lieu à $c > 1$ classes, nous extrayons ainsi une suite partielle relativement à laquelle deux de ces classes peuvent être réunies en une seule. En recommençant le raisonnement un nombre suffisant de fois, on parvient à extraire finalement une suite partielle donnant lieu à une seule classe.

Cette suite de systèmes, que nous désignerons encore par $F^{(k)}$ pour ne pas alourdir les notations, est uniformément convergente. En effet, on majore la quantité

$$[F^{(k)}, F^{(k+l)}]^2 = \sum \frac{|F_i^{(k)} F_j^{(k+l)} - F_i^{(k+l)} F_j^{(k)}|^2}{\sum |F_i^{(k)}|^2 \sum |F_j^{(k+l)}|^2}$$

en remplaçant le terme général de la somme par

$$\frac{|F_i^{(k)} F_j^{(k+l)} - F_i^{(k+l)} F_j^{(k)}|^2}{(|F_i^{(k)}|^2 + |F_j^{(k)}|^2) (|F_i^{(k+l)}|^2 + |F_j^{(k+l)}|^2)},$$

ce que l'on fera si F_i et F_j n'appartiennent pas tous deux à la seconde catégorie, ou par

$$\frac{|F_i^{(k)} F_j^{(k+l)} - F_i^{(k+l)} F_j^{(k)}|^2}{|F_0^{(k)}|^2 |F_0^{(k+l)}|^2} = \left| \frac{F_i^{(k)} F_j^{(k+l)}}{F_0^{(k)} F_0^{(k+l)}} - \frac{F_i^{(k+l)} F_j^{(k)}}{F_0^{(k+l)} F_0^{(k)}} \right|^2,$$

(1) H. CARTAN, *Sur les systèmes de fonctions...* (loc. cit.), théorème VII. p. 312.

ce que l'on fera si F_i et F_j appartiennent à la seconde catégorie, F_0 étant supposé ne pas lui appartenir. Toutes ces expressions tendent uniformément vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, quel que soit l positif; c'est évident pour celles de la dernière sorte, tandis que, pour celles de la première, c'est une conséquence du critère classique de Cauchy, compte tenu de la convergence uniforme de $\frac{F_i}{F_j}$. Il en résulte que l'expression $[F^{(k)}, F^{(k+l)}]$ tend uniformément vers zéro et, en vertu de l'extension que nous avons donnée au critère de Cauchy, que la suite des systèmes $F^{(k)}$ est uniformément convergente ⁽¹⁾.

La famille des systèmes $F(z)$ est donc normale; par conséquent, la famille des systèmes $f(z)$ l'est aussi, ce qui achève la démonstration.

18. Au lieu de supposer l'existence de $2n + 1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, supposons seulement qu'il y en ait $n + \lambda + 1$ et reprenons le raisonnement du numéro précédent. Nous ne mettons plus en évidence que λ combinaisons exceptionnelles proprement dites entre les F_q . Et le raisonnement pourra se poursuivre à moins que chacune d'elles ne donne lieu à une combinaison partielle qui, divisée par une fonction de première catégorie de la classe correspondante, converge uniformément vers zéro. Dans ce cas, la combinaison exceptionnelle

$$a_{p,0}F_0 + a_{p,1}F_1 + \dots + a_{p,n}F_n$$

donne donc naissance à une expression

$$(6) \quad \frac{b_{p,0}F_0 + b_{p,1}F_1 + \dots + b_{p,n}F_n}{\sqrt{|F_0|^2 + |F_1|^2 + \dots + |F_n|^2}}$$

qui converge uniformément vers zéro et où les $b_{p,q}$ sont respectivement égaux aux $a_{p,q}$ ou à zéro. Si l'on remarque que la propriété de la combinaison partielle considérée exige que celle-ci ait au moins deux termes (de première catégorie) on voit que, dans les expressions (6), il y a au moins un coefficient $b_{p,q}$ qui est nul et il y en a deux au moins qui ne le sont pas. D'autre part, étant donnée la répartition en classes, deux expressions telles que (6) ont des coefficients $b_{p,q}$ non nuls qui correspondent au même ensemble de valeurs q ou à des ensembles sans valeur commune.

THÉORÈME VI. — *Lorsqu'une famille présente $n + \lambda + 1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$, de toute suite de systèmes de cette famille on peut extraire une suite partielle qui*

ou bien est uniformément convergente :

⁽¹⁾ Cette dernière propriété rattache aux nôtres les idées de M. Henri Cartan. Pour qu'une suite soit uniformément convergente à notre sens, il faut et il suffit qu'elle donne lieu à une seule classe.

ou bien est telle qu'il existe au moins λ expressions de la forme

$$(7) \quad \frac{\beta_{p,0}f_0 + \beta_{p,1}f_1 + \dots + \beta_{p,n}f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2}} \quad (p = 1, 2, \dots, \lambda),$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants (ces numérateurs appartiennent même à un ensemble fini de même nature qu'on peut former lorsqu'on connaît les combinaisons exceptionnelles).

Ce théorème conduit immédiatement à des critères de normalité sur lesquels nous ne nous attarderons pas.

Le cas $\lambda = 1$ est particulièrement simple. Étudions-le avec plus de détails. Soient

$$F_p \equiv \alpha_{p,0}f_0 + \alpha_{p,1}f_1 + \dots + \alpha_{p,n}f_n \quad (p = 0, 1, 2, \dots, n+1)$$

les combinaisons exceptionnelles. La combinaison F_{n+1} s'exprime en fonction de F_0, F_1, \dots, F_n et les combinaisons partielles Φ possibles s'obtiennent en résolvant la relation

$$\begin{vmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,n} & \theta_0 F_0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} & \theta_1 F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,0} & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} & \theta_n F_n \\ \alpha_{n+1,0} & \alpha_{n+1,1} & \dots & \alpha_{n+1,n} & \Phi \end{vmatrix} = 0,$$

où les θ_p sont égaux à zéro ou à 1, l'un au moins étant effectivement égal à zéro, deux au moins égaux à 1. En résolvant, on voit que ces combinaisons, définies à un facteur constant près, sont données par

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,n} & \theta_0 F_0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} & \theta_1 F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,0} & \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} & \theta_n F_n \\ \alpha_{n+1,0} & \alpha_{n+1,1} & \dots & \alpha_{n+1,n} & \theta_{n+1} F_{n+1} \end{vmatrix},$$

où $\theta_{n+1} = 0$ et où les autres θ_p satisfont aux conditions précédemment énoncées. Remarquons que, si l'on remplace par zéro tous les θ_p égaux à 1 et par 1 tous les θ_p égaux à zéro, on obtient une nouvelle expression qui, ajoutée à (8), donne un résultat identiquement nul. On peut donc dire finalement que le déterminant (8), où tous les θ_p sont égaux à zéro ou à 1, deux au moins étant effectivement égaux à zéro et deux à 1, fournit le numérateur de l'expression (7) asymptotiquement nulle.

Si $\lambda > 1$, on associe les combinaisons exceptionnelles $n+2$ à $n+2$ et l'on opère comme précédemment. On obtient ainsi $C_{n+1+\lambda}^{n+2}$ expressions (7) asymptotiquement nulles, parmi lesquelles on peut en choisir λ qui sont linéairement indépendantes; pour former celles-ci systématiquement il suffira d'associer successivement chacune de λ des combinaisons exceptionnelles aux $n+1$ autres.

19. Considérons une suite dont chaque système présente $2n+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles; mais plaçons-nous dans le cas où ces

combinaisons varient avec le système considéré, leurs coefficients $\alpha_{p,ij}^{(k)}$ tendant vers les quantités $\alpha_{p,ij}^*$ satisfaisant aux conditions imposées antérieurement aux coefficients $\alpha_{p,ij}$ (alors fixes) eux-mêmes. Le raisonnement qui nous a permis d'établir le critère fondamental peut être repris mot pour mot, et l'on voit ainsi que de la suite considérée on peut extraire une suite partielle uniformément convergente. On en déduit l'extension suivante du critère fondamental :

Si, entre les $n + 1$ fonctions de chaque système d'une famille, il existe $2n + 1$ combinaisons linéaires exceptionnelles

$$\alpha_{p,0}^{(k)} f_0^{(k)} + \alpha_{p,1}^{(k)} f_1^{(k)} + \dots + \alpha_{p,n}^{(k)} f_n^{(k)} \quad (p = 0, 1, \dots, 2n)$$

variables avec le système considéré, mais dont les coefficients sont tels que toutes les expressions

$$\frac{\begin{vmatrix} \alpha_{p_0,0}^{(k)} & \alpha_{p_0,1}^{(k)} & \dots & \alpha_{p_0,n}^{(k)} \\ \alpha_{p_1,0}^{(k)} & \alpha_{p_1,1}^{(k)} & \dots & \alpha_{p_1,n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p_n,0}^{(k)} & \alpha_{p_n,1}^{(k)} & \dots & \alpha_{p_n,n}^{(k)} \end{vmatrix}}{\sqrt{\sum |\alpha_{p_0,i}^{(k)}|^2 \sum |\alpha_{p_1,i}^{(k)}|^2 \dots \sum |\alpha_{p_n,i}^{(k)}|^2}}$$

demeurent en module supérieures à une borne positive fixe, la famille est normale.

