ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FLORIN VASILESCO

Sur quelques critères généraux de régularité et de stabilité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 59 (1942), p. 275-295
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__275_0>

SUR

QUELQUES CRITÈRES

GÉNÉRAUX DE RÉGULARITÉ

ET

DE STABILITÉ

PAR M. FLORIN VASILESCO.

A HENRI LEBESGUE.

Objet du présent travail.

1. Nombreuses sont les questions de la théorie moderne du potentiel où interviennent la capacité d'un ensemble, la distribution et le potentiel capacitaires. On est souvent amené à considérer, en particulier, avec la distribution capacitaire sur un ensemble fermé borné E, celle sur un sous-ensemble e de même nature. Les potentiels capacitaires s'introduisent par leur propriété d'être à p. p. p. (à peu près partout, c'est-à-dire partout sauf sur un ensemble de points de capacité nulle) égaux à l'unité sur E ou e.

Il y a lieu de remarquer que l'on passe de la distribution capacitaire sur E à celle sur e par un balayage de la première. Le potentiel capacitaire se conserve alors à p. p. p. sur e et demeure égal à l'unité. En réalité c'est surtout cette propriété de conservation qui intervient plutôt dans les démonstrations.

On peut, dès lors, se proposer de rechercher s'il ne serait pas possible de remplacer, dans les démonstrations, les distributions capacitaires par des distributions positives plus générales issues de balayages puisque leurs potentiels possèdent la même propriété de conservation. On enrichirait ainsi l'outil de recherche, on gagnerait en généralité, on multiplierait les choix et l'on pourrait espérer obtenir des résultats nouveaux dans leur objet même.

Dans une première partie de ce travail, nous nous proposons de montrer de telles possibilités par quelques exemples dont la matière est fournie par les critères de régularité de Wiener et de de La Vallée Poussin et de stabilité de Keldych-Lavrentieff-Brelot. On ne sera pas surpris de constater, après ce que l'on vient de dire, que les démonstrations soient calquées sur celles données par ces auteurs mais on obtiendra, du même coup, des résultats plus généraux.

On peut adopter un autre point de vue, parfois plus général que le précédent, suggéré par le fait que les distributions et potentiels capacitaires, de par leur caractère particulièrement simple, sont d'un emploi commode et conduisent à des résultats essentiels. On peut se proposer d'élargir de tels résultats moyennant un passage de tels distributions et potentiels à des distributions et potentiels quelconques, non nécessairement issus de balayages.

Les deux points de vue visent à l'enrichissement des méthodes de recherche, le premier par la généralisation de l'emploi du balayage, le second par le passage des distributions et potentiels capacitaires à des distributions et potentiels quelconques.

Il est à prévoir que les résultats obtenus seront différents selon que l'on adoptera l'un ou l'autre de ces points de vue pour l'étude d'une même question, lorsque cela se peut. Il pourra arriver que l'un de ces résultats soit plus général que l'autre.

On en aura des exemples dans la seconde partie de ce travail où l'on envisagera les critères de régularité du second point de vue.

L'étude qui suit n'a pas et ne peut pas avoir l'envergure que réclame l'étude approfondie des deux principes exprimés par les points de vue précédents, car ce sont surtout des exemples d'application de ces principes que l'on a voulu donner. Ceux-ci demeureront néanmoins dominants pour nos investigations ultérieures.

I.

2. M. de La Vallée Poussin a donné, dans un travail récent [1], un critère de régularité plus général que celui de M. Wiener. La nouveauté réside surtout dans le fait de considérer des ensembles T_n plus généraux que les ensembles Γ_n (*voir* plus loin n° 5) introduits par ce dernier. Voici comment ils sont définis.

Soit P un point d'un ensemble fermé E. Mettons E — P sous la forme

$$E - P = T_1 + T_2 + \ldots + T_n + \ldots,$$

T_n étant un sous-ensemble fermé borné de E et les T_n pouvant empiéter entre eux. Ils sont astreints à la condition suivante : il existe deux nombres r (entier) et $k < 1$ tels que le rapport $\frac{d_{n+r}}{d_n}$ des distances de P à deux points quelconques appartenant respectivement à T_{n+r} et T_n soit $\leqq k$, quel que soit n. Il résulte de là, d'une part, que l'on a

$$d_{n+pr} \leqq d_{n+(p-1)r} . k \leqq \ldots \leqq d_n . k^p,$$

d'où

$$d_i \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad i \to \infty$$

et, d'autre part, que T_n et T_{n+r} n'empiètent pas.

(1) *Bull. Acad. Belge*, 5e série, t. 24, 1938; fasc. 6-7 et 11, pp. 368 et 672.

On peut remarquer que les nombres pr et k^p se correspondent, donc que l'on peut supposer k aussi petit que l'on veut, si besoin en est.

Le critère de M. de La Vallée Poussin s'énonce ainsi :

Le point P *est régulier ou irrégulier selon que la série*

$$u_1(P) + u_2(P) + \ldots + u_n(P) + \ldots$$

diverge ou converge, u_n *étant le potentiel capacitaire de* T_n.

Dans cet énoncé, la notion de point régulier est définie par l'auteur de la manière suivante :

Si l'on désigne par γ_ρ une sphère de centre P et de rayon ρ, par W le potentiel capacitaire de l'ensemble $\gamma_\rho E$ (partie commune de γ_ρ et E), on sait que W(P) ne peut que décroître si $\rho \to 0$.

Si

$$\lim_{\rho \to 0} W(P) = 1,$$

P *est dit régulier.*

Si

$$\lim_{\rho \to 0} W(P) < 1,$$

P *est dit irrégulier.* Il se trouve, pour ρ assez petit, sur la frontière extérieure de $\gamma_\rho E$.

M. de La Vallée Poussin démontre que, *dans ce dernier cas,*

$$\lim_{\rho \to 0} W(P) = 0.$$

Cette propriété est *essentielle* pour la démonstration du critère.

La définition précédente étend et précise celle de M. Wiener en ce qu'elle désigne par irrégulier tout point de E qui l'est également, dans le sens de Wiener, pour l'ensemble $\gamma_\rho E$, si ρ est assez petit. Les autres points de E, y compris ses points intérieurs, sont réguliers.

L'auteur démontre que l'ensemble des points irréguliers ainsi définis est de capacité nulle et que : si l'on balaye sur E des masses positives portées par son complémentaire, le potentiel se conserve en tout point régulier de E. Cette dernière propriété nous sera utile plus loin.

L'auteur démontre encore d'autres propriétés qui coïncident avec certaines de celles que l'on connaissait déjà [1] et que nous ne rappelons pas ici car nous n'aurons pas à nous en servir.

---

[1] F. Vasilesco, *Actualités sc. et ind.*, fasc. 660; M. Riesz, *Acta de Szeged*, t. 9, 1938, p. 1; M. Brelot, *Bull. des Sc. math.*, 1939, p. 83, et *Bull. Acad. Belge*, 5^e série, t. 25, 1939, fasc. 1-4, p. 125.

