

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL VINCENSINI

**Sur les courbes de Ribaucour et sur les réseaux conjugués
géodésio-coniques**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 60 (1943), p. 17-34

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__17_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

COURBES DE RIBAUCCOUR

ET SUR LES

RÉSEAUX CONJUGUÉS GÉODÉSIO-CONIQUES

PAR M. PAUL VINCENSINI.

1. *Introduction.* — Dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure* ⁽¹⁾, j'ai été amené à signaler l'existence, et à indiquer quelques propriétés, des surfaces (A) enveloppes de sphères à un paramètre jouissant de la propriété suivante : si M et N sont deux centres de courbure principaux associés quelconques de (A), le lieu géométrique des points I partageant le segment MN (*segment principal*) dans un rapport constant donné $K \left[\frac{IM}{IN} = K \right]$ est un plan π [*plan de base* de (A)].

Si $K = -1$, les surfaces (A) sont les surfaces enveloppes de sphères à *développée moyenne plane*; c'est de ces dernières surfaces qu'il a surtout été question dans le Mémoire cité; on a vu qu'elles sont étroitement liées aux surfaces minima d'O. Bonnet à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, et que leur détermination analytique peut être effectuée complètement.

Nous nous proposons, dans cet article, d'examiner en détail le cas général. Nous serons ainsi conduits à distinguer deux classes de surfaces (A), suivant que le rayon R de la sphère S qui enveloppe (A) est constant ou variable, ce dernier cas (R variable) donnant lieu, à son tour, à la considération de trois types géométriquement séparés. Dans l'un et l'autre cas nous verrons intervenir, de deux façons différentes, la famille complète des courbes de Ribaucour du plan. Dans le premier cas, ces courbes interviennent comme *déférentes* [lieux des centres des sphères des surfaces (A)]. Dans le second cas (qui est le cas vraiment général) les courbes de Ribaucour interviennent dans la définition

(1) Sur une famille de surfaces à lignes de courbure plane, (3), t. LIX, 1942.

des deux premiers (*voir* les nos 5 et 6) des trois types distincts auxquels il a été fait allusion plus haut; la relation entre les courbes de Ribaucour et les surfaces des deux types en question est beaucoup plus cachée que dans le premier cas, et peut être regardée comme fournissant une nouvelle définition des courbes de Ribaucour, nettement différente de la définition usuelle.

Les courbes de Ribaucour n'interviennent plus dans la construction des surfaces (A) du troisième type; mais celui-ci donne lieu à la remarque suivante. En général, une courbe déterminée ne peut être la déférente que d'une seule surface (A) [en ne considérant pas comme distinctes deux surfaces (A) parallèles]. Il existe cependant des courbes spéciales pouvant servir de déférentes à deux surfaces (A) distinctes, c'est-à-dire définies par deux lois distinctes de variation des rayons R et R' avec la position du centre de la sphère génératrice [non liées par la relation $R' - R = h(\text{const.})$]. Les surfaces (A) pouvant s'assembler par couples de même déférente sont précisément celles du troisième type signalé; elles sont susceptibles d'une définition géométrique remarquablement simple, et d'une détermination analytique explicite complète.

Les nappes Σ non curvilignes, des développées des surfaces (A), jouissent de la propriété de posséder un réseau conjugué (que nous dirons *géodésio-conique*) formé d'une famille de ∞^1 géodésiques et d'une famille de ∞^1 coniques. Les coniques du réseau sont deux à deux homothétiques, mais les surfaces Σ ci-dessus ne donnent pas tous les réseaux géodésio-coniques dont les coniques sont deux à deux homothétiques. Nous effectuons la détermination complète de ces derniers réseaux, ainsi que celle des réseaux de même dénomination, pour lesquels les plans des coniques sont parallèles à une droite fixe, ou passent par une droite fixe ou par un point fixe. Dans tous les cas étudiés la solution peut être présentée sous des formes géométriques qu'il nous a paru intéressant de mettre en évidence.

2. *Les surfaces (A) et les éléments associés.* — Nous effectuerons la détermination des surfaces (A) en recherchant, pour l'une quelconque de ces surfaces, la forme de la déférente C [lieu des centres des sphères S inscrites dans (A) et première nappe de la développée de (A)], et la loi de variation du rayon de la sphère S lorsque son centre décrit C. Prenons pour plan de base de (A) le plan xOy du système rectangulaire $Oxyz$, et désignons par $M(x, y, z)$ le point courant sur C; M est le premier centre de courbure principal de (A), auquel sont associés ∞^1 deuxièmes centres de courbure principaux (N) situés sur les ∞^1 normales à (A) issues de M, normales dont l'ensemble constitue un cône de révolution Ω (éventuellement un plan), ayant pour base le cercle caractéristique de S, et circonscrit à la deuxième nappe Σ de la développée de (A). Il est clair que Σ est une véritable surface et non une courbe, car les seules surfaces dont les deux nappes de la développée sont curvilignes sont les cyclides de Dupin, et qu'aucune de ces cyclides (si l'on écarte le cas banal où le rapport K

est nul ou infini) ne saurait avoir ses segments principaux partagés dans un rapport constant par un plan fixe. Écarter les cas $K=0$ et $K=\infty$ revient d'ailleurs, notons-le, à ne pas considérer comme de véritables surfaces (A) les surfaces à déférente plane et à loi de variation des rayons arbitraire.

Sur Σ , les ∞^1 centres de courbure N associés à un même point M de C sont distribués sur une conique, courbe de contact du cône de révolution Ω avec Σ , et section de Σ par le plan parallèle à xOy de cote $\frac{z}{K}$ (z étant la cote de M). En exprimant, conformément à la définition des surfaces (A), que C, et la loi de variation du rayon de S, sont tels que la cote du plan précédent est constamment égale à $\frac{z}{K}$, on a un moyen de déterminer, simultanément, la déférente C et la loi de variation du rayon correspondante.