En effet, on peut toujours supposer que les combinaisons exceptionnelles sont normées, c'est-à-dire que $\sum |\alpha_{p,i}^{(k)}|^2 = 1$. Étant donnée une suite de systèmes, il est alors possible d'en extraire une suite partielle dont les coefficients $\alpha_{p,ij}^{(k)}$ tendent vers des limites $\alpha_{p,ij}^*$ et l'on retombe sur le cas que nous venons d'étudier.

On étendra de même le théorème VI relatif au cas où il y a seulement $n + \lambda + 1$ combinaisons linéaires exceptionnelles; il interviendra alors des quantités $b_{p,ij}^{(k)}$ et des quantités $\beta_{p,ij}^{(k)}$ variables avec le système considéré; ces dernières tendront vers des limites $\beta_{p,ij}^*$.

Si, entre les $n + 1$ fonctions de chaque système d'une famille, il existe $n + \lambda + 1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, variables avec le système considéré mais satisfaisant aux conditions énoncées dans le théorème précédent, de toute suite de systèmes de cette famille on peut extraire une suite partielle qui

ou bien est uniformément convergente;

ou bien est telle qu'il existe λ expressions de la forme

$$\frac{\beta_{p,0}^* f_0 + \beta_{p,1}^* f_1 + \dots + \beta_{p,n}^* f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2}} \quad (p = 1, 2, \dots, \lambda),$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants.

Extensions des théorèmes de Schottky et Landau.

20. THÉORÈME VII. — Soit un système de $n+1$ fonctions $f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z)$ holomorphes dans le cercle $|z| < R$ et γ présentant $2n+1$ combinaisons linéaires exceptionnelles, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$

$$\alpha_{p,0}f_0 + \alpha_{p,1}f_1 + \dots + \alpha_{p,n}f_n \quad (p = 0, 1, \dots, 2n).$$

Dans le cercle $|z| < r < R$, l'expression

$$\delta_p(z) = \frac{|\alpha_{p,0}f_0 + \alpha_{p,1}f_1 + \dots + \alpha_{p,n}f_n|}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2} \sqrt{|\alpha_{p,0}|^2 + |\alpha_{p,1}|^2 + \dots + |\alpha_{p,n}|^2}}$$

est supérieure à une borne positive ne dépendant que de $\delta_p(0)$ supposé positif, de $\frac{r}{R}$ et des $\alpha_{p,q}$. Dans cet énoncé, la connaissance de $\delta_p(0)$ peut être remplacée par celle d'un nombre positif qui lui soit inférieur.

THÉORÈME VIII. — Dans les mêmes conditions, les expressions

$$R \frac{|f_p f'_q - f_q f'_p|}{\sum |f_i|^2}, \dots, R^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} \frac{|\Delta_{p_1, p_2, \dots, p_\lambda}|}{[\sum |f_i|^2]^{\frac{\lambda}{2}}}, \dots, R^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{|\Delta_{0,1,2,\dots,n}|}{[\sum |f_i|^2]^{\frac{n+1}{2}}}$$

présentent, au point $z = 0$, une borne supérieure ne dépendant que des $\alpha_{p,q}$.

Ces propositions, qui sont des extensions au cas d'un système de $n+1$ fonctions holomorphes des théorèmes de Schottky et Landau relatifs à une fonction méromorphe, se déduisent immédiatement du critère fondamental et des théorèmes I et II appliqués au système $f(Rz)$.

21. Ici, comme dans le cas d'une seule fonction méromorphe, le théorème VII peut être démontré à partir du théorème VIII; cette démonstration, que nous allons indiquer, permet d'ailleurs d'en préciser l'énoncé.

Le théorème VIII nous apprend en effet que

$$\frac{\sum |f_i(0)f'_j(0) - f_j(0)f'_i(0)|^2}{[\sum |f_i(0)|^2]^2} < \frac{K^2}{R^2},$$

où K est une constante ne dépendant que des $\alpha_{p,q}$. En appliquant ce résultat au système des fonctions

$$f_i \left[\frac{R^2(z_0 - z)}{R^2 - z\bar{z}_0} \right]$$

et, en supprimant ensuite l'indice de z_0 , on obtient

$$(9) \quad \frac{\sum |f_i(z)f'_j(z) - f_j(z)f'_i(z)|^2}{[\sum |f_i(z)|^2]^2} < \frac{K^2 R^2}{[R^2 - |z|^2]^2}.$$

D'autre part on peut établir l'identité

$$(10) \quad \Delta \log \sqrt{\sum |f_i|^2} = 2 \frac{\sum |f_i f_i' - f_i' f_i|^2}{[\sum |f_i|^2]^2}.$$

Pour cela, on pose $z = x + iy$ et l'on remarque que toute fonction holomorphe vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f' \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = if'.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \log \sqrt{\sum |f_i|^2} &= \frac{\sum \Re(f_i \bar{f}_i')}{\sum |f_i|^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \log \sqrt{\sum |f_i|^2} &= \frac{\sum \Im(f_i \bar{f}_i')}{\sum |f_i|^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \sqrt{\sum |f_i|^2} &= \frac{\sum [|f_i'|^2 + \Re(f_i \bar{f}_i'')]}{\sum |f_i|^2} - \frac{2 [\Re \sum (f_i \bar{f}_i')]^2}{[\sum |f_i|^2]^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log \sqrt{\sum |f_i|^2} &= \frac{\sum [|f_i'|^2 - \Re(f_i \bar{f}_i'')]}{\sum |f_i|^2} - \frac{2 [\Im \sum (f_i \bar{f}_i')]^2}{[\sum |f_i|^2]^2}, \end{aligned}$$

d'où, finalement,

$$\frac{1}{2} \Delta \log \sqrt{\sum |f_i|^2} = \frac{\sum |f_i'|^2}{\sum |f_i|^2} - \frac{[\sum f_i \bar{f}_i']^2}{[\sum |f_i|^2]^2} = \frac{\sum |f_i f_i' - f_i' f_i|^2}{[\sum |f_i|^2]^2}.$$

Les inégalités (9) et (10) entraînent

$$0 < \Delta \log \frac{1}{\delta_p(z)} < \frac{2K^2 R^2}{[R^2 - |z|^2]^2}.$$

La formule de Green

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} d\varphi - \log \frac{1}{\delta_p(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{r_1} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{2\pi} \Delta \log \frac{1}{\delta_p(\rho e^{i\varphi})} \rho d\varphi$$

donne alors

$$\log \frac{1}{\delta_p(0)} < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} d\varphi < \log \frac{1}{\delta_p(0)} + \frac{K^2}{2} \log \frac{R^2}{R^2 - r_1^2}.$$

La première partie de cette double inégalité peut s'écrire plus généralement⁽¹⁾,

$$\log \frac{1}{\delta_p(\rho e^{i\theta})} < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} \frac{r_1^2 - \rho^2}{r_1^2 + \rho^2 - 2\rho r_1 \cos(\theta - \varphi)} d\varphi \quad \text{pour } \rho < r_1,$$

d'où, *a fortiori*, puisque $\log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})}$ reste positif,

$$\log \frac{1}{\delta_p(\rho e^{i\theta})} < \frac{r_1 + \rho}{r_1 - \rho} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\delta_p(r_1 e^{i\varphi})} d\varphi.$$

(1) Une transformation homographique en lui-même de l'intérieur du cercle $|z| < r_1$ permet de passer du cas particulier au cas général. On peut d'ailleurs éviter de faire ce calcul en remarquant que la fonction $\log \frac{1}{\delta_p(z)}$ est sousharmonique.

En tenant compte de la seconde partie de la double inégalité, il vient

$$\log \frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{r_1 + r}{r_1 - r} \left[\log \frac{1}{\delta_p(o)} + \frac{K^2}{2} \log \frac{R^2}{R^2 - r_1^2} \right].$$

Si l'on choisit alors $r_1 = \sqrt{Rr}$, on en déduit aussitôt

$$(11) \quad \log \frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{4R}{R-r} \left[\log \frac{1}{\delta_p(o)} + \frac{K^2}{2} \log \frac{R}{R-r} \right].$$

C'est l'inégalité annoncée par le théorème VII (1). Le résultat que nous venons d'obtenir est partiellement quantitatif puisque l'on voit comment interviennent $\frac{r}{R}$ et $\delta_p(o)$; par contre, K est une fonction complètement inconnue des $\alpha_{p,q}$.

