ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ERNEST VESSIOT

Sur les équations aux dérivées partielles de premier ordre, considérées comme des équations de contact et, en particulier, sur l'intégration des équations semi-linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 59 (1942), p. 211-273

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__211_0>

SUR LES

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE PREMIER ORDRE

CONSIDÉRÉES COMME DES ÉQUATIONS DE CONTACT

ET, EN PARTICULIER,

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS SEMI-LINÉAIRES

PAR M. ERNEST VESSIOT.

Introduction et résumé.

1. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$, les coordonnées du point courant d'un espace $\mathcal{E}$ à $(n+1)$ dimensions. L'élément de contact engendré par les éléments linéaires, issus de ce point, qui satisfont à une équation de Pfaff,

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_{n+1}\, dx_{n+1} = 0,$$

à coefficients donnés, aura pour coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$ et $p_1, \ldots, p_{n+1}$, ces dernières étant des coordonnées homogènes. Toute équation

$$\text{(E)} \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}) = 0,$$

liant ces coordonnées, et homogène par rapport aux p_i, sera dite une *équation de contact;* et toute multiplicité ponctuelle de $\mathcal{E}$ telle que les coordonnées de ses ∞^n éléments de contact soient des solutions de cette équation E en sera dite une *intégrale*. *Intégrer* E, ce sera en trouver toutes les intégrales, *à un nombre quelconque de dimensions*.

Le problème d'intégration ainsi posé ne diffère pas essentiellement de celui de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes, envisagé sous l'aspect général que Sophus Lie lui a donné en introduisant la notion des intégrales à un nombre quelconque de dimensions; et les équations de contact jouent, au fond, le même rôle analytique que les équations homogènes aux dérivées partielles, systématiquement employées par Sophus Lie, qui s'en déduisent quand on y considère les p_i comme les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ d'une fonction indéterminée $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$. L'introduction des équations de contact nous paraît cependant avoir l'avantage de poser d'emblée la question sous une forme géométrique et entièrement générale.

2. Bien que les intégrales des équations de contact E de l'espace $\mathcal{E}$ aient, quel que soit leur nombre de dimensions, même définition, celles qui en ont moins de n n'en présentent pas moins un caractère particulier. Tandis que l'existence d'intégrales à n dimensions est, pour toute équation E, un fait constant bien étudié, celle d'intégrales à un nombre donné s de dimensions, inférieur à n, est une exception ; et le calcul de ces dernières, quand il y en a, comporte des intégrations d'une nature spéciale. La première partie de ce travail est consacré à ce problème d'existence et d'intégration qui m'a paru n'avoir guère été abordé.

Sophus Lie avait seulement indiqué que les équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$(\mathrm{E}') \qquad \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n, z;\, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right),$$

qui admettent une intégrale complète à moins de n dimensions constituent des catégories spéciales [1], et donné le nom de *semi-linéaires* à celles pour lesquelles ce nombre de dimensions s est supérieur à 1, parce que les équations linéaires étaient celles pour lesquelles il est égal à 1. Il avait, de plus, remarqué, incidemment, qu'une équation E' semi-linéaire définit, dans l'espace $(p_1, \ldots, p_n)$, $(x_1, \ldots, x_n, z$ étant considérés comme des constantes paramétriques), une surface *réglée*, c'est-à-dire engendrée par des multiplicités linéaires.

Je considère, de même, toute équation de contact E comme représentée par la *surface image* Φ qu'elle définit quand on y interprète les p_i comme des coordonnées homogènes d'un espace projectif auxiliaire Π à n dimensions, et les x, comme des constantes paramétriques. Toute multiplicité $\mathfrak{M}_s$ de $\mathcal{E}$, à s dimensions $(1 < s < n)$, admet des systèmes de s transformations infinitésimales [2]

$$(\mathrm{P}) \quad \mathrm{P}_h = p_h + z_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1})\, p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\; h = 1, 2, \ldots, s;\; r + s = n + 1);$$

et c'est une intégrale de E si la droite à $(r-1)$ dimensions Δ_{r+1} définie dans Π par les équations $\mathrm{P}_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$, se trouve sur Φ quand on y suppose que le point paramétrique $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathcal{E}$ se trouve sur cette multiplicité $\mathfrak{M}_s$.

---

(1) Ces catégories sont invariantes vis-à-vis des transformations ponctuelles de l'espace $(x_1, \ldots, x_n, z)$, mais non vis-à-vis des transformations de contact.

(2) Nous écrivons les symboles de ces transformations avec les lettres p_i, en remplaçant par celles-ci les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

De là une méthode de recherche des intégrales à s dimensions de toute équation de contact E donnée qui consiste : 1° à chercher, sous la forme

$$(1)\quad 0 = P_h = p_h + z_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1})\, p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s;\ r + s = n + 1)$$

les droites Δ_{r-1} éventuellement situées sur l'image Φ de E, ce qui est un problème algébrique; 2° à décider, pour chaque droite trouvée, s'il existe des multiplicités $\mathfrak{M}_s$ admettant les transformations infinitésimales P_h correspondantes, et à les trouver, s'il y en a.

Si l'on a affaire à une droite Δ_{r-1} isolée, ce second problème se résout complètement en employant la méthode donnée par Sophus Lie pour trouver toutes les multiplicités qui admettent des transformations infinitésimales connues, et la solution ne comporte que des dérivations, des éliminations, et des intégrations d'équations différentielles ordinaires.

Si, au contraire, on a affaire à une famille continue de ∞^a droites Δ_{r-1}, les équations générales de celle-ci seront de la forme

$$(2)\quad 0 = X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a)\, p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

les y_m étant les paramètres dont dépend la multiplicité générale de la famille. Et le problème se présente comme une application de ma théorie des faisceaux de transformations infinitésimales [1], car il équivaut à chercher les intégrales à s dimensions du faisceau $\mathcal{F}$ qui a pour base les transformations

$$(3)\qquad X_h \quad (h = 1, 2, \ldots, s); \qquad \frac{\partial f}{\partial y_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, a),$$

de l'espace $(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_a)$. Ce faisceau $\mathcal{F}$ est d'une nature très générale, car on peut prendre les $\zeta_{\rho h}$ arbitrairement, sous la seule réserve qu'on ait $a < s$; et l'on peut ramener à la forme (3) [où les X_h sont de la forme (2)], tout faisceau de degré $(s + a)$, $(a < s)$, qui a un sous-faisceau complet de degré a.

On ne peut donc pas, comme dans le cas des droites Δ_{r-1} de Φ isolées, faire une étude théorique complète du problème d'intégration en question. Je me suis borné à indiquer dans quelles conditions la théorie des faisceaux de transformations infinitésimales devait lui être appliquée, en ce qui concerne du moins les intégrales non singulières.

3. La deuxième partie du mémoire a pour objet les propriétés communes aux *intégrales complètes* d'une équation de contact, quel que soit leur nombre s de dimensions, c'est-à-dire aux familles de ∞^n intégrales, à un même nombre

---

[1] *Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 52, 1924, p. 336).

de dimensions. Je les déduis de ce fait que si les équations

$$(4)\quad G_k(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1}) = y_{s+k-1} \qquad (k=1, 2, \ldots, r;\ r+s=n+1),$$

sont, avec les constantes paramétriques y_m, $(m=1, 2, \ldots, n)$, celles d'une intégrale complète quelconque G, elles constituent, concurremment avec l'équation

$$(5)\qquad y_{n+1} = x_{n+1},$$

le système des équations directrices d'une transformation de contact, [établie entre les éléments de contact des deux espaces $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ et $(y_1, \ldots, y_{n+1})$], par laquelle l'équation de contact E considérée se ramène à la *forme réduite* $p_{n+1}=0$. La réciproque étant vraie, les transformations de contact T de l'espace $\mathcal{E}$, laissant la variable x_{n+1} invariante, qui ramènent E à cette forme réduite (*transformations réductrices*), sont un équivalent des intégrales complètes. Par ailleurs, les propriétés de la réduite $p_{n+1}=0$, relatives à son intégration sont manifestes; et celles qui concernent ses caractéristiques résultent des propriétés élémentaires des multiplicités cylindriques. La connaissance d'une intégrale complète, à un nombre quelconque de dimensions, entraîne donc l'intégration d'une équation de contact quelconque, et fournit ses caractéristiques. Le même principe de transformation, appliqué au crochet (p_{n+1}, f), fournit, de plus, les équations différentielles des bandes caractéristiques de toute équation de contact donnée.