3. *Surfaces-canaux du type (A)*. — Il sera commode de prendre comme paramètre, pour fixer un point quelconque M de C et la sphère S centrée en ce point, le rayon R de S. Cela ne sera possible que si R n'est pas constant le long de C. Cherchons donc, pour commencer, les surfaces (A) enveloppes d'une sphère de rayon constant (surfaces-canaux). Le cône Ω du n° 2 ayant pour sommet un point quelconque M de la déférente C est ici un plan : le plan normal P à C en M. La surface Σ enveloppe du cône Ω se réduit à la développable polaire de C, et la conique caractéristique de Σ à la droite polaire p relative au point M. La droite p restant constamment parallèle au plan de base de la surface (A), la développable polaire de C (enveloppe de p) se réduit à un plan parallèle au plan de base, ou à un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan de base. Le cas de la surface polaire plane ne pouvant évidemment se présenter, cette surface est un cylindre, et la courbe C est nécessairement une courbe plane située dans un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Envisageons dès lors dans le plan de C : la courbe C, la section ε de sa développable polaire (développée de C), le point N de ε qui correspond à un point quelconque M de C, et la trace (fixe) δ du plan de base de (A) qui coupe MN en I. Par définition de (A) le rapport $\frac{IM}{IN}$ est constant lorsque M décrit C; il en résulte que C jouit de la propriété que les centres de courbure partagent les segments de normale limités à la courbe et à une droite fixe (δ) dans un rapport constant : c'est une *courbe de Ribaucour* de base δ , et il est clair que l'on obtient toutes les surfaces-canaux du type (A) en centrant des sphères de même rayon sur une courbe de Ribaucour arbitraire. Les surfaces obtenues sont celles de la première classe signalée dans l'Introduction; nous allons poursuivre en supposant R variable.

4. *Surfaces (A) enveloppes de sphères de rayon variable*. — On peut, dans les conditions où l'on se place, prendre comme paramètre, pour fixer la position

de la sphère S centrée en un point quelconque de la déférente C de l'une quelconque des surfaces cherchées (A) [de plan de base xOy], le rayon R de S . Le cercle de base (caractéristique de S) du cône de révolution Ω défini au n° 2 est donné par les deux équations

$$(1) \quad \sum (X - x)^2 = R^2, \quad \sum (X - x) \frac{dx}{dR} + R = 0,$$

où x, y, z sont les coordonnées du centre M de la sphère S ; X, Y, Z les coordonnées courantes, et où les sommes Σ sont étendues aux trois ensembles de lettres $(x, y, z), (X, Y, Z)$. Le cône Ω a pour équation

$$(2) \quad \sum (X - x)^2 = \left[\sum (X - x) \frac{dx}{dR} \right]^2;$$

et son enveloppe, qui s'obtient par dérivation de (2) par rapport à R et élimination de R entre l'équation obtenue et (2), comprend, outre la courbe C lieu du sommet, la deuxième nappe Σ de la développée de (A).

Cette deuxième nappe est, comme il est facile de le voir, le lieu de la conique (le long de laquelle Ω touche Σ) section du cône (2) par le plan

$$(3) \quad \sum (X - x) \frac{d^2 x}{dR^2} - \sum \left(\frac{dx}{dR} \right)^2 + 1 = 0.$$

Conformément à ce qui a été dit au n° 2, pour obtenir les surfaces (A) cherchées, il suffit d'exprimer que le plan (3) est parallèle au plan de base xOy , et que sa cote est constamment égale à $\frac{z}{K}$ (z étant la cote, sur C , du sommet M du cône Ω). La première des deux conditions précédentes fournit les deux relations

$$(4) \quad \frac{d^2 x}{dR^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dR^2} = 0,$$

et la deuxième [cote du plan (3) égale à $\frac{z}{K}$] donne l'équation différentielle

$$(5) \quad \frac{K-1}{K} z \frac{d^2 z}{dR^2} + \left(\frac{dx}{dR} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dR} \right)^2 - 1 = 0.$$

Les équations (4) montrent que la déférente C est une courbe *plane*, située dans un plan perpendiculaire au plan de base xOy . En prenant le plan de C confondu avec xOz , et en négligeant (ce qui est évidemment permis) une translation parallèle à Ox , on aura

$$(6) \quad x = aR, \quad y = 0 \quad (a = \text{const.}),$$

et la substitution $R \rightarrow \frac{x}{a}$ dans (5) donnera l'équation différentielle définissant, dans le plan xOz , les déférentes C des surfaces cherchées

$$(7) \quad 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{K-1}{K} z \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{a^2}.$$

L'intégration de (7) donne l'équation générale des courbes C sous la forme

$$(8) \quad x = a \int \left(\lambda z^{1-K} + 1 - a^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dz,$$

où l'intégrale du second membre est une intégrale de différentielle binome, où λ est une constante d'homothétie, et K, a des paramètres de forme.

Pour chaque valeur de K il existe [une homothétie étant négligée, et deux surfaces (A) parallèles n'étant pas considérées comme distinctes], ∞' surfaces (A) dont les déférentes sont définies par l'équation (8), où le seul paramètre de forme est a ; en outre, d'après la première équation (6), le rayon R de la sphère S centrée au point $M(x, z)$ de la déférente correspondant à une valeur déterminée a du paramètre de forme, est $R = \frac{x}{a}$, ce qui prouve que ce rayon est proportionnel à la distance du point M à la droite fixe Oz , située dans le plan de la déférente C et perpendiculaire au plan de base, le coefficient de proportionnalité étant $\frac{1}{a}$. Si l'on appelle *base* d'une courbe (8) l'axe Ox du système auquel la courbe est rapportée, et si l'on tient compte de ce que, comme on l'a déjà observé, les déférentes C ne sont définies, par l'équation (8), qu'à une translation parallèle à Ox près, on voit que Oz peut être considérée comme une perpendiculaire *quelconque* à la base de l'une quelconque des courbes envisagées, et présenter ainsi la définition géométrique des surfaces (A) de la deuxième classe signalée dans l'Introduction.