3. Nous aurons besoin, pour la suite immédiate, des propriétés suivantes dont la première est évidente.

a. Soit v le potentiel d'une distribution positive μ dans l'espace à distance finie. C'est une fonction surharmonique et, comme telle, semi-continue inférieurement. Considérée sur E, elle atteint donc son minimum, qui est positif (non nul si v ne l'est pas identiquement), en un point de E. On peut, dès lors, multiplier la distribution par un nombre positif de manière que le nouveau potentiel ait un minimum supérieur à l'unité sur E.

b. Si l'on balaye la masse de μ *sur* $\gamma_\rho E$, *la nouvelle masse tend vers zéro avec* ρ *si* v *est borné au voisinage de* P.

Cette propriété est de celles qui font l'objet de la première partie de ce travail. Elle étend, en effet, au balayage d'une distribution générale, la propriété bien connue de la distribution capacitaire (dont la masse est la capacité).

Pour la démontrer, il suffit de considérer la distribution capacitaire α sur $\gamma_\rho E$ et d'appliquer *la loi de réciprocité* [1] aux distributions α et μ_ρ (issue du balayage de μ sur $\gamma_\rho E$). Le potentiel de cette dernière étant désigné par v_ρ, on a

$$\mu_\rho(\gamma_\rho E) = \int_{\gamma_\rho E} v_\rho \, d\alpha \leqq M . c_\rho,$$

M étant le maximum de v (borné) sur $\gamma_\rho E$ et c_ρ la capacité de $\gamma_\rho E$. Comme $c_\rho \to 0$ il en est de même de $\mu(\gamma_\rho E)$.

A la vérité, il serait plus intéressant de donner, de cette propriété, une démonstration directe sans le secours de la propriété analogue de la distribution capacitaire. Telle qu'elle est, cette démonstration relève plutôt de la seconde partie de ce travail car elle consiste à passer de la distribution capacitaire à une distribution non capacitaire.

Quoi qu'il en soit, voici une conséquence de cette propriété.

c. Le potentiel v_ρ *de* μ_ρ *tend vers zéro avec* ρ *en tout point autre que* P.

Car un tel point finit par ne plus être sur $\gamma_\rho E$, s'il l'a été, pour ρ assez petit et $v_\rho(P)$ par devenir inférieur à $\frac{M}{d}\,\mu_\rho(\gamma_\rho E)$, d étant un nombre fixe positif.

Rappelons encore une formule donnée par M. Riesz :

d. P *étant un point quelconque de l'espace et* α_P *la distribution sur* E *issue du balayage de la masse unité en* P, *on a*

$$v(P) = \int_E v \, d\alpha_P.$$

---

[1] DE LA VALLÉE POUSSIN, *Actualités sc. et ind.*, n° 572; *Math. Gazette*, t. 24, 1938, p. 17.

Cette formule résulte de la loi de réciprocité appliquée aux distributions μ et α_P moins la masse unité en P. Elle montre que si une distribution positive répandue sur E est telle que son potentiel soit inférieur à v à p.p.p. sur E, il lui est inférieur partout.

4. Nous allons maintenant étendre, aux distributions générales issues du balayage, la propriété donnée par M. de La Vallée Poussin comme définition de la régularité.

Soit μ *une distribution positive dans l'espace de potentiel* v *borné au voisinage du point* P *de* E.

Le potentiel v_ρ *de la distribution* μ_ρ *balayée sur* γ_ρE *est égal à* v *en* P, *si* P *est régulier.*

Si P *est irrégulier* $v_\rho(P)$ *diminue à partir d'un certain* ρ *et l'on a*

$$\lim_{\rho \to 0} v_\rho(P) = 0.$$

Il résulte de là que *la définition de la régularité peut être donnée aussi bien au moyen de balayages à partir d'une seule distribution* μ *de l'espace telle que celle de l'énoncé qui est d'ailleurs quelconque.*

Les distributions capacitaires considérées par M. de La Vallée Poussin ne sont donc pas indispensables à cet égard et l'on aurait intérêt à faire la théorie générale de la régularité à partir de cette définition plus générale.

Cette définition peut être rapprochée de celle, donnée par certains auteurs (1), de la régularité d'un point frontière d'un domaine au moyen d'une *seule* fonction continue sur la frontière, nulle au point considéré et positive ailleurs, pour laquelle la solution de Wiener doit tendre vers la valeur donnée en ce point.

Passons maintenant à la démonstration de la propriété énoncée. Elle sera calquée sur celle de M. de La Vallée Poussin et confirmera, de ce fait, les considérations développées au début de ce travail.

Tout d'abord, si P est régulier, on a vu (n° 2) que $v_\rho(P) = v(P)$. Supposons donc P irrégulier et γ_ρE de capacité non nulle pour tout ρ (c'est-à-dire tel qu'il supporte une masse de potentiel fini) sans quoi la propriété serait évidente. On peut alors trouver un ρ à partir duquel P soit sur la frontière extérieure de γ_ρE et une partie de la masse μ dans le domaine infini extérieur à γ_ρE. On sait que, dans ces conditions, le balayage de μ sur γ_ρE diminue le potentiel en P. Cette propriété est d'ailleurs démontrée plus loin par une autre voie (n° 8). $v_\rho(P)$ diminue donc à partir d'un certain ρ. Ce fait résultera d'ailleurs de la démonstration qui suit. Sa valeur est donnée par la loi de réciprocité appliquée

(1) Brelot, *loc. cit.* et antérieurement Lebesgue, *C. R. Acad. Sci.*, t. 178, 1924, p. 349; Bouligand, *Annales Soc. math. pol.*, 1925, p. 89.

à la distribution μ_ρ et à la masse unitaire placée en P dont soit U le potentiel :

$$v_\rho(\mathrm{P}) = \int_{\gamma_\rho \mathrm{E}} \mathrm{U}\, d\mu_\rho.$$

Évaluons l'intégrale. En désignant par γ_0 une sphère fixe de rayon ρ_0 centrée en P (irrégulier pour $\gamma_0\mathrm{E}$ situé sur la frontière extérieure de cet ensemble) et en balayant sur $\gamma_0\mathrm{E}$ la masse unitaire de P [1], U se conserve à p.p.p. sur $\gamma_0\mathrm{E}$; la loi de réciprocité appliquée aux distributions μ_ρ (répandue sur $\gamma_\rho\mathrm{E}$, $\rho < \rho_0$) et μ_0 que l'on vient d'obtenir sur $\gamma_0\mathrm{E}$, donne

$$\begin{aligned} v_\rho(\mathrm{P}) &= \int_{\gamma_\rho \mathrm{E}} \mathrm{U}\, d\mu_\rho = \int_{\gamma_0 \mathrm{E}} \mathrm{U}\, d\mu_\rho = \int_{\gamma_0 \mathrm{E}} v_\rho\, d\mu_0 \\ &= \int_{\gamma_\rho \mathrm{E}} v_\rho\, d\mu_0 + \int_{\gamma_0\mathrm{E} - \gamma_\rho \mathrm{E}} v_\rho\, d\mu_0 = \lambda \mu_0(\gamma_\rho \mathrm{E}) + \int_{\gamma_0\mathrm{E} - \gamma_\rho \mathrm{E}} v_\rho\, d\mu_0. \end{aligned}$$

λ est ici un nombre positif inférieur au maximum de v_ρ, donc de v, sur $\gamma_\rho\mathrm{E}$. Or, lorsque $\rho \to 0$, $\mu_0(\gamma_\rho\mathrm{E}) \to 0$ (car il n'y a plus de masse en P) et il en est de même de la dernière intégrale car, d'une part, $v_\rho \to 0$ aux points d'un ensemble $\gamma_0\mathrm{E} - \gamma_{\rho'}\mathrm{E}$ $(\rho < \rho' < \rho_0)$ d'après (n° 3, *c*) sur lequel la masse de μ_0 reste supérieure à un ε donné et que, d'autre part, $\mu_0(\gamma_\rho\mathrm{E}) < \varepsilon$ à partir d'un ρ' fixe. Il en résulte que

$$\lim_{\rho \to 0} v_\rho(\mathrm{P}) = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

On doit remarquer que le fait que P est irrégulier est intervenu par la *possibilité* de balayer la masse unitaire de P, point *irrégulier* de $\gamma_0\mathrm{E}$, sur cet ensemble. C'est pourquoi il n'était pas nécessaire d'attirer l'attention, au début de cette démonstration, sur ce que $v_\rho(\mathrm{P})$ diminue.