4. Je dis, pour abréger, qu'une équation de contact E est *semi-linéaire d'espèce* $(s-1)$ si elle a au moins une intégrale complète à s dimensions, et qu'elle l'est *au sens strict* si cette intégrale complète est *primitive*, c'est-à-dire si les intégrales particulières qui la composent ne sont pas engendrées par des multiplicités faisant partie d'une autre intégrale complète à un nombre moindre de dimensions. Dans la troisième et dernière partie du Mémoire, j'aborde le problème qui consiste à reconnaître si une équation E donnée est semi-linéaire d'espèce $(s-1)$, (au sens strict), et à trouver, dans l'affirmative, toutes ses intégrales complètes à s dimensions.

D'après les généralités des deux premières parties, l'équation E devra être telle que sa surface image Φ soit engendrée par ∞^{s-1} droites à $(n-s)$ dimensions; et ces génératrices ayant pour équations les équations (2), où a aura la valeur $(s-1)$, il s'agira de reconnaître si le faisceau

$$(6)\qquad \mathcal{F} = \left\{ X_1, \ldots, X_s, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}} \right\}$$

a des intégrales complètes à s dimensions, et de les trouver s'il y en a.

On a ainsi affaire, en fait, à tous les faisceaux à $(n+s)$ variables, de degré $(2s-1)$, qui ont un sous-faisceau complet de degré $(s-1)$; et même, dans le cas $s = 2$, à tous les faisceaux de degré 3. Aussi avons-nous dû nous borner à établir quelques résultats généraux et à faire une étude de détail des cas les plus abordables, $s = 2$ et $s = 3$.

Dans l'une et l'autre recherches nous avons traité plus spécialement le cas des *équations* E *à coefficients constants*, c'est-à-dire dans lesquelles les variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ ne figurent pas. Il en résulte cette simplification que le sous-faisceau $F = \{X_1, \ldots, X_s\}$ est toujours, pour elles, un faisceau complet, de sorte qu'il suffit que la surface image Φ soit réglée (au sens que nous avons précisé), pour que l'équation E soit semi-linéaire.

La méthode employée repose sur la recherche des *involutions*, de degré s, de $\mathcal{F}$, qui est un problème algébrique du premier degré. Pour les équations E semi-linéaires *générales*, il y en a une et une seule, qui devra être un faisceau complet. Elles n'ont, par suite, qu'une intégrale complète à s dimensions, qui s'obtient par l'intégration d'un *système complet* d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre : opération d'une nature analogue à l'intégration d'une équation E linéaire.

Les faisceaux $\mathcal{F}$, qui ont plus d'une involution de degré s, et qui en ont, dès lors, une infinité, se partagent en deux catégories, suivant qu'ils ont, ou non, une *transformation distinguée*. Ils ne peuvent pas, du reste, en avoir plus d'une, si l'on ne considère pas comme distinctes deux transformations distinguées qui ont le même symbole, à un facteur près. S'ils en ont une, elle fait partie de toutes les involutions de degré s éventuelles, de sorte que toute intégrale complète de E, à s dimensions, est engendrée par des *caractéristiques de Cauchy* à une dimension. A cette première catégorie appartiennent tous les faisceaux $\mathcal{F}$ dont le *dérivé* est de degré $2s$ (ce qui est le cas, en particulier, pour $s = 2$). Leur intégration relève alors d'une théorie que j'ai donnée il y a quelques années (¹) et ne comporte que l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Pour $s = 2$, $\mathcal{F}$ est du degré 5. S'il y a une transformation distinguée, et si son dérivé est du degré 7, on peut en ramener l'intégration à celle d'un faisceau de degré 4, à dérivé de degré 6, et appliquer les résultats d'un autre de mes mémoires (²) : le faisceau $\mathcal{F}$ a alors deux *faisceaux singuliers*, ou un seul (double), qui fournissent chacun une génération de ses intégrales à s dimensions par des *caractéristiques de Monge* à deux dimensions. Si, en particulier, $n = 7$, l'intégration se ramène à celle d'une équation aux dérivées partielles du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$.

On peut démontrer, d'autre part, directement, que, sous ces mêmes hypothèses (transformation distinguée, $s = 3$, coefficients constants), le problème

---

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, (3), t. 45, 1928, p. 189.
(²) *Journal de Mathématiques*, t. 15, 1936 (*voir* § **1**, p. 303).

a une solution générale explicite, dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument, qui s'exprime par des quadratures.

En ce qui concerne les faisceaux $\mathcal{F}$ sans transformation distinguée, je me suis limité aux cas $s=2$ et $s=3$, et je n'ai traité le second complètement que pour les équations E à coefficients constants. Il y a alors des caractéristiques de Cauchy à 2 dimensions, et le problème a une solution générale explicite qui dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

Des exemples, traités jusqu'à intégration définitive, terminent le Mémoire.

Villefranche-sur-Mer, 24 novembre 1942.

I. — Des équations de contact et de leurs intégrales.

1. Soient $x_i (i=1, 2, \ldots, n+1)$ les coordonnées du point courant x d'un espace ponctuel $\mathcal{E}$ à $(n+1)$ dimensions $(n \geqq 2)$. Tout déplacement infinitésimal dx de x définit un *élément linéaire* de $\mathcal{E}$, ayant x pour *origine* et les dx_i pour *composantes*. Ceux de ces éléments qui satisfont à une équation de Pfaff [1],

$$(1) \qquad p_\alpha \, dx_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n+1),$$

de coefficients p_i donnés, engendrent un *élément de contact* de $\mathcal{E}$, dont les x_i et les p_i sont les coordonnées : x en est l'*origine*, et les p_i sont ses *coordonnées d'orientation* (homogènes).

Soit $\mathcal{M}$ une multiplicité ponctuelle de $\mathcal{E}$. Si x est pris sur $\mathcal{M}$ et se déplace sur elle, ses déplacements dx donnent les *éléments linéaires de* $\mathcal{M}$, d'origine x. S'ils satisfont tous à (1), l'élément de contact de $\mathcal{E}$ qui a pour coordonnées les x_i et les p_i est un *élément de contact de* $\mathcal{M}$. Toute multiplicité $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ a ainsi ∞^n éléments de contact, quel que soit son nombre de dimensions.

Nous appellerons *équation de contact* de l'espace $\mathcal{E}$ toute équation E,

$$(\mathrm{E}) \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, \ldots, p_{n+1}) = 0,$$

entre les coordonnées x_i et p_i de l'élément de contact courant de $\mathcal{E}$ (homogène par rapport aux p_i). Les ∞^{2n} éléments de contact qui y satisfont seront dits *les éléments de contact de cette équation*. Toute multiplicité $\mathcal{M}$ dont les éléments de contact appartiendront ainsi à E en sera dite une *intégrale*. *Intégrer* E, ce sera en trouver les intégrales.

Soient

$$(2) \qquad x_{s+k} = f_k(x_1, \ldots, x_s) \qquad (k=1, 2, \ldots, r;\ r+s=n+1),$$

---

(1) Conformément à la notation usitée pour les sommations dans le calcul vectoriel, et dont nous ferons constamment usage, cette équation (1) signifie $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n+1} p_\alpha \, dx_\alpha = 0$.

les équations d'une multiplicité ponctuelle $\mathfrak{M}_s$ de $\mathcal{E}$, à s dimensions, — ($1 \leqq s \leqq n$) —, supposées résolubles, au moins dans un domaine de $\mathcal{E}$ convenablement délimité, par rapport à $r = n + 1 - s$ des x_i. Les éléments linéaires de $\mathfrak{M}_s$ seront définis par les équations

$$dx_{s+k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_\sigma} dx_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

de sorte que l'équation de Pfaff (1) donnera, pour les coordonnées d'orientation p_i de ses éléments de contact, les équations

$$p_h + \frac{\partial f_\rho}{\partial x_h} p_{s+\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s). \tag{4}$$

La condition pour que cette multiplicité $\mathfrak{M}_s$ soit une intégrale d'une équation de contact E donnée sera donc que E soit, relativement aux p_i, sur $\mathfrak{M}_s$, [c'est-à-dire sous le bénéfice des équations (2) de $\mathfrak{M}_s$], une conséquence (au sens algébrique du mot), de ces équations (4); ou, en d'autres termes, que (4) soit, sur $\mathfrak{M}_s$, un *sous-système* (¹) de E (en $p_1, \ldots, p_{n+1}$).