Ces surfaces sont *les enveloppes d'une sphère dont le centre décrit une courbe (8) quelconque (de paramètre a), et dont le rayon R varie proportionnellement à la distance MH du centre M à une perpendiculaire quelconque à la base de la courbe C envisagée; le coefficient de proportionnalité est l'inverse du paramètre a de C [$R = \frac{MH}{a}$]*.

5. *Les trois types de surfaces (A). Premier type.* — Il convient maintenant d'envisager trois types distincts de surfaces (A), correspondant aux trois cas où le paramètre a de la déférente est supérieur, inférieur ou égal à un . Supposons $a > 1$; nous allons voir que l'ensemble des déférentes C , relatives aux diverses valeurs du rapport constant K dans lequel le plan de base de (A) partage les différents segments principaux, est fourni par l'ensemble des projections orthogonales des différentes courbes de Ribaucour sur les divers plans issus de leurs bases.

Définissons une courbe quelconque de Ribaucour en nous donnant le rapport $\frac{\overline{PQ}}{\omega Q} = K$, P étant un point quelconque de la courbe, ω le centre de courbure correspondant, et Q le point où la normale en P coupe la base. La base étant prise pour axe Ox du système rectangulaire ($xO\zeta$), l'équation diffé-

rentielle des courbes de Ribaucour correspondant à une valeur quelconque du rapport constant K (défini comme ci-dessus) est comme on le voit sans peine

$$(9) \quad 1 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \frac{K-1}{K} \zeta \frac{d^2\zeta}{dx^2} = 0.$$

Supposons que le plan $xO\zeta$ fasse l'angle θ avec le plan xOz du système $Oxyz$ et projetons orthogonalement, sur le plan xOz , une courbe intégrale quelconque de l'équation (9). L'équation différentielle de la famille des courbes projections se déduit de (9) en y remplaçant ζ par $\frac{z}{\cos\theta}$; on trouve ainsi, après une transformation évidente,

$$(10) \quad 1 + \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{K-1}{K} z \frac{d^2z}{dx^2} = \sin^2\theta,$$

et l'on voit qu'il suffit de choisir θ tel que $\sin\theta = \frac{1}{a}$, ce qui est possible puisqu'on suppose $a > 1$, pour identifier l'équation (10) avec l'équation (7) du n° 4, définissant les déférentes C des surfaces (A) du type actuellement considéré (de paramètre $a > 1$). D'une façon précise, on peut énoncer le résultat suivant.

Les déférentes C , des surfaces (A), de paramètre a supérieur à un, et correspondant à la valeur K du rapport constant dans lequel le plan de base divise les différents segments principaux, s'obtiennent en projetant orthogonalement une courbe de Ribaucour quelconque, définie par le même rapport constant K , sur un plan, mené par sa base, et faisant avec le plan de la courbe un angle θ dont le sinus est égal à l'inverse du paramètre ($\sin\theta = \frac{1}{a}$).

Les surfaces (A) elles-mêmes s'obtiennent en centrant en chaque point de l'une quelconque des courbes C ainsi obtenues une sphère de rayon $R = \frac{MH}{a}$, MH étant la distance du centre à une droite fixe quelconque perpendiculaire à la base de C dans le plan de C , et en prenant l'enveloppe de la famille de sphères ainsi obtenue.

Comme nous l'avions annoncé dans l'Introduction, la famille actuelle de surfaces (A) met en jeu la famille *complète* des courbes réelles de Ribaucour, dont on vient par suite de mettre en évidence une nouvelle propriété caractéristique. Cette remarque est intéressante, en ce sens, qu'en dehors du problème qui sert de définition usuelle aux courbes de Ribaucour, il ne semble pas qu'il en ait été signalé dont la solution fournit une propriété caractéristique de cette importante famille de courbes.

6. *Surfaces du deuxième type.* — Pour les surfaces (réelles) A du type correspondant à $a < 1$, il n'existe pas de transformation réelle permettant de

déduire leurs déférentes des courbes de Ribaucour. Mais, en soumettant les courbes de Ribaucour à une homologie affine orthogonale multipliant les abscisses (x) par un facteur constant imaginaire pur, on peut en déduire les déférentes des surfaces (A) du type actuel [solutions de l'équation (7) du n° 4, où $a < 1$], déférentes qui ne sont autre chose que *les transformées (réelles), par l'homologie affine ci-dessus, des arcs des courbes de Ribaucour d'ordonnée (ζ) réelle et d'abscisse (x) imaginaire pure.*

Pour le voir, il suffit de vérifier que la substitution de $\frac{ix}{m}$ à x ($m = \text{const}$), transforme l'équation (9) des courbes de Ribaucour en l'équation (7) des déférentes des surfaces (A) du type actuel ($a < 1$). La substitution indiquée transforme (9) en

$$1 + z'^2 + \frac{K-1}{K} z z'' = 1 + \frac{1}{m^2} \quad (\text{où } z \text{ remplace } \zeta),$$

et l'identification de cette équation avec (7) est possible, car elle revient à déterminer m par la relation

$$1 + \frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2},$$

ce qui exige $a < 1$, condition vérifiée par hypothèse.