L'inégalité (11) peut être sensiblement améliorée pour les valeurs de r voisines de R . Soit, en effet, le cercle de centre $\frac{R}{2}e^{i\theta}$ et de rayon $\frac{R}{2}$. Dans ce cercle, jouant le rôle tenu tout à l'heure par le cercle de centre O et de rayon R , nous pouvons reprendre les mêmes considérations. Nous devons alors, pour $0 < \rho < \frac{R}{2}$, évaluer l'intégrale double

$$\begin{aligned} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \Delta \log \frac{1}{\delta_p\left(\frac{R}{2}e^{i\theta} + te^{i\varphi}\right)} t dt d\varphi &< \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{2K^2R^2}{\left(R^2 - \left|\frac{R}{2}e^{i\theta} + te^{i\varphi}\right|^2\right)^2} t dt d\varphi \\ &= \int_0^\rho \frac{4\pi K^2R^2 \left(\frac{3}{4}R^2 - t^2\right) t dt}{\left[\left(\frac{9}{4}R^2 - t^2\right)\left(\frac{R^2}{4} - t^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}} < \int_0^\rho \frac{3\pi K^2R t dt}{2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{R^2}{4} - t^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3\pi K^2R}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \rho^2}} - \frac{2}{R} \right] < \frac{3\pi\sqrt{2}K^2}{R} \frac{\rho^2}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \rho^2}}. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\rho \frac{3\pi\sqrt{2}K^2}{R} \frac{\rho^2}{\sqrt{\frac{R^2}{4} - \rho^2}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{3K^2}{R\sqrt{2}} \left[-\sqrt{\frac{R^2}{4} - \rho^2} \right]_0^\rho < \frac{3K^2}{2\sqrt{2}},$$

(1) Nous n'avons fait, au fond, qu'adapter au cas d'un système de fonctions holomorphes, un calcul classique dans l'étude d'une fonction [$n=1$; cf., par exemple, DUFRESNOY, *Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde* (*Annales de l'École Normale supérieure*, (3), 38, 1941, § 31)]. Par contre, dans le cas particulier d'une seule fonction, l'amélioration que nous donnons dans la suite n'a jamais été établie, à notre connaissance, par cette méthode simple.

on voit aussitôt que les mêmes calculs, qui nous avaient conduit à l'inégalité (11), nous conduisent maintenant à

$$\log \frac{1}{\delta_p \left(\frac{R}{2} e^{i\theta} + \rho e^{i\varphi} \right)} < \frac{4R}{R-2\rho} \left[\log \frac{1}{\delta_p \left(\frac{R}{2} e^{i\theta} \right)} + \frac{3K^2}{2\sqrt{2}} \right],$$

qui, compte tenu de l'inégalité (11) appliquée à $r = \frac{R}{2}$, entraîne

$$\log \frac{1}{\delta_p \left(\frac{R}{2} e^{i\theta} + \rho e^{i\varphi} \right)} < \frac{4R}{R-2\rho} \left[8 \log \frac{1}{\delta_p(0)} + 4K^2 \log 2 + \frac{3K^2}{2\sqrt{2}} \right].$$

Si nous prenons $\varphi = \theta$ et si nous posons $\frac{R}{2} + \rho = r$, il vient, pour $\frac{R}{2} < r < R$,

$$(11 \text{ bis}) \quad \log \frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{2R}{R-r} \left[8 \log \frac{1}{\delta_p(0)} + \left(4 \log 2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) K^2 \right].$$

On voit aussitôt que cette inégalité est encore satisfaite pour $r < \frac{R}{2}$, mais qu'elle est alors un peu moins précise que (7). En résumé, le théorème VII peut donc se traduire par une inégalité de la forme

$$\log \frac{1}{\delta_p(re^{i\theta})} < \frac{R}{R-r} \left[A \log \frac{1}{\delta_p(0)} + BK^2 \right],$$

où A et B sont des constantes numériques ($A < 16$, $B < 8 \log 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} < 8$) et K une quantité ne dépendant que des $\alpha_{p,q}$.

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX FONCTIONS ALGÈBROÏDES.

Définitions et premières propriétés.

22. Dans un domaine D, une fonction algèbroïde $\omega = \omega(z)$ à n branches est définie par une équation

$$f_0 \omega^n + f_1 \omega^{n-1} + \dots + f_n = 0,$$

où $f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z)$ sont des fonctions holomorphes dans ce domaine. On obtient la même algèbroïde si l'on multiplie les fonctions f_0, f_1, \dots, f_n par une fonction arbitraire, autrement dit si l'on remplace le système f des fonctions f_0, f_1, \dots, f_n par un système équivalent.

23. Notre étude des algébroides reposera essentiellement sur le lemme suivant :

LEMME IV. — Soient deux équations de degré n

$$P(\omega) \equiv a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

$$P^*(\omega) \equiv a_0^* \omega^n + a_1^* \omega^{n-1} + \dots + a_n^* = 0;$$

la première, dont les coefficients constituent le système a , présente les racines $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; la seconde, dont les coefficients constituent le système a^* , présente les racines $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_n^*$. A tout nombre ε positif donné on peut faire correspondre un nombre γ_1 (dépendant de ε et de n) tel que, toutes les fois que $[a, a^*] < \gamma_1$, les racines des deux équations puissent être associées deux à deux de sorte que la distance cordale sphérique de deux racines associées soit inférieure à ε . Si, par exemple, ω_p et ω_p^* sont associées, on a

$$\frac{|\omega_p^* - \omega_p|}{\sqrt{1 + |\omega_p^*|^2} \sqrt{1 + |\omega_p|^2}} < \varepsilon.$$

Et réciproquement, la distance des systèmes de coefficients est arbitrairement petite lorsque les racines des deux équations peuvent être associées deux à deux de façon que la distance sphérique de deux racines associées soit suffisamment petite.

Nous allons établir ce lemme qui précise la propriété bien connue dite de la continuité des racines d'une équation algébrique. Il s'agit ici, en quelque sorte, d'une continuité uniforme.

Nous utiliserons une adaptation à la sphère de Riemann d'un théorème de M. Henri Cartan (1) que l'on peut énoncer ainsi : « Étant donnés n points $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, et un nombre positif h , on a

$$(12) \quad \prod \frac{|\omega - \omega_l|}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_l|^2}} > h^n,$$

quel que soit ω sur la sphère de Riemann, sauf peut-être dans des calottes en nombre n au plus, dont la somme des rayons cordaux (2) est inférieure à $2eh$ ». En remarquant que des calottes, dont la somme Σr des rayons cordaux est inférieure à 1, ne peuvent recouvrir toute la sphère, car la somme de leurs aires est

$$\pi \Sigma r^2 < \pi (\Sigma r)^2 < \pi,$$

(1) H. CARTAN, *Sur les systèmes de fonctions...* (loc. cit.), théorème III, p. 273.

On reprendra mot pour mot sur la sphère de Riemann la démonstration donnée par M. Henri Cartan dans le cas du plan complexe. On peut d'ailleurs ne pas faire appel à ce théorème et remarquer simplement que l'inégalité (12) a lieu à l'extérieur de n calottes sphériques ayant les points z_k pour pôles et h pour rayons cordaux. Mais les résultats que l'on obtient alors sont sensiblement moins précis.

(2) Une calotte est limitée par une circonférence C dont l'un P des pôles est situé dans la calotte. Le rayon cordal est la distance cordale à P des points de la circonférence C .

nous en déduisons qu'il existe au moins une valeur $\omega = \omega_0$ pour laquelle

$$\prod \frac{|\omega - \omega_i|}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_i|^2}} > \left(\frac{1}{2e}\right)^n.$$

Considérons alors le polynome

$$Q(\omega) \equiv \prod \frac{\omega - \omega_i}{\sqrt{1 + |\omega_i|^2}} \equiv \alpha_0 \omega^n + \alpha_1 \omega^{n-1} + \dots + \alpha_n.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous montre que

$$\sum |\alpha_i|^2 > \frac{|Q(\omega)|^2}{1 + |\omega|^2 + \dots + |\omega|^{2n}} > \frac{|Q(\omega)|^2}{(1 + |\omega|^2)^n},$$

quel que soit ω ; en prenant $\omega = \omega_0$, on en tire

$$\sum |\alpha_i|^2 > \left(\frac{1}{2e}\right)^{2n}.$$

D'autre part, de l'inégalité évidente

$$\frac{|\omega - \omega_p|}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_p|^2}} < 1,$$

on déduit aussitôt $|Q(\omega)|^2 < (1 + |\omega|^2)^n$ pour toutes les valeurs de ω ; en prenant la moyenne de $|Q(\omega)|^2$ sur le cercle $|\omega| = 1$, on obtient

$$\sum |\alpha_i|^2 < 2^n.$$

Revenons maintenant aux polynomes $P(\omega)$ et $P^*(\omega)$. Nous pouvons remplacer leurs systèmes de coefficients a et a^* par des systèmes équivalents b et b^* convenablement normés, c'est-à-dire tels que

$$\sum |b_i|^2 = 1, \quad \sum |b_i^*|^2 = 1, \quad \sum |b_i^* - b_i|^2 < 2|b, b^*|^2 = 2|a, a^*|^2.$$

