

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

## Étude asymptotique des oscillations de relaxation (suite et fin)

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 60 (1943), p. 65-111

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1943\\_3\\_60\\_\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__65_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE  
DES  
OSCILLATIONS DE RELAXATION

PAR M. J. HAAG.

(Suite et fin.)



CHAPITRE IV.

ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE.

36. *Départ du point frontière.* — Nous arrivons au point frontière F avec une déviation  $D_0$  qui nous est donnée par la formule (93). Nous appellerons  $r_1$  l'ordre à droite de F et  $r$  l'ordre à gauche. L'ordre de  $D_0$  est

$$\beta = r_1 r'_1 = \frac{2r_1}{2r_1 - 1}.$$

Pour quitter F vers la gauche, nous appliquons encore la méthode générale exposée dans la section III du Chapitre I. Nous avons cette fois  $\sigma = -1$ ,  $\sigma' = 1$ ,  $\sigma'' = -1$ . Trois cas sont à distinguer, suivant que  $r$  est supérieur, inférieur ou égal à  $r_1$ .

CAS I. —  $r > r_1$ . — On a  $\beta < rr'$ . Nous appliquons la méthode du n° 20, en posant  $\theta = \varepsilon^{\frac{\beta}{r}}$ ; de sorte que  $\theta'$  est d'ordre  $2 - \beta \frac{2r-1}{r} > 0$ . On a  $z_0 = \frac{D_0}{A_0 \varepsilon^\beta}$ . Donc,  $Z_0$  a une valeur finie et positive. Quant à la variable  $\zeta$ , elle nous est donnée par une série asymptotique en  $\theta_1$ , donc en  $\theta_1^{\frac{r}{r_1}}$ . Son ordre est  $\frac{\beta}{r_1} = 2(\beta - 1)$ .

Nous avons  $s_0 = 0$ ,  $s_1 = S > 0$ . La première formule (33) nous donne  $W = Z_0 + s^r > 0$ . L'intégrale J n'est jamais nulle; pour  $s$  très grand, elle est finie, car  $r > 1$ . Le rapport  $\frac{W}{J}$  est fini pour toute valeur finie de  $s$ . Si  $s$  est très grand, il est de l'ordre de  $s^r$ . Donc, son minimum K est fini.

Le rapport  $\frac{W}{s^{r+1}}$  est une fonction décroissante de  $s$ ; son minimum est de l'ordre de  $\frac{1}{s_1}$ .

On en conclut, en se reportant aux inégalités (34), (35) et (36), que  $R$  est de l'ordre de  $\frac{1}{s_1}$ ;  $R'$  et  $R''$  sont finis. Dès lors, la convergence est assurée, pour  $0 < s < s_1$ , si  $\theta s_1$  a une valeur finie  $\xi_1$  suffisamment petite. Autrement dit, la méthode nous permet d'atteindre un point  $M_1$  situé à une distance finie du point frontière.

CAS II. —  $r = r_1$ . — On a  $\beta = rr'$ . Nous appliquons la méthode du n° 21. La valeur de  $Z_0$  est finie et positive;  $\zeta$  est donné par une série asymptotique en  $\theta$ . La fonction de raccordement  $Z$  est déterminée par l'équation différentielle (39) et la condition de prendre la valeur  $Z_0$  pour  $s = 0$ . La fonction  $W = Z + s^r$  est toujours positive.

Signalons tout de suite quelques propriétés de ces deux fonctions. D'abord, elles sont toutes deux croissantes. On en conclut que  $W > Z_0 + s^r$  et par suite

$$Z < Z_0 + \int_0^s \frac{ds}{Z_0 + s^r}.$$

Si  $r > 1$ , l'intégrale du second membre reste finie pour  $s = \infty$ ; donc  $Z$  tend vers une limite finie  $H$ . Si  $r = 1$ , on a

$$(95) \quad s = C e^Z - Z - 1, \quad C = (Z_0 + 1) e^{-Z_0}.$$

Pour  $s$  infiniment grand,  $Z$  est asymptotique à  $\log s$ .

La fonction  $\varphi$  est bornée quel que soit  $s$ . La dérivée de la fonction  $W e^{\varphi} - J$  est  $e^{\varphi} \frac{dW}{ds} > 0$ . Cette fonction est donc minimum pour  $s = 0$ ; elle est donc toujours positive et l'on peut prendre  $K = 1$ . D'autre part, le minimum de  $\frac{W}{s^{r+1}}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{s_1}$ , si  $s_1$  est infiniment grand. En se reportant aux inégalités (45) et (48), on en conclut que  $R$  est de l'ordre de  $\frac{1}{s_1}$  et que  $R'$  est fini. Il s'ensuit, comme précédemment, que l'on peut atteindre un point  $M_1$  situé à une distance finie du point frontière.

CAS III. —  $r < r_1$ . — On a  $\beta > rr'$ . Si nous appliquons encore la méthode du n° 21, nous voyons que cette fois  $Z_0$  est nul. Il en est de même du minimum de  $W$ ; donc,  $R' = 0$ . On ne peut pas développer  $Y$  suivant les puissances de  $\theta$  et  $\zeta$ , tout au moins pour les petites valeurs de  $s$ . La méthode du cas II ne s'applique que si  $\zeta = 0$ .

La difficulté qui se présente ici tient à ce que les données initiales ( $s = 0, Z = 0$ ) constituent une singularité pour l'équation différentielle (39),

puisqu'elles rendent infinie la dérivée  $\frac{dZ}{ds}$ . Si l'on considère la solution de cette équation qui prend la valeur  $\zeta$  pour  $s = 0$ , elle ne peut pas être développée suivant les puissances de  $\zeta$  quand  $s$  est très petit.

Dans le cas où  $r$  est entier, on peut tout de même calculer le développement de  $z$  suivant les puissances de  $\theta$  et  $\zeta$ , à condition que  $s$  ne soit pas nul. Voici le principe de la méthode.

La fonction  $z$  est définie par l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dz} \left( 1 - \theta \frac{s}{a} \right) = z + s^r + B\theta s^{r+1}$$

et la condition que  $z = \zeta$  pour  $s = 0$ . Si l'on pose  $z = \zeta + X$ , on a

$$(96) \quad \frac{ds}{dX} \left( 1 - \theta \frac{s}{a} \right) = X + s^r + \zeta + B\theta s^{r+1}, \quad X = 0 \text{ pour } s = 0.$$

Ceci nous définit  $s$  comme fonction holomorphe de  $X$ ,  $\theta$  et  $\zeta$  dans des cercles de rayon fini pour les trois variables. Si  $s$  a une valeur donnée  $s_0$  assez petite, mais non nulle, on peut ensuite, d'après le théorème des fonctions implicites, calculer  $X$  par une série entière en  $\theta$ ,  $\zeta$ . On en déduit la valeur  $z_0$  de  $z$ . Soit d'autre part  $Z_0$  la valeur de la fonction de raccordement pour  $s = s_0$ . Posons  $\zeta_0 = z_0 - Z_0$  et proposons-nous de calculer  $z$  pour les valeurs de  $s$  comprises entre  $s_0$  et  $s_1 > s_0$ .

Appliquons de nouveau la méthode du n° 21. Cette fois, le minimum de  $W$  est  $Z_0 + s_0^r$ ; il n'est pas nul; donc, la difficulté qui nous a arrêtés tout à l'heure disparaît et nous pouvons développer  $z$  suivant les puissances de  $\theta$  et de  $\zeta$ , dans les mêmes conditions que dans le cas II, c'est-à-dire *jusqu'en un point  $M_1$  situé à une distance finie du point frontière*. Nous pouvons ensuite remplacer  $\zeta_0$  par son développement suivant les puissances de  $\theta$  et  $\zeta$ ; de sorte que nous obtenons également  $z$  sous forme d'une série entière en  $\theta$ ,  $\zeta$ . Bien entendu, ses coefficients doivent être de simples fonctions de  $s$  et ne plus garder trace de la variable intermédiaire  $s_0$ . En outre, le développement cesse d'être valable quand  $s$  tend vers zéro.

Dans le cas où  $r$  n'est pas entier, l'équation (96) admet tout de même une solution et une seule prenant la valeur  $s = 0$  pour  $X = 0$ , car la dérivée  $\frac{ds}{dX}$  vérifie une condition de Lipschitz, puisque  $r > 1$ . Mais, cette solution n'est pas holomorphe au voisinage de  $X = 0$ . Nous verrons (n° 42) qu'on peut alors calculer un *développement limité* de  $X$  suivant les puissances de  $\theta$  et  $\zeta$ , en arrêtant ce développement aux termes de degré compris entre  $r - 2$  et  $r - 1$ .

37. *Calcul asymptotique de la déviation, pour  $s$  très grand, dans le cas I.* — Nous employons les formules (51) et (52). Voyons ce qu'elles nous donnent pour  $s$  très grand.

Remarquons d'abord que si l'on pose  $u = \frac{1}{s^r}$ , la fonction  $\frac{s^r}{U} = \frac{1}{Wu + \zeta u + B\xi}$  peut être considérée comme une fonction holomorphe des trois variables  $\xi, \zeta, u$  au voisinage de zéro. Adoptons maintenant la terminologie de la Note (B), en prenant  $r$  pour nombre caractéristique. Je dis que  $\frac{dY_n}{ds}$  peut être développé en série entière en  $\xi, \zeta$ , dont chaque coefficient est un polynôme (H) de degré  $n-1$  et d'ordre  $\leq -r$ .

S'il en est ainsi, on en conclut, en remplaçant  $\xi$  par  $\theta s$ , appliquant la note (B) et remplaçant ensuite  $\theta$  par  $\frac{\xi}{s}$ , que  $Y_n$  est une série entière en  $\xi, \zeta$ , dont chaque coefficient est un polynôme (H) de degré  $n$  et d'ordre  $\leq 0$ , puisque  $1-r < 0$ . D'autre part, la propriété est exacte pour  $n=1$ , d'après la formule (51) et la remarque faite ci-dessus concernant  $\frac{s^r}{U}$ . Admettons qu'elle le soit jusqu'au rang  $n-1$ . Le produit  $Y_i \frac{dY_{n-i}}{ds}$  figurant dans (52) est une série entière en  $\xi, \zeta$ , dont chaque coefficient est un polynôme (H) de degré  $n-1$  et d'ordre  $\leq -r$ . Il en est donc de même de  $F_n$  et *a fortiori* de  $\frac{F_n}{U}$ . La propriété est donc vraie au rang  $n$  (1).

On en déduit que la déviation peut s'écrire

$$(97) \quad D = A_0 \theta^r \left( Z_0 + \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \Delta_n \right),$$

$\Delta_n$  désignant une série entière en  $\xi, \zeta$ , dont les coefficients sont des polynômes (H) de degré  $n$  et d'ordre  $\leq 0$ . Nous pouvons maintenant, dans ces coefficients, remplacer  $s$  par  $\frac{\xi}{\theta}$ . L'ordre étant  $\leq 0$ , nous ne faisons apparaître aucune puissance négative de  $\theta$ . Nous pouvons ensuite ordonner le développement de  $\Delta_n$  suivant les variables  $\theta, \zeta$ ; mais à la condition de nous contenter de *développements limités*. Si l'on convient que les exposants de  $\theta, \xi, \zeta$  ne dépasseront pas respectivement  $n_1, p_1, q_1$ , l'ordre de l'erreur commise sur  $D$  est (n° 20) le plus petit des trois nombres

$$\alpha r + (n_1 + 1) \left( 2 - \beta \frac{2r-1}{r} \right), \quad \alpha r + (p_1 + 1)\alpha, \quad \alpha r + 2(q_1 + 1)(\beta - 1),$$

en supposant que  $\xi$  et  $\xi_1$  sont d'ordre  $\alpha$ . Si  $\alpha$  est très petit et  $p_1$  assez grand, l'ordre de l'erreur est très voisin du plus petit des deux nombres

$$(n_1 + 1) \left( 2 - \beta \frac{2r-1}{r} \right) \quad \text{et} \quad 2(q_1 + 1)(\beta - 1).$$

---

(1) On peut même affirmer que, pour  $n > 1$ , l'ordre des coefficients de  $\frac{dY_n}{ds}$  est  $\leq -2r$ .

Dans ces conditions, on peut écrire

$$(98) \quad \Delta_n = \sum_p \sum_q \theta^p \xi^q \Delta_{npq}(\xi),$$

les exposants  $p$  étant de la forme  $p'r + p''$ , où  $p'$  et  $p''$  sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, mais tels que  $p$  soit toujours  $\geq 0$ . Quant aux coefficients  $\Delta_{npq}(\xi)$ , ce sont des polynômes en  $\log \frac{\xi}{\theta}$ , dont les coefficients se présentent sous la forme de développements limités procédant suivant certaines puissances de  $\xi$  et poussés d'autant plus loin que  $p$  est plus grand et par conséquent que  $\alpha$  est plus petit.

38. *Même calcul dans le cas II.* — Nous employons les formules (54) à (58). Cherchons un développement asymptotique des coefficients  $Y_{np}$  pour  $s$  très grand. Cherchons d'abord le développement de  $Z$ .

Dans le cas  $r > 1$ , nous avons vu (n° 36) que la fonction  $Z$  tend vers une limite finie  $H$  pour  $s$  infini. Observons, de plus, que l'équation (39) ne peut admettre une autre solution  $Z'$  ayant la même limite. En effet, s'il en était ainsi, la différence  $X = Z - Z'$  vérifierait l'équation

$$\log \frac{X_0}{X} = \int_0^s \frac{ds}{\mathbb{W}\mathbb{W}'}$$

et devrait tendre vers zéro pour  $s$  infini. Or, le premier membre ci-dessus tendrait vers  $+\infty$ , tandis que le second resterait fini.

Ceci étant, posons

$$(99) \quad u = \frac{H}{s^r}, \quad v = \frac{1}{s^{2s-1}}, \quad Z = H + \frac{\psi}{s^{r-1}}.$$

Nous allons montrer que l'on peut trouver une fonction  $\psi$  des deux variables  $u$  et  $v$ , holomorphe au voisinage de  $u = v = 0$  et telle que  $Z$  vérifie l'équation (39). Comme la fonction  $Z$  ainsi obtenue tend vers  $H$  pour  $s$  infini, elle coïncide nécessairement avec la fonction de raccordement.

Pour que la fonction  $Z$  définie par les formules (99) vérifie (39), il suffit que  $\psi$  vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$ru \frac{\partial \psi}{\partial u} + (2r-1)v \frac{\partial \psi}{\partial v} + (r-1)\psi = -\frac{1}{1+u+v\psi}.$$

Si l'on dérive  $n$  fois par rapport à  $u$ ,  $p$  fois par rapport à  $v$  et que l'on annule ensuite  $u$ ,  $v$  et  $\psi$ , on obtient au premier membre

$$[nr + p(2r-1) + r-1] \left( \frac{\partial^{n+p} \psi}{\partial u^n \partial v^p} \right)_{u=v=0}$$

et, au second membre, une fonction linéaire des dérivées d'ordre moindre par

rapport à  $v$ . On peut donc calculer, de proche en proche, tous les coefficients du développement de  $\psi$  suivant les puissances de  $u$  et  $v$ .

Quant à la convergence, on peut remarquer (1) que lesdits coefficients sont majorés par ceux du développement de la fonction  $\psi$  vérifiant l'équation du second degré

$$(r-1)\psi = \frac{1}{1-u-v\psi}$$

et se réduisant à  $\frac{1}{r-1}$  pour  $u=v=0$ . Cette dernière fonction est holomorphe si l'on a

$$(r-1)^2(1-u)^2 - 4v > 0,$$

donc au voisinage de  $u=v=0$ . On peut donc développer  $\psi$  suivant les puissances de  $u$  et  $v$ .

On a ensuite

$$\frac{W}{s^r} = 1 + u + v\psi.$$

Voici les premiers termes du développement de cette fonction

$$(100) \quad \frac{W}{s^r} = 1 + \frac{H}{s^r} - \frac{1}{(r-1)s^{2r-1}} \\ + \frac{H}{(2r-1)s^{2r-1}} - \frac{1}{(r-1)(3r-2)s^{4r-2}} - \frac{H^2}{(3r-1)s^{4r-1}} + \dots;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{W^2} = \frac{1}{s^{2r}} \left[ 1 - \frac{2H}{s^r} + \frac{2}{(r-1)s^{2r-1}} + \frac{3H^2}{s^{2r}} - \frac{2(7r-4)H}{(r-1)(2r-1)s^{3r-1}} + \dots \right].$$

Adoptons la terminologie de la Note (B), en prenant  $r$  et  $2r-1$  pour nombres caractéristiques. On déduit de ce qui précède que  $\varphi$ ,  $e^\varphi$ ,  $e^{-\varphi}$  sont des séries (B) d'ordres respectifs  $1-2r$ ,  $0$ ,  $0$ .

Dans le cas  $r=1$ , posons

$$(101) \quad u = \frac{1}{s}, \quad v = \frac{\log s - \log C}{s}, \quad \frac{Z}{s} = v + w.$$

On aboutit aux mêmes équations et aux mêmes conclusions qu'au n° 25 et l'on voit, avec la terminologie de la Note (C), que  $\frac{W}{s}$ ,  $e^\varphi$  et leurs inverses sont des séries (C) d'ordre nul.

39. Arrivons maintenant au *développement des fonctions*  $Y_{np}$ , en supposant d'abord  $r > 1$ .

(1) Voir un raisonnement analogue dans ÉMILE PICARD, *loc. cit.*, p. 268 et 269.