Si l'on représente une courbe quelconque de Ribaucour (définie à une homothétie près) par les équations

$$\begin{cases} x = \frac{K-1}{K} \int \cos^{\frac{K-1}{K}} \varphi \, d\varphi, \\ z = \cos^{\frac{K-1}{K}} \varphi, \end{cases}$$

où K est le rapport constant $\frac{PQ}{\omega Q}$ défini au n° 5 et où φ est l'angle de la tangente à la courbe avec la base Ox , on constate d'ailleurs qu'il suffit de remplacer φ par $i\varphi$, pour obtenir les arcs imaginaires de la courbe qui donnent, par l'affinité purement imaginaire ci-dessus définie, les déférentes des surfaces (A) pour lesquelles $a < 1$. Ces déférentes ont pour équations

$$\begin{cases} x = \frac{K-1}{K} m \int \text{ch}^{\frac{K-1}{K}} \varphi \, d\varphi, \\ z = \text{ch}^{\frac{K-1}{K}} \varphi. \end{cases}$$

La projection sur un plan quelconque issu de Ox n'étant autre chose (à une homothétie près) qu'une homologie affine orthogonale d'axe Oz et de rapport supérieur à un, ayant pour effet de multiplier toutes les abscisses (x) par un même nombre fixe $m > 1$, on peut unifier les résultats des n°s 5 et 6, et énoncer le résultat suivant.

L'ensemble complet des surfaces (A) [enveloppes de sphères de rayon variable] de paramètre a différent de un, peut se déduire de l'ensemble des

courbes de Ribaucour par le procédé suivant. On soumet les différentes courbes de Ribaucour [de base Ox dans le plan xOz], à une homologie affine orthogonale quelconque d'axe Oz dont le rapport est, soit un nombre *réel* (m) *supérieur à 1*, soit un nombre *purement imaginaire* (im) de module quelconque. On obtient ainsi des courbes *réelles*, provenant des arcs réels des courbes de Ribaucour dans le premier cas, et des arcs de ces mêmes courbes d'abscisse purement imaginaire (et d'ordonnée réelle) dans le second cas. Ces courbes constituent l'ensemble des déférentes des diverses surfaces (A) de paramètre différent de un . Les surfaces elles-mêmes sont les enveloppes des familles de sphères centrées sur l'une quelconque des courbes précédentes, le rayon $R = \frac{MH}{a}$ de la sphère génératrice étant proportionnel à la distance MH de son centre à une droite fixe quelconque du plan de la déférente normale à la base Ox . Le coefficient de proportionnalité $\frac{1}{a}$ est d'ailleurs $\frac{1}{a} = \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}$ dans le premier cas (homologie affine de rapport réel supérieur à 1), et $\frac{1}{a} = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$ dans le deuxième cas (homologie affine de rapport imaginaire pur).

Les ∞^1 surfaces (A) ayant pour déférentes les ∞^1 courbes déduites par homologie affine orthogonale, d'une même courbe de Ribaucour, admettent toutes le même rapport constant de définition [rapport dans lequel le plan de base partage les différents segments principaux], et ce rapport *est précisément le rapport K qui définit la courbe de Ribaucour dont les surfaces (A) dérivent.*

7. *Surfaces du troisième type.* — Il nous reste à présent à envisager le type de surfaces (A) pour lequel $a = 1$. Ce dernier type ne peut pas être rattaché, comme ceux qui précèdent, à la considération des courbes de Ribaucour, mais il présente cependant lui aussi un certain intérêt géométrique.

L'équation (7) définissant les déférentes s'écrit, si $a = 1$,

$$(11) \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{K-1}{K} z \frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

et son intégration donne, une homothétie et une translation parallèle à Ox étant toujours négligées, les courbes d'équation

$$x = z^{\frac{2K-1}{K-1}}.$$

L'équation précédente est de la forme

$$(12) \quad x = z^\alpha,$$

et toute courbe (12), où α est un nombre quelconque, est la déférente d'une surface (A) du type actuellement envisagé. Le rapport K attaché à cette surface est

$$(13) \quad K = \frac{1-\alpha}{2-\alpha};$$

le plan de base de la surface est le plan xOy , perpendiculaire au plan de la déférente (12) suivant la droite Ox [que nous continuerons à appeler *base* de la déférente]; et, si nous convenons de dire que Oz est l'*axe* de cette même déférente, nous pouvons donner, des surfaces (A) du type actuel, la définition géométrique très simple et d'autant plus remarquable suivante.

Ce sont les surfaces enveloppes d'une sphère dont le centre décrit une courbe (12) quelconque, en restant tangente à l'axe de la courbe [ou à une parallèle quelconque à l'axe située dans le plan de la courbe].

Pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$, le rapport K , défini par la relation (13), est nul ou infini; la déférente est une droite ou une parabole, et la surface (A) est un cône de révolution, ou une cyclide de Dupin (du troisième ordre) dont les courbes focales sont des paraboles égales.

Si l'on écrit (12) sous la forme

$$z = x^{\frac{1}{\alpha}},$$

on constate que la même courbe C d'équation (12), peut être considérée comme la déférente d'une surface (A) de deux façons différentes : On peut prendre, comme on l'a fait plus haut, pour *axe* de C la droite Oz ; on peut aussi prendre pour *axe* Ox ; le plan de base de la nouvelle surface (A_1) obtenue est alors le plan yOz ; la droite à laquelle les sphères génératrices de (A_1) sont tangentes est Ox , et le rapport constant K_1 , dans lequel le plan de base de (A_1) partage les différents segments principaux, que l'on obtient en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$ dans (13), est

$$(13') \quad K_1 = \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1};$$

en comparant (13) et (13'), on voit que la substitution à effectuer sur le rapport constant K , quand on passe d'une surface (A) à la surface (A_1) de même déférente, est définie par

$$K_1 = \frac{K}{3K - 1}.$$

En posant $K_1 = K$, on obtient les deux seuls cas où les deux surfaces (A) et (A_1), relatives à une même déférente, sont identiques; ces deux cas correspondent à $K = 0$ et $K = \frac{2}{3}$; pour $K = 0$ on obtient le cas banal où C est une droite et (A) un cône de révolution; pour $K = \frac{2}{3}$, C est une hyperbole équilatère, (A) est l'enveloppe d'une sphère variable dont le centre décrit l'hyperbole et qui reste tangente à l'une des deux asymptotes, et il est clair qu'en prenant pour *axe* (au sens indiqué plus haut), l'une ou l'autre des deux asymptotes, on obtient la même surface (A). Dans tous les autres cas (A) et (A_1) sont distinctes.