2. Supposons d'abord $s = n$. Le système (2) se réduit alors à une équation

$$x_{n+1} = f_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

et le système (4) s'écrit

$$p_h + \frac{\partial f_1}{\partial x_h} p_{n+1} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

La condition pour qu'une surface $\mathfrak{S}$ soit une intégrale de E est, par suite, que la coordonnée x_{n+1}, considérée sur $\mathfrak{S}$ comme une fonction des autres coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, soit une solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1};\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}, -1\right) = 0. \tag{7}$$

D'où il résulte inversement que toute équation aux dérivées partielles du premier ordre,

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1};\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{8}$$

a, dans l'espace $\mathcal{E}$, les mêmes surfaces intégrales que l'équation de contact

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1};\ -\frac{p_1}{p_{n+1}}, \ldots, -\frac{p_n}{p_{n+1}}\right) = 0, \tag{9}$$

(¹) S et S′ étant deux systèmes d'équations aux mêmes inconnues, nous disons que S′ est un *sous-système* de S, *au sens large*, si toute solution de S′ est une solution de T, et, *au sens strict*, si, de plus, les solutions de S ne sont pas toutes des solutions de S′.

à l'exception toutefois des intégrales cylindriques,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{10}$$

que celle-ci pourrait avoir après des simplifications qui permettraient d'y faire $p_{n+1} = 0$.

3. On obtient entre les équations de contact et les équations aux dérivées partielles du premier ordre une relation de forme plus simple, et dans laquelle tous les x_i jouent le même rôle, quand on exprime qu'une équation non résolue,

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0, \tag{11}$$

définit une surface intégrale de E. Les éléments linéaires d'une surface $\mathfrak{S}$ ainsi représentée étant donnés par

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} dx_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{12}$$

les coordonnées d'orientation de ses éléments de contact sont

$$p_i = m \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{13}$$

puisque (1) doit être pour elles une conséquence de (12); de sorte que la condition cherchée est que l'équation

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_{n+1}; \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\right) = 0 \tag{14}$$

soit vérifiée sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire qu'elle soit une conséquence de (11).

L'équation aux dérivées partielles (14) qui s'introduit ainsi se déduit de E simplement en y remplaçant les p_i par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ d'une fonction indéterminée f des variables x_i. On la dira *associée* à E. Par cette correspondance biunivoque se trouvent ainsi associées aux diverses équations de contact E de l'espace $\mathcal{E}$ toutes les équations aux dérivées partielles du premier ordre, à une fonction inconnue f des $(n+1)$ variables indépendantes x_i, qui ne contiennent pas f et sont homogènes par rapport à ses dérivées.

On pourra même représenter l'équation homogène aux dérivées partielles, associée à une équation de contact E, par cette équation E elle-même, en y interprétant les lettres p_i (conformément à une notation courante de Sophus-Lie), non plus comme coordonnées d'orientation d'un élément de contact de $\mathcal{E}$, mais comme dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ d'une fonction indéterminée f des coordonnées x_i de cet espace.

Remarquons, par ailleurs, que si f est une intégrale de l'équation (14), associée à E, les ∞^1 surfaces définies par l'équation

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c \qquad (c = \text{const. arb.}), \tag{15}$$

seront des intégrales de E. L'équation homogène aux dérivées partielles associée à une équation de contact se trouve définie, de ce fait, comme donnant par ses solutions f, sous la forme (15), les familles de ∞^1 surfaces intégrales de cette équation de contact.

4. Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver, non plus les surfaces intégrales $\mathcal{S}$ d'une équation de contact E donnée, mais ses multiplicités intégrales $\mathfrak{M}_s$, à un nombre donné de dimensions quelconque s, inférieur à n. D'après la conclusion du n° 1, ce problème pourra se décomposer en deux :

a. Trouver les systèmes de fonctions

$$z_{kh} = \psi_{kh}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, s;\ k = 1, 2, \ldots, r;\ r + s = n + 1), \tag{16}$$

tels que les équations

$$p_h + z_{\rho h} p_{s+\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s), \tag{17}$$

forment, relativement aux p_i, un sous-système de E, soit pour toute position du *point paramétrique* x (*solutions générales*), soit seulement pour les points x de certaines *multiplicités paramétriques* ϖ (*solutions spéciales*).

b. Pour chaque solution (16) du problème a, trouver les multiplicités intégrales (2) du système différentiel

$$\frac{\partial x_{s+k}}{\partial x_h} = z_{kh} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s), \tag{18}$$

s'il s'agit d'une solution générale; et, s'il s'agit d'une solution spéciale, celles du système mixte formé des équations (18) et de celles de la multiplicité paramétrique ϖ afférente à cette solution.

Le problème a est de nature algébrique. On écrira que l'équation

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1};\ -z_{\rho s} p_{s+\rho}, \ldots, -z_{\rho s} p_{s+\rho}, p_{s+1}, \ldots, p_{n+1}) = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{19}$$

est, en $p_{s+1}, \ldots, p_{n+1}$, une identité. Ce qui donnera un système Z d'équations finies, aux inconnues z_{kh}, où les x_i interviendront comme des constantes paramétriques, et dont on aura à chercher les solutions (16). Les solutions spéciales seront susceptibles d'une infinité de formes (16), équivalentes entre elles sous le bénéfice des équations des multiplicités paramétriques ϖ qui leur seront afférentes.

Le problème b est un problème de calcul intégral, que l'on peut rattacher à la théorie des transformations infinitésimales. Dire, en effet, qu'une multiplicité $\mathfrak{M}_s$, définie par les équations (2), satisfait à un système (18), où les z_{kh} sont certaines fonctions (16), c'est dire que les équations

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_h} = z_{kh} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s), \tag{20}$$

sont vérifiées sur cette multiplicité; et cela exprime qu'elle admet les s transformations infinitésimales

$$\mathrm{P}_h = p_h + z_{\rho h} p_{s+\rho} \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s), \qquad \left(p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right). \tag{21}$$

Le problème b consistera donc à chercher les *intégrales totales des faisceaux* F de transformations infinitésimales ([1]) ayant pour bases $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$, les systèmes de s transformations du type (21) dont les symboles seront les premiers membres des sous-systèmes (17) de E que la résolution du problème a aura donnés. Si F provient ainsi d'une solution *générale* du problème a, on devra chercher toutes ses intégrales totales; mais s'il provient d'une solution *spéciale* du problème a, seules seront acceptables celles de ses intégrales totales qui seront situées sur la multiplicité paramétrique ϖ afférente à cette solution.

On remarquera qu'il résulte de là que, parmi les solutions spéciales éventuelles du problème a, on ne devra prendre en considération que celles pour lesquelles la multiplicité afférente ϖ aura au moins s dimensions.

5. Nous donnerons au problème a une signification géométrique en interprétant les lettres p_i comme des coordonnées homogènes dans un espace ponctuel projectif auxiliaire Π, à n dimensions. L'équation E aura pour *image*, dans cet espace, une multiplicité Φ, courbe si $n = 2$, surface si $n > 2$, qui dépendra du point paramétrique x de $\mathcal{E}$. Les équations (17) seront, avec des coefficients z_{ab} arbitraires, les équations générales des *droites* Δ_{k-1} — c'est-

---

([1]) *Voir*, pour la théorie des faisceaux de transformations infinitésimales, mon Mémoire *Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 52, 1924, p. 336), auquel je renverrai, dans ce qui suit, en le désignant par la lettre M.