Nous allons prouver que  $\frac{dY_{np}}{ds}$  est, pour  $s$  très grand, un polynôme (H) d'ordre <sup>(1)</sup>  $n - r$ . On en conclut d'abord que  $Y_{np}$  est un polynôme (H) d'ordre  $n + 1 - r$  ou zéro, suivant que  $n > r - 1$  ou que  $n \leq r - 1$ ; puis que  $V_{np}$  est du même ordre si  $p > 0$ , d'ordre  $n + r$  si  $p = 0$ ; puis que  $\frac{V_{np}}{W}$  est d'ordre  $n + 1 - 2r$  ou  $-r$  si  $p > 0$ , d'ordre  $n$  si  $p = 0$ ; puis que  $\frac{Y_{np}}{W^2}$  est d'ordre  $n + 1 - 3r$  ou  $-2r$  et enfin que  $\frac{Y_{np}}{W^2} - \frac{dY_{np}}{ds}$  est d'ordre  $n - r$ . Ceci étant, les formules (55) et (56) nous montrent d'abord que la propriété est exacte <sup>(2)</sup> pour  $Y_{01}$  et  $Y_{10}$ . Admettons qu'il en soit de même pour  $Y_{i0}$  et  $i < n$ . Chaque terme de la somme figurant dans la formule (57) est d'ordre  $i - r + n - i + 1 - 2r = n + 1 - 3r$  ou  $i - 2r < n - 2r$ . Donc, cette somme est d'ordre  $< n - 2r$ . Il s'ensuit que le crochet est d'ordre  $n - r$ , ce qui démontre la propriété pour  $Y_{n0}$ .

Admettons maintenant la propriété pour  $Y_{ij}$ , avec  $i + j < n + p$ . Le terme général de la somme double figurant dans (58) est d'ordre

$$i' - r + i + 1 - 2r = n + 1 - 3r \quad \text{ou} \quad i' - 2r \leq n - 2r, \quad \text{si } j > 0.$$

Mais, si  $j = 0$ , il est d'ordre  $i' - r + i = n - r$ . Comme  $j$  peut prendre effectivement la valeur zéro, on voit que le crochet est d'ordre  $n - r$ .

Dans le cas  $r = 1$ ,  $\frac{dY_{np}}{ds}$  est, pour  $s$  très grand, une série (C) d'ordre  $n - 1$ , au sens de la Note (C) et, par conséquent,  $Y_{np}$  est une série (C) d'ordre  $n$ . La démonstration est exactement la même que ci-dessus.

40. Nous pouvons remplacer, dans (49), chaque coefficient  $Y_{np}$  par son développement; mais, nous ne pouvons pas considérer la série triple obtenue comme absolument convergente et devons nous en tenir à des *développements limités*. Si nous limitons la série (49) comme au n° 21 et si nous appelons toujours  $\alpha$  l'ordre de  $\xi$  et  $\xi_1$ , l'ordre de l'erreur sur D est égal au plus petit des deux nombres  $(r + n_1 + 1)\alpha$  et  $r\alpha(p_1 + 1)r'$ . Si  $\alpha$  est très petit et  $n_1$  assez grand, cet ordre sera très voisin de  $(p_1 + 1)r'$ .

Remplaçons maintenant chaque produit  $Y_{np}e^{-\varphi}$ , ainsi que Z, par son développement, en ne gardant que les termes donnant dans D des termes d'ordre inférieur à l'ordre ci-dessus. Puis, remplaçons  $s$  par  $\frac{\xi}{\theta}$ . Nous ne faisons apparaître, dans  $z$ , aucune puissance négative de  $\theta$ ; car, le plus fort exposant de  $s$  dans  $Y_{np}$  étant  $n + 1 - r$  ou zéro, le plus petit exposant de  $\theta$  dans  $\theta^n Y_{np} e^{-\varphi}$

(1) L'évaluation du degré est plus compliquée; mais, nous n'avons pas besoin de le connaître.

(2) Signalons cependant que  $\frac{dY_{01}}{ds}$  est d'ordre  $-2r < -r$ ; mais,  $Y_{01}$  est d'ordre nul et cela ne modifie en rien les conclusions ci-dessus.



est  $r - 1$  ou  $n$ . Nous obtenons finalement une série asymptotique de la forme

$$(102) \quad D = A_0 \theta^r \left[ \sum_p \sum_q \theta^p \zeta^q \Delta_{pq}(\xi) \right],$$

où chaque exposant  $p$  est, comme au n° 37, de la forme  $p'r + p''$ . Quant aux coefficients  $\Delta_{pq}$ , ils sont analogues aux coefficients  $\Delta_{npq}$ .

41. *Même calcul dans le cas III.* — Il peut se faire, comme dans le cas II, avec cette différence que les intégrales donnant les  $Y_{np}$  ne peuvent plus avoir zéro comme borne inférieure, puisque le développement n'est pas valable jusqu'à  $s = 0$ . On peut écrire simplement

$$Y_{np} = I_{np}(s) + \Gamma_{np},$$

$I_{np}(s)$  désignant une fonction déterminée et  $\Gamma_{np}$  une constante inconnue. Appliquons la méthode esquissée au n° 36.

Soit  $S(Z)$  la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dS}{dZ} = Z + S^r = W$$

qui s'annule pour  $Z = 0$ . Cette fonction n'est autre que la fonction inverse de la fonction de raccordement.

L'équation (96) admet une solution holomorphe en  $X, \theta, \zeta$ :

$$s = S(X) + \sum \sum \theta^n \zeta^p S_{np}(X) \quad (n + p > 0).$$

A la variable  $s$ , substituons la variable  $Z$  définie par  $s = S(Z)$ . L'équation ci-dessus s'écrit

$$(103) \quad S(Z) = S(X) + \sum \sum \theta^n \zeta^p S_{np}(X).$$

Posons

$$X = Z + u, \quad u = \sum \sum \theta^i \zeta^j X_{ij}(Z).$$

On a

$$z = \zeta + Z + u = Z + \zeta + Y e^{-\varphi};$$

donc

$$Y = u e^{\varphi}.$$

Donc, si l'on exprime les  $Y_{np}$  en fonction de  $Z$ , on a identiquement

$$(104) \quad I_{np}(Z) + \Gamma_{np} = e^{\varphi} X_{np}.$$

En égalant les noyaux des deux membres, on a  $\Gamma_{np}$ .

Une difficulté se présente du fait que la fonction  $\varphi$  devient infinie pour  $s = 0$ , car  $W^2$  est de l'ordre de  $s$ . Nous la précisons en prenant  $+\infty$  comme borne

inférieure de l'intégrale (41). Introduisons maintenant la fonction  $\psi$  définie par

$$(105) \quad \psi = r \int_0^Z S^{r-1}(Z) dZ.$$

Elle est liée à  $\varphi$  par l'identité

$$(106) \quad e^{\varphi+\psi} = kW,$$

où  $k$  désigne une constante que nous calculerons ultérieurement. On justifie cette identité en dérivant logarithmiquement les deux membres. En portant dans (104), il vient

$$(107) \quad I_{np}(Z) + \Gamma_{np} = kW e^{-\psi} X_{np}(Z)$$

et la difficulté précédente a disparu.

Calculons les  $X_{np}$ . L'équation (103) s'écrit

$$(108) \quad 0 = uW + \frac{u^2}{2} W'(Z) + \dots + \sum \sum \theta^n \zeta^p [S_{np}(Z) + uS'_{np}(Z) + \dots].$$

En remplaçant  $u$  par son développement et identifiant, on peut calculer de proche en proche tous les  $X_{np}$ .

Pour calculer les  $S_{np}$ , faisons, sur (96), le changement de variable

$$(109) \quad s = S(X) + Ue^\psi;$$

l'équation devient, en posant  $U' = \frac{dU}{dX}$ ,

$$(110) \quad U'e^\psi = \theta \frac{S + Ue^\psi}{a} [W + e^\psi(U' + UrS^{r-1})] + \zeta + B\theta(S + Ue^\psi)^{r+1} + F,$$

avec

$$F = (S + Ue^\psi)^r - S^r - rS^{r-1}Ue^\psi = \frac{r(r-1)}{2} S^{r-2} U^2 e^{2\psi} + \dots$$

Bien entendu, dans  $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \theta^n s^n$ , on doit remplacer  $s$  par  $S + Ue^\psi$ . En

posant  $U = \sum \sum \theta^n \zeta^p U_{np}$  et identifiant, on voit qu'on peut calculer de proche en proche tous les coefficients  $U_{np}$  et l'on en déduit  $S_{np} = U_{np} e^\psi$ .

Quant aux fonctions  $I_{np}(Z)$ , elles se calculent toujours par les formules du n° 22, en prenant  $Z$  pour variable et calculant de proche en proche les constantes  $\Gamma_{np}$ , qui sont nécessaires pour calculer les  $I_{np}$  suivants.

Calculons enfin la constante  $k$ . D'après (106), c'est la limite de  $\frac{e^\psi}{W}$  pour  $s = \infty$ . Or, on peut écrire

$$\psi = r \int_0^s \frac{s^{r-1}}{W} ds = r \int_0^s \left( \frac{1}{s} - \frac{Z}{sW} \right) ds = r \log s + r \int_0^1 \frac{s^{r-1}}{W} ds - r \int_1^s \frac{Z}{sW} ds.$$

Posons

$$(111) \quad K = r \int_0^1 \frac{s^{r-1}}{W} ds - r \int_1^\infty \frac{Z}{sW} ds.$$

On a

$$(112) \quad k = e^K.$$

Les coefficients  $Y_{np}$  étant déterminés, leurs développements asymptotiques pour  $s$  très grand se calculent comme au n° 39 et l'on aboutit encore à une formule analogue à (102).

42. Dans le cas où  $r$  n'est pas entier, la fonction  $F$  figurant dans (110) ne peut plus se calculer par la formule du binôme. On peut toutefois en calculer un développement limité, par la formule de Taylor. Si  $\rho$  désigne la partie entière de  $r$ , on arrête ce développement au terme de degré  $\rho - 1$  en  $Ue^\psi$ . Le reste garde un sens pour  $X = 0$  et les calculs précédents continuent à être valables, à condition que  $n + p$  ne dépasse pas  $\rho - 1$ ; autrement dit, la valeur maximum permise à  $n + p$  est comprise entre  $r - 2$  et  $r - 1$ .

*Remarque.* — Le cas III rentre dans le cas II lorsque  $\zeta = 0$ , car le rayon de convergence  $R'$  n'intervient plus. On est donc sûr *a priori* que les coefficients  $Y_{n0}$  sont les mêmes dans les deux cas. Autrement dit, les constantes  $\Gamma_{n0}$  doivent toutes être nulles, si les  $I_{n0}$  sont calculés comme dans le cas II.

43. *Prolongement de l'arc.* — Par la méthode précédente, nous savons calculer la déviation  $D_0$  en un point  $M_0$  d'abscisse  $a - \xi_0$  si l'ordre  $\alpha$  de  $\xi_0$  est  $< \frac{\beta}{r}$ . Cette déviation se présente sous la forme d'une série asymptotique à trois ou deux variables. Il s'agit maintenant de calculer la déviation  $D$  en un point  $M$  pour lequel  $\xi$  a une valeur finie. A cet effet, nous pouvons appliquer la méthode du n° 10, car les inégalités (11) sont vérifiées. On a vu que  $R$  et  $R'$  sont d'ordres respectifs  $\alpha(2r - 1)$  et  $r\alpha$ . Si la série est limitée comme on l'a supposé à la fin du n° 10, l'ordre de l'erreur commise est égal au plus petit des deux nombres

$$(n_1 + 1)[2 - \alpha(2r - 1)] \quad \text{et} \quad (p_1 + 1)(\beta - \alpha r),$$

dans lesquels on peut d'ailleurs supposer  $\alpha$  aussi petit qu'on veut. Nous pouvons maintenant remplacer, dans ce développement limité,  $D_0$  par le développement (97) ou (102) et  $\varepsilon^2$  par  $\frac{A_0^2}{a} \theta' \theta^{2r-1}$ . On obtient ainsi un développement asymptotique procédant suivant certaines puissances de  $\theta'$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  et dont les coefficients doivent dépendre seulement de  $\xi$ . D'autre part, ce développement doit coïncider avec (97) ou (102) lorsque  $\xi$  est d'ordre  $\alpha$ , cette coïncidence

devant avoir lieu avec l'approximation précédemment précisée. Nous pouvons dès lors poser

$$(113) \quad D = A_0 \theta^r \left[ \sum \sum \sum \theta'^n \theta'' \zeta^q D_{npq}(\xi) \right]$$

ou

$$(114) \quad D = A_0 \theta^r \left[ \sum \sum \theta'^n \zeta^q D_{pq}(\xi) \right]$$

et nous connaissons les développements limités  $\Delta_{npq}$  de  $D_{npq}$  et  $\Delta_{pq}$  de  $D_{pq}$ , lorsque  $\xi$  est infiniment petit. Substituons (113) ou (114) dans (10), en y remplaçant  $\varepsilon^2$  par la valeur remplacée plus haut. En identifiant, nous pouvons calculer, de proche en proche, tous les coefficients  $D_{npq}$  ou  $D_{pq}$  par des quadratures, dont chacune introduit une constante inconnue. *Ces constantes se déterminent par comparaison des noyaux.*

*Remarque.* — La partie principale de  $D$  est obtenue en prenant le terme pour lequel  $q$  est nul et  $n+p$  ou  $p$  minimum. Si l'ordre  $\beta$  de  $D$  est  $< 2$ , il n'y a pas de terme correspondant au second membre de (10). On en conclut que le coefficient de la partie principale est constant. Il en est de même, plus généralement, pour tous les termes d'ordre  $< 2$ .

Les autres termes sont donnés par des intégrales portant sur des fractions ayant en dénominateur certaines puissances entières de  $1 + B\xi$ , donc de  $\lambda - b$ .

44. *Calcul du temps.* — Au départ du point frontière de droite, nous appliquons la formule (59), en remplaçant  $z$  par son développement limité et intégrant terme à terme; nous obtenons un développement limité de la forme

$$\varepsilon \omega t = \frac{A_0}{a} \theta^r \sum \sum \sum \theta'^n \theta'' \zeta^q \Theta_{npq}(s).$$

Nous employons ensuite la formule (12), en y remplaçant  $D$  par le développement limité (113) ou (114). En additionnant, nous obtenons un développement limité ne contenant plus la variable intermédiaire et ayant la forme

$$(115) \quad \varepsilon \omega t = \frac{A_0}{a} \theta^r \sum \sum \sum \theta'^n \theta'' \zeta^q T_{npq}(\xi),$$

avec

$$(116) \quad T_{npq}(\xi) = \int \frac{a}{x} D'_{npq}(\xi) d\xi.$$

Cette intégrale indéfinie comporte une constante inconnue, que l'on détermine par *identification des noyaux* :

$$N(T_{npq}) = N(\Theta_{npq}).$$

Ceci s'applique sans difficulté aux cas I et II.

Dans le cas III, on ne peut pas calculer directement  $\Theta_{np}(s)$ , parce qu'on ne peut pas intégrer depuis zéro. On peut seulement écrire

$$\Theta_{np}(s) = K_{np}(s) + C_{np},$$

$K_{np}(s)$  étant une fonction déterminée et  $C_{np}$  une constante inconnue. Pour calculer cette constante, revenons au n° 41. L'intégrale de la formule (59) peut s'écrire

$$\Theta = \int_0^X \frac{a dX}{a - \theta s}.$$

En développant sous le signe  $\int$  suivant les puissances de  $\theta$  et intégrant, on obtient

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n \theta^n,$$

chaque coefficient  $\Theta_n$  étant donné par une quadrature en fonction de  $X$ . Remplaçons ensuite  $X$  par  $Z + u$  et  $u$  par son développement. Nous pouvons de la sorte calculer  $\Theta_{np}$  en fonction de  $Z$ . On calcule de même  $K_{np}$  et, en comparant les noyaux, on en déduit  $C_{np}$ . On continue ensuite comme dans le cas II.

45. *Raccordement avec un point frontière de seconde espèce.* — Les méthodes précédentes nous permettent de calculer l'arc complet, s'il se termine au sommet inférieur. Dans le cas contraire, il est limité à gauche par un point frontière  $F$  de seconde espèce. En vertu des conditions (11), nous pouvons atteindre un point  $M_0$  dont la distance  $\xi_0$  à  $F$  est d'ordre <sup>(1)</sup>  $\alpha < \beta$ . A partir de ce point, nous devons appliquer la méthode du n° 20, en y faisant  $\sigma = 1$ ,  $\sigma' = 1$ ,  $\sigma'' = -1$ ,  $s_0 = \frac{\xi_0}{\theta}$  et  $s_1 = 0$ . Deux cas sont à distinguer suivant que  $\beta$  est inférieur ou égal à 2.

CAS I. —  $\beta < 2$ . — Nous posons  $\theta = \varepsilon^\beta$ . La partie principale de  $D_0$  ayant un coefficient constant (n° 43), la partie principale  $Z_0$  de  $z_0$  est une constante positive. On a

$$W = Z_0 + s, \quad J = \log \frac{Z_0 + s_0}{Z_0 + s}.$$

Le minimum de  $\frac{W}{J}$  est obtenu pour  $s = 0$  et vaut  $\frac{Z_0}{\log(Z_0 + s_0) - \log Z_0}$ ; il est de l'ordre de  $\frac{1}{\log s_0}$ , donc de  $-\frac{1}{\log \varepsilon}$ ;  $R$  est de l'ordre de  $\frac{1}{s_0}$ , c'est-à-dire d'ordre  $\beta - \alpha$ ;  $R'$  est de l'ordre de  $-\frac{1}{\log \varepsilon}$ ;  $R''$  est fini; la convergence est assurée jusqu'au point frontière.