Les polynomes $P(\omega)$ et $P^*(\omega)$ sont ainsi changés en des polynomes proportionnels $R(\omega)$ et $R^*(\omega)$. Si nous posons

$$R^*(\omega) = R(\omega) + S(\omega),$$

il vient

$$|S(\omega)|^2 < \sum |b_i^* - b_i|^2 \sum |\omega|^{2i} < 2|a, a^*|^2 (1 + |\omega|^2)^n.$$

D'autre part

$$|R(\omega)| \equiv \frac{|Q(\omega)|}{\sqrt{\sum |\alpha_i|^2}} > \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} |Q(\omega)|.$$

On aura donc certainement $|S(\omega)| < |R(\omega)|$ en tous les points de la sphère de Riemann en lesquels

$$\frac{Q(\omega)}{(1 + |\omega|^2)^{\frac{n}{2}}} \equiv \prod \frac{|\omega - \omega_i|}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_i|^2}} > 2^{\frac{n+1}{2}} [a, a^*].$$

D'après la proposition indiquée au début, ceci aura lieu sauf en des points situés dans des calottes dont la somme des rayons cordaux est inférieure à $2e\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{1}{n}} [a, a^*]^{\frac{1}{n}} < 4e [a, a^*]^{\frac{1}{n}}$. Le théorème de Rouché nous montre enfin que, dans chacun des domaines connexes formés par la réunion de ces calottes, les deux équations $R(\omega) = 0$ et $R^*(\omega) = 0$ ont le même nombre de racines. Il en résulte qu'il est possible d'associer deux à deux les racines des deux équations données de sorte que la distance cordale sphérique de deux racines associées soit inférieure à

$$\varepsilon = 8e [a, a^*]^{\frac{1}{n}}.$$

La proposition directe se trouve ainsi démontrée.

Pour établir la réciproque, nous partons de

$$\frac{|\omega_p^* - \omega_p|}{\sqrt{1 + |\omega_p|^2} \sqrt{1 + |\omega_p^*|^2}} < \varepsilon < 1 \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Une transformation homographique

$$(13) \quad W = e^{i\theta_0} \frac{\omega - a}{1 + \omega a}$$

(rotation sur elle-même de la sphère de Riemann) qui change ω_p et ω_p^* en W_p et W_p^* , satisfait à la relation

$$\frac{W - W_p}{\sqrt{1 + |W|^2} \sqrt{1 + |W_p|^2}} = e^{i(\theta_0 - \varphi_0)} \frac{\omega - \omega_p}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_p|^2}}$$

avec

$$\varphi_0 = \arg(1 + \omega \bar{a}) + \arg(1 + \omega_p \bar{a}).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{W - W_p}{\sqrt{1 + |W|^2} \sqrt{1 + |W_p|^2}} - \frac{W - W_p^*}{\sqrt{1 + |W|^2} \sqrt{1 + |W_p^*|^2}} \right| \\ &= \left| \frac{\omega - \omega_p}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_p|^2}} - e^{i\theta_p} \frac{\omega - \omega_p^*}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_p^*|^2}} \right| \end{aligned}$$

avec

$$\theta_p = \arg(1 + \omega_p \bar{a}) - \arg(1 + \omega_p^* \bar{a}).$$

Si l'on choisit alors la transformation (13) de façon que $W_p^* = -W_p$, ces quantités ayant un module inférieur à 1, on met en évidence un nombre réel θ_p , indépendant de ω , et tel que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\omega - \omega_p}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_p|^2}} - e^{i\theta_p} \frac{\omega - \omega_p^*}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_p^*|^2}} \right| \\ &= \frac{|W_p^* - W_p|}{\sqrt{1 + |W_p|^2} \sqrt{1 + |W_p|^2}} < \frac{\sqrt{2} |W_p^* - W_p|}{\sqrt{1 + |W_p|^2} \sqrt{1 + |W_p|^2}} < \varepsilon \sqrt{2}. \end{aligned}$$

En remarquant qu'une différence de deux produits peut s'écrire

$$\prod_{i=1}^n d_i - \prod_{j=1}^n d_j^* = \sum_{k=1}^n \left[(d_k - d_k^*) \prod_{1 \leq i < k} d_i \prod_{k < j \leq n} d_j^* \right],$$

on déduit immédiatement de l'inégalité précédente qu'il existe un nombre réel $\theta = \Sigma \theta_i$, indépendant de ω , et tel que

$$\left| \prod_{i=1}^n \frac{\omega - \omega_i}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_i|^2}} - e^{i\theta} \prod_{i=1}^n \frac{\omega - \omega_i^*}{\sqrt{1 + |\omega|^2} \sqrt{1 + |\omega_i^*|^2}} \right| < n\varepsilon\sqrt{2},$$

soit

$$|Q(\omega) - e^{i\theta} Q^*(\omega)| < n\varepsilon\sqrt{2}(1 + |\omega|^2)^{\frac{n}{2}}.$$

En prenant la moyenne sur le cercle $|\omega| = 1$ du carré du premier membre, il vient

$$\Sigma |\alpha_i - e^{i\theta} \alpha_i^*|^2 < 2^{n+1} n^2 \varepsilon^2,$$

et, par conséquent, d'après l'inégalité (3 bis),

$$|\alpha_i - e^{i\theta} \alpha_i^*|^2 < \frac{\Sigma |\alpha_i - e^{i\theta} \alpha_i^*|^2}{\sqrt{\Sigma |\alpha_i|^2} \Sigma |\alpha_i^*|^2} < \frac{2^{n+1} n^2 \varepsilon^2}{\left(\frac{1}{2e}\right)^{2n}},$$

soit *a fortiori*

$$|\alpha_i - \alpha_i^*| < (5e)^n \varepsilon,$$

ce qui démontre la réciproque.

24. Voici une conséquence immédiate de la propriété précédente.

LEMME V. — Si l'équation

$$P(\omega) \equiv a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ne présente pas plus de p racines dont la distance cordale sphérique à ∞ soit inférieure à ε , on a

$$\frac{\sum_{i=0}^p |\alpha_i|^2}{\sum_{j=0}^n |\alpha_j|^2} > \left(\frac{\varepsilon}{8e}\right)^{2n}.$$

Réciproquement, il n'y a pas plus de p racines dont la distance cordale sphérique à ∞ soit inférieure à

$$\left(\frac{1}{5e}\right)^n \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^p |\alpha_i|^2}{\sum_{j=0}^n |\alpha_j|^2}}.$$

Pour démontrer cette proposition il suffit de considérer l'équation

$$P^*(w) \equiv a_0^* w^n + a_1^* w^{n-1} + \dots + a_n^* = 0,$$

où $a_0^* = a_1^* = \dots = a_p^* = 0$. On obtient immédiatement

$$[a, a^*]^2 \geq \frac{\sum_{i=0}^p |a_i|^2}{\sum_{j=0}^n |a_j|^2},$$

l'égalité ayant lieu si l'on choisit $a_k^* = a_k$ pour $k = p+1, p+2, \dots, n$.

En faisant ce choix et en appliquant le lemme IV (proposition directe), on voit que l'équation $P(w) = 0$ présente au moins $p+1$ racines dont la distance à ∞ est inférieure à

$$8e \left[\frac{\sum_{i=0}^p |a_i|^2}{\sum_{j=0}^n |a_j|^2} \right]^{\frac{1}{2n}}$$

C'est, sous une autre forme, la première partie du lemme à établir.

En choisissant maintenant les a_k^* ($k = p+1, p+2, \dots, n$) de façon que l'équation $P^*(w) = 0$ présente, en dehors de ses $p+1$ racines infinies, $n-p-1$ racines communes avec l'équation $P(w) = 0$, et en appliquant le lemme IV (proposition réciproque) on voit que, si les $p+1$ autres racines de l'équation $P(w) = 0$ sont à une distance de ∞ moindre que ε , on a

$$\frac{\sum_{i=0}^p |a_i|^2}{\sum_{j=0}^n |a_j|^2} < (5e)^{2n} \varepsilon^2.$$

C'est, énoncée sous une autre forme, la seconde partie du lemme.

25. Nous serons amenés dans la suite à utiliser le cas particulier $p=0$ du lemme V. On peut établir par un calcul direct la proposition plus précise suivante.