Il serait cependant intéressant de démontrer la possibilité de ce balayage à partir de la définition de l'irrégularité donnée au moyen des balayages d'une distribution quelconque (n° 4) (conf. aussi n° 3, *b*). Nous n'examinerons pas cette question ici.

5. Les résultats précédents nous permettent de donner du critère de M. de La Vallée Poussin la généralisation suivante :

Soit μ *une distribution positive dans l'espace de potentiel* v *borné au voisinage du point* P *de* E *et désignons par* u_n *le potentiel des masses balayées sur l'ensemble* T_n (n° 2). *Le point* P *est régulier ou irrégulier suivant que la série*

$$u_1(\mathrm{P}) + u_2(\mathrm{P}) + \ldots + u_n(\mathrm{P}) + \ldots \tag{1}$$

diverge ou converge.

---

[1] O. Frostman, *Acta Szeged*, t. 8, 1937, pp. 149 et 202; t. 9, 1938, p. 43.

Remarquons, tout d'abord, que si l'on multiplie μ par un nombre λ, les termes de cette série subissent la même modification et la série garde sa nature. Supposons donc, en vertu du n° 3, *a*, que v soit supérieur à l'unité sur E. Cela nous sera utile pour la dernière partie de la démonstration, calquée sur celle de M. de La Vallée Poussin.

Supposons la série convergente. Alors P est irrégulier, car pour n assez grand le reste R_n de la série est inférieur à ε et l'on peut prendre ρ assez petit pour que $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ soient extérieurs à γ_ρ, auquel cas $v_\rho(P) < R_n < \varepsilon$ en vertu de la définition des T_i. On conclut par le n° 4. Il est peut-être utile d'insister sur l'inégalité précédente. Elle vient de ce que la somme des T_{n+p} contient $\gamma_\rho E$ (P excepté) et que, à part quelques-uns, chaque T_{n+p} est contenu dans $\gamma_\rho E$. Il en résulte que la masse de μ_ρ sur T_{n+p} est inférieure à celle de μ balayée sur cet ensemble, car celle-ci s'obtient par un nouveau balayage à partir de μ_ρ. L'inégalité apparaît, dès lors, clairement.

Supposons la série divergente. P est alors régulier. Admettons qu'il ne le soit pas et montrons que cela est absurde.

On a, pour ρ assez petit fixe, $v_\rho(P) < \varepsilon < 1$ et, à partir de n suffisamment grand, T_{n+p} contenu dans γ_ρ; le potentiel de la masse μ balayée sur $\sum\limits_{p=0} T_{n+p}$ est inférieur à ε en P. La série $\sum\limits_{p=0} u_{n+p}$, divergente, se compose de p autres dont les indices des termes forment une progression arithmétique de raison r; soit

$$u_h(P) + u_{h+r}(P) + \ldots$$

l'une d'elles, divergente. Les $T_h, T_{h+r}, \ldots$ sont non-empiétants et le potentiel V_h de la masse de μ balayée sur $E_h = T_h + T_{h+r} + \ldots$ est inférieur à ε en P, car E_h est contenu dans $\gamma_\rho E$. Si l'on désigne par $v_h, v_{h+r}, \ldots$ les potentiels des charges partielles sur $T_h, T_{h+r}, \ldots$ on a donc

$$V_h(P) = v_h(P) + v_{h+r}(P) + \ldots < \varepsilon.$$

Soient maintenant p_α un point de T_α de E_h et p un autre de $E_h - T_\alpha$; le rapport $\frac{pp_\alpha}{pP} > 1 - k$, car il est minimum lorsque p appartient à $T_{\alpha-r}$ ou $T_{\alpha+r}$ cas auxquels correspondent les minima

$$\frac{d_{\alpha-r} - d_\alpha}{d_{\alpha-r}} > 1 - k \qquad \text{et} \qquad \frac{d_\alpha - d_{\alpha+r}}{d_{\alpha+r}} > \frac{d_\alpha - d_{\alpha+r}}{d_\alpha} > 1 - k$$

$\Big($pour $T_{\alpha-2r}$ on a, par exemple, le minimum $\frac{d_{\alpha-2r} - d_\alpha}{d_{\alpha-2r}} > 1 - k^2$ et pour $T_{\alpha+2r}$, $\frac{d_\alpha - d_{\alpha+2r}}{d_{\alpha+2r}} > \frac{d_\alpha - d_{\alpha+2r}}{d_\alpha} > 1 - k^2\Big)$.

Le potentiel de la charge sur $E_h - T_\alpha$ est $< \varepsilon$ en P, donc $< \frac{\varepsilon}{1-k}$ sur T_α et l'on peut supposer k assez petit (n° 2) pour que $\frac{\varepsilon}{1-k} < 1$. En lui ajoutant v_α, on obtient V_h sur T_α qui y est à p. p. p. égal à v et en plus supérieur ou égal à u_α puisque la masse de μ balayée sur T_α s'obtient par un balayage de celle balayée sur E_h et que le potentiel de cette dernière ne peut que diminuer de ce fait. On a donc, à p. p. p. sur T_α,

$$u_\alpha < \frac{\varepsilon}{1-k} + v_\alpha < \frac{\varepsilon}{1-k} u_\alpha + v_\alpha$$

puisque u_α y est à p. p. p. > 1 (remarque du début de la démonstration). On a donc, à p. p. p. sur T_α,

$$v_\alpha > u_\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{1-k}\right),$$

inégalité valable partout (n° 4, d) donc au point P. On a ainsi la relation

$$\varepsilon > V_h(P) = v_h(P) + v_{h+r}(P) + \ldots > \left(1 - \frac{\varepsilon}{1-k}\right)[u_h(P) + u_{h+r}(P) + \ldots] = \infty$$

qui est absurde.

Cas particuliers. — 1° *Généralisation du critère de Wiener.*

Prenons pour T_n la fermeture Γ_n de la partie de E comprise entre les sphères fermées centrées en P et de rayon λ^n et λ^{n+1} ($\lambda < 1$) [ou autrement la partie commune à E et à la couronne fermée déterminée par ces sphères].