8. *Sur la construction des centres de courbure d'une famille de courbes.* — Les résultats du numéro précédent conduisent, incidemment, à une construction géométrique très simple des centres de courbure des courbes γ ainsi définies.

Soit, dans le plan xOy (les axes étant rectangulaires) une courbe C d'équation $y = \lambda x^\alpha$, ou, moyennant une homothétie, $y = x^\alpha$, α étant un nombre quelconque positif ou négatif. Envisageons la famille des cercles centrés sur C et tangents à Ox ; l'enveloppe de ces cercles se compose de Ox et d'une certaine courbe γ ; les courbes dont il est question plus haut sont les courbes γ ainsi obtenues.

Si l'on considère la surface A enveloppe des sphères ayant pour grands cercles les cercles précédents, cette surface appartient au type (A) envisagé au n° 7; elle admet pour plan de base le plan perpendiculaire au plan de C le long de Oy , et le rapport constant dans lequel le plan de base partage les différents segments principaux est $K = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$. La courbe γ précédemment définie est la section de A par le plan xOy (abstraction faite de la droite Ox); d'autre part, si Σ est la deuxième nappe de la développée de A , la normale à A en un point quelconque P de γ s'appuie sur C en un certain point M (premier centre de courbure principal), et touche Σ en un point N , qui est le deuxième centre de courbure principal de A , et, en même temps, le centre de courbure de la courbe γ relatif au point P .

De ces remarques résulte la construction suivante du centre de courbure N de γ en son point courant P . On détermine le point d'intersection I de la normale en P à γ avec Oy , et l'on prend, sur cette normale, le point N défini par

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha},$$

M étant le point de C , correspondant au point P de γ , dans la construction géométrique de γ à partir de C . On constate aussitôt que, pour avoir le centre de courbure N , il suffit de porter, sur la normale MI , le segment \overline{MN} de valeur algébrique $\overline{MN} = \frac{\overline{MI}}{\alpha-1}$.

Bien que les courbes γ soient beaucoup plus complexes que les courbes C dont elles dérivent, la détermination de leurs centres de courbure peut se faire au moyen d'une construction géométrique dont il convient au moins de noter la remarquable simplicité. Les exemples donnant lieu à des énoncés géométriques élégants sont nombreux. Nous n'insisterons pas sur ce sujet, mais nous ferons cependant la remarque suivante.

Si l'on envisage C comme la section droite d'une surface réfléchissante cylindrique, la courbe (N) lieu de N est la *caustique par réflexion*, relative aux rayons parallèles à l'axe Oy (enveloppe du faisceau réfléchi de celui constitué par les rayons parallèles à Oy). On peut donc dire que *les caustiques par*

réflexion d'une courbe C [$y = x^2$], relatives aux faisceaux de rayons parallèles à l'un ou à l'autre des deux AXES (rectangulaires) de la courbe, sont telles, que les portions de rayons réfléchis limités à la courbe réfléchissante et à la caustique, sont partagés dans un rapport constant par l'une ou l'autre de deux droites fixes. Ces droites, lieux des points I définis (avec les notations ci-dessus)

par $\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$, ne sont d'ailleurs autre chose que les deux axes de la courbe réfléchissante.

On voit en outre, que si les déférentes C des surfaces (A) du troisième type ne sont pas, comme celles des deux premiers, liées d'une façon simple aux courbes de Ribaucour, elles n'en présentent pas moins (et cela de deux façons différentes) une propriété géométrique rappelant la propriété qui sert de définition aux courbes de Ribaucour.

9. *Remarques sur les surfaces* Σ . — Relativement aux surfaces Σ , nappes non curvilignes des développées des surfaces (A) dont il est question dans cet article [autres que les surfaces canaux du n° 3], nous pouvons faire les remarques suivantes. Dans le Mémoire des *Annales de l'École Normale* précédemment cité, nous avons observé que les développées Σ des surfaces (A) à développée moyenne plane [correspondant à $K = -1$] étaient coupées, par les plans parallèles au plan de base, suivant une famille de coniques deux à deux homothétiques, les cônes circonscrits aux surfaces Σ le long de ces coniques étant tous de révolution. Cette propriété subsiste, pour les surfaces Σ , développées des différentes surfaces (A) relatives aux diverses valeurs du rapport constant K . Ces surfaces sont en effet engendrées par la conique (σ), section du cône (de révolution) Ω défini au n° 2, et dont l'équation est l'équation (2) du n° 4, par le plan (3); d'autre part, Ω est circonscrit à Σ le long de (σ) qui est sa courbe caractéristique. Pour vérifier que les différentes coniques σ situées sur une même surface Σ sont deux à deux homothétiques, il suffit, puisque les plans de ces coniques sont tous parallèles au plan de base xOy de la surface (A) correspondante, de vérifier qu'il en est ainsi pour les sections du cône Ω par le plan xOy . Les équations de ces sections sont, comme le montre l'équation (2) du n° 4 où l'on tient compte des relations (6),

$$(14) \quad (1 - a^2)(X - x)^2 + Y^2 = a^2 z^2 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2,$$

où X et Y sont les coordonnées courantes, et x, z les coordonnées du sommet du cône dans le plan xOz . On constate que les coniques (14) sont bien deux à deux homothétiques, et que ce sont :

- des *hyperboles*, si $a > 1$, c'est-à-dire pour les surfaces (A) du premier type envisagé dans l'étude actuelle;
- des *ellipses*, si $a < 1$ [surfaces (A) du second type];
- des *paraboles*, si $a = 1$ [surfaces (A) du troisième type].