Je rappelle ici qu'étant données m transformations infinitésimales, $\mathrm{X}_h = \xi_{h\alpha}(x_1, \ldots, x_n)\dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$, $(h = 1, 2, \ldots, m)$, supposées *divergentes* — c'est-à-dire ne donnant lieu à aucune identité $\lambda_\mu(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{X}_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ — l'ensemble des transformations $\mathrm{X} = \lambda_\mu(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{X}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, pour tous les systèmes de fonctions λ_μ, constitue, par définition, un *faisceau* de transformations infinitésimales, de *degré* m, ayant pour base $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$, et pour *symbole* $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m\}$. Une multiplicité $\mathfrak{M}_1$ (à s dimensions), sera dite une *intégrale* de ce faisceau, si elle admet s transformations, divergentes du faisceau. Nous dirons, de plus, qu'elle en est une intégrale *totale*, si $s = m$, c'est-à-dire si elle admet toutes les transformations du faisceau.

En ce qui concerne la notion même de transformation infinitésimale, et les principes de la théorie de ces transformations, nous n'aurons à utiliser que les notions élémentaires contenues dans les premiers chapitres de la *Theorie der Transformations Gruppen*, de Sophus Lie et Friedrich Engel, et, plus particulièrement dans celui qui est consacré à la recherche des multiplicités qui admettent des transformations infinitésimales données.

à-dire des multiplicités linéaires à $(r-1)$ dimensions — de l'espace Π. Toute solution du système Z aura, par suite, pour *image*, dans Π, une droite Δ_{r-1} située sur Φ, qui sera dite *générale*, ou *spéciale*, dans les mêmes conditions que cette solution.

Le problème a consistera donc à chercher les droites Δ_{r-1} de la surface Φ. Ces droites pourront être isolées, ou former des familles continues, suivant que le système Z sera déterminé ou indéterminé; et, dans chacune de ces deux hypothèses, elles pourront être générales, ou spéciales. Nous aurons donc, pour l'étude du problème b, à distinguer les quatre cas suivants :

A. Cas d'*une droite* Δ_{r-1}, *isolée*, existant sur Φ *quel que soit* x;

B. Cas d'*une droite* Δ_{r-1}, *isolée*, n'existant sur Φ que si x appartient à une certaine *multiplicité paramétrique* ϖ;

C. Cas d'une *famille continue* (Δ_{r-1}) de droites Δ_{r-1} existant sur Φ *quel que soit* x;

D. Cas d'une *famille continue* (Δ_{r-1}) de droites Δ_{r-1}, n'existant sur Φ que si x appartient à une certaine *multiplicité paramétrique* ϖ.

6. Les cas C et D ne pourront se présenter que pour $s>1$. Plaçons-nous, en effet, dans l'hypothèse $s=1$, qui entraîne, par ailleurs, cette simplification que les P_h se réduisent à un, de sorte que l'on aura affaire, non à des faisceaux de transformations infinitésimales, mais à des transformations infinitésimales isolées.

Pour $s=1$, on a $r=n$, de sorte que toute droite Δ_{r-1} située sur Φ, ayant, comme Φ, $(n-1)$ dimensions, ne pourra que se confondre avec Φ, ou être un élément d'une décomposition de Φ. Or Φ peut être supposée indécomposable tant que x est arbitraire; et si elle se décompose pour des positions particulières de x, ce sera en multiplicités isolées les unes des autres; de sorte que si l'un des éléments de cette décomposition est une droite Δ_{n-1}, elle sera isolée.

Cas A, $(s=1)$. — Φ étant confondue avec une multiplicité linéaire à $(n-1)$ dimensions, est une droite : c'est dire que E est une équation linéaire

$$p_1+\varphi_\nu(x_1, \ldots, x_{n+1})p_{\nu+1}=0 \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

et ses intégrales $\mathfrak{M}_s$, sont les trajectoires de la transformation infinitésimale

$$P=p_1+\varphi_\nu p_{\nu+1} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

Le système (18) est, du reste, ici, le système

$$\frac{dx_{k+1}}{dx_1}=\varphi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

dont les intégrales sont bien les trajectoires de P_1. Ce sont, en d'autres termes, les caractéristiques de l'équation (22). De sorte que toute équation E linéaire a des intégrales à une dimension, qui sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles associées : ce qui est bien connu.

Cas B, $(s=1)$. — On suppose que, pour tout point x d'une certaine multiplicité ϖ de $\mathcal{E}$, Φ contient une droite Δ_{n-1}

$$p_1 + \psi_\nu(x_1, \ldots, x_{n+1})\, p_{\nu+1} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \tag{25}$$

et il s'agit de trouver les trajectoires de la transformation infinitésimale

$$P = p_1 + \psi_\nu p_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

qui se trouvent sur ϖ. Une telle trajectoire admettra la transformation P et satisfera aux équations (e) de ϖ; elle satisfera donc aussi aux équations (e') qu'on déduira de celles-ci en appliquant P aux deux membres. Si ces équations (e') sont des conséquences des équations (e), ϖ admet elle-même P et est engendrée par les trajectoires cherchées. Si elles sont incompatibles avec les équations (e), le problème est impossible. Reste le cas où (e') et (e), réunies, sont les équations d'une multiplicité ϖ_1 : on est alors ramené à chercher les trajectoires de P situées sur ϖ_1. On appliquera donc P aux équations (e_1) de ϖ_1; et ainsi de suite. Comme ϖ_1 a un nombre de dimensions inférieur à celui de ϖ, on arrivera, au bout d'un nombre limité d'opérations, soit à une multiplicité ϖ_a que P laissera invariante, et dont il restera à trouver les trajectoires de P qui l'engendreront, soit à une impossibilité.

Quant à la détermination des trajectoires d'une transformation (26) situées sur une multiplicité invariante μ, elle se fait en adjoignant aux équations de μ,

$$x_{p+l} = g_l(x_1, \ldots, x_p) \qquad (l = 1, 2, \ldots, q;\ p+q = n+1), \tag{27}$$

celles des trajectoires de la transformation, de l'espace $(x_1, \ldots, x_p)$,

$$P_0 = p_1 + \psi_\alpha(x_1, \ldots, x_p, g_1, \ldots, g_q)\, p_{\alpha+1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{28}$$

qui pourront s'écrire sous la forme

$$I_k(x_1, \ldots, x_p) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{29}$$

les I_k étant des invariants fondamentaux de P_0 et les c_k des constantes arbitraires. Ces équations (29) seront résolubles en $x_2, \ldots, x_p$, P_0 étant résolue par rapport à $p_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$.

7. *Cas* A, $(s > 1)$. — Soient

$$p_h + \psi_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1})\, p_{s+\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s;\ r+s = n+1), \tag{30}$$

les équations d'une droite Δ_{r-1}, isolée, de Φ, existant quel que soit x. Il s'agit de trouver les intégrales totales $\mathfrak{M}_s$ du faisceau F qui a pour base les transformations

$$(31) \qquad P_h = p_h + \psi_{\rho h} p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

en excluant celles dont les équations ne seraient pas résolubles sous la forme (2), c'est-à-dire sur lesquelles les coordonnées $x_1, \ldots, x_s$ ne seraient pas des variables indépendantes. Considérons, à cet effet, les crochets

$$(32) \quad (P_h, P_i) = \psi_{\rho h i}(x_1, \ldots, x_{n+1}) p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h, i = 1, 2, \ldots, s),$$

où les ψ_{khi} sont les fonctions

$$(33) \qquad \psi_{khi} = P_h \psi_{ki} - P_i \psi_{kh} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ h, i = 1, 2, \ldots, s).$$

Si les équations

$$(34) \quad \psi_{khi}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s-1;\ i = 2, 3, \ldots, s;\ h < i),$$

sont des identités, le faisceau F est *complet* (¹), et il a, d'après un théorème de Sophus Lie, ∞^r intégrales totales, à savoir les caractéristiques du *système complet* (30). Leurs équations générales seront de la forme

$$(35) \qquad J_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les J_k étant des *invariants fondamentaux* de F, ou, en d'autres termes, un système fondamental de solutions du système complet (30). Elles seront résolubles en $x_{s+1}, \ldots, x_{n+1}$, parce que les P_h sont résolues en $p_1, \ldots, p_s$. Le faisceau F n'aura pas d'autres intégrales totales.