Si l'on désigne par c_n la masse résultant du balayage de μ sur Γ_n, le point P *est régulier ou irrégulier suivant que la série $\sum \frac{c_n}{\lambda^n}$ diverge ou converge.*

Car on a

$$\frac{c_n}{\lambda_n} < u_n(P) < \frac{c_n}{\lambda^{n+1}}.$$

2° *Généralisation analogue du critère donné par Kellogg et nous* [1].

c_ρ étant la masse de μ balayée sur $\gamma_\rho E$, le point P *est régulier ou irrégulier suivant que l'intégrale*

$$\int_0^1 \frac{c_\rho}{\rho^2} d\rho$$

diverge ou converge.

3° Un autre cas particulier intéressant est celui où l'on prend pour *la distribution μ la masse unité placée en un point* O *de l'espace autre que* P. Son

(1) *American Journ. of Math.*, t. 51, 1929, p. 515-526.

balayage sur l'ensemble T_n donne ce que l'on appelle *la distribution de Green* [1] (ou *polaire*) relative au point O dont la masse porte le même nom. On a alors les *critères* suivants :

A. *Si* u_n *est le potentiel de la distribution de Green sur* T_n *relative au pôle* $O \neq P$, *le point* P *est régulier ou irrégulier suivant que la série* $\Sigma u_n(P)$ *est divergente ou convergente.*

B. *Si* c_n *est la masse de Green sur* Γ_n *relative au pôle* $O \neq P$, *le point* P *est régulier ou irrégulier suivant que la série*

$$\sum \frac{c_n}{\lambda_n}$$

diverge ou converge.

Il semble que ce soient là les formes les plus simples que l'on puisse donner des critères généralisés de MM. de La Vallée Poussin et Wiener, la distribution μ étant la plus simple possible.

Mais, nous le répétons, le choix de la distribution μ pourra varier selon les questions où l'on aura à utiliser ces critères généralisés. On choisira la distribution la mieux adaptée à la question.

6. *Généralisation du critère de stabilité de MM. Keldych-Lavrentieff-Brelot* [2]. — Considérons un ensemble E quelconque borné et une distribution μ positive dans l'espace, de masse finie. Appelons *masse de* μ *balayée sur* E *la borne supérieure des masses balayées sur les ensembles fermés de* E *et désignons-la par* c. Si μ est la distribution capacitaire sur un ensemble fermé contenant E, c sera la *capacité* de E.

Soient alors F un ensemble fermé borné, P un de ses points, Γ_n la sphère de centre P et de rayon $\lambda^n (\lambda < 1)$, E_n la portion du complémentaire de F comprise (au sens large) entre les sphères Γ_n et Γ_{n-1}, c_n la masse d'une distribution μ, *de potentiel* v *borné au voisinage de* P, balayée sur E_n.

Le point P *est stable ou instable suivant que la série*

$$\sum \frac{c_n}{\lambda^n}$$

diverge ou converge.

La démonstration de ce *critère* est calquée sur celle de M. Brelot. On a vu (n° 3, *a*) que l'on peut supposer v supérieur à l'unité au voisinage de P; cela revient à multiplier par une constante la série précédente, ce qui ne change pas sa nature. On peut également laisser de côté un certain nombre de termes de cette série afin que les sphères considérées se trouvent dans ce voisinage considéré. Admettons que ce soit fait et raisonnons sur la série ainsi obtenue.

[1] Frostmann et Riesz, *loc. cit.*; de La Vallée Poussin, *loc. cit.*

[2] *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 63, mars-avril 1939.

Supposons la série convergente et soient Ω_m un domaine ouvert borné, régulier, tendant en décroissant vers F et E'_n la portion (fermée) de E_n n'appartenant pas à un Ω_m fixé. C'_n étant la masse de la distribution μ'_n issue du balayage de μ sur E'_n et W_n le potentiel de μ'_n, on a à p. p. p. sur E'_n, $W_n \geqq 1$; W_n est harmonique dans Ω_m et a sa plus petite limite $\geqq 1$ à p. p. p. aux points frontière de Ω_m situés sur E'_n. W_n peut toutefois être nulle si c'_n l'est, ce qui a lieu pour E'_n de capacité nulle.

La démonstration de M. Brelot se poursuit maintenant sans changement. On prend q_1 assez grand pour que Γ_{q_1-1} soit la première sphère intérieure à Ω_m auquel cas tout point frontière de Ω_m contenu dans une Γ_n appartient à un E'_n pour $n < q_1$. La fonction $W = \sum\limits_{q \leqq n < q_1} W_n$ est harmonique dans Ω_m, bornée, $\geqq 0$ et sa p. p. lim en tout point-frontière intérieur à Γ_{q-1} est à p. p. p. $\geqq 1$. Si l'on prend alors une fonction continue sur F, $\Phi(M)$, $\leqq 0$ hors Γ_{q-1}, $\leqq 1$ dans Γ_{q-1} et $= 1$ en P, la solution de Wiener U pour Ω_m et Φ est majorée par W et comme on a

$$W_n(P) \leqq \frac{c'_n}{\lambda_n},$$

on a aussi

$$W(P) \leqq \sum_{q \leqq n < q_1} \frac{c'_n}{\lambda^n} \leqq \sum_{n > q} \frac{c_n}{\lambda^n}.$$

En prenant alors q tel que la dernière série soit $< \alpha < 1$, on a $U(P) < \alpha$ indépendamment de m et q_1. En faisant tendre m vers l'infini, U(P) reste inférieur à α et P est instable.

Supposons la série divergente. On peut prendre dans E_n un ensemble E''_n fermé tel que la masse c''_n de μ balayée sur E''_n diffère de C_n de moins de ε_n, la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{\lambda^n}$ étant convergente. L'ensemble E'' somme des E''_n et de P est fermé et n'a en commun avec F que P. La portion de E'' comprise entre Γ_n et Γ_{n-1} au sens large est fermée, contient E''_n et a donc une masse de μ balayée sur elle $c'''_n \geqq c''_n$. La série $\sum \frac{c'''_n}{\lambda^n}$ étant divergente, P est irrégulier pour E'' et, d'après la comparaison entre la régularité et la stabilité donnée par M. Brelot (*loc. cit.*, n° 13), P est stable pour F.

Remarque. — On voit, une fois de plus, qu'aucune complication, si minime soit-elle, ne s'introduit par la considération des distributions générales dues à des balayages à la place des distributions capacitaires. C'est pour bien mettre en évidence ce fait, qui nous paraît important, que nous avons donné ici in-extenso, la démonstration de M. Brelot adaptée au cas actuel.

Cas particulier. — Ici, comme plus haut, on obtiendra le cas le plus simple au point de vue des masses, en prenant pour μ la masse-unité placée en un point de l'espace différent de P.

7. *Extension de la notion de balayage.* — Notre but étant *l'extension à la stabilité* des résultats donnés aux nos 4 et 5 pour la régularité, nous avons besoin d'étendre la notion de balayage à une classe ($\mathcal{E}$) d'ensembles bornés possédant les propriétés suivantes :

1° Un ensemble $\mathcal{E}$ est somme d'une infinité d'ensembles fermés E_1, E_2, ..., dont chacun contient le précédent et tels que le voisinage de tout point régulier d'un E_n ne contienne pas de points de $\mathcal{E} - E_{n+p}$ à partir d'un certain p.

Aucun point de la fermeture $\mathcal{E}_0$ de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à un E_n ne se trouve, dès lors, dans ce voisinage.

2° Tout ensemble fermé de $\mathcal{E}$ est contenu dans un E_n.