(1) La condition  $\alpha < r'$  est entraînée par  $\alpha < \beta$ , parce que  $r' = 2$  et  $\beta \leq 2$ .

CAS II. —  $\beta = 2$ . — C'est le cas où *le point frontière de droite est d'ordre 2 à droite et à gauche*. La partie principale de  $D_0$  contient une intégrale portant sur une fraction admettant le facteur  $\lambda - b$  en dénominateur. Cette intégrale est de l'ordre de  $\log \xi_0$ ; donc,  $D_0$  est de l'ordre de  $-\varepsilon^2 \log \varepsilon$ . Dès lors, nous posons

$$(117) \quad \theta = -\varepsilon^2 \log \varepsilon, \quad \theta' = -\frac{a}{A_0^2 \log \varepsilon}.$$

Les rayons de convergence sont du même ordre que précédemment. En particulier,  $R'$  est de l'ordre de  $\theta'$ ; il faut donc l'examiner de plus près, pour voir s'il est effectivement  $> \theta'$ . La constante  $K$  est asymptotique à  $\frac{Z_0}{\log s_0}$ . Or,  $s_0 = \frac{\varepsilon_0}{\theta}$  est de l'ordre de  $\frac{\varepsilon^{\alpha-2}}{\log \varepsilon}$ ; donc,  $\log s_0$  est asymptotique à  $(\alpha - 2) \log \varepsilon$  et  $K$  est asymptotique à  $\frac{Z_0}{(\alpha - 2) \log \varepsilon}$ . Comme  $R'$  est égal à  $K$ , à un facteur constant près, on peut toujours choisir  $\alpha$  assez voisin de 2 pour que  $R' > \theta'$ ; moyennant quoi, *la convergence est assurée jusqu'au point frontière*.

46. *Calcul du développement*. — Appelons  $F$ , le point frontière de droite et affectons de l'indice un les quantités correspondantes. Dans le cas I, on a, d'après la remarque du n° 43,

$$\theta = \varepsilon^\beta = K \theta_1^\mu \theta_1^{\nu},$$

$K$  désignant une constante et  $\mu, \nu$  deux entiers tels que  $\mu r_1 + \nu < 2r_1 - 1$ . D'autre part,

$$\varepsilon^2 = \frac{A_0^2}{a} \theta' \theta = \frac{A_1^2}{a_1} \theta_1^\mu \theta_1^{\nu-1};$$

d'où

$$\theta' = K' \theta_1^{\mu'} \theta_1^{\nu'}, \quad \mu' = 2 - \mu, \quad \nu' = -\nu - 1, \quad K' = \text{const.}$$

Ceci étant, la déviation au point  $M$  situé à la distance  $\xi$  d'ordre  $\alpha$  du point frontière  $F$  nous est donnée par un développement de la forme

$$D = \sum \sum \sum \theta_1^n \theta_1^p \zeta_1^q D_{npq}(\xi).$$

En appliquant la méthode de la note (E) aux coefficients  $D_{npq}$ , puis en remplaçant  $\xi$  par  $\theta s = K s \theta_1^\mu \theta_1^{\nu}$  et divisant enfin par  $A_0 \theta$ , on obtient un développement limité de la fonction  $z$  et par conséquent de  $Y$  :

$$(117) \quad Y = \sum \sum \sum \theta_1^n \theta_1^p \zeta_1^q Y_{npq}^1(s),$$

où chaque coefficient  $Y_{npq}^1$  se présente sous la forme d'un développement limité procédant suivant certaines puissances croissantes, positives ou négatives, de  $s$ .

Mais ce développement ne peut être poursuivi jusqu'au point  $F$ .

Pour atteindre ce point, nous devons développer  $Y$  suivant les puissances de  $\theta', \theta, \zeta$ . Les coefficients  $Y_{npq}$  de ce nouveau développement se calculent par

des quadratures, au moyen des formules du n° 22. Chacune de ces quadratures introduit une *constante inconnue*.

Les variables  $\theta'$  et  $\theta$  s'expriment en fonction de  $\theta'_1$  et  $\theta_1$  comme il a été indiqué plus haut. Quant à la variable  $\zeta$ , elle est obtenue en réduisant la différence  $z_0 - Z_0$  à sa partie constante, c'est-à-dire indépendante de  $\xi_0$ ; elle se présente sous la forme d'une série asymptotique en  $\theta'_1, \theta_1, \zeta_1$ .

Le nouveau développement de  $Y$  étant limité, nous pouvons y remplacer  $\theta', \theta, \xi$  par leurs valeurs en fonction de  $\theta'_1, \theta_1, \xi_1$ , puis ordonner suivant ces dernières variables. Le développement limité ainsi obtenu doit coïncider avec (118), en ce sens que chacun de ses coefficients doit constituer un développement limité du coefficient correspondant  $Y_{npq}^1(s)$ . *En égalant les noyaux*, on peut déterminer les constantes d'intégration inconnues.

47. *Dans le cas II*, on pourrait procéder de la même manière. Mais, la variable  $\theta'$  tend lentement vers zéro avec  $\varepsilon$ . Au contraire,  $\theta$  est infiniment petit par rapport à toute puissance de  $\theta'$ . On ne devrait donc garder dans le développement que les termes ne contenant pas  $\theta$ . On obtiendrait de la sorte un développement fort incomplet et de *convergence asymptotique très lente*.

Dans ces conditions, il est préférable de *développer*  $Y$  *seulement suivant les puissances croissantes de*  $\theta$ , variable tendant rapidement vers zéro. Ceci est pratiquement possible, parce que l'équation différentielle de raccordement est linéaire en  $s$ .

L'équation (32) s'écrit

$$(119) \quad (Y + U) \frac{dY}{ds} = -\theta' \left( 1 + \theta \frac{s}{a} \right),$$

en posant

$$U = W + \zeta + B\theta s^2, \quad W = Z_0 + s.$$

Posons

$$(120) \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n Y_n$$

et substituons dans (119). Nous avons d'abord

$$\theta' \frac{ds}{dY_0} + s = -Y_0 - Z_0 - \zeta;$$

d'où

$$(121) \quad s = C e^{\frac{-Y_0}{\theta'}} + \theta' - Y_0 - Z_0 - \zeta.$$

La constante d'intégration  $C$  se calcule toujours par *comparaison des noyaux*. On a ensuite

$$\frac{dY_1}{ds} (Y_0 + W + \zeta) + Y_1 \frac{dY_0}{ds} = -\theta' \frac{s}{a} - b_0 s^2 \frac{dY_0}{ds}.$$

D'où l'on déduit  $Y_1$  par des quadratures faciles, la constante d'intégration se déterminant toujours par comparaison des noyaux. En continuant ainsi, on peut calculer de proche en proche tous les coefficients  $Y_n$ . Chacun d'eux est une fonction de  $\theta', \zeta, s$  et peut être développé suivant les puissances de  $\theta', \zeta$ .

48. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours entre  $F_1$  et  $M$  est donné par (115) en fonction des variables  $\theta'_1, \theta_1, \zeta_1$ . Quand  $M$  est voisin de  $F$ , les coefficients  $T_{npq}$  peuvent être développés suivant les puissances de  $\xi = \theta s$ . En remplaçant  $\theta$  par sa valeur en fonction de  $\theta'_1$  et  $\theta_1$ , on obtient un développement en  $\theta'_1, \theta_1, \zeta_1$ , dont les coefficients sont fonctions de  $s$ .

D'autre part, la formule (59) nous permet de calculer le développement de  $\varepsilon\omega t$  suivant les variables  $\theta', \theta, \zeta$ . Les coefficients de ce développement sont donnés par des quadratures introduisant des *constantes inconnues*. Ces constantes se déterminent en remplaçant  $\theta', \theta, \zeta$  en fonction de  $\theta'_1, \theta_1, \zeta_1$  et *égalant les noyaux*.

Dans le cas II, il est préférable de poser

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_0}{\alpha} \theta (T_0 + \theta T_1 + \dots).$$

En utilisant la formule (59), on calcule les  $T_i$  par des quadratures, dont les constantes se déterminent comme ci-dessus par comparaison des noyaux.

49. *Cas où la fonction  $\lambda$  est holomorphe au voisinage d'un point frontière de première espèce.* — L'ordre  $r$  est nécessairement le même à droite et à gauche; en outre, il est entier et pair. On peut supposer  $\sigma = -1$ ,  $\sigma' = 1$ ,  $\sigma'' = -1$  à droite et à gauche. Au n° 32, on avait pris  $\sigma = \sigma' = \sigma'' = 1$ . Pour rentrer dans la convention ci-dessus, il suffit donc, dans ce numéro et les suivants, de changer  $\xi$  en  $-\xi$ ,  $s$  en  $-s$ ,  $z$  en  $-z$ ,  $Z$  en  $-Z$ ,  $\varphi$  en  $-\varphi$ . Ceci entraîne le changement de  $B$  en  $-B$ , donc de  $b_{2i}$  en  $-b_{2i}$ , les  $b_{2i+1}$  restant inchangés.

Au n° 36, nous nous trouvons dans le deuxième cas. Mais, nous avons intérêt à prendre  $Z_0 = z_0$ , donc  $\zeta = 0$ ; car, dans ce cas, la fonction  $z$  est la même à droite et à gauche du point frontière; on y suppose simplement  $s < 0$  à droite et  $s > 0$  à gauche.

## CHAPITRE V.

### CALCUL EXPLICITE DES PREMIERS TERMES DES DIFFÉRENTS DÉVELOPPEMENTS.

#### I. — ARC SUPÉRIEUR.

50. *Calcul de la déviation* (cf. nos 24 à 27). — Nous calculerons seulement les deux premiers termes, ce qui nous donnera une *erreur du sixième ordre* :

$$D = A_0 \theta (D_1 + \theta D_2 + \dots).$$



Nous allons calculer tout de suite les *noyaux*  $N(H_0)$  et  $N(H_1)$ . On a (n° 25)

$$Z = \log s + \dots, \quad e^{-Z} = 1 + \frac{1}{s} + \dots,$$

D'où

$$N(H_0) = N(Z) = \log s.$$

Pour avoir  $N(H_1)$ , nous devons calculer, dans le développement de  $Y_1$ , les termes de degrés un et zéro en  $s$ . Or, on a, d'après (56) et (63),

$$Y_1 = - \int_0^Z e^{-Z} s \left( \frac{W}{a} + b_0 s \right) dZ = \int_0^Z e^{-Z} [-\alpha_0 W^2 + \alpha_1 WZ - b_0 Z^2] dZ,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(122) \quad \alpha_n = \frac{1}{a} + (n+1)b_0.$$

En remplaçant  $W$  par  $e^Z - 1$ , on a une intégrale élémentaire. On peut d'ailleurs intégrer les termes en  $e^{-Z}$  de 0 à  $+\infty$ . Remplaçons enfin, dans le résultat,  $e^Z$  par  $s + 1 + Z$  et  $Z$  par  $\log s$ ; puis, multiplions par  $1 + \frac{1}{s}$ ; nous obtenons finalement, par un calcul facile,

$$N(H_1) = \alpha_1 \frac{\log^2 s}{2} + \alpha_0 \log s - 3\alpha_1.$$

Effectuons maintenant l'identification de l'équation (69). Pour simplifier l'écriture, posons

$$X = \xi(1 + B\xi) = \frac{b - \lambda}{A_0}.$$

Nous avons d'abord

$$D'_1(\xi) = \frac{x}{aX} = \frac{1}{\xi} + \dots$$

D'où, en utilisant  $N(D_1) = N(H_0)$ ,

$$(123) \quad D_1(\xi) = \log s - P, \quad \log s = \log \xi - \log \theta,$$

en posant

$$(124) \quad P = \int_0^\xi \left( \frac{1}{\xi} - \frac{x}{aX} \right) d\xi = \int_0^\xi \frac{1 + aB}{a(1 + B\xi)} d\xi.$$

On a ensuite

$$D'_2(\xi) = \frac{x(P - \log s)}{aX^2} = -\frac{\log s}{\xi^2} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \log s}{\xi} + \dots$$

En intégrant et utilisant  $N(D_2) = N(H_1)$ , on trouve

$$(125) \quad D_2(\xi) = \frac{1 + \log s}{\xi} + \alpha_1 \frac{\log^2 s}{2} + \alpha_0 \log s - 3\alpha_1 + P_1 + P_2 \log \theta,$$

en posant

$$(126) \quad P_1 = \int_0^{\xi} \left[ \frac{x(P - \log \xi)}{aX^2} + \frac{\log \xi}{\xi^2} - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \log \xi}{\xi} \right] d\xi,$$

$$(127) \quad P_2 = \int_0^{\xi} \left[ \frac{x}{aX^2} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{\alpha_1}{\xi} \right] d\xi.$$

51. *Calcul du temps.* — On a (n° 28)

$$\begin{aligned} a\Theta_1 &= Z, & aN(\Theta_1) &= \log s; \\ a\Theta_2 &= H_1 + \frac{1}{a} \int_0^Z s dZ = H_1 + \frac{1}{a} \left( s - \frac{Z^2}{2} \right) & aN(\Theta_2) &= N(H_1) - \frac{\log^2 s}{2a}, \\ & & aN(\Theta_2) &= b_0 \log^2 s + \alpha_0 \log s - 3\alpha_1. \end{aligned}$$

Puis,

$$aT_1'(\xi) = \frac{1}{X} = \frac{1}{\xi} + \dots;$$

d'où

$$(128) \quad aT_1 = \log s - Q,$$

avec

$$(129) \quad Q = \int_0^{\xi} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{X} \right) d\xi = \int_0^{\xi} \frac{B}{1 + B\xi} d\xi.$$

Puis,

$$aT_2'(\xi) = \frac{P - \log s}{X^2} = \frac{-\log s}{\xi^2} + \frac{\alpha_0 + 2b_0 \log s}{\xi} + \dots,$$

d'où

$$(130) \quad aT_2 = \frac{1 + \log s}{\xi} + b_0 \log^2 s + \alpha_0 \log s - 3\alpha_1 + Q_1 + Q_2 \log \theta,$$

avec

$$(131) \quad \begin{cases} Q_1 = \int_0^{\xi} \left( \frac{P - \log \xi}{X^2} + \frac{\log \xi}{\xi^2} - \frac{\alpha_0 + 2b_0 \log \xi}{\xi} \right) d\xi, \\ Q_2 = \int_0^{\xi} \left( \frac{1}{X^2} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{2b_0}{\xi} \right) d\xi. \end{cases}$$

En remplaçant  $\xi$  par  $a$ , ces formules permettent en particulier de calculer la *déviaton au sommet supérieur* et le *temps de parcours total de l'arc supérieur*.

## II. — ARC DE SECONDE ESPÈCE.

52. *Calcul de la déviaton.* — Nous avons d'abord, d'après (18) et avec les notations de la formule (79) :

$$R_1 = \frac{x}{\lambda'}, \quad R_2 = \frac{x(\lambda' - x\lambda'')}{\lambda'^4} + \dots$$

Supposons maintenant que l'ordre à droite du point frontière F de gauche soit  $r = 2$ . Nous appliquons la formule (93) :

$$(132) \quad u = A_0 \theta^2 (W + \theta U_1 e^\varphi + \theta^2 U_2 e^{2\varphi} + \dots).$$

Les formules (88) et (89) nous donnent d'abord

$$(133) \quad F_1 = \frac{s}{a} W - 3 b_0 s^2 W^2, \quad F_2 = -4 b_1 s^3 W^2 + U_1 e^\varphi \left( \frac{s}{a} + \frac{U_1 e^\varphi}{W} \right).$$

La formule (87) donne ensuite

$$(134) \quad U_1 = \frac{M_1}{a} + b_0 M_2, \quad U_2 = \frac{M_3}{a^2} + \frac{b_0}{a} M_4 + b_0^2 M_5 + b_1 M_6,$$

en posant

$$(135) \quad \left\{ \begin{array}{ll} M_1 = \int_{\infty}^{\varphi} s W e^{-\varphi} d\varphi, & M_2 = -3 \int_{\infty}^{\varphi} s^2 W^2 e^{-\varphi} d\varphi, \\ M_3 = \int_{\infty}^{\varphi} M_1 \left( M_1 \frac{e^\varphi}{W} + s \right) d\varphi, & M_4 = \int_{\infty}^{\varphi} M_2 \left( s + 2 M_1 \frac{e^\varphi}{W} \right) d\varphi, \\ M_5 = \int_{\infty}^{\varphi} M_2^2 \frac{e^\varphi}{W} d\varphi, & M_6 = -4 \int_{\infty}^{\varphi} s^3 W^2 e^{-\varphi} d\varphi. \end{array} \right.$$

En faisant  $s = 0$ , on obtient les coefficients  $M_i^0$  permettant le calcul de la *déviations en F*. Nous donnerons leurs valeurs numériques dans un travail ultérieur.