8. *Si* F *n'est pas complet*, les équations (34) ne sont pas toutes des identités. Or toute intégrale totale de F, admettant les P_h, admet aussi les transformations crochets (32). Mais, en écrivant que la multiplicité (2) admet ces transformations, on trouve que tous les ψ_{khi} doivent être nuls sur elle. Donc F ne pourra avoir d'intégrale totale que si les équations (34) définissent une multiplicité ψ, sur laquelle toute intégrale totale de F devra se trouver, et qui, par suite, devra avoir au moins s dimensions. Supposons qu'il en soit ainsi : nous pourrons supposer ψ indécomposable, sans quoi nous raisonnerions sur chacun de ses éléments de décomposition comme nous allons le faire sur elle.

Si ψ est à s dimensions, toute intégrale totale de F, ayant s dimensions aussi et devant faire partie de ψ, se confondra avec ψ. Si donc ψ admet les P_h, ce sera une intégrale totale de F, et il n'y en aura pas d'autre ; et si ψ n'admet pas tous les P_h, F n'aura pas d'intégrale totale.

Si ψ a plus de s dimensions, remarquons que toute intégrale totale de F, satisfaisant aux équations (e) de ψ et admettant les P_h, satisfera aussi aux

(¹) *Voir* M, n° 2, p. 345.

équations (e') que l'on déduira des équations (e) en leur appliquant les P_h. Si donc ces équations (e') ne sont pas toutes des conséquences des équations (e), c'est-à-dire si ψ n'est pas, pour F, une multiplicité invariante, l'ensemble des équations (e) et (e') devra, pour que F puisse avoir des intégrales totales, définir une multiplicité ψ_1, ayant un nombre de dimensions, au moins égal à s, qui sera inférieur à celui de ψ. Et toute intégrale totale de F se trouvera sur cette nouvelle multiplicité ψ_1. On pourra donc raisonner sur elle comme on a raisonné sur ψ, et ainsi de suite. Il en résulte qu'au bout d'un nombre limité d'opérations, ou bien l'on constatera que F n'a pas d'intégrales totales, ou bien l'on obtiendra une multiplicité ψ_0, faisant partie de ψ (qui pourra être ψ elle-même), que F laissera invariante, et qui contiendra toute intégrale totale de F.

Soient, dans cette seconde hypothèse,

$$(36) \qquad x_{p+l} = g_l(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_p) \qquad (l = 1, 2, \ldots, t;\ t + p = n + 1),$$

les équations de ψ_0, dont le nombre p de dimensions sera supérieur à s. Toute intégrale totale $\mathfrak{M}_s$ de F, du type (2), étant sur ψ_0, se définira en adjoignant aux équations (36) $q = p - s$ équations

$$(37) \qquad x_{s+m} = f_m(x_1, \ldots, x_s) \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ q = p - s = r - t),$$

convenablement choisies. Le système (36) admettant, par hypothèse, les P_h, on aura seulement à écrire que les équations obtenues en appliquant les P_k aux deux membres des équations (37) seront des conséquences du système (36), (37). En introduisant, pour abréger, la notation

$$(38) \qquad [f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n+1})] = f(x_1, \ldots, x_p, g_1, \ldots, g_t),$$

cela équivaudra à écrire que les équations

$$(39) \qquad \frac{\partial f_m}{\partial x_h} = [\psi_{mh}(x_1, \ldots, x_{n+1})] \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

sont des conséquences du système (37), c'est-à-dire que la multiplicité $\mathfrak{M}_s^{(0)}$, de l'espace $\mathcal{E}_0$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_p$, définie par (37), est une intégrale totale du faisceau F_0 de transformations infinitésimales de cet espace ayant pour base les transformations

$$(40) \quad P_h^{(0)} = p_h + [\psi_{\chi h}(x, \ldots, x_{n+1})]\, p_{s+\chi} \qquad (\chi = 1, 2, \ldots, q;\ h = 1, 2, \ldots, s;\ q + s = p).$$

Ce faisceau F_0, dont on pourra dire qu'il s'obtient en *projetant* F sur ψ_0, est complet, ainsi que nous allons le voir. La recherche de ses intégrales totales $\mathfrak{M}_s^{(0)}$ se fera donc comme on l'a indiqué, au n° 7, pour les intégrales totales $\mathfrak{M}_s$ de F, supposé complet.

9. Pour vérifier que F_0 est complet, il faut établir les identités

$$(41) \qquad P_h^{(0)}[\psi_{mi}] = P_i^{(0)}[\psi_{mh}] \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ h, i = 1, 2, \ldots, s).$$

Or on a

$$(42)\qquad P_h^{(0)}[\psi_{mi}] = [P_h[\psi_{mi}]] \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ h, i = 1, 2, \ldots, s),$$

et l'on a, d'autre part,

$$(43)\qquad P_h[\psi_{mi}] = \left[\frac{\partial\psi_{mi}}{\partial x_h}\right] + \psi_{\chi^h}\left[\frac{\partial\psi_{mi}}{\partial x_{s+\chi}}\right] + P_h g_\tau\left[\frac{\partial\psi_{mi}}{\partial x_{p+\tau}}\right]$$

pour

$$(43^{bis})\qquad \chi = 1, 2, \ldots, q; \qquad \tau = 1, 2, \ldots, t; \qquad m = 1, 2, \ldots, q \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, s).$$

Comme, par ailleurs, l'invariance de ψ_0 vis à-vis de F se traduit par les identités

$$(44)\qquad [P_h g_l] = [\psi_{q+l,h}] \qquad (l = 1, 2, \ldots, t;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

on conclut

$$(45)\qquad P_h^{(0)}[\psi_{mi}] = [P_h\psi_{mi}] \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ h, i = 1, 2, \ldots, s).$$

On aura, de même,

$$(46)\qquad P_i^{(0)}[\psi_{mh}] = [P_i\psi_{mh}] \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ h, i = 1, 2, \ldots, s),$$

et tout revient à vérifier que l'on a

$$(47)\qquad [P_h\psi_{mi}] = [P_i\psi_{mh}] \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ h, i = 1, 2, \ldots, s);$$

ce qui résulte de ce que les équations (34) étant, par hypothèse, vérifiées sur ψ, le sont aussi sur ψ_0, qui fait partie de ψ.

10. *Cas* B, ($s > 1$). — Nous supposons ici que les équations (30) sont celles d'une droite Δ_{r-1} qui ne fera partie de Φ que si x appartient à une multiplicité ϖ connue, et nous avons à chercher [n° 4] les intégrales totales du faisceau F, ayant pour base les transformations (31), qui se trouvent sur cette multiplicité paramétrique ϖ.

Introduisons, comme au n° 7, les crochets (32) et les équations (34). Il pourra arriver que celles-ci soient vérifiées en tout point de ϖ : ce sera le cas, en particulier, si F est complet. Dans le cas contraire, toute $\mathfrak{M}_s$ répondant à la question devra, à la fois, satisfaire à ces équations et à celles de ϖ. L'ensemble de ces deux systèmes d'équations devra donc, pour que notre problème soit possible, définir une multiplicité (qui fera partie de ϖ), à s dimensions au moins, sur laquelle se trouvera toute $\mathfrak{M}_s$ répondant à la question. On aura donc, dans tous les cas, à chercher les intégrales totales de F se trouvant sur une multiplicité μ connue, en tous les points de laquelle les équations (34) seront vérifiées.