Remarquons que la somme d'un nombre fini d'ensembles $\mathcal{E}$ de cette classe est encore un tel ensemble. La même conclusion est vraie pour la somme $\mathcal{E}$ d'une infinité de tels ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., s'ils sont *distanciés* et si aucune suite infinie de points appartenant à des $\mathcal{E}_i$ différents n'a de point limite faisant partie d'un $\mathcal{E}_k$. On peut prendre alors pour E_n relatif à $\mathcal{E}$ la somme $E_n^1 + E_n^2 + \ldots + E_n^n$, E_n^i étant le $n^{\text{ième}}$ ensemble de $\mathcal{E}_i$. Tout ensemble fermé de $\mathcal{E}$ appartient alors à un nombre fini de $\mathcal{E}_i$ et est contenu dans une somme telle que la précédente. De plus, il est bien évident que tout voisinage suffisamment petit d'un point régulier de $\mathcal{E}$ (1), qui appartient à un $\mathcal{E}_i$, satisfait à la condition 1°, les $\mathcal{E}_i$ étant distanciés.

Soient μ une distribution positive dans l'espace, de potentiel v borné sur $\mathcal{E}_0$ et μ_1, μ_2, ..., les distributions balayées sur E_1, E_2, ..., de potentiels v_1, v_2, ..., et de masses c_1, c_2, ... Les potentiels vont en croissant, ont une limite V, *et sont égaux à v aux points réguliers de $\mathcal{E}$*, qui sont ceux des E_n. Les masses c_n augmentent et tendent vers une limite c que l'on a appelée (n° 6) *masse de μ balayée sur $\mathcal{E}$*.

On peut extraire des μ_n *une suite tendant vers une distribution limite sur $\mathcal{E}_0$, soit ν, de masse c* et de potentiel W. Nous allons démontrer que *l'on a dans tout l'espace*

$$V = W.$$

On sait, tout d'abord, que cela est vrai aux points de l'espace hors de $\mathcal{E}_0$. Si Q est un point régulier de $\mathcal{E}$, on a

$$v(Q) = v_n(Q) = \int_\delta \frac{1}{QM}\, d\mu_n(M) + \int_{E_n - \delta} \frac{1}{QM}\, d\mu_n(M),$$

δ étant un voisinage de Q tel que celui de 1°. Or, d'après 1°, les distributions $\mu_{n+p}(e)$, e étant sur un E_n, décroissent et tendent vers $\nu(e)$, car le balayage

(1) C'est-à-dire régulier pour un ensemble fermé de $\mathcal{E}$; *voir* DE LA VALLÉE POUSSIN, *Bull. Acad. belge* (*loc. cit.*).

de μ_{n+1} sur E_n donne μ_n et ajoute de la masse à μ_n. Donc la première intégrale décroît puisque μ_n s'appauvrit et, si l'on a pris δ assez petit, elle est inférieure à ε, $v(Q)$ étant fini. La seconde intégrale tend vers

$$\int_{E_n-\delta} \frac{1}{QM} d\nu(M),$$

car Q est à distance finie des masses et, comme l'égalité ci-dessus a lieu quel que soit n, on conclut que le potentiel de ν en Q est égal à $v(Q)$. Donc, aux points réguliers de $\mathcal{E}$, on a

$$W(Q) = V(Q) = v(Q).$$

Enfin, aux points restants de $\mathcal{E}_0$, on sait que l'on a

$$W \leqq \lim v_n = V,$$

égalité valable, d'ailleurs, partout dans l'espace.

Balayons maintenant ν sur les E_n; on trouve les distributions μ_n puisque le potentiel se conserve aux points réguliers et qu'il est égal à v. Mais en général il diminue. Donc $W \geqq v_n$ et par suite

$$W \geqq \lim v_n = V.$$

Il en résulte que, dans tout l'espace,

$$W = V. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Mais W, donc V, est une fonction surharmonique et, comme telle, le potentiel d'une distribution *unique* de masses : *c'est* ν.

Si l'on considère donc toutes les suites extraites des μ_n ayant une limite, celle-ci ne peut être que ν.

De même, si l'on fait cette opération sur des suites relatives à d'autres ensembles E'_n, analogues aux E_n, on retrouve toujours ν car les E'_n sont intriqués avec les E_n (2°) [tout E'_n étant contenu dans un E_n et *vice versa*] et que par conséquent les v'_n correspondants tendent vers la même fonction V.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que le résultat précédent est obtenu grâce au balayage qui a permis les inégalités de sens inverses permettant l'égalité de W et de V.

On peut donc dire pour le moment, *et cela suffit pour la suite* de ce travail, que :

La distribution ν, *de potentiel* $V = \lim v_n$ *réalise, par définition, le balayage de* μ *sur* $\mathcal{E}$. *Celui-ci conserve le potentiel primitif* v *aux points réguliers de* $\mathcal{E}$.

Il importe de remarquer, pour ce qui va suivre, que, si $\mathcal{E}$ contient un ensemble $\mathcal{E}'$ de la même classe, le balayage de μ sur $\mathcal{E}'$ peut s'obtenir de celui de μ sur $\mathcal{E}$ et de celui-ci sur $\mathcal{E}'$. Il en résulte que le potentiel de ν est supérieur à celui de ν' (relative à $\mathcal{E}'$),

En particulier, si μ est la distribution capacitaire sur un ensemble fermé contenant $\mathcal{E}$, ν sera la distribution capacitaire sur $\mathcal{E}$, sa masse est la capacité c de $\mathcal{E}$ (déjà définie par M. de La Vallée Poussin) et son potentiel, le capacitaire de $\mathcal{E}$ est égal à 1 aux points réguliers de $\mathcal{E}$.

L'extension de la notion de balayage aux ensembles de la classe ($\mathcal{E}$) est ainsi réalisée.

Pour qu'elle soit complète, il serait nécessaire d'examiner *l'unicité* de la distribution ν considérée comme devant satisfaire *à certaines conditions*, indépendamment du procédé par lequel on vient de l'obtenir, ainsi qu'on l'a fait pour les ensembles fermés où il suffit de connaître le potentiel à p. p. p. sur eux. Tel n'est pas cependant le but de ce Mémoire.

Nous allons néanmoins donner quelques indications utiles à la recherche de ces conditions.

Il est évident qu'*une* d'elles est *que le potentiel* V *de ν doit conserver celui, v, de μ, aux points réguliers de $\mathcal{E}$*. Mais ν est répandue sur $\mathcal{E}_0$, et c'est ce qui complique la question. Cette condition *n'est pas suffisante*.

Prenons, par exemple, pour $\mathcal{E}$, un ensemble ouvert borné et d'un seul tenant. La distribution capacitaire sur $\mathcal{E}_0$ est unique, son potentiel est égal à 1 sur $\mathcal{E}$, inférieur à 1 partout. Le potentiel capacitaire de $\mathcal{E}$ possède les mêmes propriétés, tous ses points étant réguliers, mais *la capacité de $\mathcal{E}$ peut être inférieure à celle de $\mathcal{E}_0$*.

Une *seconde condition* est donc que *la distribution ν doit avoir une masse c égale à celle de μ balayée sur $\mathcal{E}$*. Cette condition apparaît comme bien naturelle si l'on cherche la distribution capacitaire sur $\mathcal{E}$: elle doit avoir comme masse la capacité de $\mathcal{E}$.