53. *Calcul du temps.* — Nous appliquons d'abord la méthode du n° 31. Nous avons seulement besoin de connaître la constante  $\Gamma_0$ . On a, en affectant de l'indice *un* les données relatives au point frontière  $F_1$  de droite,

$$a_1^2 K_0(X) = C;$$

d'où

$$\Gamma_0 = \frac{C}{a_1^2} \int_0^x e^{-X(1 + C e^{-X})} dX = \frac{C(2 + C)}{2a_1^2} = \frac{Z_0^2 - 1}{2a_1^2};$$

d'où

$$C_2 = \frac{1 - Z_0^2}{2A_1^3}.$$

On a ensuite

$$J_1 = \int_{a_1}^x \frac{dx}{x\lambda}, \quad J_2 = \int_{a_1}^x \frac{dx}{x\lambda^{2/3}} + \frac{1}{3\lambda^{1/3}} + \frac{1 - 3Z_0^2}{6A_1^3}.$$

Appliquons maintenant la méthode du n° 35. Nous avons

$$J = \frac{A_0}{a^2} \theta^2 \left[ - \int_0^s W ds + \theta \int_0^s \left( U_1 e^\varphi + \frac{2s}{a} W \right) ds + \dots \right].$$

Pour  $s$  très grand, la formule (84) nous donne

$$W = \frac{1}{2s} \left( 1 - \frac{1}{4s^3} + \dots \right).$$

Le noyau de la première intégrale du crochet ci-dessus est donc

$$\frac{\log s}{2} + n_1, \quad \text{avec} \quad n_1 = \int_0^1 W ds + \int_1^\infty \left( W - \frac{1}{2s} \right) ds.$$

D'après (134), la seconde intégrale s'écrit

$$\frac{1}{a} \int_0^s (2sW + M_1 e^\varphi) ds + b_0 \int_0^s M_2 e^\varphi ds.$$

Le noyau de  $\int_0^s 2sW ds$  est

$$n_2 = \int_0^\infty (2sW - 1) ds.$$

Pour calculer les noyaux de  $\int_0^s M_1 e^\varphi ds$  et  $\int_0^s M_2 e^\varphi ds$ , il nous faut d'abord les développements asymptotiques des fonctions sous le signe  $\int$ . Ils nous sont donnés par la Note (D). Pour  $M_1$ , on a  $m = 0$ ,  $c_0 = \frac{1}{2}$ ; donc,  $g_0 = -\frac{1}{2}$ . Pour  $M_2$ , on a  $m = 0$ ,  $c_0 = -\frac{3}{4}$ ; donc,  $g_0 = \frac{3}{4}$ . Dès lors, les noyaux cherchés sont

$$n_3 = \int_0^\infty \left( M_1 e^\varphi + \frac{1}{2} \right) ds, \quad n_4 = \int_0^\infty \left( M_2 e^\varphi - \frac{3}{4} \right) ds.$$

En réduisant les intégrales à leurs noyaux, nous avons donc

$$J = \frac{A_0}{a^2} \theta^3 \left[ -\frac{\log s}{2} - n_1 + \theta \left( \frac{n_2 + n_3}{a} + b_0 n_4 \right) + \dots \right].$$

Calculons ensuite le noyau de  $J_1$ . Nous avons

$$\lambda' = A_0(2\xi + 3b_0\xi^2 + \dots), \quad \frac{1}{x\lambda'} = \frac{1}{2A_0a\xi} + \dots$$

D'où

$$N(J_1) = \frac{\log \xi}{2A_0a} + N_1,$$

avec

$$N_1 = \int_{F_1}^F \left( \frac{1}{x\lambda'} - \frac{1}{2A_0a\xi} \right) dx.$$

Nous n'avons pas besoin de calculer le noyau de  $J_2$ , car nous laissons tomber le terme en  $\varepsilon^4$  ou  $\theta^6$ , puisque le développement est arrêté au terme en  $\theta^4$ .

Finalement, l'intégrale J, prise de F<sub>1</sub> à F, vaut

$$(136) \quad J = \frac{A_0}{2a^2} \theta^3 (\log \theta - 2n_1 + N_1) + \frac{A_0}{a^3} \theta^4 (n_2 + n_3 + ab_0 n_4) + \dots$$

La formule (26) nous permet ensuite de calculer le *temps de parcours de l'arc total*.

III. — ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE. CAS  $r = 1$ ,  $r_1 > 1$ .

54. *Départ du point frontière.* — Nous sommes dans le cas I du n° 36. Nous allons calculer le développement de Y jusqu'aux termes du troisième degré en  $\theta'$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ .

En appliquant les formules du n° 22 et posant, pour simplifier l'écriture,

$$I_{np} = \int_0^s \frac{s^n}{W^p} ds,$$

on trouve aisément

$$\begin{aligned} Y_{100} &= I_{01}, & Y_{110} &= -\frac{I_{11}}{a} - b_0 I_{22}, & Y_{101} &= -I_{02}, \\ Y_{120} &= \frac{b_0 - ab_1}{a} I_{32} + b_0^2 I_{43}, & Y_{111} &= \frac{I_{12}}{a} + 2b_0 I_{23}, & Y_{102} &= I_{03}, \\ Y_{200} &= -\int_0^s Y_{100} \frac{ds}{W^2}, & Y_{210} &= \int_0^s \left( 2b_0 \frac{s^2}{W} Y_{100} + \frac{s}{a} Y_{100} - Y_{110} \right) \frac{ds}{W^2}, \\ & & Y_{201} &= \int_0^s \left( 2 \frac{Y_{100}}{W} - Y_{101} \right) \frac{ds}{W^2}, \\ Y_{300} &= -\int_0^s \left( Y_{100} \frac{dY_{200}}{ds} + Y_{200} \frac{dY_{100}}{ds} \right) \frac{ds}{W} = \int_0^s \left( \frac{Y_{100}^2}{W} - Y_{200} \right) \frac{ds}{W^2}. \end{aligned}$$

Toutes ces intégrations sont faciles et *conduisent aux noyaux suivants*, où nous avons posé  $\nu = \frac{s}{Z_0}$ :

$$\begin{aligned} N(Y_{100}) &= \log \nu, & N(Y_{110}) &= Z_0 (\alpha_1 \log \nu - b_0), \\ N(Y_{101}) &= -\frac{1}{Z_0}, & N(Y_{120}) &= Z_0^2 \left[ 3(b_0 \alpha_1 - b_1) \log \nu + b_1 - \frac{7}{2} b_0^2 - \frac{b_0}{a} \right], \\ N(Y_{111}) &= \alpha_1 \log \nu - \alpha_2, & N(Y_{102}) &= \frac{1}{2Z_0^2}, & N(Y_{200}) &= -\frac{1}{Z_0}, \\ N(Y_{210}) &= \alpha_1 \frac{\log^2 \nu}{2} + \alpha_0 \log \nu - 3\alpha_1, \\ N(Y_{201}) &= \frac{1}{Z_0^2}, & N(Y_{300}) &= \frac{1}{2Z_0^2}. \end{aligned}$$

55. *Prolongement de l'arc.* — Avec les notations du n° 43, on trouve, en désignant par des accents les dérivées par rapport à  $\xi$  et posant

$$\begin{aligned}
 X &= \xi(1 + B\xi) = \frac{\lambda - b}{A_0}, \\
 D'_{100} &= \frac{x}{aX}, \quad D'_{110} = -\frac{xZ_0}{aX^2}, \quad D'_{101} = 0, \\
 D'_{120} &= \frac{xZ_0^2}{aX^3}, \quad D'_{111} = -\frac{x}{aX^2}, \quad D'_{102} = 0, \quad D'_{200} = 0, \\
 D'_{210} &= -\frac{x D_{100}}{aX^2}, \quad D'_{201} = 0, \quad D'_{300} = 0.
 \end{aligned}$$

En appliquant la méthode de la note (E) et tenant compte des noyaux ci-dessus, on trouve sans difficulté :

$$(137) \left\{ \begin{aligned}
 D_{100} &= \log v - P, \quad D_{110} = Z_0 \left( \frac{1}{\xi} + \alpha_1 \log v - b_0 - P_2 \right), \quad D_{101} = -\frac{1}{Z_0}; \\
 D_{120} &= Z_0^2 \left[ -\frac{1}{2\xi^2} + \frac{\alpha_2}{\xi} + 3(\alpha_1 b_0 - b_1) \log v + b_1 - \frac{7}{2} b_0^2 - \frac{b_0}{a} + P_3 \right]; \\
 D_{111} &= \frac{1}{\xi} + \alpha_1 \log v - b_0 - P_2, \quad D_{102} = \frac{1}{2Z_0^2}, \quad D_{200} = -\frac{1}{Z_0}; \\
 D_{210} &= \frac{1 + \log v}{\xi} + \alpha_1 \frac{\log^2 v}{2} + \alpha_0 \log v - 3\alpha_1 + P_4 + (\log \theta + \log Z_0) P_2; \\
 D_{201} &= \frac{1}{Z_0^2}, \quad D_{300} = \frac{1}{2Z_0^2}.
 \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules,  $P$ ,  $P_1$  et  $P_2$  sont les fonctions définies par les formules (124), (126) et (127);  $P_3$  et  $P_4$  ont les expressions suivantes :

$$(138) \left\{ \begin{aligned}
 P_3 &= \int_0^{\xi} \left[ \frac{x}{aX^3} - \frac{1}{\xi^3} + \frac{\alpha_2}{\xi^2} + 3 \frac{b_1 - \alpha_1 b_0}{\xi} \right] d\xi, \\
 P_4 &= \int_0^{\xi} \left[ x \frac{P - \log \xi}{aX^2} + \frac{\log \xi}{\xi^2} - \frac{\alpha_1 \log \xi + \alpha_0}{\xi} \right] d\xi.
 \end{aligned} \right.$$

De plus,  $v = \frac{\xi}{\theta Z_0}$ .

56. *Calcul du temps.* — Avec les notations du N° 44, on trouve

$$\begin{aligned}
 \Theta_{100} &= Y_{100}, \quad \Theta_{110} = -b_0 I_{22}, \quad \Theta_{101} = Y_{101}, \quad \Theta_{120} = -b_1 I_{32} + b_0^2 I_{43}, \\
 \Theta_{111} &= 2b_0 I_{23}, \quad \Theta_{102} = Y_{102}, \quad \Theta_{200} = Y_{200}, \\
 \Theta_{210} &= Y_{210} - \frac{1}{a} \int_0^s s \log u \frac{ds}{W^2}, \quad \Theta_{201} = Y_{201}, \quad \Theta_{300} = Y_{300}.
 \end{aligned}$$

Les noyaux résultent tous des calculs faits au numéro précédent; nous les reproduisons dans l'ordre correspondant à l'ordre ci-dessus :

$$\begin{aligned} \log v, \quad Z_0 b_0 (2 \log v - 1), \quad -\frac{1}{Z_0}, \quad Z_0^2 \left[ 3(2b_0^2 - b_1) \log v + b_1 - \frac{7}{2} b_0^2 \right], \\ b_0 (2 \log v - 3), \quad \frac{1}{2Z_0^2}, \quad -\frac{1}{Z_0}, \quad b_0 \log^2 v + \alpha_0 \log v - 2\alpha_2, \quad \frac{1}{Z_0^3}, \quad \frac{1}{2Z_0^2}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule (116), utilisant les dérivées  $D'_{npq}(\xi)$  calculées au numéro précédent, puis appliquant la méthode de la Note (E) et utilisant les noyaux ci-dessus, on trouve sans difficulté;

$$(139) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{100} &= \log v - Q, & T_{110} &= Z_0 \left( \frac{1}{\xi} + 2b_0 \log v - b_0 - Q_2 \right), & T_{101} &= -\frac{1}{Z_0}; \\ T_{120} &= Z_0^2 \left[ -\frac{1}{2\xi^2} + \frac{3b_0}{\xi} + 3(2b_0^2 - b_1) \log v + b_1 - \frac{7}{2} b_0^2 + Q_3 \right]; \\ T_{111} &= \frac{1}{\xi} + 2b_0 \log v - 3b_0 - Q_2, & T_{102} &= \frac{1}{2Z_0^2}, & T_{200} &= -\frac{1}{Z_0}; \\ T_{210} &= \frac{1 + \log v}{\xi} + b_0 \log^2 v + \alpha_0 \log v - 2\alpha_2 + Q_1 + (\log \theta + \log Z_0) Q_2; \\ & & T_{201} &= \frac{1}{Z_0^2}, & T_{300} &= \frac{1}{2Z_0^2}. \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules,  $Q$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les fonctions définies par les formules (129) et (131); de plus,

$$(140) \quad Q_3 = \int_0^\xi \left[ \frac{1}{X^3} - \frac{1}{\xi^3} + \frac{3b_0}{\xi^2} + 3 \frac{b_1 - 2b_0^2}{\xi} \right] d\xi.$$

#### IV. — ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE. CAS $r = r_1 = 1$ .

57. *Calcul de la déviation.* — Nous nous bornerons à calculer le développement jusqu'aux termes du second ordre<sup>(1)</sup> en  $\theta, \zeta$ . Nous avons les formules (95). Nous déterminons ensuite la fonction  $\varphi$  par la condition qu'elle s'annule avec  $s$ ; de sorte que

$$e^\varphi = k W e^{-Z}, \quad k = \frac{e^{Z_0}}{Z_0}, \quad W = Z + s = C e^Z - 1.$$

Nous avons ensuite, par les formules (55) et (56),

$$Y_{01} = 1 - e^\varphi, \quad Y_{10} = k \int_{Z_0}^Z (-\alpha_0 W^2 + \alpha_1 WZ - b_0 Z^2) e^{-Z} dZ.$$

L'intégrale ci-dessus est élémentaire. On a ensuite, en posant (114),

$$D_{00} = Z, \quad D_{01} = e^{-\varphi}, \quad D_{10} = Y_{10} e^{-\varphi}.$$

(1) On peut assez facilement calculer les coefficients des termes du troisième ordre; mais, le calcul de leurs noyaux paraît compliqué.

Pour calculer les noyaux, nous utilisons la formule

$$Z = \log u + \frac{\nu}{s} + \dots, \quad u = \frac{s}{C}, \quad \nu = 1 + \log u;$$

d'où

$$e^{-\nu} = \frac{1}{kC} \left( 1 + \frac{1}{s} + \dots \right).$$

On trouve, par un calcul facile et en posant  $Z_0 + 1 = m$ ,

$$\begin{aligned} N(D_{00}) &= \log u, & N(D_{01}) &= \frac{Z_0}{m}, \\ N(D_{10}) &= \alpha_1 \frac{\log^2 u}{2} + \alpha_0 \log u - \alpha_1 \left( \frac{Z_0^2}{2} + Z_0 + 2 + \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

On a ensuite, par l'équation (10) et en utilisant une notation du n° 55,

$$D'_{00} = \frac{x}{\alpha X}, \quad D'_{01} = 0, \quad D'_{10} = -D_{00} \frac{x}{\alpha X^2}.$$

En appliquant la Note (E) et utilisant les noyaux ci-dessus, on trouve aisément

$$(141) \quad \left\{ \begin{aligned} D_{00} &= \log u - P, & D_{01} &= \frac{Z_0}{m}, \\ D_{10} &= \alpha_1 \frac{\log^2 u}{2} + \alpha_0 \log u + \frac{1 + \log u}{\xi} \\ &\quad - \alpha_1 \left( \frac{Z_0^2}{2} + Z_0 + 2 + \frac{1}{m} \right) + P_4 + (\log \theta + \log m - Z_0) P_2. \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules,  $u$  doit être remplacé par  $\frac{\xi e^{Z_0}}{\theta m}$ , de sorte que

$$\log u = \log \xi + Z_0 - \log \theta - \log m.$$

En outre,  $P$ ,  $P_2$ ,  $P_4$  sont les fonctions définies par (124), (127), (138).

58. *Calcul du temps.* — La formule (59) nous donne immédiatement, avec les notations du n° 44,

$$\Theta_{00} = Z - Z_0, \quad \Theta_{10} = Y_{10} e^{-\nu} + \frac{1}{a} \int_{Z_0}^Z s dZ, \quad \Theta_{01} = Y_{01} e^{-\nu} = e^{-\nu} - 1.$$

D'où, en utilisant les noyaux calculés précédemment,

$$\begin{aligned} N(\Theta_{00}) &= \log u - Z_0, & N(\Theta_{01}) &= -\frac{1}{m}, \\ N(\Theta_{10}) &= b_0 \log^2 u + \alpha_0 \log u - b_0 Z_0^2 - \alpha_1 \left( Z_0 + 2 + \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

On a ensuite, par la formule (116),

$$T'_{00} = \frac{1}{X}, \quad T'_{01} = 0, \quad T'_{10} = -\frac{D_{00}}{X^2} = \frac{P - \log u}{X^2}.$$



En appliquant la note (E) et tenant compte des noyaux ci-dessus, on trouve facilement

$$\begin{aligned} T_{00} &= \log u - Z_0 - Q, & T_{01} &= -\frac{1}{m}, \\ T_{10} &= b_0 \log^2 u + \alpha_0 \log u + \frac{1 + \log u}{\xi} \\ &\quad - b_0 Z_0^2 - \alpha_1 \left( Z_0 + 2 + \frac{1}{m} \right) + Q_1 + (\log \theta + \log m - Z_0) Q_2, \end{aligned}$$

où  $Q, Q_1, Q_2$  sont toujours définis par (129) et (131).

V. — ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE. CAS  $r = r_1 = 2$ .

59. *Calcul de la déviation.* — On a

$$r' = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon^2 = \frac{A_0^2}{a} \theta^2, \quad D = A_0 \theta^2 z, \quad W = Z + s^2.$$

La formule (100) devient

$$\frac{W}{s^2} = 1 + \frac{H}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{H}{3s^5} + \dots;$$

d'où

$$\frac{1}{W^2} = \frac{1}{s^4} \left( 1 - \frac{2H}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \dots \right).$$

Déterminons la fonction  $\varphi$  par la condition qu'elle s'annule pour  $s = \infty$ ; on a, pour  $s$  très grand,

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{3s^3} + \frac{2H}{5s^5} - \frac{1}{3s^6} + \dots, \\ e^\varphi &= 1 - \frac{1}{3s^3} + \frac{2H}{5s^5} + \dots, & e^{-\varphi} &= 1 + \frac{1}{3s^3} - \frac{2H}{5s^5} + \dots \end{aligned}$$

Les formules (54) à (58) donnent, en appelant  $\varphi_0$  la valeur de  $\varphi$  pour  $s = 0$  et posant  $e^{\varphi_0} = K$ ,

$$\begin{aligned} Y_{01} &= K - e^\varphi, & Y_{10} &= -\frac{I_1}{a} - b_0 I_2, & Y_{02} &= K^2 I_3, \\ Y_{11} &= K \left( \frac{I_4}{a} + 2b_0 I_5 \right), & Y_{20} &= -b_1 I_6 + \frac{I_7}{a^2} + \frac{b_0}{a} I_8 + b_0^2 I_9, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^s \frac{s e^\varphi}{W} ds, & I_2 &= \int_0^s \frac{s^3 e^\varphi}{W^2} ds, & I_3 &= \int_0^s \frac{e^{-\varphi}}{W^3} ds, & I_4 &= \int_0^s \left( s - \frac{2I_1 e^{-\varphi}}{W} \right) \frac{ds}{W^2}, \\ I_5 &= \int_0^s \frac{s^3 - I_2 e^{-\varphi}}{W^3} ds, & I_6 &= \int_0^s \frac{e^\varphi s^4}{W^2} ds, & I_7 &= \int_0^s \frac{I_1 (I_1 e^{-\varphi} - sW)}{W^3} ds, \\ I_8 &= \int_0^s (s^2 - I_2 e^{-\varphi}) (sW e^\varphi - 2I_1) \frac{ds}{W^3}, & I_9 &= \int_0^s e^\varphi (s^2 - I_2 e^{-\varphi})^2 \frac{ds}{W^3}. \end{aligned}$$

Il faut avoir les *noyaux de toutes ces intégrales*. En utilisant la Note (B) et les développements ci-dessus, on trouve facilement

$$\begin{aligned} N(I_1) &= \log s + n_1, & n_1 &= \int_0^1 \frac{s e^{-\varphi}}{W} ds + \int_1^\infty \left( \frac{s e^{-\varphi}}{W} - \frac{1}{s} \right) ds; \\ N(I_2) &= \log s + n_2, & n_2 &= \int_0^1 \frac{s^3 e^{-\varphi}}{W^2} ds + \int_1^\infty \left( \frac{s^3 e^{-\varphi}}{W^2} - \frac{1}{s} \right) ds; \\ N(I_6) &= n_6 = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-\varphi} s^4}{W^2} - 1 \right) ds, & N(I_8) &= n_8 = \int_0^\infty \left[ \frac{(s^3 - I_2 e^{-\varphi})(s W e^{-\varphi} - 2 I_1)}{W^3} - 1 \right] ds; \\ N(I_9) &= n_9 = \int_0^\infty \left[ \frac{e^{-\varphi} (s^3 - I_2 e^{-\varphi})^2}{W^3} - 1 \right] ds; \\ N(I_3) &= n_3, & N(I_4) &= n_4, & N(I_5) &= n_5, & N(I_7) &= n \end{aligned}$$

sont les valeurs finies que prennent les intégrales correspondantes pour  $s = \infty$ .

Avec les notations de la formule (114), on a ensuite

$$D_{00} = Z, \quad N(D_{00}) = H, \quad D_{01} = 1 + Y_{01} e^{-\varphi} = K e^{-\varphi}, \quad N(D_{01}) = K;$$

puis

$$D_{np} = Y_{np} e^{-\varphi}, \quad N(D_{np}) = N(Y_{np}),$$

car le développement de chaque  $Y_{np}$  ne contient aucune puissance positive de  $s$ .

En utilisant les résultats précédents, on a les *noyaux de tous les  $D_{np}$* . Pour faire le prolongement, nous utilisons l'équation (10). En identifiant, on trouve que toutes les dérivées  $D'_{np}$  sont nulles, sauf

$$D'_{10} = \frac{x}{a \xi^2 (1 + B \xi)}.$$

On en déduit que tous les  $D_{np}$  sont égaux à leurs noyaux, sauf  $D_{10}$ , qui se calcule par la Note (E). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} D_{00} &= H, & D_{10} &= -\frac{1}{\xi} + \alpha_0 (\log \theta - \log \xi) - \frac{n_1}{a} - b_0 n_2 + P_3, & D_{01} &= K, \\ D_{20} &= -b_1 n_6 + \frac{n_7}{a^2} + \frac{b_0}{a} n_8 + b_0^2 n_9, & D_{11} &= K \left( \frac{n_4}{a} + 2 b_0 n_5 \right), & D_{02} &= K^2 n_3; \end{aligned}$$

avec

$$P_3 = \int_0^\xi \left[ \frac{x}{a \xi^2 (1 + B \xi)} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{\alpha_0}{\xi} \right] d\xi.$$

60. *Calcul du temps*. — Avec les notations du n° 44, on a, en se reportant à la formule (59) et supposant les  $D_{np}$  exprimés en fonction de  $s$  :

$$\begin{aligned} \Theta_{00} &= Z - Z_0, & \Theta_{10} &= D_{10} + \frac{1}{a} \int_0^s s D'_{00} ds = D_{10} + \frac{1}{a} \int_0^s \frac{s}{W} ds, & \Theta_{01} &= D_{01} - 1, \\ \Theta_{20} &= D_{20} + \int_0^s \frac{s}{a} \left( D'_{10} + \frac{s}{a} D'_{00} \right) ds = D_{20} + \frac{1}{a^2} \int_0^s s I_1 e^{-\varphi} \frac{ds}{W^2} + \frac{b_0}{a} \int_0^s \frac{s}{W^2} (I_2 e^{-\varphi} - s^3) ds, \\ \Theta_{11} &= D_{11} + \frac{1}{a} \int_0^s s D'_{01} ds = D_{11} - \frac{K}{a} \int_0^s e^{-\varphi} \frac{s ds}{W^2}, & \Theta_{02} &= D_{02}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$N(\Theta_{00}) = H - Z_0,$$

$$N(\Theta_{10}) = N(D_{10}) + \frac{\log s}{a} + \frac{n_{10}}{a} = -b_0 \log s + \frac{n_{10} - n_1}{a} - b_0 n_2,$$

$$N(\Theta_{01}) = K - I,$$

$$N(\Theta_{20}) = N(D_{20}) + \frac{n_{11}}{a^2} + \frac{b_0}{a} n_{12} = -b_1 n_6 + b_0^2 n_9 + \frac{n_7 + n_{11}}{a^2} + \frac{b_0}{a} (n_8 + n_{12});$$

$$N(\Theta_{11}) = N(D_{11}) - \frac{K}{a} n_{13} = \frac{K}{a} (n_4 - n_{13}) + 2K b_0 n_5,$$

$$N(\Theta_{02}) = K^2 n_3,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} n_{10} &= \int_0^1 \frac{s}{W} ds + \int_0^\infty \left( \frac{s}{W} - \frac{1}{s} \right) ds, & n_{11} &= \int_0^\infty s I_1 e^{-\varphi} \frac{ds}{W^2}, \\ n_{12} &= \int_0^\infty s I_2 e^{-\varphi} \frac{ds}{W^2} + \int_1^\infty \left( 1 - \frac{s^4}{W^2} \right) ds, & n_{13} &= \int_0^\infty e^{-\varphi} \frac{s ds}{W^2}. \end{aligned}$$

La formule (116) nous montre ensuite, en tenant compte du numéro précédent, que les  $T_{np}$  sont constants, donc égaux aux  $N(\Theta_{np})$  correspondants, sauf  $T_{10}$ , dont la dérivée est

$$T'_{10} = \frac{1}{\xi^2(1+B\xi)}.$$

On en déduit

$$T_{10} = -\frac{1}{\xi} + b_0 (\log \theta - \log \xi) + \frac{n_{10} - n_1}{a} - b_0 n_2 + Q_4,$$

avec

$$Q_4 = \int_0^\xi \left[ \frac{1}{\xi^2(1+B\xi)} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{b_0}{\xi} \right] d\xi.$$

#### VI. — ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE. CAS $r = 2$ , $r_1 < 2$ .

61. *Calcul de la déviation.* — Nous appliquons la méthode du n° 41, en poussant le développement de  $Y$  jusqu'aux termes du second degré en  $\theta$ ,  $\zeta$ , comme précédemment. On a d'abord, en procédant à l'identification de (108),

$$(142) \quad \begin{cases} WX_{10} = -S_{10}, & WX_{01} = -S_{01}, \\ WX_{20} = -\frac{W'}{2} X_{10}^2 - S_{20} - S'_{10} X_{10}, & WX_{02} = -\frac{W'}{2} X_{01}^2 - S_{02} - S'_{01} X_{01}, \\ WX_{11} = -W' X_{10} X_{01} - S_{11} - S'_{10} X_{01} - S'_{01} X_{10}. \end{cases}$$

On peut ensuite calculer  $U_{10}$ ,  $U_{01}$ ,  $U_{20}$ ,  $U_{11}$  et  $U_{02}$  par des quadratures; voici les dérivées :

$$(143) \left\{ \begin{array}{l} U'_{10} = S e^{-\psi} \left( \frac{W}{a} + b_0 S^2 \right), \quad U'_{01} = e^{-\psi}, \\ U'_{20} = \frac{1}{a} \left[ (W + 2S^2) U_{10} + S^2 e^{-\psi} \left( \frac{W}{a} + b_0 S^2 \right) \right] + U_{10}^2 e^{\psi} + 3b_0 S^2 U_{10} + b_1 S^4 e^{-\psi}, \\ U'_{11} = \frac{1}{a} [(W + 2S^2) U_{01} + S e^{-\psi}] + 2U_{10} U_{01} e^{\psi} + 3b_0 S^2 U_{01}, \quad U'_{02} = U_{01}^2 e^{\psi}. \end{array} \right.$$

Nous aurons seulement besoin de connaître l'ordre infinitésimal de ces fonctions par rapport à  $Z$ , quand  $Z$  est infiniment petit.

Abordons maintenant le calcul des constantes  $\Gamma_{np}$  au moyen de la formule (107). A cet effet, reprenons les intégrales  $I_n$  du n° 59. On a, avec la notation de Landau,

$$I_1 = k \int_0^Z S W e^{-\psi} dZ = o(Z^4),$$

car  $S = o(Z^2)$  et  $W = o(Z)$ . Puis

$$I_2 = k \int_0^Z S^3 e^{-\psi} dZ = o(Z^7).$$

Donc,

$$I_{10}(Z) = -\frac{I_1}{a} - b_0 I_2 = o(Z^4).$$

D'autre part,

$$WX_{10} = -S_{10} = -U_{10} e^{\psi}.$$

Or,  $U'_{10} = o(Z^3)$ : donc,  $U_{10} = o(Z^4)$ ;  $WX_{10} = o(Z^4)$ ; d'où  $\Gamma_{10} = 0$ .

Prenons ensuite

$$I_{01} = -e^{\psi} = -k W e^{-\psi} = o(Z).$$

On a, d'autre part,

$$WX_{01} = -S_{01} = -U_{01} e^{\psi} = o(Z);$$

donc,  $\Gamma_{01} = 0$  et par suite  $X_{01} = -1$ , ce que l'on peut vérifier facilement en dérivant  $U_{01} = W e^{-\psi}$ .

On vérifie ensuite facilement, en procédant comme pour  $I_1$  et  $I_2$ , que

$$I_6 = o(Z^9), \quad I_7 = o(Z^6), \quad I_8 = o(Z^9), \quad I_9 = o(Z^{12});$$

d'où  $I_{20} = o(Z^6)$ .

D'autre part,  $X_{10} = o(Z^3)$ ,  $S'_{10} = o(Z^3)$  et, d'après (143),  $U'_{20} = o(Z^5)$ ; d'où  $U_{20} = o(Z^6)$ . Donc, d'après (142),  $WX_{20} = o(Z^6)$ ; d'où  $\Gamma_{20} = 0$ .

On a maintenant, par (58),

$$\frac{dY_{11}}{ds} = \frac{V_{10}}{W} \left( \frac{Y_{01}}{W^2} - \frac{dY_{01}}{ds} \right) + \frac{V_{01}}{W} \left( \frac{Y_{10}}{W^2} - \frac{dY_{10}}{ds} \right).$$

Or,  $Y_{01} = I_{01} = -e^{-\varphi}$ ; donc, la première parenthèse est nulle. D'autre part,  $V_{01} = 1 + Y_{01} e^{-\varphi} = 0$ . Il s'ensuit que  $\frac{dY_{11}}{ds} = 0$ ; d'où  $Y_{11} = \Gamma_{11}$ . La cinquième formule (142) nous donne

$$WX_{11} = W'X_{10} - S_{11} + S'_{10} - W'X_{10} = -S_{11} + S'_{10} = o(Z^3); \quad \text{donc } \Gamma_{11} = 0.$$

On a enfin, par (58), et en tenant compte des résultats précédents,  $\frac{dY_{20}}{ds} = 0$ ; donc  $Y_{02} = \Gamma_{02}$ . D'autre part, (142) nous donne

$$WX_{02} = \frac{W'}{2} - S_{02}.$$

Or,

$$U'_{02} = W^2 e^{-\psi} = o(Z^2), \quad U_{02} = o(Z^3), \quad S_{02} = o(Z^3);$$

donc,  $WX_{02}$  tend vers  $\frac{1}{2}$  quand  $Z$  tend vers zéro. Donc,  $\Gamma_{02} = \frac{k}{2}$ . On en déduit

$$X_{02} = \frac{e^{\psi}}{2W} \quad \text{et} \quad U_{02} = \frac{e^{-\psi}(1 + 2SW) - 1}{2};$$

cette dernière formule est facile à vérifier par dérivation.

En définitive, on peut garder les valeurs de  $Y_{10}$  et  $Y_{20}$  trouvées dans la section précédente, comme on le savait *a priori*, d'après la remarque du n° 42.

Par contre,  $Y_{01}$ ,  $Y_{11}$  et  $Y_{02}$  sont remplacés par  $-e^{-\varphi}$ , 0 et  $\frac{k}{2}$ . On en conclut que  $D_{10}$  et  $D_{20}$  ne changent pas; mais, on a

$$D_{01} = 1 + Y_{01} e^{-\varphi} = 0, \quad D_{11} = 0, \quad D_{02} = \frac{k}{2} e^{-\varphi}, \quad N(D_{02}) = \frac{k}{2}.$$

Dès lors, dans les formules du n° 59, il nous suffit de remplacer  $D_{01}$  et  $D_{11}$  par zéro et  $D_{02}$  par  $\frac{k}{2}$ .

62. *Calcul du temps.* — Appliquons la méthode du n° 44. On a

$$\Theta_0 = X, \quad \Theta_1 = \frac{1}{a} \int_0^X S dX, \quad \Theta_2 = \frac{1}{a} \int_0^X \left( S_{10} + \frac{S^2}{a} \right) dX.$$

En remplaçant  $X$  par  $Z + \Theta X_{10} + \zeta X_{01} + \dots$ , on obtient d'abord

$$\Theta_{00} = Z, \quad \Theta_{01} = X_{01} = -1, \quad \Theta_{02} = X_{02} = \frac{e^{\psi}}{2W} = \frac{k}{2} e^{-\varphi}.$$

Puis

$$\Theta_1(X) = \Theta_1(Z) + \frac{S(Z)}{a} (\Theta X_{10} + \zeta X_{01}) + \dots;$$

d'où

$$\Theta_{10} = X_{10} + \Theta_1(Z), \quad \Theta_{11} = X_{11} + \frac{S(Z)}{a} X_{01} = X_{11} - \frac{S(Z)}{a}.$$

Enfin

$$\Theta_{20} = X_{20} + \frac{S(Z)}{a} X_{10} + \Theta_2(Z).$$

D'autre part, revenons aux formules données au début du n° 60. Nous pouvons prendre, avec la notation du n° 44,  $K_{00} = Z$ , donc  $C_{00} = 0$ . Puis,  $K_{01} = 0$ , puisque  $D_{01} = 0$ . On en conclut que  $C_{01} = -1$ .

On a ensuite

$$K_{02} = \frac{k}{2} e^{-\varphi}, \quad \text{d'où} \quad C_{02} = 0.$$

Puis

$$K_{10} = D_{10} + \frac{1}{a} \int_0^Z s dZ$$

tend vers zéro avec  $Z$ .

D'autre part (n° 61)  $X_{10} = o(Z^3)$  et  $\Theta_1(Z) = o(Z^3)$ . On en conclut que  $C_{10} = 0$ .

Puis,  $K_{11} = 0$ , car  $D_{11} = D_{01} = 0$ . D'autre part (n° 61),  $X_{11} = o(Z^2)$  et  $S(Z) = o(Z^2)$ . Donc,  $C_{11} = 0$ .

Enfin, on peut prendre  $K_{20}$  égal à  $\Theta_{02}$  du n° 60; il tend vers zéro avec  $Z$ . D'autre part,  $X_{20}$ ,  $S(Z)X_{10}$  et  $\Theta_2(Z)$  tendent aussi vers zéro; donc,  $C_{20} = 0$ .

En définitive,  $\Theta_{00}$ ,  $\Theta_{10}$  et  $\Theta_{20}$  sont les mêmes qu'au n° 60, comme on le savait *a priori*; mais

$$\Theta_{01} = -1, \quad \Theta_{11} = 0, \quad \Theta_{02} = \frac{k}{2} e^{-\varphi}, \quad N(\Theta_{02}) = \frac{k}{2}.$$

Donc,  $T_{00}$ ,  $T_{10}$  et  $T_{20}$  sont les mêmes qu'au n° 60; mais

$$T_{01} = -1, \quad T_{11} = 0, \quad T_{02} = \frac{k}{2}.$$

VII. — ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE LIMITÉ À GAUCHE PAR UN POINT FRONTIÈRE F DE DEUXIÈME ESPÈCE ET À DROITE PAR UN POINT FRONTIÈRE DE PREMIÈRE ESPÈCE, DONT L'ORDRE EST  $r_1 = 2$ , À DROITE ET À GAUCHE.