Les surfaces Σ présentent la particularité d'admettre un réseau conjugué *géodésio-conique*, les deux familles de courbes du réseau étant la famille des courbes de niveau constituée par les coniques deux à deux homothétiques qui viennent d'être mises en évidence, et la famille des géodésiques enveloppées sur Σ par les rayons de la congruence des normales à (A). La recherche des surfaces les plus générales portant des réseaux du type indiqué sera faite au numéro suivant.

Nous signalerons ici que, le rayon de la sphère S enveloppant une surface (A) étant une fonction algébrique des coordonnées du centre ($R = \frac{x}{a}$), il suffira, pour obtenir les surfaces Σ *algébriques* portant des réseaux géodésio-coniques de l'espèce envisagée, de considérer les surfaces (A) à *déférentes algébriques*. Les déférentes provenant par affinité des courbes de Ribaucour, les surfaces Σ algébriques proviendront des courbes de Ribaucour algébriques, et ces dernières courbes sont celles pour lesquelles le rapport K de définition (n° 5) a une expression de la forme

$$K = \frac{1}{2n+1} \quad (n = \text{entier} > 0),$$

ou

$$K = \frac{1}{2n} \quad (n = \text{entier} < 0).$$

Dans le cas particulier $a = 1$, pour lequel les coniques du réseau porté par Σ sont des paraboles, les déférentes sont définies par les différentes équations de la forme $x = z^\alpha$, et les surfaces Σ seront algébriques pour toutes les valeurs rationnelles de α .

10. *Surfaces générales admettant un réseau conjugué formé de courbes deux à deux homothétiques et de géodésiques.* — Si l'on écarte le cas évident des cônes (ou des cylindres), la solution du problème considéré peut être rattachée à la recherche, faite au n° 4, des surfaces enveloppes de sphères de rayon variable du type (A).

Désignons par Θ l'une des surfaces cherchées, et soient (σ) les courbes, deux à deux homothétiques, constituant la première famille du réseau. Une courbe σ et la courbe infiniment voisine, étant homothétiques, sont situées sur un même cône Ω circonscrit à Θ le long de σ , et les tangentes aux courbes de la seconde famille du réseau, aux points où elles coupent la courbe σ de la première famille, sont distribuées suivant les génératrices de Ω . Il résulte de là que Θ est la nappe non curviligne de la développée d'une surface (B) enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre admettant, pour déférente, la courbe C décrite par le sommet M du cône Ω circonscrit à Θ le long de σ , lorsque σ décrit la série des ∞^1 courbes de la première famille du réseau. Les normales à une surface enveloppe de sphères issues d'un même point M de la nappe curviligne

de développée, étant distribuées suivant les génératrices d'un cône de révolution, Ω est de révolution, et, comme on l'a vu au n° 4, σ est une section plane de ce cône. Les réseaux du numéro actuel constituent donc la famille la plus générale des réseaux géodésio-coniques à coniques deux à deux homothétiques, dont le numéro précédent nous a offert quelques exemples particuliers. La détermination des surfaces Θ portant ces réseaux revient à celle des surfaces développantes (B). Prenons, comme nous l'avons fait pour les surfaces (A), pour éléments inconnus propres à déterminer les surfaces (B) et les surfaces Θ associées, le lieu (C) des centres des sphères S dont (B) est l'enveloppe, et la loi de variation du rayon R de S quand son centre décrit C. Le cône Ω dont le sommet est le point M(x, y, z) de C, a pour équation l'équation (2) du n° 4

$$(2) \quad \sum (X - x)^2 = \left[\sum (X - x) \frac{dx}{dR} \right]^2,$$

et la conique σ de contact de Ω avec Θ est définie (voir le n° 4) par l'intersection de Ω et du plan

$$(3) \quad \sum (X - x) \frac{d^2 x}{dR^2} - \sum \left(\frac{dx}{dR} \right)^2 + 1 = 0.$$

Les coniques σ étant supposées non dégénérées, le rayon R de S n'est pas constant (voir le n° 3), et l'on peut le prendre pour variable indépendante. En exprimant que le plan (3) de la conique σ est parallèle au plan xOy , on obtient les deux relations

$$(4) \quad \frac{d^2 x}{dR^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dR^2} = 0,$$

qui constituent *ici* les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que C soit la déferente d'une surface du type (B).

Ces relations montrent que C est une courbe *plane quelconque*. En prenant le plan de C pour plan xOz , et en négligeant une translation parallèle à Ox , on aura, comme au n° 4,

$$y = 0, \quad x = aR \quad (a = \text{const. arb.}),$$

et l'on voit que, comme pour les surfaces (A), le rayon de la sphère S dont le centre M décrit C et qui enveloppe une surface (B) *est proportionnel à la distance MH du centre à la droite fixe Oz*, droite qui, étant donné le caractère absolument arbitraire de la courbe C, peut être considérée comme la droite *la plus générale du plan*. De là résulte l'élégante construction géométrique suivante, des surfaces Θ , admettant un réseau conjugué formé de coniques deux à deux homothétiques et de géodésiques, dont nous nous étions proposé la recherche.

Donnons-nous, dans un plan II, une courbe quelconque C et une droite également quelconque D. Envisageons une sphère variable S, dont le centre M décrit C,

et dont le rayon R varie proportionnellement à la distance MH du centre à la droite fixe D , le coefficient de proportionnalité étant quelconque. Cette sphère enveloppe une certaine surface B . La surface Θ la plus générale est la nappe, autre que la courbe C , de la développée de B .

Le réseau géodésio-conique porté par Θ est le réseau focal de la congruence des normales à B .