LEMME VI. — Si l'équation

$$P(w) \equiv a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ne présente aucune racine de module supérieur à M , on a

$$\frac{|a_0|^2}{\sum |a_i|^2} > \left(\frac{1}{1+M} \right)^{2n}.$$

Réciproquement, aucune racine n'a un module supérieur à M' avec

$$\frac{|a_0|^2}{\sum |a_i|^2} = \frac{n}{1 + M'^2}.$$

En effet, si toutes les racines ont un module inférieur à M , on a

$$\left| \frac{a_1}{a_0} \right| < C_n^1 M, \quad \left| \frac{a_2}{a_0} \right| < C_n^2 M^2, \quad \dots, \quad \left| \frac{a_n}{a_0} \right| < M^n;$$

d'où

$$\frac{|a_0|^2}{\sum |a_i|^2} > \frac{1}{1 + (C_n^1)^2 M^2 + (C_n^2)^2 M^4 + \dots + M^{2n}} > \frac{1}{(1 + M)^{2n}}.$$

Réciproquement, si nous posons

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{n \sum |a_i|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + M'^2}},$$

nous définissons un nombre M' supérieur à 1; on obtient immédiatement

$$\frac{|a_0|}{\sum |a_i|} > \frac{1}{1 + M'},$$

soit

$$|a_0| > \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{M'}$$

et, a fortiori,

$$|a_0| > \frac{|a_1|}{M'} + \frac{|a_2|}{M'^2} + \dots + \frac{|a_n|}{M'^n}.$$

Il en résulte que, pour $|\omega| \geq M'$, on a

$$|a_0 \omega^n| > |a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_n|,$$

donc $P(\omega) \neq 0$.

26. DÉFINITION. — Soient deux équations $P(\omega) = 0$ et $P^*(\omega) = 0$ de degré n . Si l'on associe leurs racines deux à deux, on peut déterminer la borne supérieure des distances cordales sphériques des couples de racines ainsi associées. Nous appellerons distance des deux équations, le minimum de cette borne supérieure lorsqu'on fait toutes les associations possibles.

Il résulte alors du lemme IV qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la distance de deux équations soit petite est que la distance de leurs systèmes de coefficients le soit.

Nous dirons qu'une suite d'équations est convergente et tend vers une équation limite, si la distance des équations de la suite à l'équation limite tend vers zéro. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la suite des systèmes de coefficients des équations soit convergente et tende vers le système de coefficients de l'équation limite.

27. DÉFINITION. — Une suite de fonctions algébroides définies par les équations

$$(14) \quad f_0^{(k)}\alpha^n + f_1^{(k)}\alpha^{n-1} + \dots + f_n^{(k)} = 0,$$

où les $f_p^{(k)}(z)$ sont holomorphes dans un domaine D , est dite convergente dans D si la suite des équations (14) est convergente en chaque point de ce domaine; elle est uniformément convergente dans l'intérieur de D et y présente la fonction multiforme définie par

$$(15) \quad f_0^{(0)}\alpha^n + f_1^{(0)}\alpha^{n-1} + \dots + f_n^{(0)} = 0$$

comme limite si la distance des équations (14) à l'équation (15) tend uniformément vers zéro quel que soit z dans un domaine D' quelconque complètement intérieur à D .

Le lemme IV nous montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite d'algébroides soit convergente (ou uniformément convergente) est que la suite des systèmes de coefficients des équations qui les définissent soit elle-même convergente (ou uniformément convergente). Il résulte de ce qui a été dit au n° 9 que la limite d'une suite d'algébroides uniformément convergente dans l'intérieur d'un domaine est une fonction algébroïde dans ce domaine. De même, en s'appuyant sur le lemme I, on voit que, si aucune des branches de l'algébroïde limite ne se réduit à la constante a , les points en lesquels les algébroides de la suite (uniformément convergente) prennent la valeur a tendent vers les points en lesquels l'algébroïde limite prend cette même valeur; en particulier, si les algébroides de la suite ne prennent pas la valeur a , il en est de même de l'algébroïde limite, à moins que l'une au moins des branches de celle-ci ne se réduise à la constante a .

DÉFINITION. — Une famille d'algébroides définies dans un domaine D y est normale si de toute suite infinie d'algébroides de la famille on peut extraire une suite partielle uniformément convergente dans l'intérieur de D .

On peut énoncer un critère de normalité à partir de l'égalité de continuité. Nous dirons que des algébroides sont également continues dans l'intérieur d'un domaine D , si, à tout domaine D' complètement intérieur à D et à tout nombre positif ε , on peut faire correspondre un nombre η tel que les deux équations numériques obtenues à partir de l'équation de l'une quelconque de ces algébroides, en donnant à z deux valeurs arbitraires situées dans D' et dont la différence a un module moindre que η , soient à une distance inférieure à ε . Pour que des algébroides soient également continues, il faut et il suffit que leurs systèmes de coefficients le soient. D'où le

PREMIER CRITÈRE DE NORMALITÉ. — Pour qu'une famille d'algébroides soit normale dans un domaine D , il faut et il suffit qu'il y ait égale continuité dans l'intérieur de ce domaine.

Donnons enfin, pour terminer cette section, une propriété des familles normales de fonctions algébroides.

THÉORÈME IX. — *Soit dans le cercle $|z| < R$ une famille normale d'algébroides à n branches, n'y prenant pas la valeur ∞ et dont toutes les branches ont des modules inférieurs à M_0 au point $z = 0$. Dans ces conditions, en chaque point du domaine $|z| < r < R$, toutes les branches ont des modules inférieurs à une borne ne dépendant que de r (ainsi que de la famille considérée).*

En utilisant la notion de famille normale d'algébroides, on pourrait donner une démonstration parallèle à celle du théorème I. Mais le plus simple est d'avoir recours à ce théorème lui-même en remarquant que le lemme VI nous ramène aussitôt à la considération de l'expression

$$\delta = \frac{|f_0|}{\sqrt{\sum |f_i|^2}},$$

qui est à l'origine supérieure à $(1 + M_0)^{-n}$.

Le critère fondamental de normalité.

28. Nous allons d'abord rappeler quelques propositions connues relatives aux algébroides dont le domaine d'existence est tout le plan fini. Ces propositions sont des applications immédiates des théorèmes établis dans la première section du Chapitre II; elles donnent le nombre maximum de valeurs exceptionnelles, c'est-à-dire de valeurs non prises par l'algébroïde.

THÉORÈME X (1). — *Une algébroïde à n branches dont le domaine d'existence est tout le plan fini ne peut présenter plus de $2n$ valeurs exceptionnelles à moins que toutes ses branches ne se réduisent à des constantes.*

S'il existe entre les coefficients de l'équation définissant une algébroïde une relation linéaire homogène, nous dirons que les branches de l'algébroïde satisfont à une relation involutive. La considération des relations involutives permet de préciser comme suit le théorème précédent.

THÉORÈME XI (2). — *Une algébroïde à n branches dont le domaine d'existence est tout le plan fini, et entre les branches de laquelle n'existent que λ relations involutives indépendantes ($\lambda < n$), ne peut présenter plus de $n + \lambda + 1$ valeurs exceptionnelles.*

(1) RÉMOUNDOS, *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendentes* [Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, (2), 8, 1906, p. 1-72].

(2) TH. VAROPOULOS, *Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes* (C. R. Acad. Sc., 177, 1923, p. 306; Bulletin de la Soc. math. de France, 53, 1925, p. 23-34).

29. Étudions maintenant les familles d'algébroides définies dans un domaine D. A cet effet, nous utiliserons les théorèmes de la deuxième section du Chapitre II.

CRITÈRE FONDAMENTAL. — *Les algébroides à n branches, définies dans un domaine D et y présentant 2n + 1 mêmes valeurs exceptionnelles, constituent une famille normale dans ce domaine.*

Cette proposition peut être précisée en introduisant la notion de relation involutive asymptotique. Nous dirons que les branches d'une suite d'algébroides

$$f_0^{(k)}w^n + f_1^{(k)}w^{n-1} + \dots + f_n^{(k)} = 0$$

satisfont asymptotiquement dans un domaine à la relation involutive

$$\beta_0 f_0 + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n = 0,$$

si l'expression

$$\frac{\beta_0 f_0^{(k)} + \beta_1 f_1^{(k)} + \dots + \beta_n f_n^{(k)}}{\sqrt{|f_0^{(k)}|^2 + |f_1^{(k)}|^2 + \dots + |f_n^{(k)}|^2}}$$

tend uniformément vers zéro dans le domaine considéré.

THÉORÈME XII. — *Lorsque les algébroides d'une famille présentent n + λ + 1 mêmes valeurs exceptionnelles, de toute suite d'algébroides de cette famille on peut extraire une suite partielle qui jouit de l'une des propriétés suivantes :*

ou bien elle est uniformément convergente ;

ou bien les branches des algébroides de cette suite satisfont asymptotiquement à λ relations involutives indépendantes.

Ces relations involutives appartiennent à un ensemble fini qu'on peut former lorsqu'on connaît les valeurs exceptionnelles; c'est une conséquence des considérations du n° 18. Étudions de plus près cet ensemble. A cet effet, remarquons d'abord que la relation

$$\beta_0 f_0 + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n = 0$$

se traduit entre les branches w_1, w_2, \dots, w_n de l'algébroïde

$$f_0 w^n + f_1 w^{n-1} + \dots + f_n = 0$$

par

$$\beta_0 - \beta_1 \sum w_i + \beta_2 \sum w_i w_j - \dots + (-1)^n \beta_n w_1 w_2 \dots w_n = 0,$$

ce qui justifie, d'ailleurs, le nom de *relation involutive* que nous lui avons donné.