63. *Calcul de la déviation.* — Nous appliquons la méthode du n° 46. On a

$$r_1 = 2, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \theta' = k\theta_1, \quad \theta = k'\theta_1^2,$$

avec

$$(144) \quad k = \frac{aA_1^{\frac{2}{3}}}{A_0^2 a_1^{\frac{1}{3}}}, \quad k' = \frac{A_1^{\frac{4}{3}}}{a_1^{\frac{2}{3}}}, \quad kk' = \frac{aA_1^2}{a_1 A_0^2}.$$

Au n° 59, on a calculé les coefficients du développement

$$(145) \quad D = A_1 \theta_1^2 (D_{00} + D_{10} \theta_1 + D_{01} \zeta_1 + D_{20} \theta_1^2 + D_{11} \theta_1 \zeta_1 + D_{02} \zeta_1^2 + \dots).$$

Ces coefficients sont *tous constants*, sauf

$$D_{10} = \frac{1}{x - a_1} + \alpha_0 \log \frac{\theta_1}{a_1 - x} - \frac{n_1}{a_1} - b_0^1 n_2 + P_3,$$

avec

$$P_5 = \int_{a_1}^x \left[ -\frac{A_1}{a_1(\lambda - b)} + \frac{1}{(x - a_1)^2} + \frac{\alpha_0}{x - a_1} \right] dx.$$

Au voisinage de F, nous avons  $x = a + \xi$  et  $\lambda - b = A_0 \xi (1 + B\xi)$ . Calculons le noyau de  $D_{10}$ . Pour les deux premiers termes, il suffit de remplacer  $x$  par  $a$ . Les deux suivants sont constants. Pour  $P_5$ , la partie principale du crochet est  $-\frac{aA_1}{a_1A_0\xi}$ . On en déduit

$$(146) \quad N(D_{10}) = C - \frac{A_1 a}{a_1 A_0} \log \frac{\xi}{a_1 - a},$$

avec

$$(147) \quad C = \frac{1}{a - a_1} + \alpha_0 \log \frac{\theta_1}{a_1 - a} - \frac{n_1}{a_1} - b_0^1 n_2 \\ + \int_{a_1}^a \left[ -\frac{A_1 x}{a_1(\lambda - b)} + \frac{aA_1}{a_1A_0\xi} + \frac{1}{(x - a_1)^2} + \frac{\alpha_0}{x - a_1} \right] dx.$$

On a maintenant

$$(148) \quad z = \frac{D}{A_0 \theta} = \frac{A_1}{A_0 k'} (D_{00} + \dots).$$

D'où

$$Z_0 = \frac{A_1 D_{00}}{A_0 k'}.$$

En prenant la partie constante de  $z_0 - Z_0$ , on obtient

$$\zeta = \frac{A_1}{A_0 k'} (D_{01} \zeta_1 + D_{20} \theta_1^2 + D_{11} \theta_1 \zeta_1 + D_{02} \zeta_1^2 + \dots).$$

Il s'agit maintenant de calculer les coefficients  $Y_{npq}(s)$  de la formule (50). En tenant compte de la limitation adoptée pour le développement (145), nous devons seulement calculer  $Y_{100}$  et  $Y_{101}$ . La formule (51) se réduit à

$$Y_1 = \int \frac{ds}{W + \zeta} = \int \frac{ds}{W} \left( 1 - \frac{\zeta}{W} + \dots \right).$$

En remarquant que la formule (40) nous donne  $W = -s - Z_0$ , on a donc

$$Y_{100} = \int \frac{ds}{W} = -\log(s + Z_0) + C', \quad N(Y_{100}) = -\log s + C'$$

et

$$Y_{101} = -\int \frac{ds}{W^2} = \frac{1}{s + Z_0} + C'', \quad N(Y_{101}) = C''.$$

Nous avons maintenant

$$z = Z_0 + \zeta + \theta' Y_{100} + \theta' \zeta Y_{101} + \dots$$

En comparant avec (148), nous obtenons

$$\frac{A_1}{A_0 k'} D_{10} \theta_1 = \theta' Y_{100} + \theta' \zeta Y_{101} + \dots = k \theta_1 Y_{100} + k \theta_1 \frac{A_1 D_{01} \zeta_1}{A_0 k'} Y_{101} + \dots$$

On doit donc avoir

$$k N(Y_{100}) = \frac{A_1}{A_0 k'} N(D_{10}) \quad \text{et} \quad N(Y_{101}) = 0.$$

On a d'abord  $C'' = 0$ . Puis, en se reportant à (146) et (144),

$$C - \frac{A_1 a}{A_0 a_1} \log \frac{s \theta}{a_1 - a} = \frac{a A_1}{a_1 A_0} (C' - \log s).$$

On vérifie que  $s$  disparaît et l'on a

$$C' = \frac{a_1 A_0}{a A_1} C + \log \frac{a_1 - a}{\theta}.$$

La déviation nous est maintenant donnée par la formule

$$D = A_0 \theta (Z_0 + \zeta) + A_0 \theta \theta' \left[ \frac{a_1 A_0}{a A_1} C + \log \frac{a_1 - a}{\theta (s + Z_0)} \right] + \dots,$$

qui se déduit de (145) en remplaçant simplement  $D_{10}$  par le noyau (146), dans lequel la variable  $\xi$  est elle-même remplacée par  $\theta(s + Z_0)$ , au lieu de  $\theta s$ . En particulier, la déviation au point frontière est obtenue pour  $s = 0$ , c'est-à-dire en remplaçant  $\xi$  par  $\theta Z_0$  dans (146).

64. *Calcul du temps.* — Au n° 60, on a calculé les coefficients du développement

$$(149) \quad \varepsilon \omega t = \frac{A_1}{a_1} \theta_1^2 (T_{00} + T_{10} \theta_1 + T_{01} \zeta_1 + T_{20} \theta_1^2 + T_{11} \theta_1 \zeta_1 + T_{02} \zeta_1^2 + \dots).$$

Ces coefficients sont *tous constants*, sauf

$$T_{10} = \frac{1}{x - a_1} + b_0^1 \log \frac{\theta_1}{a_1 - x} + \frac{n_{10} - n_1}{a_1} - b_0^1 n_2 + Q_4,$$

avec

$$Q_4 = \int_{a_1}^x \left[ \frac{-A_1}{\lambda - b} + \frac{1}{(x - a_1)^2} + \frac{b_0^1}{x - a_1} \right] dx.$$

Le noyau de  $T_{10}$  se calcule comme au n° 63 et vaut

$$(150) \quad N(T_{10}) = \Gamma - \frac{A_1}{A_0} \log \frac{\xi}{a_1 - a},$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{a - a_1} + b_0^1 \log \frac{\theta_1}{a_1 - a} + \frac{n_{10} - n_1}{a_1} - b_0^1 n_2 \\ &+ \int_{a_1}^a \left[ -\frac{A_1}{\lambda - b} + \frac{A_1}{A_0 \xi} + \frac{1}{(x - a_1)^2} + \frac{b_0^1}{x - a_1} \right] dx. \end{aligned}$$



D'autre part, la formule (59) nous donne

$$\varepsilon\omega t = \frac{A_0}{a} \theta \int \left( \theta' \frac{dY_{100}}{ds} + \dots \right) ds = \Gamma' + \frac{A_0}{a} \theta \theta' [\Gamma'' - \log(s + Z_0)] + \dots,$$

$\Gamma'$  et  $\Gamma''$  désignant deux constantes inconnues. La première est égale à la partie constante de (149). La seconde s'obtient en égalant les noyaux des coefficients de  $\theta_1^3$  dans les deux développements :

$$\frac{A_1}{a_1} \left[ \Gamma - \frac{A_1}{A_0} \log \frac{\theta s}{a_1 - a} \right] = \frac{A_0}{a} k k' (\Gamma'' - \log s) = \frac{A_1^2}{a_1 A_0} (\Gamma'' - \log s).$$

On vérifie encore que  $s$  disparaît et l'on a

$$\Gamma'' = \log \frac{a_1 - a}{\theta} + \frac{A_0}{A_1} \Gamma.$$

Le temps de parcours de  $F_1$  à  $M$  nous est maintenant donné par la formule

$$\varepsilon\omega t = \Gamma' + \frac{A_0}{a} \theta \theta' \left[ \log \frac{a_1 - a}{\theta(s + Z_0)} + \frac{A_0}{A_1} \Gamma \right] + \dots$$

qui se déduit de (149) en remplaçant  $T_{1,0}$  par le noyau (150), dans lequel la variable  $\xi$  est elle-même remplacée par  $\theta(s + Z_0)$ , au lieu de  $\theta s$ .

En particulier, le temps de parcours de l'arc total est obtenu pour  $s = 0$ , c'est-à-dire en remplaçant  $\xi$  par  $\theta Z_0$ .

VIII. — ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE LIMITÉ A GAUCHE PAR UN POINT FRONTIÈRE DE DEUXIÈME ESPÈCE ET A DROITE PAR UN POINT FRONTIÈRE DE PREMIÈRE ESPÈCE, DONT L'ORDRE EST  $r_1 = 1$ , A DROITE ET A GAUCHE.

65. *Calcul de la déviation.* — Nous sommes dans le cas II du n° 45. Au n° 57, nous avons calculé le développement

$$(151) \quad D = A_1 \theta_1 (D_{00} + D_{10} \theta_1 + D_{01} \zeta_1 + \dots),$$

dont les coefficients sont donnés par les formules (141). Calculons leurs noyaux.

Nous appelons  $Z_1$  la quantité appelée  $Z_0$  au n° 57. Pour simplifier l'écriture, posons

$$(152) \quad \begin{cases} k = \frac{A_1 a}{A_0 a_1}, & k' = k \frac{A_1}{A_0}, & a' = a_1 - a, & h = Z_1 + \log \frac{a'}{m \theta_1}, \\ h' = \log a' - h = \log(m \theta_1) - Z_1, & \beta_n = \frac{1}{a} - (n+1) b_0, & \mu = \frac{\xi}{a'}. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \xi &= x - a, & \xi_1 &= a_1 - x = a' - \xi; \\ u &= \xi_1 \frac{e^{Z_1}}{m \theta_1}, & \log u &= \log \frac{a' - \xi}{m \theta_1} + Z_1, & N(\log u) &= h. \end{aligned}$$

Puis, d'après (124),

$$P = \int_{a_1}^x \left[ \frac{A_1 x}{a_1(\lambda - b)} + \frac{1}{x - a_1} \right] dx.$$

En appliquant la méthode de la Note (E), on trouve

$$P = k \log \mu + E + \left( k \beta_0 - \frac{1}{a'} \right) \xi + \dots;$$

d'où

$$N(P) = k \log \mu + E,$$

en posant

$$E = \int_{a_1}^a \left[ \frac{A_1 x}{a_1(\lambda - b)} - \frac{k}{\xi} + \frac{1}{x - a_1} \right] dx.$$

Donc,

$$N(D_{00}) = -k \log \mu + h - E.$$

On a maintenant, d'après (127),

$$P_2 = \int_{a_1}^x \left[ -\frac{A_1^2 x}{a_1(\lambda - b)^2} + \frac{1}{(a_1 - x)^2} + \frac{\alpha_1}{x - a_1} \right] dx.$$

En appliquant toujours la méthode de la Note (E), on trouve

$$N(P_2) = -k' \beta_1 \log \mu - \frac{k'}{a'} + E_1,$$

avec

$$E_1 = \int_{a_1}^a \left[ -\frac{A_1^2 x}{a_1(\lambda - b)^2} + \frac{k'}{\xi} \left( \beta_1 + \frac{1}{\xi} \right) + \frac{1}{(x - a_1)^2} + \frac{\alpha_1}{x - a_1} \right] dx.$$

On a ensuite, d'après (138),

$$P_4 = \int_{a_1}^x \left[ -\frac{A_1^2 x (P - \log \xi_1)}{a_1(\lambda - b)^2} - \frac{\log \xi_1}{\xi_1^2} + \frac{\alpha_1 \log \xi_1 + \alpha_0}{\xi_1} \right] dx.$$

En utilisant le développement de P donné plus haut, on trouve

$$N(P_4) = -\beta_1 k k' \frac{\log^2 \mu}{2} + k' (\beta_1 h'' - k \beta_0) \log \mu + \frac{k' (h'' - k)}{a'} + E_2,$$

en posant

$$h'' = \log a' - E$$

et

$$E_2 = \int_{a_1}^a \left[ P_4'(x) - \frac{k' h''}{\xi^2} + k' \frac{k \beta_0 - \beta_1 h''}{\xi} + \frac{k k'}{\xi^2} \log \mu + \beta_1 \frac{k k'}{\xi} \log \mu \right] dx.$$

On en déduit

$$N(D_{10}) = -\beta_1 \frac{k k'}{2} \log^2 \mu + k' [\beta_1 (h'' - h') - k \beta_0] \log \mu + C,$$

avec

$$C = \alpha_1 \left( \frac{h^2 - Z_1^2}{2} - Z_1 - 2 - \frac{1}{m} \right) + \alpha_0 h + \frac{1 + h + k' (h - E - k)}{a'} + E_2 + h' E_1.$$

Enfin,

$$D_{01} = \frac{Z_1}{m}.$$

66. On a maintenant

$$(153) \quad z = \frac{D}{A_0 \theta} = \frac{\theta'}{k} (D_{00} + D_{10} \theta_1 + D_{01} \zeta_1 + \dots).$$

La partie principale de  $z_0$  est

$$Z_0 = \theta' \left( -\log \zeta + \log a' + \frac{h - E}{k} \right).$$

De plus,

$$(154) \quad \zeta = \frac{\theta'}{k} D_{01} \zeta_1 = \frac{Z_1}{km} \theta' \zeta_1.$$

Reportons-nous maintenant au n° 47. De (121), on déduit

$$N(Y_0) = \theta' \log \frac{C}{s}.$$

Or, d'après (153) et (154),

$$Z_0 + \zeta + Y_0 = \frac{\theta'}{k} \left( D_{00} + \frac{k\zeta}{\theta'} \right).$$

En égalant les noyaux des deux membres, on voit que  $C = 1$ .

Dans l'équation différentielle qui donne  $Y_1$  (n° 47), on peut faire  $\zeta = 0$ , car l'erreur commise sur  $Y_1 \theta$ , donc sur  $z$ , est de l'ordre des termes négligés. On obtient, en intégrant :

$$Y_1 = \theta' \frac{s + \nu}{s + \nu + \theta'} \left[ -\beta_0 (s + \nu) - \beta_1 \frac{\nu^2}{2\theta'} + \frac{Y_0}{a} + \Gamma \right] - \theta' \frac{b_0 \nu^2 + \beta_1 \theta' (\nu - \theta')}{s + \nu + \theta'},$$

où  $\Gamma$  est la constante d'intégration et où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$\nu = Y_0 + Z_0 - \theta'.$$

On en déduit

$$N(Y_1) = \theta' \left[ -\beta_1 \frac{\theta'}{2} \log^2 s + (\beta_1 z_0 - \beta_0 \theta') \log s - \beta_1 \frac{\theta'}{2} - b_0 z_0 - \beta_1 \frac{Z_0^2}{2\theta'} + 2\beta_0 \theta' + \Gamma \right].$$

Or, d'après (153),

$$N(Y_1) = \frac{\theta'^2}{kk'} N(D_{10}).$$

On constate la disparition des termes en  $\log s$  et l'on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{\theta'} &= \frac{\log a' - \log \theta}{a} + \beta_1 \frac{(k + E - h)^2}{2k^2} - 2\beta_0 + \frac{h'E_1}{kk'} + \frac{1}{a'} \left( \frac{1+h}{kk'} - 1 \right) \\ &+ \frac{1}{kk'} \left[ \alpha_1 \left( \frac{h^2 - Z_1^2}{2} - Z_1 - 2 - \frac{1}{m} \right) + h\alpha_0 + E_2 \right] + \frac{E-h}{k} \left( b_0 - \frac{a_1}{aa'} \right). \end{aligned}$$

Pour avoir la *déviatiou au point frontière*, il suffit de faire  $s = 0$ . En particulier, l'équation (121) devient

$$(155) \quad e^{-\frac{Y_0}{\theta'}} = Y_0 + Z_0 + \zeta - \theta'.$$

Il faut résoudre cette équation par rapport à  $Y_0$ . On peut évidemment le faire par un développement en série. Mais, ce développement *converge lentement*, parce que  $\theta'$  tend lentement vers zéro avec  $\varepsilon$ . On retombe ainsi sur la difficulté signalée au n° 47. Toutefois, elle est maintenant très localisée. On peut résoudre (155), pour  $\zeta = 0$ , par une méthode d'approximation quelconque; puis développer suivant  $\zeta$ , en ne gardant qu'un seul terme.