La détermination des équations explicites des surfaces Θ dont on vient d'indiquer la construction géométrique ne présente pas de difficulté. Prenons l'équation de la courbe C sous la forme $z = f(x)$, f étant une fonction arbitraire de l'argument x dont nous désignerons les dérivées par f' , f'' , et supposons la droite D confondue avec Oz ; nous définissons ainsi, une fois fixé le coefficient de proportionnalité liant R à MH [$R = \frac{1}{a}MH$], une surface déterminée Θ . La conique de contact, σ , de Θ et du cône circonscrit ayant pour sommet le point M de C de cote $z = f(x)$, est définie par les deux équations (2) et (3) qui, si l'on tient compte des coordonnées [$x = aR$, $y = 0$, $z = f(x)$] de M , s'écrivent respectivement

$$(15) \quad (1 - a^2)(X - x)^2 + Y^2 - a^2 f'^2 (Z - f)^2 - 2a^2 f'(X - x)(Z - f) = 0,$$

$$(16) \quad Z - f = \frac{a^2(1 + f'^2) - 1}{a^2 f''},$$

où les coordonnées courantes sont X , Y , Z .

L'équation de σ dans son plan s'obtient en remplaçant dans (15) $(Z - f)$ par son expression (16); on trouve ainsi

$$(17) \quad (1 - a^2)(X - x)^2 + Y^2 - 2 \frac{f'}{f''} [a^2(1 + f'^2) - 1](X - x) - \frac{f'^2}{a^2 f''^2} [a^2(1 + f'^2) - 1]^2 = 0.$$

La conique sera une ellipse ou une hyperbole si $a \neq 1$, et une parabole si $a = 1$. Plaçons-nous d'abord dans le cas $a \neq 1$. Le centre, situé sur l'axe $X'X$, a alors pour abscisse

$$X_0 = x + \frac{f' [a^2(1 + f'^2) - 1]}{f''(1 - a^2)},$$

le demi-axe porté par $X'X$ a pour longueur

$$m = \left| \frac{f' [a^2(1 + f'^2) - 1]}{a(1 - a^2)f''} \right|,$$

et l'expression du demi-axe perpendiculaire au précédent, qui n'est réel que si σ est une ellipse ($a < 1$), est

$$n = \left| \frac{f' [a^2(1 + f'^2) - 1]}{a\sqrt{1 - a^2}f''} \right|,$$

La conique σ peut être définie, dans son plan, par les équations

$$X = X_0 + m \cos \varphi, \quad Y = n \sin \varphi,$$

ou

$$X = X_0 + m \operatorname{ch} \varphi, \quad Y = n \operatorname{sh} \varphi,$$

suivant que $a < 1$ ou $a > 1$. En adjoignant aux expressions précédentes de X , Y l'expression de la cote Z de la conique, fournie par l'équation (16), et en remplaçant X_0 , m , n par leurs valeurs, on obtient pour équations paramétriques des surfaces Θ les équations (18) ou (19) ci-dessous :

$$(18) \quad \begin{cases} X = x + \Psi (a + \cos \varphi), \\ Y = \sqrt{1 - a^2} \Psi \sin \varphi, \\ Z = f + \frac{\Psi}{af}; \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} X = x + \Psi (a + \operatorname{ch} \varphi), \\ Y = \sqrt{a^2 - 1} \Psi \operatorname{sh} \varphi, \\ Z = f + \frac{\Psi}{af'}, \end{cases}$$

suivant que les coniques (σ) sont des ellipses ($a < 1$) ou des hyperboles ($a > 1$), et après avoir posé pour simplifier

$$\Psi = \frac{f' [a^2 (1 + f'^2) - 1]}{a(1 - a^2)}.$$

En remplaçant, dans les équations précédentes, f par une fonction arbitraire de x , on obtient l'ensemble des surfaces Θ cherchées; les paramètres fixant le point courant M sur chacune de ces surfaces sont : x [cote du sommet du cône de révolution circonscrit à Θ le long de la conique σ], et φ qui fixe la position de M sur σ .

Les équations des surfaces Θ pour lesquelles les sections planes σ sont paraboliques, se déduisent des équations (16) et (17) en posant $a = 1$. Si l'on désigne par u l'ordonnée d'un point quelconque sur une parabole quelconque σ , on trouve aussitôt

$$(20) \quad \begin{cases} X = x + \frac{f''^2 u^2 - f'^6}{2 f'' f'^3}, \\ Y = u, \\ Z = f + \frac{f'^2}{f''}; \end{cases}$$

les paramètres sont x et u , et l'on obtient l'ensemble des surfaces Θ du type actuel, en donnant à la fonction f de l'argument x toutes les formes possibles. Toutes les surfaces (18), (19), (20) admettent évidemment le plan xOz comme plan de symétrie.

Le réseau géodésio-conique *le plus général* (pour lequel aucune condition n'est imposée *a priori* aux coniques qui en font partie), est évidemment consti-

tué par le réseau focal (porté par la nappe de développée non curviligne) d'une surface enveloppe de sphères *arbitraire*. Si l'on veut obtenir des réseaux donnant lieu à des constructions géométriques intéressantes, il convient de particulariser convenablement la famille des coniques; c'est ce qui a été fait dans les numéros qui précèdent, et ce que nous ferons encore au numéro suivant.

11. *Sur quelques autres types de réseaux géodésio-coniques.* — Nous allons rechercher, pour terminer, les réseaux dont une famille de courbes est formée de géodésiques, et dont l'autre famille est constituée par des coniques dont les plans sont parallèles à une droite fixe, ou bien passent par un point fixe ou par une droite fixe.

Le premier de ces problèmes est une généralisation immédiate du problème traité au n° 10. Considérons encore les surfaces Θ portant des réseaux géodésio-coniques pour lesquels les plans des coniques sont parallèles à une droite fixe, comme les nappes non curvilignes des développées d'une famille d'enveloppes de sphères à déterminer.