On sera ainsi conduit à reprendre, sur F et cette multiplicité μ, l'analyse des n^{os} 7 et 8 relative au faisceau F qui y était considéré et à la multiplicité ψ

associée à ce faisceau. Si le problème actuel n'est pas impossible, ou bien μ admettra les P_h, ou bien on en pourra déduire, par l'application des P_h à ses équations, répétée au besoin — mais un nombre de fois limité — une autre multiplicité, située sur elle et admettant les P_h, sur laquelle se trouvera toute $\mathfrak{M}_s$ répondant à la question. Désignons par μ_0 cette multiplicité, ou la multiplicité μ elle-même dans le cas où celle-ci admettrait déjà les P_h; et reprenons, pour la définir, les équations (36). Toute intégrale totale de F située sur μ_0, se déterminera par des équations (37), sauf dans le cas où μ_0, étant à s dimensions, se trouverait être une intégrale de F, et serait alors la seule solution. Cette hypothèse particulière écartée, les systèmes (37) répondant à la question seront ceux qui définiront les intégrales totales du faisceau F_0 obtenu en projetant F sur μ_0 [n° 8].

La démonstration du n° 9 prouve — en y remplaçant ψ_0 par μ_0 — que ce faisceau F_0 sera complet, puisque μ_0 sera invariante vis-à-vis du faisceau F présentement considéré, et que les équations (47) seront vérifiées, du fait que les équations (34) auront lieu sur μ, et, par suite, sur μ_0.

11. *Cas* C, ($s > 1$). — Nous considérons maintenant une famille continue de droites Δ_{r-1}, situées, quel que soit le point paramétrique x, sur l'image Φ de l'équation de contact E donnée. Elle sera fournie par une solution du système Z du n° 4,

$$(48)\qquad z_{kh}=\zeta_{kh}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a) \qquad (k=1, 2, \ldots, r;\ h=1, 2, \ldots, s;\ r+s=n+1),$$

dépendant d'un certain nombre, a, de paramètres y_m. Ses équations générales seront

$$(49)\qquad p_h+\zeta_{\rho h}p_{s+\rho}=0 \qquad (\rho=1, 2, \ldots, r;\ h=1, 2, \ldots, s),$$

et nous leur associerons les transformations infinitésimales

$$(50)\qquad X_h=p_h+\zeta_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a)p_{s+\rho} \qquad (\rho=1, 2, \ldots, r;\ h=1, 2, \ldots, s).$$

Les paramètres y_m ($m=1, 2, \ldots, a$), pourront s'éliminer entre les équations (49), et E sera l'équation, ou l'une des équations, entre les x_i et les p_i, résultant de cette élimination.

Les diverses droites Δ_{r-1} de la famille s'obtiendraient en remplaçant les y_m, de toutes les manières possibles, par des fonctions des x_i. Chacune d'elles fournira ainsi un système (18), et sur toute multiplicité $\mathfrak{M}_s$ intégrale d'un tel système, les y_m deviendront certaines fonctions de $x_1, \ldots, x_s$. Pour résoudre ici le problème b, il faudra trouver l'ensemble de toutes les multiplicités intégrales des systèmes

$$(51)\qquad \frac{\partial x_{s+k}}{\partial x_h}=\zeta_{kh}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a) \qquad (k=1, 2, \ldots, r;\ h=1, 2, \ldots, a),$$

obtenus en remplaçant les y_m, de toutes les manières possibles, par des fonctions des seules variables indépendantes $x_1, \ldots, x_s$.

Il s'agit donc, en d'autres termes, de résoudre le système (51), en y considérant les x_{s+k} et les y_m comme des fonctions inconnues de $x_1, \ldots, x_s$: c'est-à-dire de trouver tous les systèmes de fonctions

$$(52) \quad x_{s+k}=f_k(x_1, \ldots, x_s) \quad (k=1, 2, \ldots, r); \qquad y_m=g_m(x_1, \ldots, x_s) \quad (m=1, 2, \ldots, a),$$

tels que les équations

$$(53) \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_h}=\zeta_{kh}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a), \qquad (k=1, 2, \ldots, r; \; h=1, 2, \ldots, s),$$

soient des conséquences des équations (52).

Or on retrouve ces mêmes conditions si l'on exprime qu'il existe des fonctions $\eta_{mh}(x_1, \ldots, x_s)$ telles que la multiplicité (52) de l'espace $(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a)$ admette les s transformations infinitésimales

$$(54) \qquad Z_h=X_h+\eta_{\alpha h}\frac{\partial f}{\partial y_a} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, a; \; h=1, 2, \ldots, s);$$

c'est-à-dire en exprimant que cette multiplicité (52), qui est à s dimensions, est une intégrale du faisceau $\mathcal{F}$ de transformations infinitésimales de cet espace $\mathcal{E}'$, qui a pour symbole

$$(55) \qquad \left\{ X_1, \ldots, X_s, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_a} \right\}.$$

Le problème b consiste donc ici à trouver toutes les intégrales $\mathcal{M}'_s$ de ce faisceau $\mathcal{F}$, de symbole (55), sur lesquelles les coordonnées $x_1, \ldots, x_s$ sont des variables indépendantes. Il se présente, par suite, vis-à-vis de l'ensemble des équations de contact de $\mathcal{E}$, avec un caractère de généralité presque absolu, puisque tout système d'équations aux dérivées partielles peut se ramener (1) à la forme (51), et que les ζ_{kh} ne sont assujettis qu'à la seule condition que les y_m puissent s'éliminer entre les équations (49). Car, sous cette seule condition, il existera au moins une équation E dont l'image Φ portera la famille des droites Δ_{r-1} ayant des équations (49), supposées données, pour équations générales (avec les paramètres $y_1, \ldots, y_a$).

Sur la nature de ce problème d'intégration nous ne pourrons donner en conséquence, que des indications générales empruntées à la théorie des *faisceaux involutifs* (2) et du *prolongement* des faisceaux (3).

---

(1) *Voir*, par exemple, M., n° 5, p. 348.
(2) *Voir* M. II, p. 353.
(3) *Voir* M., n° 15, p. 368.

12. Si l'on forme les crochets des $c = s + a$ transformations de base du faisceau $\mathcal{F}$,

$$(56)\quad \begin{cases} X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_a)p_{1+\rho} & (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s), \\ X_{s+m} = \dfrac{\partial f}{\partial y_m} & (m = 1, 2, \ldots, a), \end{cases}$$

prises deux à deux, on obtient les formules

$$(57)\quad \begin{cases} (X_h, X_i) = c_{hi\rho}p_{s+\rho}, \quad (X_{s+m}, X_h) = a_{mh\rho}p_{s+\rho}, \quad (X_{s+l}, X_{s+m}) = 0, \\ (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h, i = 1, 2, \ldots, s;\ l, m = 1, 2, \ldots, a), \end{cases}$$

les c_{hik} et les a_{mhk} étant les fonctions des x_i et des y_m

$$(58)\quad c_{hik} = X_h\zeta_{ki} - X_i\zeta_{kh}, \qquad a_{mhk} = \frac{\partial \zeta_{kh}}{\partial y_m}$$
$$(h, i = 1, 2, \ldots, s;\ m = 1, 2, \ldots, a;\ k = 1, 2, \ldots, r).$$

On en déduit, pour les conditions d'*involution* [1] de deux transformations quelconques de $\mathcal{F}$

$$(59)\quad U = u_\gamma X_\gamma, \qquad V = v_\gamma X_\gamma, \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, c),$$

les r équations bilinéaires

$$(60)\quad u_\sigma v_\tau c_{\sigma\tau k} + (v_\sigma u_{s+\alpha} - u_\sigma v_{s+\alpha})a_{\alpha\sigma k} = 0, \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \ldots, a;\ k = 1, 2, \ldots, r),$$

qui serviront de point de départ pour l'étude du faisceau.

Nous supposerons d'abord que $\mathcal{F}$ soit *involutif, d'ordre s*. Je rappelle [2] que cela signifie qu'il existe dans $\mathcal{F}$ une suite de s transformations divergentes [3] dont la première est la transformation générale du faisceau, et dont chacune des suivantes est la transformation de $\mathcal{F}$ la plus générale qui soit en involution avec toutes celles qui la précèdent.