67. *Calcul du temps.* — Au n° 58, nous avons calculé les coefficients du développement

$$\varepsilon \omega t = \frac{A_1 \theta_1}{a_1} (T_{00} + T_{10} \theta_1 + T_{01} \zeta_1 + \dots).$$

Calculons leurs noyaux. Des formules (129) et (131), on déduit, par des calculs analogues aux précédents :

$$\begin{aligned} N(Q) &= \frac{A_1}{A_0} \log \mu + F, & F &= \int_{a_1}^a \left[ \frac{A_1}{\lambda - b} - \frac{A_1}{A_0 \zeta} + \frac{1}{x - a_1} \right] dx; \\ N(Q_1) &= \frac{A_1^2}{A_0^2} \left[ \frac{h'' - k}{a'} + b_0 k \log^2 \mu - (2b_0 h'' + k \beta_0) \log \mu \right] + F_1, \\ F_1 &= \int_{a_1}^a \left[ Q'_1(x) + \frac{A_1^2}{A_0^2} \left( \frac{k \log \mu - h''}{\zeta^2} + \frac{k \beta_0 + 2b_0 h'' - 2b_0 k \log \mu}{\zeta} \right) \right] dx; \\ N(Q_2) &= \frac{A_1^2}{A_0^2} \left( 2b_0 \log \mu - \frac{1}{a'} \right) + F_2, \\ F_2 &= \int_{a_1}^a \left[ Q'_2(x) + \frac{A_1^2}{A_0^2} (1 - 2b_0 \zeta) \right] dx. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} N(T_{00}) &= -\frac{A_1}{A_0} \log \mu + h - Z_1 - F, \\ N(T_{10}) &= \frac{A_1^2}{A_0^2} [b_0 k \log^2 \mu + (2b_0 h' - 2b_0 h'' - k \beta_0) \log \mu] + C', \\ C' &= \alpha_0 h + b_0^1 h^2 + \frac{1+h}{a'} + \frac{A_1^2}{A_0^2 a'} (h'' - h' - k) - b_0^1 Z_1^2 - \alpha_1 \left( Z_1 + 2 + \frac{1}{m} \right) + F_1 + h' F_2. \end{aligned}$$

On a maintenant, avec la notation du n° 48 et d'après (59) :

$$T_0 = Y_0 + \Gamma; \quad N(T_0) = \Gamma - \theta' \log s.$$

On doit avoir d'autre part

$$T_0 = \theta' \frac{A_0}{A_1} (T_{00} + T_{01} \zeta_1).$$

En égalant les noyaux, on constate que  $\log s$  disparaît et l'on trouve

$$\Gamma = -\theta' \log \frac{\theta}{a'} + \theta' \frac{A_0}{A_1} \left( h - Z_1 - F - \frac{\zeta_1}{m} \right).$$

On a ensuite

$$T_1 = Y_1 - \frac{1}{a} \int s dY_0$$

ou, en se reportant au n° 66,

$$T_1 = Y_1 + \theta' \frac{s}{a} + \frac{Y_0}{a} \left( Z_0 + \frac{Y_0}{2} \right) + \Gamma_1.$$

D'où

$$\begin{aligned} N(T_1) &= N(Y_1) + \theta'^2 \frac{\log^2 s}{2a} - \theta' \frac{Z_0}{a} \log s + \Gamma_1 \\ &= \theta'^2 \frac{N(D_{10})}{kk'} + \frac{\log^2 s}{2a} - \frac{\log s}{a} \left( \log \frac{a'}{\theta} + \frac{h-E}{k} \right) + \Gamma_1. \end{aligned}$$

Mais, on doit avoir

$$T_1 = \frac{A_0^2}{A_1^2 k} \theta'^2 T_{10}.$$

En égalant les noyaux, on constate que  $\log s$  disparaît et l'on trouve

$$\Gamma_1 = \theta'^2 \left[ \frac{1}{2a} \log^2 \frac{\theta}{a'} + \frac{E-h}{ka} \log \frac{\theta}{a'} + C' \frac{A_0^2}{A_1^2 k} - \frac{C}{kk'} \right].$$

En faisant  $s = 0$ , on a le *temps de parcours de l'arc total*.

## CHAPITRE VI.

### CALCUL DE L'AMPLITUDE ET DE LA PÉRIODE DE L'OSCILLATION PÉRIODIQUE.

68. *Détermination du point terminal.* — Grâce au principe de l'accumulation des trajectoires (n° 15), le *sommet inférieur est entièrement déterminé, à une erreur exponentielle près, par le point frontière de droite du dernier arc de première espèce.* Nous savons calculer la déviation  $D_s$ , correspondante par une série asymptotique. En répétant les mêmes calculs à gauche de  $Oy$ , nous pouvons de même calculer la déviation  $D_s$  au sommet supérieur.

D'autre part, si nous prenons pour point terminal le point terminal limite  $E$ , nous savons aussi calculer la déviation  $\Delta_s$  au sommet supérieur. Mais, cette déviation n'est pas égale à  $D_s$ . *Pour que la trajectoire soit un cycle, il faut remplacer le point  $E$  par un point voisin  $E'$ , qu'il s'agit de déterminer.*

Soit  $a$  l'abscisse de  $E$  et  $a + z$  celle de  $E'$ . La déviation  $\Delta_s$  est une fonction déterminée de  $\varepsilon$  et de  $a$ , soit

$$\Delta_s = f(\varepsilon, a).$$

L'équation déterminant  $z$  s'écrit

$$(156) \quad \lambda(a+z) - \lambda(a) + f(\varepsilon, a+z) = D_s.$$

La fonction  $f(\varepsilon, a)$  résulte des calculs faits au n° 50. En remplaçant  $\theta$  par  $\varepsilon^2 \frac{a}{\Lambda_0^2}$ , on a

$$f(\varepsilon, a) = \varepsilon^2 F(a) + \varepsilon^4 G(a) + \dots,$$

avec

$$F(a) = \frac{a}{\Lambda_0} D_1, \quad G(a) = \frac{a^2}{\Lambda_0^3} D_2, \quad \dots,$$

les coefficients  $D_1$  et  $D_2$  étant donnés par les formules (123) et (125), où l'on doit remplacer  $\xi$  par  $a$ .

L'équation (156) s'écrit, en remarquant que  $z = -\xi$ ,

$$(157) \quad z = b_0 z^2 - b_1 z^3 + \dots - \varepsilon^2 [F(a) + z F'(a) + \dots] - \varepsilon^4 [G(a) + \dots] + \dots + D_S.$$

Elle peut être résolue par la méthode des approximations successives.

Calculons explicitement  $F'(a)$ . On a

$$F'(a) = \frac{D_1}{\Lambda_0} - \frac{a}{\Lambda_0^2} D_1 \frac{d\Lambda_0}{da} + \frac{a}{\Lambda_0} \frac{dD_1}{da}.$$

Or,  $\frac{d\Lambda_0}{da}$  n'est autre que la valeur de  $\frac{d^2 \lambda}{dx^2}$  pour  $x = a$ , soit  $-2\Lambda_0 b_0$ . D'autre part, la formule (123) nous donne, pour  $\xi = a$ ,

$$D_1 = \log \frac{\Lambda_0^2}{\varepsilon^2} - \int_0^a \frac{1 + aB}{a(1 + B\xi)} d\xi.$$

Donc,

$$\frac{dD_1}{da} = -4b_0 - \frac{1}{a} - \int_0^a \frac{\partial \varphi}{\partial a} d\xi, \quad \varphi = \frac{1 + aB}{a(1 + B\xi)}.$$

On trouve, tous calculs faits,

$$\Lambda_0 F'(a) = 2(1 + 2ab_0) \log \frac{\Lambda_0}{\varepsilon} - 1 - 4ab_0 - I,$$

avec

$$I = \int_0^a \frac{B(1 + B\xi)(1 + 2ab_0) + 2b_0(1 + aB) - x \frac{dB}{d\xi} + 2x \frac{b_0 - B}{\xi}}{(1 + B\xi)^2} d\xi.$$

69. Supposons que le point frontière le plus élevé à gauche de Oy soit d'ordre 1 à gauche et à droite et que  $D_S$  ait été calculée par les formules du n° 57. Dans ce cas,  $D_S$  est d'ordre 2 et l'erreur commise dans son calcul est d'ordre 6. Il s'ensuit que  $z$  est aussi d'ordre 2 et l'équation (157) se réduit à

$$z = b_0 z^2 - \varepsilon^2 [F(a) + z F'(a)] - \varepsilon^4 G(a) + D_S;$$

d'où l'on tire

$$(158) \quad z = D_S - \varepsilon^2 F(a) + \varepsilon^4 [F(a)F'(a) - G(a) + b_0 F^2(a)] - \varepsilon^2 D_S [F'(a) + 2b_0 F(a)] + b_0 D_S^2,$$

avec une erreur du sixième ordre.

Supposons maintenant que *le point frontière ci-dessus soit d'ordre 2 à gauche et à droite* et que  $D_s$  ait été calculée par les formules du n° 59. L'ordre de  $D_s$  est  $\frac{4}{3}$  et l'équation (157) se réduit à

$$z = b_0 z^2 - \varepsilon^2 F(a) + D_s;$$

d'où l'on tire

$$(159) \quad z = D_s - \varepsilon^2 F(a) + b_0 D_s^2,$$

avec une erreur d'ordre  $\frac{10}{3}$ .

Remarquons que, dans tous les cas,  $z$  est positif, car  $D_s$  est toujours d'ordre inférieur à  $\varepsilon^2$ . En effet, cet ordre est maximum dans le cas de la formule (158) et c'est alors l'ordre de  $-\varepsilon^2 \log \varepsilon$ . On en conclut que *le point terminal vrai est toujours plus éloigné de Oy que le point terminal limite*.

70. *Calcul de l'amplitude.* — L'abscisse  $a + z$  du point terminal vrai représente le maximum d'élongation du point M au cours de l'oscillation. On calcule de même l'abscisse du point terminal de gauche, c'est-à-dire le minimum d'élongation du point M. La différence donne la *course*.

Dans le cas où la courbe fondamentale est symétrique par rapport à l'origine, il en est de même de l'oscillation de M; l'*amplitude* de cette oscillation est alors  $a + z$ .

71. *Calcul de la période.* — Nous pouvons d'abord calculer le temps de parcours de la trajectoire de droite, en partant du point terminal limite. Ce temps est une fonction déterminée de  $a$ , soit  $f(a)$ . Le temps de parcours du demi-cycle de droite est  $T = f(a + z)$ . On peut le calculer par la formule de Taylor.

Voyons sous quelle forme se présente la fonction  $f(a)$ . Elle comprend d'abord le temps de parcours  $f_1(a)$  de l'arc supérieur, qui se calcule par la formule (71). Nous avons ensuite le temps de parcours de l'arc inférieur. Soit M, un point quelconque de cet arc, ayant une abscisse fixe. Nous savons que sa position est indépendante de la position du point terminal, à une erreur exponentielle près (n° 15). Dès lors, le temps de parcours de l'arc  $M, S'$  est indépendant de  $a$  et nous pouvons, à une constante additive près, ne garder que le temps de parcours de l'arc  $EM_1$ . Choisissons  $M_1$  sur le premier arc de seconde espèce. Ce temps nous est donné par la formule (26). Si l'on appelle  $x_1$  l'abscisse constante de  $M_1$ , nous avons d'abord le terme

$$f_2(a) = \frac{1}{\varepsilon \omega} \int_{x_1}^a \frac{\lambda'}{x} dx, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dx}.$$

Le deuxième terme de la formule (26) est indépendant de  $a$ , à une erreur

exponentielle près (n° 15). Le troisième est nul. Le quatrième nous est donné par la formule asymptotique (80) :

$$f_3(a) = \frac{1}{\varepsilon\omega} (\varepsilon^2 J_1 + \varepsilon^4 J_2 + \dots).$$

72. Pour calculer  $f(a+z) - f(a)$  par la formule de Taylor, il nous suffit de connaître les dérivées successives de  $f(a)$ .

Nous avons d'abord, en faisant  $\xi = a$  dans (71) :

$$\varepsilon\omega f_1(a) = \varepsilon^2 F_1(a) + \varepsilon^4 G_1(a) + \dots,$$

avec (n° 51)

$$F_1(a) = \frac{a}{A_0} T_1(a) = \frac{2 \log A_0 - 2 \log \varepsilon - Q(a)}{A_0}, \quad G_1(a) = \frac{a^2}{A_0^3} T_2(a), \quad \dots$$

Calculons seulement  $F_1'(a)$  :

$$F_1'(a) = \frac{4b_0(\log A_0 - \log \varepsilon - 1) - 2b_0 Q(a) - Q'(a)}{A_0}.$$

Or,

$$Q(a) = \int_0^a \psi d\xi, \quad \psi = \frac{B}{1+B\xi}$$

D'où

$$Q'(a) = \frac{B(a)}{1+aB(a)} + \int_0^a \frac{\partial \psi}{\partial a} d\xi.$$

En remarquant que  $\lambda$  s'annule pour  $\xi = a$ , on voit que le premier terme vaut  $\frac{1}{a} - \frac{A_0}{b}$ . Le second se calcule sans difficulté et l'on trouve, tous calculs faits,

$$A_0 F_1'(a) = 4b_0 \left( \log \frac{A_0}{\varepsilon} - 1 \right) - \frac{1}{a} + \frac{A_0}{b} + I',$$

avec

$$I' = \int_0^a \frac{\frac{dB}{d\xi} + 2 \frac{B-b_0}{\xi} - 2b_0 B(2+B\xi)}{(1+B\xi)^2} d\xi.$$

On a ensuite

$$\varepsilon\omega f_2'(a) = \frac{\lambda'(a)}{a} = \frac{A_0}{a}, \quad \varepsilon\omega f_2''(a) = -\frac{A_0(1+2ab_0)}{a^2}, \quad \dots$$

On a enfin, en se reportant au n° 53,

$$J_1'(a) = -\frac{1}{aA_0}.$$

Finalement,

$$(160) \quad \begin{cases} \varepsilon\omega f'(a) = \frac{A_0}{a} + \varepsilon^2 \left[ \frac{4b_0}{A_0} \left( \log \frac{A_0}{\varepsilon} - 1 \right) + \frac{1}{b} - \frac{2}{aA_0} + \frac{I'}{A_0} \right] + \dots, \\ \varepsilon\omega f''(a) = -\frac{A_0(1+2ab_0)}{a^2} + \dots \end{cases}$$



Si l'on appelle  $T_0$  le temps de parcours calculé sur la trajectoire issue de E, on a

$$(161) \quad T = T_0 + z f'(a) + \frac{z^2}{2} f''(a) + \dots$$

Dans le premier cas examiné au n° 69, on garde tous les termes écrits dans (160) et (161) et l'on a T avec une erreur du cinquième ordre. Dans le deuxième cas, on garde encore les trois termes de (161); mais, on ne garde que le premier terme de la première formule (160). On a T avec une erreur d'ordre  $\frac{7}{3}$ .

On calcule d'une manière analogue le temps de parcours T' du demi-cycle de gauche. La *période* est  $T + T'$ . Dans le cas de l'oscillation symétrique, elle vaut  $2T$ .

#### NOTE (A).

1. Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m),$$

dans laquelle les  $z_i$  sont des variables complexes indépendantes et  $x$  une variable réelle. Nous ferons sur la fonction  $f$  les hypothèses suivantes, valables pour

$$(2) \quad x_0 < x < x_1, \quad |z_i| < R_i.$$

1° Il existe une fonction  $\psi(x)$  réelle, positive et bornée, telle que l'inégalité

$$(3) \quad |y| < \psi(x)$$

entraîne

$$(4) \quad |I| < \psi(x),$$

en posant

$$(5) \quad I = \int_{x_0}^x f(x, y, z_1, \dots, z_m) dx.$$

2° Si les fonctions  $y$  et  $y'$  vérifient (3) et

$$(6) \quad |y - y'| < h' \psi(x),$$

on a

$$(7) \quad |I - I'| < h h' \psi(x),$$

$I'$  désignant ce que devient l'intégrale  $I$  quand on y remplace  $y$  par  $y'$  et  $h, h'$  désignant des nombres réels compris entre zéro et  $un$ .

3° Lorsque les inégalités (2) et (3) sont vérifiées, la fonction  $f$  est holomorphe par rapport à  $y, z_1, \dots, z_m$ .

Dans ces conditions, nous allons démontrer que l'équation (1) admet une solution et une seule s'annulant pour  $x = x_0$  et que cette solution est fonction holomorphe des  $z_i$  dans le domaine D défini par (2).

2. Employons la méthode des approximations successives, en posant

$$(8) \quad y_n = \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}, z_1, \dots, z_m) dx, \quad y_0 = 0.$$

L'inégalité (3) est vérifiée par  $y_0$ . Si elle l'est par  $y_{n-1}$ , elle l'est aussi par  $y_n$ , d'après (8) et (4). Elle est donc vérifiée par  $y_n$ , quel que soit  $n$ .

Posons maintenant  $u_n = y_{n+1} - y_n$ . On a

$$|u_0| = |y_1| < \psi(x).$$

Admettons que l'on ait

$$(9) \quad |u_n| < h^n \psi(x).$$

Comme  $h^n < 1$ , on en déduit, d'après (7),

$$|u_{n+1}| < h^{n+1} \psi(x).$$

La fonction  $\psi(x)$  étant bornée dans l'intervalle  $(x_0, x_1)$ , on en conclut que la série est *uniformément convergente* dans le domaine D.

L'inégalité (3) étant vérifiée par  $y_0$ , la fonction  $f(x, y_0, z_1, \dots, z_m)$  est holomorphe par rapport aux  $z_i$  dans le domaine D. Il en est donc de même de  $y_1$  (1).

Admettons que  $y_{n-1}$  soit fonction holomorphe des  $z_i$  dans le domaine D. Il en est de même de  $f(x, y_{n-1}, z_1, \dots, z_m)$  et par conséquent de  $y_n$  (1). On en conclut que  $y_n$  est holomorphe par rapport aux  $z_i$  quel que soit  $n$ . Il en est de même de  $u_n$  et, comme la série  $u_n$  est uniformément convergente, il en est de même de sa somme  $y$  (2).

La fonction  $y$  vérifie (1), s'annule pour  $x = x_0$  et constitue, comme on sait (3), la seule solution remplissant cette condition.