Considérons donc une distribution α positive sur $\mathcal{E}_0$ satisfaisant aux deux conditions trouvées et soit U son potentiel. En la balayant sur les E_n on retrouve les μ_n, d'où

$$U \geqq V.$$

On peut démontrer, en s'inspirant d'un raisonnement déjà fait par M. de La Vallée Poussin [1] pour les distributions capacitaires, que $U = V$ dans le domaine Ω infini extérieur à $\mathcal{E}_0$.

En effet, en balayant α et ν sur une surface régulière S de Ω entourant $\mathcal{E}_0$, on obtient des distributions α' et ν' telles que le potentiel de $\alpha' - \nu'$, qui est de *masse nulle*, est égal à $U - V$ sur S et à l'extérieur de S, donc *positif*. Si P est un point éloigné de Ω et μ_P la distribution polaire (de Green) sur S relative à P,

---

[1] *Annales de l'Institut Poincaré*, 1931, p. 228.

on a, par la formule de M. Riesz,

$$\mathrm{U(P) - V(P)} = \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{U - V})\, d\mu_{\mathrm{P}}$$

ou encore, en multipliant par R, distance de P à S,

$$\mathrm{R[U(P) - V(P)]} = \int_{\mathrm{S}} (\mathrm{U - V})\, d\mathrm{R}\mu_{\mathrm{P}}.$$

Mais l'éminent auteur a démontré que lorsque $\mathrm{R} \to \infty$, la distribution $\mathrm{R}\mu$ tend vers la capacitaire sur S et l'intégrale vers la *moyenne harmonique* de $\mathrm{U - V}$ sur S qui ne peut être nulle que si $\mathrm{U = V}$ sur S. Or, précisément, le premier membre tend vers la différence des masses de α' et γ' qui est nulle. *Donc* $\mathrm{U = V}$ *en tout point de* Ω.

Ce résultat est encore *valable en tout point d'un domaine ouvert* δ *intérieur à* $\mathcal{E}_0$ *qui est somme de domaines ouverts* δ_n *contenus dans les* E_n, car le balayage de α sur E_n laisse U inchangé dans δ_n, donc $\mathrm{U} = v_n$ dans δ_n, d'où $\mathrm{U = V}$ dans δ.

8. Nous pouvons maintenant donner un résultat analogue à celui du n° 4 au sujet de la stabilité.

Soient F un ensemble fermé, P un de ses points, et considérons l'ensemble $\gamma_\rho\Omega$ commun à la sphère γ_ρ et au complémentaire Ω de F. C'est un ensemble de la classe ($\mathcal{E}$), car on peut prendre pour E_n l'ensemble $\gamma_\rho\Omega_n$, Ω_n étant l'extérieur, avec sa frontière, d'un domaine tendant en décroissant vers F qui lui est intérieur au sens strict.

Critère. — *Soit* μ *une distribution positive dans l'espace, de potentiel* v *borné au voisinage de* P, *et désignons par* v_ρ *le potentiel de la masse balayée sur* $\gamma_\rho\Omega$.

Si P *est stable, cela équivaut à*

$$v_\rho(\mathrm{P}) = v(\mathrm{P})$$

quel que soit ρ.

Si P *est instable, cela équivaut à*

$$\lim_{\rho \to 0} v_\rho(\mathrm{P}) = 0.$$

Rappelons, avant de commencer la démonstration, que les points stables ou instables se trouvent définis sur la frontière de F de la manière suivante [1] :

« P est stable ou instable pour F selon qu'il est régulier [2] ou irrégulier pour l'ensemble $\Omega + \mathrm{P}$ ».

On peut donc parler de *la régularité d'un point frontière d'un ensemble ouvert*, expression à laquelle on donnera le sens précédent et non le sens attribué dans

(1) Brelot, *loc cit.* au n° 6.

(2) C'est-à-dire pour un ensemble fermé de $\Omega + \mathrm{P}$ contenant P.

le problème de Dirichlet généralisé où il s'agit, en fait, de la régularité d'un point frontière appartenant au complémentaire fermé de l'ensemble ouvert.

L'énoncé précédent, dans lequel on remplacerait les mots *stable* et *instable* par les expressions équivalentes *régulier de* Ω et *irrégulier de* Ω, prendrait la forme de celui du n° 4. Il peut donc être *interprété* comme *l'extension aux ensembles ouverts du critère du* n° 4 *relatifs aux ensembles fermés.*

On remarquera également que *le critère précédent caractérise d'une manière nouvelle la stabilité et l'étend à tous les points de l'ensemble fermé* F.

Ainsi, tout point « intérieur » de F est, d'après le n° 4, *régulier* et, d'après ce critère, *instable*, car $v_\rho(P)$ finit par être nul.

Un point frontière de F peut ne l'être pour aucun des ensembles ouverts d'un seul tenant du complémentaire Ω auquel cas on sait [1] qu'il est *régulier* pour E. Est-il *stable* ou *instable* ?

Il n'entre pas dans notre dessein de nous arrêter à cette question.

Voici maintenant la démonstration du critère.

Supposons P stable, donc régulier pour un ensemble fermé F_1 de $\Omega + P$ contenu dans γ_ρ. D'après le n° 4, le potentiel u_1 de la masse ν_1 de μ balayée sur F_1 est égal à v en P : $u_1(P) = v(P)$. Mais F_1 est contenu dans la fermeture $\mathcal{E}_0$ de $\gamma_\rho\Omega$ sur laquelle se trouve la distribution ν_ρ balayée de μ sur $\gamma_\rho\Omega$. Le balayage de celle-ci sur F_1 donne ν_1 puisque tout point régulier de F_1, P excepté, l'est pour $\gamma_\rho\Omega$ et que, par conséquent, v se conserve à p. p. p. sur F_1, où $u_1 = v_\rho = v$. Ainsi, comme d'ailleurs partout dans l'espace, on a

$$v_\rho(P) \geqq u_1(P) = v(P),$$

et comme

$$v_\rho(P) < v(P),$$

il en résulte que

$$v_\rho(P) = v(P)$$

quel que soit ρ.

Inversement, prenons cette conclusion pour hypothèse. On peut alors trouver un F_1 pour lequel P soit régulier.

En effet, reprenons les ensembles E_m définis ci-dessus pour $\gamma_\rho\Omega$. On a vu que l'on a partout

$$v_\rho = V = \lim v_n.$$

Choisissons n assez grand, soit n_1, pour que

$$v_{n_1}(P) > v_{\rho_1}(P) - \varepsilon_1,$$

en désignant ρ par ρ_1 et E_n par E_{n_1}.

---

(1) BRELOT, *Bull. Sc. Math.*, 1938-1936; VASILESCO, *Act. sc. et ind.*, n° 660; DE LA VALLÉE POUSSIN, *Bull. Ac. belge* (*loc. cit.*).

Choisissons ensuite un ρ_2 assez petit pour que γ_{ρ_2} soit extérieur à Ω_{n_1} et prenons, comme ci-dessus, relativement à $\gamma_{\rho_2}\Omega$, un E_{n_2} tel que

$$v_{n_2}(P) > v_{\rho_2}(P) - \varepsilon_2$$

et continuons ainsi indéfiniment, les ρ_i et ε_i tendant vers zéro.