Plaçons-nous, alors dans le cas $\lambda = 1$. Si nous désignons par $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ les $n + 2$ valeurs exceptionnelles, nous savons (cf. n° 18) que l'involution asymptotiquement satisfaite peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha_0^n & \alpha_0^{n-1} & \dots & 1 & \theta_0 \sum \alpha_0^i f_{n-i} \\ \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \dots & 1 & \theta_1 \sum \alpha_1^i f_{n-i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n+1}^n & \alpha_{n+1}^{n-1} & \dots & 1 & \theta_{n+1} \sum \alpha_{n+1}^i f_{n-i} \end{vmatrix} = 0.$$

où certains des θ_p sont égaux à 1 et les autres nuls. Dans ce déterminant remplaçons les $\Sigma \alpha_p^i f_{n-i}$ par les expressions

$$\alpha_p^n - \alpha_p^{n-1} \Sigma \omega_i + \alpha_p^{n-2} \Sigma \omega_i \omega_j - \dots + (-1)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$$

pour donner à la relation sa forme involutive portant sur $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Il apparaît aussitôt que la relation est satisfaite si l'on donne respectivement à ces quantités les valeurs des α_p correspondant dans le déterminant à des θ_p non nuls, complétées par des valeurs arbitraires. En remarquant qu'on peut remplacer par zéro tous les θ_p égaux à 1 et par 1 tous les θ_p égaux à zéro sans altérer l'involution, on arrive finalement au résultat que voici.

Si $\lambda = 1$, les $n + 2$ valeurs exceptionnelles α_p se partagent en deux groupes comprenant chacun deux valeurs au moins et tels que la relation involutive à n variables dont il est question dans le théorème XII soit satisfaite lorsqu'on donne à ces variables les valeurs des α_p de l'un quelconque de ces groupes arbitrairement complété.

On peut développer des considérations analogues pour $\lambda > 1$, auquel cas nous avons un système de λ relations involutives simultanées qu'on peut écrire, en désignant par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+\lambda}$ les $n + \lambda + 1$ valeurs exceptionnelles,

$$\begin{vmatrix} \alpha_0^n & \alpha_0^{n-1} & \dots & 1 & \theta_{0,q} [\alpha_0^n - \alpha_0^{n-1} \Sigma \omega_i + \alpha_0^{n-2} \Sigma \omega_i \omega_j - \dots + (-1)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n] \\ \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \dots & 1 & \theta_{1,q} [\alpha_1^n - \alpha_1^{n-1} \Sigma \omega_i + \alpha_1^{n-2} \Sigma \omega_i \omega_j - \dots + (-1)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^n & \alpha_n^{n-1} & \dots & 1 & \theta_{n,q} [\alpha_n^n - \alpha_n^{n-1} \Sigma \omega_i + \alpha_n^{n-2} \Sigma \omega_i \omega_j - \dots + (-1)^n \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n] \\ \alpha_{n+q}^n & \alpha_{n+q}^{n-1} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où $q = 1, 2, \dots, \lambda$. Les θ sont égaux à zéro ou à 1 et cette propriété peut être précisée d'après ce que nous avons vu au n° 18; les nombres $0, 1, 2, \dots, n$ se répartissent en plusieurs classes C_1, C_2, \dots , comprenant respectivement r_1, r_2, \dots éléments, tandis que les λ premiers entiers se répartissent d'autre part en classes D_1, \dots comprenant respectivement s_1, \dots éléments, avec $s_1 < r_1, \dots$; $\theta_{p,q}$ est égal à 1 si p et q appartiennent respectivement à des classes C et D de même indice, il est égal à zéro dans le cas contraire. Considérons alors les valeurs exceptionnelles α et répartissons-les en deux groupes de la façon suivante : dans le premier groupe mettons les α_p pour lesquels p appartient à C_1 et les α_{n+q} pour lesquels q n'appartient pas à D_1 ; dans le deuxième groupe mettons les α_p pour lesquels p appartient à C_2, \dots et les α_{n+q} pour lesquels q appartient à D_1 . Le premier groupe comprend $r_1 + (\lambda - s_1)$ termes et le second en comprend $(n + 1 - r_1) + s_1$; on a $n + 1 - r_1 + s_1 \leq n$ et $r_1 + \lambda - s_1 \leq n$, car les $r_i - s_i$ sont tous positifs et $\Sigma (r_i - s_i) = 1 + n - \lambda$. On vérifie aussitôt, comme on l'a fait pour $\lambda = 1$, que chacun de ces groupes, arbitrairement complété à n termes, satisfait aux λ involutions.

Si $\lambda > 1$, les $n + \lambda + 1$ valeurs exceptionnelles α_p se partagent en deux groupes comprenant chacun n valeurs au plus et tels que les λ relations involutives à n variables dont il est question dans le théorème XII soient satisfaites lorsqu'on donne à ces variables les valeurs des α_p de l'un quelconque de ces groupes arbitrairement complété.

En particulier, si $\lambda = n - 1$, les $2n$ valeurs exceptionnelles se partagent en deux groupes de n valeurs; chacun de ces groupes satisfait à chacune des $n - 1$ relations involutives.

Remarque. — Aussi bien dans le critère fondamental que dans les théorèmes X, XI et XII, certaines valeurs exceptionnelles peuvent être remplacées par un nombre égal d'involutions exceptionnelles (1).

30. On peut étendre le critère fondamental au cas où les $2n + 1$ valeurs exceptionnelles varient avec l'algèbroïde considérée. Il suffit pour cela d'appliquer les résultats du n° 19. La normalité pourra encore être affirmée si, $\alpha_{\rho_0}^{(k)}, \alpha_{\rho_1}^{(k)}, \dots, \alpha_{\rho_n}^{(k)}$ étant $n + 1$ quelconques des $2n + 1$ valeurs exceptionnelles, l'expression

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_{\rho_0}^{(k)} & \alpha_{\rho_0}^{(k)2} & \dots & \alpha_{\rho_0}^{(k)n} \\ 1 & \alpha_{\rho_1}^{(k)} & \alpha_{\rho_1}^{(k)2} & \dots & \alpha_{\rho_1}^{(k)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_{\rho_n}^{(k)} & \alpha_{\rho_n}^{(k)2} & \dots & \alpha_{\rho_n}^{(k)n} \end{vmatrix}}{\prod \sqrt{1 + |\alpha_{\rho_i}^{(k)}|^2 + |\alpha_{\rho_i}^{(k)}|^4 + \dots + |\alpha_{\rho_i}^{(k)}|^{2n}}} \\ \equiv \prod \frac{\alpha_{\rho_i}^{(k)} - \alpha_{\rho_j}^{(k)}}{\sqrt{1 + |\alpha_{\rho_i}^{(k)}|^2 + \dots + |\alpha_{\rho_i}^{(k)}|^{2n}} \sqrt{1 + |\alpha_{\rho_j}^{(k)}|^2 + \dots + |\alpha_{\rho_j}^{(k)}|^{2n}}}$$

reste, en module, supérieure à une borne positive fixe. Si l'on remarque que la quantité

$$\frac{1 + |\alpha|^2 + |\alpha|^4 + \dots + |\alpha|^{2n}}{[1 + |\alpha|^2]^n}$$

reste comprise entre deux constantes positives lorsque α prend toutes les valeurs possibles, on voit que la condition précédente revient à imposer aux expressions

$$\prod \frac{|\alpha_{\rho_i}^{(k)} - \alpha_{\rho_j}^{(k)}|}{\sqrt{1 + |\alpha_{\rho_i}^{(k)}|^2} \sqrt{1 + |\alpha_{\rho_j}^{(k)}|^2}}$$

de rester supérieures à une borne positive fixe, ou bien encore à imposer une borne positive fixe à la distance sphérique minima des $2n + 1$ valeurs exceptionnelles prises deux à deux.

Les algèbroïdes à n branches, définies dans un domaine D et y présentant $2n + 1$ valeurs exceptionnelles variables avec l'algèbroïde considérée mais dont la distance sphérique minima possède une borne inférieure positive, constituent une famille normale.

On pourrait donner une extension analogue du théorème XII.

(1) Voir P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales...* (loc. cit.), p. 289.

Ici, nous prenons le mot « exceptionnel » au sens strict : l'involution exceptionnelle n'est satisfaite en aucun point. Il faut bien se garder de confondre les involutions exceptionnelles avec les relations involutives (asymptotiques ou non) existant entre les branches.

Extensions des théorèmes de Schottky et Landau.