Elle peut être *développée suivant les puissances des  $z_i$*  dans le domaine D. Ce développement est majoré par celui de la fonction

$$\frac{\psi(x)}{\left(1 - \frac{z_1}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z_2}{R_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_m}{R_m}\right)}.$$

(1) Cf. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 274. La conclusion est encore valable si la fonction  $f$  devient infinie pour certaines valeurs de  $x$  appartenant à l'intervalle  $(x_0, x_1)$  et aussi si ledit intervalle est infini. Car, la fonction  $\psi(x)$  étant bornée, l'intégrale I est uniformément convergente, donc holomorphe par rapport aux  $z_i$  (*loc. cit.*, pp. 275 et 276).

(2) *Loc. cit.*, p. 107.

(3) *Loc. cit.*, p. 372.

Si l'on ne garde que les termes pour lesquels l'exposant de  $z_i$  est  $\leq p_i$ , l'erreur commise a un module inférieur à

$$(10) \quad \frac{\psi(x)}{\left(1 - \frac{z_1}{R_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z_m}{R_m}\right)} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{z_i^{p_i+1}}{R_i^{p_i+1}} \right].$$

#### NOTE (B).

Considérons une série multiple telle que la suivante

$$\sum_n \sum_p \sum_q \frac{a_{npq}}{s^{na+pb+q}},$$

où  $n, p$  sont des entiers  $\geq 0$  et  $q$  un entier pouvant prendre un nombre fini de valeurs négatives;  $a$  et  $b$  sont deux nombres positifs quelconques; les  $a_{npq}$  sont des coefficients constants. Supposons cette série absolument convergente pour  $s = S > 1$ . Nous dirons que c'est une *série (B)*;  $a$  et  $b$  seront ses *nombres caractéristiques*; son *ordre m* sera le plus grand des nombres  $-(na + pb + q)$ .

Considérons maintenant une fonction  $f(s)$ , continue pour  $s \geq 0$  et qui, pour  $s > S$ , est le produit de  $(\log s)^k$  par une série (B),  $k$  désignant un exposant entier  $\geq 0$ . Proposons-nous d'étudier l'intégrale

$$F(s) = \int_0^s f(s) ds$$

pour les grandes valeurs de  $s$ .

Observons d'abord que la série représentant  $f(s)$  pour  $s > S$  est absolument et uniformément convergente. En effet, la dérivée du module de son terme général a le signe de  $k - (na + pb + q) \log s$ ; elle est donc négative si  $n, p, q$  sont assez grands. Il s'ensuit que la série est majorée par celle qu'on obtient en y remplaçant  $s$  par  $S$ , laquelle est absolument convergente.

Cela posé, appelons  $f_1(s)$  la somme des termes pour lesquels  $na + pb + q < 1$ ;  $f_2(s)$  la somme des termes, s'ils existent (1), pour lesquels  $na + pb + q = 1$ ;  $f_3(s)$  la somme des termes restants. On peut écrire, en supposant  $s > S$ ,

$$(1) \quad F(s) = \int_0^s f_1(s) ds + \int_0^1 (f - f_1) ds + \int_1^s f_2(s) ds + \int_1^\infty (f - f_1 - f_2) ds + \int_\infty^s f_3(s) ds.$$

La première des cinq intégrales ci-dessus donne un nombre fini de termes en  $\frac{(\log s)^{k'}}{s^{na+pb+q-1}}$ , avec  $0 \leq k' \leq k$ ; la deuxième et la quatrième donnent un terme

---

(1) Ils n'existent certainement pas si l'ordre de la série est  $< -1$ .

constant; la troisième un terme en  $(\log s)^{k+1}$ . Enfin, la cinquième peut être intégrée terme à terme et donne une série dont le terme général est

$$\frac{a_{npq}}{-\lambda s^\lambda} \left[ \log^k s + \frac{k}{\lambda} \log^{k-1} s + \frac{k(k-1)}{\lambda^2} \log^{k-2} s + \dots + \frac{k!}{\lambda^k} \right],$$

en posant  $\lambda = na + pb + q - 1$ . Les termes du crochet étant tous positifs, on peut effectuer la multiplication et ordonner suivant les puissances de  $\log s$ .

Pour simplifier le langage, convenons d'appeler *polynome (H) de degré  $k$  et d'ordre  $m$*  tout polynome de degré  $k$  en  $\log s$  et dont les coefficients sont des séries B d'ordre  $m$ . Nous voyons que, pour  $s$  très grand,  $F(s)$  est la somme d'un polynome (H) de degré  $k$  et d'ordre  $m+1$  et d'une fonction linéaire de  $\log^{k+1} s$ .

Supposons maintenant que, pour  $s$  très grand,  $f(s)$  soit un polynome (H) de degré  $k$  et d'ordre  $m$ . Reprenons la démonstration précédente. Dans chaque terme de  $f_1(s)$ , le facteur  $\log^k s$  est remplacé par un polynome de degré  $k$  en  $\log s$  et à coefficients constants; en intégrant, on obtient des termes analogues à ceux précédemment obtenus, avec  $0 \leq k' \leq k$ . De même,  $f_2$  donne un polynome de degré  $k+1$  en  $\log s$  et à coefficients constants. Enfin,  $f_3$  est la somme de  $k+1$  séries analogues à celle que nous avons tout à l'heure et donne, par intégration, un polynome (H). En définitive,  $F(s)$  est la somme d'un polynome (H) de degré  $k$  et d'ordre  $m+1$  et d'un polynome (H) de degré  $k+1$  et à coefficients constants, donc d'ordre nul. Ce dernier polynome, qui est la somme des trois termes médians de la formule (1), sera appelé le *noyau* de l'intégrale  $F(s)$ . Si  $m < -1$ , il se réduit à la constante  $\int_0^\infty (f - f_1) ds$ .

#### NOTE (C).

Soit la série double

$$\sum_n \sum_p a_{np} \frac{\log^p s}{s^{n+p}},$$

où  $p$  est un entier  $\geq 0$  et  $n$  un entier pouvant prendre un nombre fini de valeurs négatives; les  $a_{np}$  sont des coefficients constants. Une telle série sera dite *série (C)*; son ordre  $m$  sera le plus grand des nombres  $-(n+p)$ . Nous supposons enfin qu'elle est absolument convergente pour  $s = S > 1$  et, comme dans la note (B), nous en déduisons qu'elle est absolument et uniformément convergente pour  $s > S$ .

Soit maintenant  $f(s)$  une fonction continue pour  $s \geq 0$  et qui, pour  $s > S$ , est une série (C) d'ordre  $m$ . Considérons la même intégrale que dans la Note (B). Nous pouvons la décomposer en cinq intégrales partielles, comme dans ladite Note, selon la valeur de  $n+p$  par rapport à  $-1$  et nous obtenons ainsi une série (C) d'ordre  $m+1$  si  $m > -1$ , d'ordre nul si  $m \leq -1$ .

## NOTE (D).

1. Soit une fonction  $f(s)$  de la variable réelle et positive  $s$ , admettant le développement asymptotique

$$(1) \quad f(s) = s^{\alpha-1} \left[ a + \frac{k}{s^\alpha} + \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{s^{i\alpha}} + \frac{A}{s^{(n+1)\alpha}} \right].$$

Dans cette formule,  $\alpha$  désigne un exposant  $> 0$ ;  $a$  est une constante positive;  $A$  est une fonction de  $s$ , dont le module est borné pour  $s = +\infty$ . Posons

$$(2) \quad \varphi = \int_0^s f(s) ds.$$

Soit maintenant la fonction  $g(s)$ , admettant le développement asymptotique

$$(3) \quad g(s) = s^m \left[ \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{s^{i\alpha}} + \frac{C}{s^{(n+1)\alpha}} \right],$$

$C$  étant, comme  $A$ , une fonction à module borné et  $m$  un exposant quelconque. Nous nous proposons de *chercher un développement asymptotique de la fonction*

$$(4) \quad G = e^\varphi \int_{+\infty}^\varphi g(s) e^{-\varphi} d\varphi.$$

2. Pour éviter toute confusion, affectons d'un accent la variable d'intégration. On peut écrire

$$(5) \quad G = \int_{+\infty}^\varphi g(s') e^{\varphi-\varphi'} d\varphi'.$$

Or,

$$(6) \quad \varphi - \varphi' = \int_{s'}^s f(s) ds = \frac{a}{\alpha} (s^\alpha - s'^\alpha) + k \log \frac{s}{s'} + P(s') - P(s) + R,$$

en posant

$$P(s) = \sum_{h=2}^n \frac{a_h}{(h-1)\alpha s^{(h-1)\alpha}}, \quad R = \frac{B}{n\alpha} \left( \frac{1}{s'^{n\alpha}} - \frac{1}{s^{n\alpha}} \right).$$

Le coefficient  $B$  est, d'après le théorème de la moyenne, la valeur de  $A$  pour une valeur de la variable comprise entre  $s$  et  $s'$ ; c'est donc une fonction de  $s$  et de  $s'$  dont le module reste borné, comme celui de  $A$ .

3. Faisons maintenant le changement de variable

$$(7) \quad s'^\alpha = s^\alpha + \frac{\alpha}{a} x.$$

Il vient

$$(8) \quad G = -\frac{s^k}{a} \int_0^{+\infty} \frac{f(s')g(s')}{s'^{k+\alpha-1}} e^{P(s')-P(s)+R} e^{-x} dx.$$

D'après (1) et (3),  $\frac{f(s')g(s')}{s'^{k+\alpha-1}}$  est le produit de  $s'^{m-k}$  par une série asymptotique analogue à celles qui figurent dans les crochets de (1) et (3). D'autre part,

$$\frac{1}{s^\alpha} - \frac{1}{s'^\alpha} = \frac{\alpha x}{as^\alpha s'^\alpha}.$$

On en conclut que

$$z = P(s') - P(s) + R = \frac{x}{s^\alpha s'^\alpha} Q,$$

Q désignant un polynome de degré  $n-1$  en  $\frac{1}{s^\alpha}$ ,  $\frac{1}{s'^\alpha}$ , dont les coefficients sont des constantes connues, sauf ceux des termes de degré  $n-1$ , qui sont égaux à  $\frac{B}{n\alpha}$  et par conséquent bornés.

Faisons un développement limité de  $e^z$ , en nous arrêtant au terme en  $x^q$ ,  $q$  désignant la partie entière de  $\frac{n}{2}$ . L'erreur est de la forme  $\lambda x^{q+1}$ ,  $\lambda$  restant borné quand  $z$  tend vers zéro et par conséquent quand  $s$  tend vers zéro et par conséquent quand  $s$  tend vers  $+\infty$ . Comme  $|z| < \mu \frac{x}{s^{2\alpha}}$ ,  $\mu$  désignant un facteur constant positif, ladite erreur est bornée par  $\rho \frac{x^{q+1}}{s^{2\alpha(q+1)}}$ ,  $\rho$  désignant un autre facteur constant positif. Mais,  $2(q+1) \geq n+1$ . Donc, l'erreur est bornée par  $\rho \frac{x^{q+1}}{s^{2\alpha(n+1)}}$ .

Remplaçons maintenant  $z$  par  $\frac{x}{s^\alpha s'^\alpha} Q$  dans les différents termes du développement. Puis, effectuons les calculs, en ne gardant que les termes de degré  $\leq n$  par rapport à l'ensemble des variables  $\frac{1}{s^\alpha}$ ,  $\frac{1}{s'^\alpha}$ . L'ensemble des termes négligés peut être incorporé dans l'erreur ci-dessus, qui continue à garder la même forme. Quant aux termes conservés, ils constituent un polynome de degré  $n$  par rapport à  $\frac{1}{s^\alpha}$ ,  $\frac{1}{s'^\alpha}$ ; chaque coefficient de ce polynome est un polynome en  $x$  de degré  $\leq q \leq \frac{n}{2}$ . Multiplions enfin le développement précédent par celui de  $\frac{f(s')g(s')}{s'^{k+\alpha-1}}$ . Nous obtenons une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $\frac{s'^{m-k-j\alpha}}{s^{i\alpha}} x^h$ , avec  $h \leq \frac{n}{2}$  et  $i \leq n-1$ . Quant au nombre entier  $j$ , il peut prendre des valeurs allant de 1 à  $2n-1$ ; mais, nous ne gardons que celles pour lesquelles on a  $i+j \leq n$ . L'erreur globale est bornée par  $M \frac{s'^{m-k}}{s^{2\alpha(n+1)}} x^{q+1}$ ,  $M$  désignant un certain facteur constant.

Finalement, G est une combinaison linéaire d'expressions de la forme  $s^{k-i\alpha} I_{ph}$ , en posant

$$I_{ph} = \int_0^{+\infty} s^p x^h e^{-x} dx \quad (p = m - k - j\alpha);$$

avec une erreur dont le module est inférieur à

$$(9) \quad \frac{M s^k}{s^{2(n+1)}} I_{m-k, q+1}.$$

4. Calculons maintenant un développement asymptotique de l'intégrale  $I_{ph}$ . On a

$$s^p = s^p \left( 1 + \frac{\alpha x}{as^\alpha} \right)^p$$

ou, en appliquant la formule de Taylor,

$$s^p = \sum_{i=0}^{r-1} C_i \frac{x^i}{s^{i\alpha-p}} + C_r \frac{x^r}{s^{r\alpha-p}} \left( 1 + \frac{\theta \alpha x}{as^\alpha} \right)^{p-\alpha^{-r}} \quad (0 < \theta < 1);$$

les  $C_i$  étant des coefficients constants que l'on sait calculer. On en déduit

$$(10) \quad I_{ph} = \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{C_\lambda (\lambda + h)!}{s^{\lambda\alpha-p}} + \frac{C_r}{s^{r\alpha-p}} \int_0^\infty \left( 1 + \frac{\theta \alpha x}{as^\alpha} \right)^{p-\alpha^{-r}} x^{r+h} e^{-x} dx.$$

L'intégrale figurant dans le dernier terme ayant une valeur finie, la formule (10) constitue bien un développement asymptotique.

En multipliant  $I_{ph}$  par  $s^{k-i\alpha}$  et remplaçant  $p$  par sa valeur, l'exposant de  $\frac{1}{s}$  dans le terme général est

$$\alpha\lambda - m + k + j\alpha + i\alpha - k = -m + \alpha(i + j + \lambda).$$

Son minimum est  $-m + \alpha(i + j)$ ; son maximum est  $-m + n\alpha$ , si l'on prend  $r = n - i - j + 1$ . De plus,  $I_{m-k, q+1}$  étant de l'ordre de  $s^{m-k}$ , l'expression (9) est de l'ordre de  $\frac{s^m}{s^{2(n+1)}}$ .

En définitive, nous obtenons une série asymptotique de la forme

$$(11) \quad G = s^m \left[ \sum_{i=0}^n \frac{g_i}{s^{\alpha i}} + \frac{G_n}{s^{\alpha(n+1)}} \right],$$

les coefficients  $g_i$  étant des constantes que l'on sait calculer et le facteur  $G_n$  restant borné pour  $s$  infini. Voici les valeurs des quatre premiers coefficients  $g_i$ :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_0 = -c_0, \quad g_1 = -c_1 - m \frac{c_0}{a}, \quad g_2 = -c_2 - (m - \alpha) \frac{c_1}{a} - m(m - k - \alpha) \frac{c_0}{a^2}, \\ g_3 = -c_3 - (m - 2\alpha) \frac{c_2}{a} - (m - \alpha)(m - k - 2\alpha) \frac{c_1}{a^2} + m \frac{c_0 a_2}{a^2} \\ \quad \quad \quad - m(m - k - \alpha)(m - k - 2\alpha) \frac{c_0}{a^3}. \end{array} \right.$$

## NOTE (E).

Soit une fonction  $f(x)$  se présentant sous la forme d'un polynôme de degré  $p$  en  $\log x$ , chaque coefficient de ce polynôme étant une fonction holomorphe de  $x$  au voisinage de  $x=0$ . Soit d'autre part un exposant entier et positif  $m$ . Considérons l'intégrale indéfinie

$$F(x) = \int \frac{f(x)}{x^m} dx.$$

Développons le coefficient de chaque puissance de  $\log x$  suivant les puissances de  $x$ , en nous arrêtant au terme de degré  $m-1$ . Nous obtenons

$$F(x) = \sum_{n=0}^{m-1} \int \frac{P_n(\log x)}{x^{m-n}} dx + \int_0^x R(x) dx,$$

où  $P_n(\log x)$  désigne un polynôme de degré  $p$  en  $\log x$ , à coefficients constants et  $R(x)$  un polynôme de degré  $p$  en  $\log x$ , à coefficients holomorphes. En effectuant l'intégration des premiers termes, on obtient

$$(1) \quad F(x) = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{Q_n(\log x)}{x^{m-n-1}} + N(F) + \int_0^x R(x) dx,$$

où  $Q_n$  désigne un polynôme de degré  $p$  en  $\log x$ , à *coefficients constants* et  $N(F)$  un polynôme de degré  $p+1$  en  $\log x$ , à *coefficients constants* et dont le terme constant est arbitraire. Quant au dernier terme de la formule (1), c'est une fonction analogue à  $f(x)$ , mais s'annulant avec  $x$ .

Le polynôme  $N(F)$  sera appelé le *noyau* de la fonction  $F(x)$ ; c'est lui qui renferme la constante d'intégration.

Si  $m$  est fractionnaire, nous supposons  $p=0$ . Dans ce cas, on limite  $n$  à la partie entière  $m'$  de  $m-1$ . On a une formule analogue à (1); mais chaque  $Q_n$  est une constante et le noyau  $N(F)$  se réduit à la constante d'intégration. Quant à  $R(x)$ , c'est le produit de  $x^{m'+1-m}$  par une fonction holomorphe; le dernier terme de (1) est le produit de  $x^{m'+2-m}$  par une fonction holomorphe.