L'ensemble

$$F_1 = P + E\Sigma_{n_i}$$

est fermé et répond à la question. Il est, en effet, contenu dans $\gamma_\rho\Omega$, et le potentiel en P de la masse de μ balayée sur $\gamma_{\rho_i}F_1$ est, à fortiori, supérieur à

$$v_{n_{i+k}}(P) > v_{\rho_{i+k}}(P) - \varepsilon_{i+k} = v(P) - \varepsilon_{i+k}$$

quel que soit k positif. Ce potentiel est donc *égal* à $v(P)$, puisqu'il est inférieur à $v_{\rho_i}(P) = v(P)$, ce qui prouve (n° 4) que P est régulier pour F_1. La première partie du critère est ainsi démontrée.

Supposons maintenant P instable. Alors il est irrégulier pour tout F_1, donc pour celui qu'on vient de définir et, comme le potentiel en P de la masse de μ balayée sur $\gamma_{\rho_i}F_1$ tend vers zéro (n° 4) et est supérieur à $v_{\rho_{i+k}}(P) - \varepsilon_{i+k}$ donc à $\lim\limits_{\rho \to 0} v_\rho(P)$ [car $v_\rho(P)$ décroît avec ρ], on conclut que $\lim\limits_{\rho \to 0} v_\rho(P) = 0$.

La seconde partie du critère est ainsi démontrée, car si, à partir d'un certain ρ, on a $v_\rho(P) < v(P)$, P doit être instable, en vertu de la première partie, et l'on retombe sur la démonstration qui précède, qui montre ainsi que $v_\rho(P)$ ne peut pas être inférieur à $v(P)$ sans tendre vers zéro avec ρ.

9. Grâce au résultat qui vient d'être établi, il devient possible de donner un *critère de stabilité* analogue à celui du n° 5 relatif à la régularité. Voici son énoncé.

Soient μ une distribution positive dans l'espace de potentiel v borné au voisinage d'un point P *d'un ensemble fermé* F *et* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ *des ensembles de la classe* ($\mathcal{E}$) *contenus dans le complémentaire* Ω *de* F, *assujettis à la même condition que les ensembles* T_n (n° 2) *et tels que leur somme* $\mathcal{E}$ *contienne* Ω *dans le voisinage considéré de* P.

Si u_n est le potentiel de la masse de μ balayée sur $\mathcal{E}_n$, le point P *est stable ou instable selon que la série*

$$u_1(P) + u_2(P) + \ldots$$

diverge ou converge.

Ce critère est susceptible de la même *interprétation* que le précédent par rapport à celui du n° 5 : *c'est l'extension de celui-ci aux ensembles ouverts.*

La démonstration, quoique semblable à celle du n° 5, est cependant plus délicate à cause des modifications que nécessitent les nouvelles notions introduites.

Faisons remarquer que la condition à laquelle les $\mathcal{E}_n$ sont assujettis régit également les fermetures $\mathcal{E}_n^0$ des $\mathcal{E}_n$ et conduit aux mêmes propriétés géométriques que pour les T_n.

Comme au n° 5, on peut admettre $v > 1$ sur $\mathcal{E}$, ce qui s'obtient au moyen de la multiplication de μ par une constante.

Supposons la série convergente. P est alors instable. En effet, pour n assez grand, le reste R_n de la série est inférieur à ε et l'on peut prendre ρ assez petit pour que les $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{n-1}$ soient extérieurs à γ_ρ auquel cas

$$v_\rho(P) < R_n < \varepsilon,$$

v_ρ étant le potentiel de la masse de μ balayée sur $\gamma_\rho\Omega$; le critère précédent permet de conclure. Cette inégalité vient de ce que $\mathcal{E}^n = \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_{n+1} + \ldots$ contient $\gamma_\rho\Omega$ et que chaque terme de cette somme, à part quelques-uns, est contenu dans $\gamma_\rho\Omega$. De ce fait, $\mathcal{E}^n$ est de la classe $(\mathcal{E})$ [n° 7, *Remarque*] et v_ρ est inférieur au potentiel de la masse de μ balayée sur $\mathcal{E}^n$ qui, à son tour, est majoré par la somme des potentiels des masses ν_{n+p} balayées sur les $\mathcal{E}_{n+p}$ (n° 7), donc par R_n.

Supposons maintenant la série divergente et admettant que P soit instable. Nous arriverons à une absurdité.

En effet, pour ρ assez petit, on a, dans ce cas,

$$v_\rho(P) < \varepsilon$$

et, à partir de n assez grand, les $\mathcal{E}_{n+p}$ sont contenus dans $\gamma_\rho\Omega$. L'ensemble $\mathcal{E}^n$ étant de la classe $(\mathcal{E})$ (n° 7) le potentiel de la masse balayée sur lui est, en P, $< \varepsilon$. Soit alors, comme au n° 5,

$$u_h(P) + u_{h+r}(P) + \ldots$$

une série divergente extraite de celle de l'énoncé. Les $\mathcal{E}_h, \mathcal{E}_{h+r}, \ldots$ sont distanciés et leur somme $\mathcal{E}^h$ est de la classe $(\mathcal{E})$ (n° 7). Le potentiel V^h de la masse balayée sur $\mathcal{E}^h$ est $< v_\rho(P) < \varepsilon$, en P, car $\mathcal{E}^h$ est contenu dans $\gamma_\rho\Omega$.

Si l'on désigne par $v_h, v_{h+r}, \ldots$ les potentiels des charges partielles sur $\mathcal{E}_h^0$, $\mathcal{E}_{h+r}^0, \ldots$, on a

$$V^h(P) = v_h(P) + v_{h+r}(P) + \ldots < u_h(P) + u_{h+r}(P) + \ldots < \varepsilon.$$

De même qu'au n° 5, on voit que $\mathcal{E}_\alpha$ étant un des ensembles constituants de $\mathcal{E}^h$, le potentiel de la charge sur $\mathcal{E}^h - \mathcal{E}_\alpha$ est $< \varepsilon$ en P, donc $< \frac{\varepsilon}{1-k}$ sur $\mathcal{E}_\alpha^0$. On peut d'ailleurs supposer (n° 5) k assez petit pour que $\frac{\varepsilon}{1-k} < 1$. En ajoutant v_α au potentiel précédent, on obtient V^h sur $\mathcal{E}_\alpha^0$ qui est à p. p. p. égal à v sur $\mathcal{E}_\alpha$, inférieur à v sur le reste de $\mathcal{E}_\alpha^0$ et, en plus supérieur à u_α sur $\mathcal{E}_\alpha^0$ puisque la masse balayée sur $\mathcal{E}_\alpha$ se déduit par un balayage de celle sur $\mathcal{E}^h$ et que son potentiel est, de ce fait, partout inférieur à V^h. On a donc, à p. p. p. sur $\mathcal{E}_\alpha$,

$$u_\alpha < \frac{\varepsilon}{1-k} + v_\alpha < \frac{\varepsilon}{1-k} u_\alpha + v_\alpha,$$

car $u_\alpha = v > 1$ à p. p. p. sur $\mathcal{E}_\alpha$, où l'on a ainsi

$$v_\alpha > u_\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{1-k}\right).$$

Cette inégalité a lieu aussi en P car, si l'on balaye sur l'ensemble fermé E_n^α de $\mathcal{E}_\alpha$ (n° 7, 1°) les masses situées sur $\mathcal{E}_\alpha^0$, le potentiel de celles-ci se conserve aux points réguliers de E_n^α où l'inégalité précédente a lieu et diminue ailleurs donc en P. Appliquée à E_n^α et au point P, la formule de M. Riesz montre que l'on a, à fortiori, à la limite

$$v_\alpha(P) > u_\alpha(P)\left[1 - \frac{\varepsilon}{1-k}\right],$$

car le second membre de cette inégalité est la *limite* de celui de l'inégalité relative à E_n^α dont le premier membre reste inférieur à $v_\alpha(P)$.