31. Le théorème VII et le lemme VI conduisent immédiatement à une forme purement qualitative du théorème de Schottky.

THÉORÈME XIII. — *Soit, dans le cercle $|z| < R$, une algèbroïde à n branches, γ présentant $2n + 1$ valeurs exceptionnelles α_p parmi lesquelles figure la valeur ∞ . Si, au point $z = 0$, toutes les branches ont des modules inférieurs à M_0 , elles ont dans $|z| < r < R$ des modules inférieurs à une borne M ne dépendant que de M_0 , de $\frac{r}{R}$ et des α_p .*

Les considérations développées à la fin de la section précédente montrent que l'on peut donner une borne connaissant seulement M_0 , $\frac{r}{R}$ et un nombre positif inférieur aux distances sphériques des α_p pris deux à deux. De plus, on peut arriver, ici encore, à un énoncé partiellement quantitatif, comme nous allons maintenant le montrer.

Considérons, dans $|z| < R$, une algèbroïde à n branches, présentant $2n + 1$ valeurs exceptionnelles dont la distance sphérique minima est supérieure à $\delta > 0$. Cette algèbroïde appartient à une famille normale. Si

$$f_0 \omega^n + f_1 \omega^{n-1} + \dots + f_n = 0$$

est l'équation qui la définit, on a donc

$$\frac{\sum |f_i(0) f_j(0) - f_j(0) f_i(0)|^2}{(\sum |f_i(0)|^2)^2} < \frac{K^2}{R^2},$$

où K est une constante ne dépendant que de δ et de n . Le raisonnement développé au n° 21 peut être repris mot pour mot; il conduit à l'inégalité

$$\log \frac{\sqrt{\sum |f_i(re^{i\theta})|^2}}{|f_0(re^{i\theta})|} < \frac{R}{R-r} \left[A \log \frac{\sqrt{\sum |f_i(0)|^2}}{|f_0(0)|} + BK^2 \right],$$

où A et B sont les constantes numériques précédemment estimées. D'autre part, le lemme VI nous apprend que

$$\frac{|f_0(0)|}{\sqrt{\sum |f_i(0)|^2}} > \left(\frac{1}{1 + M_0} \right)^n \quad \text{et} \quad \frac{|f_0(re^{i\theta})|}{\sqrt{\sum |f_i(re^{i\theta})|^2}} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1 + M^2}}.$$

Ces trois dernières inégalités conduisent aussitôt à la proposition que nous avons en vue.

Soit, dans le cercle $|z| < R$, une algèbroïde à n branches, γ présentant $2n + 1$ valeurs exceptionnelles comprenant la valeur ∞ et dont la distance sphérique minima est supérieure à $\delta > 0$. Si, au point $z = 0$, toutes les branches ont des

modules inférieurs à M_0 , elles ont, dans $|z| < r < R$, des modules inférieurs à M avec

$$\log M < \frac{R}{R-r} [A n \log(1 + M_0) + BK^2] + \frac{1}{2} \log n,$$

où A et B sont des constantes numériques et où K ne dépend que de δ et de n .

32. Nous allons maintenant donner des extensions du théorème de Landau. Nous considérerons dans $|z| < R$ des algébroides à n branches ayant $2n + 1$ valeurs exceptionnelles données ou, plus généralement, $2n + 1$ valeurs exceptionnelles dont les distances sphériques sont supérieures à un nombre positif δ donné (¹). Moyennant certaines données complémentaires, on peut déterminer une borne supérieure R_0 du rayon R . On obtiendra différents théorèmes suivant les « données complémentaires » utilisées; mais il faut remarquer que la seule connaissance des dérivées des différentes branches à l'origine ne permet pas de conclure.

THÉORÈME XIV. — Soit, dans $|z| < R$, une algébroïde à n branches ayant $2n + 1$ valeurs exceptionnelles dont les distances sphériques sont supérieures à δ positif. Supposons de plus, qu'au point $z = 0$, l'une des branches ait une dérivée sphérique D et que cette branche soit à une distance sphérique des $n - 1$ autres supérieure à δ_0 positif. Dans ces conditions, on peut déterminer une borne supérieure de R en fonction de n , δ , δ_0 et D (²).

Nous allons supposer qu'il n'en est pas ainsi. Il existe alors une suite d'algébroides pour lesquelles les conditions précédentes sont réalisées avec $R = 1, 2, \dots, n, \dots$. Cette famille est normale dans $|z| < 1$. On peut donc en extraire une suite partielle uniformément convergente dans $|z| < 1$ et qui tend vers une algébroïde limite dans ce cercle. Mais les algébroides de la suite sont, à partir d'un certain rang, définies dans le cercle $|z| < n$ et y constituent une famille normale. D'après l'extension aux algébroides du théorème de Vitali (³), la suite partielle est uniformément convergente dans $|z| < n$ et l'algébroïde limite existe donc dans ce cercle. Finalement, l'algébroïde limite que nous avons mise en évidence a pour domaine d'existence tout le plan fini.

(¹) On pourrait aussi supposer que certaines valeurs exceptionnelles sont remplacées par des involutions exceptionnelles. Si valeurs et involutions exceptionnelles sont données, les résultats s'énoncent aussitôt; sinon il y a lieu de faire intervenir des bornes inférieures d'expressions semblables à celles considérées dans le n° 19.

(²) Si l'on tient compte de la relation $(2n + 1)\delta^2 < 1$, on voit aussitôt que l'on peut trouver une borne supérieure ne dépendant que de δ , δ_0 et D . On peut faire une remarque analogue pour le théorème XV.

(³) Nous avons établi une telle extension pour les systèmes de $n + 1$ fonctions holomorphes (théorème III). Elle s'applique en particulier aux fonctions algébroides.

Quitte à faire une nouvelle extraction de suite partielle, on peut toujours supposer que les algébroïdes de la suite jouissent des propriétés suivantes :

- a. la branche dont on connaît la dérivée sphérique est convergente au point $z = 0$;
- b. les $2n + 1$ valeurs exceptionnelles convergent vers $2n + 1$ valeurs limites α_p (nécessairement distinctes).

D'après la propriété a, l'algébroïde limite présente, au point $z = 0$, une branche dont la distance sphérique aux autres est supérieure à δ_0 . Dans le voisinage de l'origine, cette branche ne se ramifie donc pas et est limite uniforme de branches des algébroïdes de la suite qui ne se ramifient pas non plus. Dans ce voisinage nous sommes ainsi en présence d'une convergence uniforme de fonctions méromorphes, ce qui entraîne la convergence des dérivées sphériques. Par conséquent, l'algébroïde limite présente, au point $z = 0$, une branche dont la dérivée sphérique est D; en particulier, cette branche ne peut pas se réduire à une constante.

D'après la propriété b, chaque valeur α_p est exceptionnelle pour l'algébroïde limite, à moins qu'une branche de celle-ci ne se réduise à la constante α_p . De sorte que l'algébroïde limite comprend finalement k branches constantes ($0 \leq k < n$) et une algébroïde à $n - k$ branches non constantes présentant $2n + 1 - k \geq 2(n - k) + 1$ valeurs exceptionnelles distinctes. Or ceci est en contradiction avec le théorème X; notre démonstration se trouve ainsi achevée.

Remarque. — Le théorème XIV s'exprime par l'inégalité

$$R < R_0(n, \delta, \delta_0, D),$$

où D intervient d'une façon que l'on peut aisément préciser. En effet, changeons z en $\frac{z}{D}$ dans la fonction algébroïde considérée, puis appliquons le théorème; il vient

$$RD < R_0(n, \delta, \delta_0, 1).$$

Autrement dit, le produit RD a une borne supérieure ne dépendant que de n, δ et δ_0 .

THÉORÈME XV. — Soit, dans $|z| < R$, une algébroïde à n branches ayant $2n + 1$ valeurs exceptionnelles dont les distances sphériques sont supérieures à δ positif. Supposons de plus que, dans le cercle $|z| < r$, l'oscillation sphérique d'une branche soit supérieure à δ_1 positif. Dans ces conditions, on peut déterminer une borne supérieure de R en fonction de n, δ, δ_1 et r .

La démonstration étant très voisine de celle du théorème XIV, nous ne la développerons pas. On peut, comme ci-dessus, préciser l'énoncé de la façon suivante : le quotient $\frac{R}{r}$ a une borne supérieure ne dépendant que de n, δ et δ_1 (1).

(1) Cf. J. DUFRESNOY, Sur les domaines couverts... (loc. cit.), §§ 45 et 46.

On pourrait obtenir d'autres théorèmes en se fixant d'autres « données complémentaires » ; il suffit que celles-ci se conservent dans un passage uniforme à la limite et excluent les algébroides dont toutes les branches sont des constantes. Par exemple, on peut imposer aux différentes branches de l'algébroïde d'être, pour $z = 0$, dans un certain domaine du plan complexe, tandis que, pour $z = z_1$, l'une des branches est dans un domaine extérieur au premier.

APPENDICE.

Sur les systèmes de $n + 1$ fonctions entières.