Pour vérifier s'il en est ainsi, on cherchera à déterminer les coefficients u_{hj} des symboles

$$(61)\quad U_h = u_{h\gamma}X_\gamma, \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, c;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

de s transformations de $\mathcal{F}$ de manière que la suite $U_1, U_2, \ldots, U_s$ satisfasse aux conditions énoncées. On laissera donc les u_{1j} $(j = 1, 2, \ldots, c)$ indéterminés, et les u_{hj} $(j = 1, 2, \ldots, c)$, devront être, pour chacune des valeurs $2, 3, \ldots, s$ de h, la solution générale du système L_{h-1}, linéaire et homogène en $u_1, \ldots, u_c$,

---

(1) Deux transformations U et V d'un faisceau quelconque $\mathcal{F}$ sont dites *en involution* si leur crochet (U, V) est une transformation de $\mathcal{F}$, ou est identiquement nul (*voir* M., p. 354).

(2) *Voir* M., nº 9, p. 355.

(3) Des transformations infinitésimales de $\mathcal{E}$ sont dites *divergentes* si leurs symboles $X_h = \xi_{h\alpha}p_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, $(h = 1, 2, \ldots, s)$, sont, par rapport aux indéterminées $p_\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha}$, des formes linéaires indépendantes (*voir* M., nº 1, p. 341).

obtenu en écrivant, par application des conditions d'involution (60), que $U = u_\gamma X_\gamma (\gamma = 1, 2, \ldots, c)$, est en involution avec chacune des transformations $U_1, \ldots, U_{h-1}$. Comme ces conditions seront satisfaites (en raison de ce mode de calcul des U_h de proche en proche), si l'on prend pour U la transformation générale du sous-faisceau $\{U_1, \ldots, U_{h-1}\}$ de $\mathcal{F}$, et comme $U_1, \ldots, U_{h-1}, U_h$ devront être divergentes, il faudra que L_{h-1} ait au moins h solutions indépendantes, ou, en d'autres termes, que son rang soit au plus égal à $(c-h)$. Si cette condition est réalisée pour $h = 2, 3, \ldots, s$, $\mathcal{F}$ sera involutif d'ordre s, et les rangs respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ des systèmes linéaires $L_1, L_2, \ldots, L_{s-1}$ seront dits les *indices* du faisceau.

Le sous-faisceau $\{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$, calculé comme il vient d'être expliqué, sera l'*involution générale* [1], *de degré s*, de $\mathcal{F}$. Nous supposerons qu'elle a une base résolue [2] en $p_1, \ldots, p_s$, c'est-à-dire de la forme

$$(62) \qquad V_h = X_h + v_{\alpha h} q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, a;\ h = 1, 2, \ldots, s), \qquad \left(q_m = \frac{\partial f}{\partial y_m}\right),$$

ce qui permettra d'appliquer à $\mathcal{F}$ le *théorème fondamental d'existence* [3] relatif aux sous-faisceaux complets, de degré s, des faisceaux involutifs d'ordre s : ces sous-faisceaux devant avoir eux-mêmes, pour notre objet, une base résolue en $p_1, \ldots, p_s$, c'est-à-dire de ce même type (62).

Pour tout sous-faisceau $\{V_1, \ldots, V_s\}$ ainsi défini, on a, en conséquence des formules (57) et (58),

$$(63) \qquad (V_h, V_i) = \Lambda_{\rho h i} p_{s+\rho} + V_{\alpha h i} q_\alpha \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots, a;\ h, i = 1, 2, \ldots, s),$$

les Λ_{khi} étant les fonctions linéaires des v_{mh}

$$(64) \qquad \Lambda_{khi} = a_{\alpha i k} v_{\alpha h} - a_{\alpha h k} v_{\alpha i} + c_{khi} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, a;\ k = 1, 2, \ldots, r;\ h, i = 1, 2, \ldots s),$$

et les V_{mhi} étant les expressions différentielles, relatives aux v_{mh} considérés comme fonctions des x_i et des y_m,

$$(65) \qquad V_{mhi} = V_h v_{mi} - V_i v_{mh} \qquad (m = 1, 2, \ldots, a;\ h, i = 1, 2, \ldots, s).$$

Les conditions qui expriment que ce sous-faisceau est complet sont donc : d'une part, le système algébrique linéaire

$$(66) \qquad \Lambda_{khi} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s-1;\ i = 2, 3, \ldots, s) \qquad (h < i),$$

---

[1] Un sous-faisceau F d'un faisceau quelconque $\mathcal{F}$ est dit une *involution* de $\mathcal{F}$, si ses transformations sont, deux à deux, en involution dans $\mathcal{F}$. Il suffit, pour cela, qu'il en soit ainsi de ses transformations de base. Le sous-faisceau $\{U_1, \ldots, U_s\}$ est ici l'*involution générale*, de degré s, de $\mathcal{F}$, parce qu'on a, en fait, trouvé de la manière la plus générale, s transformations $U_1, \ldots, U_s$ de $\mathcal{F}$ qui soient, deux à deux en involution, (*voir*, Sur les involutions d'un faisceau, M., nº 8, p. 353).

[2] Cela est loisible, pour tout faisceau involutif, sous le bénéfice d'un changement de variables préliminaire éventuel (*voir*, M., nº 11, p. 358).

[3] *Voir* M., nºs 13 et 14, p. 363.

et, d'autre part, le système différentiel

$$(67)\qquad V_{mhi}=0\qquad (m=1, 2, \ldots, a;\ h=1, 2, \ldots, s-1;\ i=2, 3, \ldots, s)\qquad (h<i),$$

auxquels devront satisfaire les fonctions inconnues $v_{mh}(m=1, 2, \ldots, a;$ $h=1, 2, \ldots, s)$, des variables indépendantes x_i et y_m.

Le théorème fondamental d'existence en question énonce que si $\mathcal{F}$ est involutif d'ordre s, et si son involution générale de degré s a une base du type (62), le système mixte (66), (67) s'intègre au moyen de systèmes algébriques linéaires et de systèmes différentiels de Kowalewski successifs, et qu'il a une solution et une seule satisfaisant aux conditions suivantes (les a_j étant les indices de $\mathcal{F}$) :

1° Les $v_{m,1}(m=1, 2, \ldots, a)$, se réduisent, pour $x_1=x_1^0, \ldots, x_{s-1}=x_{s-1}^0$, à des fonctions arbitrairement choisies des autres x_i et des y_m.

2° Pour chacune des valeurs $2, 3, \ldots, s-1$ de h, $a-a_{h-1}$ des v_{mh} $(m=1, 2, \ldots, a)$, se réduisent, pour $x_1=x_1^0, \ldots, x_{s-h}=x_{s-h}^0$, à des fonctions arbitrairement choisies des autres x_i et des y_m.

3° $a-a_{s-1}$ des $v_{ms}(m=1, 2, \ldots, a)$ sont des fonctions arbitrairement choisies des x_i et des y_m.

Chacun des sous-faisceaux complets de $\mathcal{F}$ ainsi caractérisés aura ∞^{r+a} intégrales totales, dont les équations s'obtiendront en égalant à des constantes arbitraires $c_j(j=1, 2, \ldots, r+a)$, un système d'invariants fondamentaux de ce sous-faisceau, et pourront se résoudre sous la forme

$$(68)\qquad x_{s+k}=f_a(x_1, \ldots, x_s;\ c_1, \ldots, c_{r+a})\qquad (k=1, 2, \ldots, r),$$

$$(68\ bis)\qquad y_m=g_m(x_1, \ldots, x_s;\ c_1, \ldots, c_{r+a})\qquad (m=1, 2, \ldots, a).$$

Et l'on aura ainsi une famille de $\infty^{r+a}\mathfrak{M}'_s$ intégrales du faisceau $\mathcal{F}$, ou, en d'autres termes, une *intégrale complète* de ce faisceau [1], *à s dimensions*.

On sait, du reste, que, réciproquement, toute intégrale complète, à s dimensions, d'un faisceau quelconque, est formée par l'ensemble des intégrales totales de l'un de ses sous-faisceaux de degré s, et que l'on obtient toutes ses *intégrales non singulières*, pour chaque valeur de s, en particularisant les valeurs des constantes arbitraires, de toutes les manières possibles, dans ses diverses intégrales complètes.