On obtient ainsi l'inégalité suivante manifestement absurde

$$\varepsilon > V^h(P) = v_h(P) + v_{h+r}(P) + \ldots > \left(1 - \frac{\varepsilon}{1-k}\right)[u_h(P) + u_{h+r}(P) + \ldots] = \infty.$$

P est donc stable.

Cas particuliers. — Le critère du n° 6 s'obtient de celui-ci en prenant pour $\mathcal{E}_n$ les E_n que l'on y considère et en tenant compte des inégalités

$$\frac{c_n}{\lambda^n} < u_n(P) < \frac{c_n}{\lambda^{n+1}}.$$

Si l'on prend pour μ la masse unité en un point de l'espace, différent de P, on obtient des critères de stabilité semblables à ceux A et B donnés au n° 5, 3°.

Tout particulièrement, on peut donner aux u_n dans le critère précédent et à v_ρ dans le critère du n° 8, la signification de *potentiels capacitaires des* $\mathcal{E}_n$ et $\gamma_\rho\Omega$. On obtient alors des critères de stabilité analogues à ceux donnés pour la régularité par M. de La Vallée Poussin.

Ils peuvent être considérés, d'ailleurs, *comme l'extension de ceux-ci à la régularité d'un point frontière d'un ensemble ouvert.*

II.

10. L'objet de cette seconde partie est de montrer par quelques exemples comment on peut élargir des résultats obtenus au moyen de distributions et potentiels capacitaires par un passage à des distributions et potentiels quelconques non nécessairement issus de balayages.

Voici deux manières d'opérer un tel passage qui ne sont certainement pas les seules :

1° *On passe de la masse capacitaire (capacité) d'un ensemble fermé borné* E *à la masse d'une distribution* μ *répandue sur* E *et* vice-versa *par la formule*

$$\mu(E) = \int_E v\, d\alpha,$$

v *étant le potentiel de* μ *et* α *la distribution capacitaire sur* E.

Cette formule résulte de la loi de réciprocité appliquée aux distributions μ et α.

On pourra l'utiliser facilement lorsque v est borné, car, si μ *est positive* comme nous allons la supposer, les maximum M et minimum m de v sur E le sont aussi, et *ce dernier n'est pas nul.* On a alors

$$(2) \qquad mc < \mu(E) < Mc,$$

c étant la capacité de E.

2° *On passe du potentiel capacitaire* u *de l'ensemble* E *en un point* Q *quelconque à celui du potentiel* v *d'une distribution* μ *(qui peut être quelconque) et* vice-versa *par la formule de M. Riesz* (n° 3 *d*).

On a, en effet,

$$v(Q) = \int_E v\, d\alpha_Q$$

et

$$u(Q) = \int_E u\, d\alpha_Q = \int_E d\alpha_Q,$$

d'où *une première formule de passage*

$$v(Q) - u(Q) = \int_E (v - 1)\, d\alpha_Q$$

et *une seconde, dans le cas de* v *borné,*

$$(3) \qquad m\, u(Q) < v(Q) < M\, u(Q).$$

Remarquons que M *et* m *peuvent n'être que les bornes de* v *à p. p. p. sur* E.

11. Nous allons nous servir des formules (2) et (3) pour généraliser les critères de MM. de La Vallée Poussin et Wiener *supposés établis*, comme ils l'ont été, *au moyen des distributions et potentiels capacitaires.*

Critère généralisé de M. de La Vallée Poussin. — *Soient* μ_n *des distributions positives respectivement sur les ensembles* T_n *(ou* Γ_n, n° 5) *où leurs potentiels* v_n *soient à p. p. p. uniformément bornés, la borne inférieure étant positive et non nulle.*

Le point P *est régulier ou irrégulier suivant que la série*

$$v_1(\mathrm{P}) + v_2(\mathrm{P}) + \ldots$$

diverge ou converge.

En effet, si u_n est le potentiel capacitaire de T_n et M et m les bornes communes des v_n, on a par (3)

$$m\, u_n(\mathrm{P}) < v_n(\mathrm{P}) < \mathrm{M}\, u_n(\mathrm{P}).$$

Les séries $\Sigma v_n(\mathrm{P})$ et $\Sigma u_n(\mathrm{P})$ divergent donc ou convergent en même temps, ce qui prouve l'énoncé.

Ce critère *généralise* celui du n° 5, car les potentiels u_n que l'on y considère sont à p. p. p. égaux à v (d'une manière précise, sauf aux points irréguliers des T_n) et, de ce fait, satisfont à l'énoncé précédent (*cf.* n° 3, *a*).

Critère généralisé de M. Wiener. — En remplaçant les T_n par les Γ_n (n° 5, 1°) dans la définition précédente des μ_n, on a le critère

Le point P *est régulier ou irrégulier suivant que la série*

$$\sum \frac{\mu_n(\Gamma_n)}{\lambda_n} \qquad [\mu_n(\Gamma_n),\ \text{masse de } \mu_n]$$

diverge ou converge.

Car c_n étant la capacité de Γ_n, on a par (2)

$$mc_n < \mu_n(\Gamma_n) < \mathrm{M}c_n$$

et la série de l'énoncé diverge ou converge en même temps que

$$\sum \frac{c_n}{\lambda^n}.$$

Pour la même raison que ci-dessus ce critère *généralise* celui donné au n° 5, 1°.

Enfin voici une forme plus générale que l'on peut donner à la proposition de M. de La Vallée Poussin généralisée déjà au n° 4, lorsqu'on l'envisage du point de vue de la seconde partie de ce travail :

Soit μ_ρ *une distribution positive sur* $\gamma_\rho \mathrm{E}$ *dont le potentiel* v_ρ *borné soit, si on le considère à p. p. p. sur* $\gamma_\rho \mathrm{E}$, *uniformément borné par rapport à* ρ, *la borne inférieure étant supérieure à une quantité positive et non nulle* m *lorsque* $\rho \to 0$.

Si P *est régulier*

$$\varliminf_{\rho \to 0} v_\rho(\mathrm{P}) \geqq m.$$

Si P *est irrégulier*

$$\lim_{\rho \to 0} v_\rho(\mathrm{P}) = 0.$$

Car, dans le premier cas, on a par (3)

$$v_\rho(P) > m\, u_\rho(P) = m,$$

et dans le second

$$v_\rho(P) < M\, u_\rho(P),$$

$u_\rho(P)$ tendant vers zéro.

Le résultat du n° 4 se déduit de celui-ci en prenant pour m la valeur $v(P) - \varepsilon$, si P est régulier, ε tendant vers zéro avec ρ et pour l'ensemble excepté, celui des points irréguliers de E.