Supposons que la droite fixe soit Ox ; il suffira, pour exprimer toutes les conditions du problème, d'exprimer que le plan (3) du n° 4 est constamment parallèle à Ox ; cela donne l'unique condition

$$\frac{d^2x}{dR^2} = 0,$$

d'où l'on déduit, en négligeant une translation

$$x = aR \quad (a = \text{const.}),$$

condition qui exprime, que le rayon de la sphère qui engendre les surfaces dont les nappes non curvilignes de développées sont les surfaces Θ , est proportionnel à la distance du centre à un plan fixe arbitraire perpendiculaire à la direction de droite commune aux plans des coniques du réseau envisagé. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les réseaux géodésio-coniques dont les coniques sont situées dans des plans parallèles à une droite fixe D, sont les réseaux focaux, des congruences des normales aux enveloppes d'une sphère variable, dont le centre décrit une courbe arbitraire, et dont le rayon varie proportionnellement à la distance du centre à un plan fixe quelconque perpendiculaire à D.

Comme dans les exemples précédemment obtenus, les coniques des réseaux sont des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, suivant que le coefficient de proportionnalité est supérieur, inférieur ou égal à l'unité.

Cherchons maintenant les réseaux géodésio-coniques pour lesquels les plans des coniques *passent par un point fixe* O. Ce point étant pris pour origine des

coordonnées, et les surfaces cherchées étant regardées, comme on l'a toujours fait jusqu'ici, comme les nappes non curvilignes des développées d'une surface enveloppe de sphères dont il s'agit de déterminer la déférente et la loi de variation du rayon, exprimons que le plan de la conique définie par les équations (2), (3) du n° 4 passe constamment par O. Nous obtenons l'équation

$$\sum \left[x \frac{d^2 x}{dR^2} + \left(\frac{dx}{dR} \right)^2 \right] = 1,$$

soit, en désignant par ρ la distance du point courant M de la déférente au point fixe O

$$\frac{d^2(\rho^2)}{dR^2} = 2.$$

On en déduit la condition nécessaire et suffisante suivante, liant le rayon vecteur OM au rayon R de la sphère S centrée en M

$$\rho^2 = R^2 + aR + b \quad (a, b = \text{const. arb.}).$$

Si l'on ajoute une constante à R, on ne modifie pas la développée de la surface enveloppe de S (ni le réseau focal porté par cette surface). En disposant de cette constante on peut donner à la relation entre R et ρ la forme

$$(21) \quad \rho^2 = R^2 + k \quad (k = \text{const. arb.}).$$

(21) exprime que la sphère S reste orthogonale à la sphère fixe, de centre O, et de rayon \sqrt{k} ou $i\sqrt{|k|}$, suivant que le nombre k est positif ou négatif. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les surfaces admettant un réseau conjugué dont les deux familles de courbes sont constituées, respectivement, par ∞^1 géodésiques et par ∞^1 coniques dont les plans passent par un point fixe, sont les nappes non curvilignes des développées des enveloppes à un paramètre de sphères orthogonales à une sphère fixe (S_1) réelle ou de rayon purement imaginaire).

On a une vérification immédiate du résultat précédent en prenant, pour déférente de la famille de sphères (S), une courbe plane C située dans un plan π passant par le centre O de la sphère (S_1). Le cercle γ caractéristique de S, perce le plan π en deux points μ, μ' , qui décrivent deux courbes (μ) et (μ') inverses par rapport à O, et dont l'ensemble constitue la section de l'enveloppe (E) de (S) par le plan π .

La nappe non curviligne de la développée de (E) est l'enveloppe (abstraction faite de la courbe C) du cône de révolution, ayant pour sommet le centre M de S, et pour base le cercle γ . La conique caractéristique (σ) de ce cône, dont le plan est perpendiculaire à π , perce π en deux points ω et ω' , qui sont évidemment les points caractéristiques des génératrices $M\mu, M\mu'$ du cône situées dans π , et qui coïncident par suite avec les centres de courbure des courbes (μ)

et (μ') relatifs aux points μ et μ' . Les courbes (μ) et (μ') étant inverses dans une inversion de pôle O , leurs centres de courbure aux points inverses μ et μ' sont alignés avec O , et le plan de la conique (σ) *passé bien par le point fixe* O .

Dans l'exemple qui vient d'être donné, les plans des coniques, non seulement passent par le point fixe O , mais contiennent tous la droite fixe D perpendiculaire au plan π en O . Il est facile de se rendre compte qu'il n'existe pas d'autres réseaux géodésio-coniques dont les plans des coniques passent par une droite fixe D , que ceux fournis par l'exemple précédent. La sphère S enveloppant, dans son mouvement à un paramètre, une surface admettant pour développée le support de l'un des réseaux considérés ici, devra rester orthogonale à deux sphères fixes (quelconques d'ailleurs, de rayons réels ou imaginaires purs), centrées en deux points quelconques O_1 et O_2 de la droite fixe D . La sphère S devra donc appartenir constamment à un réseau de sphères d'axe D ; la déférente C est par suite une courbe plane, quelconque d'ailleurs, située dans un plan perpendiculaire à D en un certain point fixe O , et la sphère S centrée en un point quelconque de C est définie par la condition de rester orthogonale à une sphère fixe de centre O . Nous retrouvons bien les réseaux fournis par l'exemple précédemment traité, et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Les surfaces (Σ) admettant des réseaux géodésio-coniques, pour lesquels les plans des coniques passent par une droite fixe D , sont les nappes non curvilignes des développées des surfaces enveloppes de ∞^1 sphères appartenant à un réseau quelconque d'axe D .

Les réseaux géodésio-coniques eux-mêmes, sont les réseaux focaux des congruences des normales aux enveloppes de sphères qui viennent d'être définies.