33. Nous allons améliorer les résultats exposés dans la première section du Chapitre II en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *S'il n'existe entre les $n + 1$ fonctions entières f_i que λ relations linéaires homogènes indépendantes au plus ($\lambda < n$), le nombre de combinaisons linéaires exceptionnelles (linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$) que ces fonctions peuvent présenter, est au plus égal à*

$$n + \frac{n}{n - \lambda}.$$

Pour le prouver, il nous suffit de reprendre la démonstration du Chapitre II en faisant une analyse plus soignée. Supposons qu'il y ait $n + 1 + \mu$ combinaisons exceptionnelles entre les f_i , donc μ combinaisons exceptionnelles proprement dites entre les F_i . Dans chacune de celles-ci, chaque classe, sauf une, donne une combinaison partielle identiquement nulle. De sorte que, s'il y a c classes, le nombre total des combinaisons partielles identiquement nulles est égal à $(c - 1)\mu$ et nous avons déjà vu que ces combinaisons sont indépendantes $n + 1$ à $n + 1$. Le nombre de celles qui portent sur les p fonctions F_i appartenant à une classe ne peut dépasser $p - 1$ et le nombre total ne peut dépasser $\Sigma(p_i - 1) = n + 1 - c$. D'où une première relation

$$\mu(c - 1) \leq n + 1 - c.$$

D'autre part, l'existence d'une classe de p fonctions implique l'existence de $p - 1$ relations (les fonctions d'une même classe étant proportionnelles). L'existence des c classes entraîne donc ici $\Sigma(p_i - 1) = n + 1 - c$ relations ; d'où

$$n + 1 - c \leq \lambda.$$

Des deux dernières inégalités on déduit aussitôt

$$\mu \leq \frac{n + 1 - c}{c - 1} = \frac{n}{c - 1} - 1 \leq \frac{n}{n - \lambda} - 1,$$

ce qui établit le théorème.

Remarque. — Ce théorème s'applique en particulier aux algébroides et l'on retrouve ainsi le résultat de M. Ghermanescu (1).

S'il n'existe entre les n branches d'une algébroïde (définie dans tout le plan fini) que λ relations involutives, le nombre de valeurs exceptionnelles que peut présenter cette algébroïde est au plus égal à

$$n + \frac{n}{n - \lambda}.$$

Cette remarque permet de montrer que le théorème XVI ne peut plus être amélioré. Soient, en effet, $F_0, F_1, \dots, F_{n-\lambda}$ des fonctions dépourvues de zéros et linéairement indépendantes. Considérons alors l'algébroïde à n branches définie par la relation

$$P_0(w)F_0(z) + P_1(w)F_1(z) + \dots + P_{n-\lambda}(w)F_{n-\lambda}(z) = 0,$$

où les $P_q(w)$ sont des polynômes de degré q . Une valeur $w = w_0$ qui annule $n - \lambda$ des $n - \lambda + 1$ coefficients est exceptionnelle pour l'algébroïde.

Or, étant donné ρ valeurs, à quelle condition peut-on les distribuer en $n - \lambda + 1$ groupes de sorte que chaque valeur figure dans $n - \lambda$ groupes et que, dans chaque groupe, il y ait au plus n valeurs? Il est évidemment nécessaire que

$$\rho(n - \lambda) \leq n(n - \lambda + 1)$$

soit

$$\rho \leq n + \frac{n}{n - \lambda}.$$

Nous allons montrer que cette condition est suffisante. A cet effet, prenons d'abord chacune des ρ valeurs dans chaque groupe, puis retirons la première valeur du premier groupe, la seconde du second, ..., la $n - \lambda + 1$ ième du $n - \lambda + 1$ ième, la $n - \lambda + 2$ ième du premier, la $n - \lambda + 3$ ième du second, etc. Cette opération terminée, on aura retiré de certains groupes $\left[\frac{\rho}{n - \lambda + 1} \right]$ valeurs et des autres $\left[\frac{\rho}{n - \lambda + 1} \right] + 1$. De sorte que, finalement, notre distribution satisfera bien aux conditions requises si

$$\rho - \left[\frac{\rho}{n - \lambda + 1} \right] \leq n$$

soit

$$\rho \leq n + \frac{n}{n - \lambda}.$$

Supposons donc ρ donné satisfaisant à cette inégalité. Choisissons arbitrairement ρ valeurs distinctes w_i et répartissons-les comme indiqué ci-dessus; puis formons un polynôme $P_0(w)$ de degré n ayant comme zéros les valeurs du premier groupe, un polynôme $P_1(w)$ de même degré ayant comme zéros les valeurs du deuxième groupe, etc. L'algébroïde

$$P_0(w)F_0(z) + P_1(w)F_1(z) + \dots + P_{n-\lambda}(w)F_{n-\lambda}(z) = 0$$

(1) Cf. M. GHERMANESCU, *Les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières et les fonctions algébroides (Actualités scientifiques et industrielles, n° 889, 1940)*. Cet auteur a pressenti le théorème XVI sans parvenir à le démontrer.

a comme valeurs exceptionnelles les ρ valeurs ω_l . Or, si nous ordonnons ce polynôme en ω , il vient

$$\omega^n f_0(z) + \omega^{n-1} f_1(z) + \dots + f_n(z) = 0.$$

Nous mettons ainsi en évidence $n + 1$ fonctions f_l qui ne sont liées que par λ relations linéaires et qui présentent ρ combinaisons linéaires exceptionnelles (linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$), l'entier ρ pouvant être choisi arbitrairement sous la seule condition de ne pas dépasser $n + \frac{n}{n - \lambda}$.

Sur les suites de systèmes de $n + 1$ fonctions holomorphes.

34. Le théorème XVI, affirmant l'existence d'un nombre au moins égal à $\frac{\mu n}{1 + \mu}$ de relations linéaires homogènes entre les $n + 1$ fonctions entières d'un système présentant $n + 1 + \mu$ combinaisons linéaires exceptionnelles ($0 \leq \mu < n$), améliore le théorème V qui affirmait seulement l'existence de μ relations linéaires entre de telles fonctions. Peut-on améliorer de façon analogue le théorème VI? Il semble que non. La démonstration du théorème XVI ne peut pas s'adapter sans modifications profondes aux suites de systèmes de fonctions holomorphes, car, au lieu du théorème de Borel, nous n'avons plus à notre disposition que celui d'Henri Cartan qui, d'une part, ne fait pas intervenir toutes les fonctions f_i et qui, d'autre part, conduit seulement à affirmer que les quotients des fonctions d'une même classe convergent uniformément vers des fonctions limites (en général non constantes).

Mais supposons, comme l'a fait M. Henri Cartan dans sa Thèse, que toutes les fonctions f_i se répartissent en classes auxquelles le théorème s'applique et tâchons alors d'adapter la démonstration du théorème XVI de la même façon que nous avons fait pour le théorème V dans la deuxième section du Chapitre II.

La suite partielle présente $(c - 1) \mu$ expressions de la forme

$$\frac{\beta_0 f_0 + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2}} \quad (\beta_l = \text{const.})$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants. Et l'on a encore

$$\mu(c - 1) \leq n + 1 - c,$$

d'où

$$c - 1 \leq \frac{n}{1 + \mu}.$$

D'autre part, l'existence d'une classe de p fonctions implique l'existence de $p - 1$ expressions de la forme

$$\frac{\varphi_0 f_0 + \varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_n f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2}},$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs étant linéairement indépendants relativement à l'ensemble des f_q ; mais ici les φ_q sont en général des fonctions et non plus des constantes. Le nombre total Λ des expressions de cette nature, asymptotiquement nulles, est au moins égal à

$$\Sigma(p_i - 1) = n + 1 - c \geq n - \frac{n}{1 + \mu} = \frac{n\mu}{1 + \mu}.$$

Enfin, si l'on remarque que

$$\mu(c - 1) = \mu[n - (n + 1 - c)] \geq \mu(n - \Lambda),$$

on voit que le nombre λ des expressions à coefficients constants qui sont asymptotiquement nulles satisfait à

$$\lambda \geq \mu(n - \Lambda).$$

Moyennant l'hypothèse de M. Henri Cartan, on parvient donc au théorème suivant :

THÉORÈME XVII. — *Lorsqu'une famille de systèmes de $n + 1$ fonctions holomorphes présente $n + 1 + \mu$ combinaisons linéaires exceptionnelles linéairement indépendantes $n + 1$ à $n + 1$, de toute suite infinie de systèmes de cette famille on peut extraire une suite partielle qui*

ou bien est uniformément convergente ;

ou bien est telle qu'il existe Λ expressions de la forme

$$\frac{\varphi_{p,0}f_0 + \varphi_{p,1}f_1 + \dots + \varphi_{p,n}f_n}{\sqrt{|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2}} \quad (p = 1, 2, \dots, \Lambda),$$

qui tendent uniformément vers zéro, les numérateurs de ces expressions étant linéairement indépendants relativement à l'ensemble des f_q , et le nombre Λ satisfaisant à

$$\Lambda \geq \frac{n\mu}{1 + \mu};$$

de plus, λ des expressions précédentes ont des numérateurs dont les coefficients $\varphi_{p,q}$ se réduisent à des constantes et l'on a

$$\lambda \geq \mu(n - \Lambda).$$