13. Que $\mathcal{F}$ soit involutif ou non, la recherche de ses $\mathfrak{M}'_s$ intégrales, non singulières ou singulières, se présente, d'un point de vue analytique, sous la forme suivante. Chacune de ces $\mathfrak{M}'_s$ intégrales, supposée représentée par des équations du type (52) sera une intégrale totale d'un sous-faisceau $\{V_1, \ldots, V_s\}$ de $\mathcal{F}$, du type (62); et par suite, de tout autre sous-faisceau de la

(1) *Voir*, Sur les *intégrales complètes* des faisceaux, M., n° 7, p. 351.

même forme pour lequel les fonctions v_{mh} des x_i et des y_m se réduiront, sur cette multiplicité, aux mêmes fonctions $\bar{v}_{mh}$ de $x_1, \ldots, x_s$

Or, en exprimant que la multiplicité (52) admet les crochets (V_h, V_i), et en utilisant à cet effet les formules (63), (64), (65), on voit que les équations (66) et (67) devront être vérifiées sur elle.

Si l'on exige que ce soient des identités, ce sera chercher les sous-faisceaux complets F_s, de degré s, de $\mathcal{F}$; et l'on sera ramené à l'intégration du système mixte (66), (67) dont nous venons de nous occuper dans le cas où $\mathcal{F}$ est involutif, mais au sujet de laquelle nous ne pourrons plus rien affirmer dans le cas contraire.

Si les fonctions v_{hm} ne sont pas des intégrales du système mixte (66), (67), elles devront être telles que les équations (66), (67) définissent une multiplicité ψ satisfaisant à l'un des types de conditions fournis (*mutatis mutandis*) par la discussion du n° 8. Mais la présence, dans ces systèmes de conditions, des dérivées des inconnues v_{mh} ne permettra pas d'aboutir à une solution effective, sauf peut-être dans des cas spéciaux.

La recherche des *solutions singulières*, par cette voie, paraît donc illusoire; et appellerait d'autres recherches.

14. Mais, à défaut d'une utilisation complète des équations (66) et (67), on pourra se servir, dans tous les cas, des équations (66), qui ne contiennent pas de dérivées des inconnues v_{mh}. On remarquera qu'elles expriment que les sous-faisceaux $\{V_1, \ldots, V_s\}$ à considérer devront être des involutions, de degré s, de $\mathcal{F}$.

Elles forment un système $\mathcal{L}$ d'équations algébriques linéaires, liant les inconnues v_{mh}, dans lesquelles les x_i et les y_m jouent le rôle de paramètres. Si ce système est impossible quelles que soient les valeurs de ces paramètres, $\mathcal{F}$ n'a pas d'intégrales $\mathfrak{M}'_s$. Supposons, au contraire, qu'il soit compatible, pour des valeurs arbitraires des x_i et des y_m. Alors, s'il est déterminé, on obtiendra, en le résolvant, un sous-faisceau $\{P_1, \ldots, P_h\}$ déterminé que l'on aura à étudier comme il a été fait au n° 8.

Si, au contraire, le système $\mathcal{L}$ est indéterminé, il aura une solution générale de la forme

$$(69)\quad v_{mh} = \eta_{mh}(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_a, z_1, \ldots, z_b) \quad (m = 1, 2, \ldots, a) \quad (h = 1, 2, \ldots, s),$$

où les η_{mh} seront des fonctions linéaires des indéterminées $z_1, \ldots, z_h$: de sorte que les V_h prendront la forme déterminée

$$(70)\qquad V_h = X_h^{(1)} = X_h + \eta_{\alpha h} q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, a;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

et qu'il restera seulement à déterminer les z_l, en fonction de $x_1, \ldots, x_s$, de manière que le faisceau $\{X_h^{(1)}, \ldots, X_h^{(s)}\}$ ait des intégrales totales.

On verra, en raisonnant comme au n° 11 (sur ce faisceau, au lieu du faisceau $\{X_1, \ldots, X_s\}$), que l'on est ainsi ramené à la recherche des intégrales à s dimensions, $\mathcal{M}''_s$, du faisceau $\mathcal{F}^{(1)}$, de l'espace $\mathcal{E}^{(1)}$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a; z_1, \ldots, z_b)$, qui a pour symbole

$$\left\{X_1^{(1)}, \ldots, X_s^{(1)}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_b}\right\}; \tag{71}$$

et dont on dira qu'il a été obtenu en *prolongeant* [1] le faisceau $\mathcal{F}$.

Si ce faisceau $\mathcal{F}^{(1)}$ est involutif, il aura, d'après le théorème fondamental d'existence, rappelé au n° 13, des intégrales complètes, dont chacune contiendra ∞^{r+a+b} intégrales particulières et sera représentée, avec $(r+a+b)$ constantes arbitraires c_j, par des équations de la forme

$$x_{s+k} = f_k\,(x_1, \ldots, x_s;\, c_1, \ldots, c_{r+a+b}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{72}$$

$$y_m = g_m(x_1, \ldots, x_s;\, c_1, \ldots, c_{r+a+b}) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, a), \tag{72bis}$$

$$z_l = h_l\,(x_1, \ldots, x_s;\, c_1, \ldots, c_{r+a+b}) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, b). \tag{72ter}$$

En y faisant abstraction des variables z_l introduites par le prolongement, elle fournira, par les équations (72), (72bis), une famille de ∞^b intégrales complètes de $\mathcal{F}$; mais rien ne prouve que l'on obtienne ainsi toutes les intégrales complètes de $\mathcal{F}$. *A fortiori*, la question des intégrales singulières de $\mathcal{F}$ ne trouve pas ainsi de solution.

Si $\mathcal{F}^{(1)}$ n'est pas involutif, on pourra raisonner sur lui comme on vient de le faire sur $\mathcal{F}$, en cherchant ses involutions de degré s. La question s'achèvera s'il n'en a pas, ou s'il n'en a qu'une; et, s'il en a une infinité, on sera conduit à *prolonger* $\mathcal{F}^{(1)}$, comme on avait fait pour $\mathcal{F}$. Et ainsi de suite.

On peut démontrer qu'on arrivera toujours, au bout d'un nombre limité ν de prolongements successifs, à un faisceau $\mathcal{F}^{(\nu)}$ qui sera involutif, ou bien auquel les opérations s'arrêteront (du fait qu'il n'aura pas d'involution de degré s, ou qu'il n'en aura qu'une seule). Si alors $\mathcal{F}^{(\nu)}$ est involutif, on lui appliquera le théorème fondamental d'existence des sous-faisceaux complets; s'il n'a pas d'involution de degré s, il y aura impossibilité; s'il en a une, et une seule, on pourra décider si $\mathcal{F}$ aura, ou non, des $\mathcal{M}'_s$ intégrales, et les trouver, s'il en a, par des éliminations et des intégrations d'équations différentielles ordinaires.

15. Dans l'analyse qui nous a conduit à la notion du prolongement des faisceaux, nous avons supposé, au sujet du système linéaire $\mathcal{L}$, d'équations (66), qui lient entre elles les valeurs des v_{mh} sur toute $\mathcal{M}'_s$ intégrale de $\mathcal{F}$, qu'il était compatible pour des valeurs arbitraires des x_i et des y_m, et il a été censé être utilisé dans les mêmes conditions. Cette analyse exclut donc implici-

---

[1] Sur cette notion du *prolongement d'un faisceau,* voir M, n° 15, p. 368.

tement les $\mathfrak{M}'_s$ intégrales de $\mathcal{F}$ sur lesquelles ce système $\mathcal{L}$ présenterait des particularités quant à sa compatibilité ou son degré d'indétermination. On devra donc chercher d'autre part si de telles $\mathfrak{M}'_s$ intégrales existent, et les déterminer s'il y a lieu et si possible.

La discussion algébrique du système $\mathcal{L}$, par l'étude de la matrice de ses coefficients, fournira, à cet effet, un ou plusieurs systèmes d'équations de condition entre les paramètres x_i et y_m; et l'on aura à chercher, pour chacun de ceux qui définiront une multiplicité, (de l'espace $\mathcal{E}'$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a$), ayant au moins s dimensions, les $\mathfrak{M}'_s$ intégrales de $\mathcal{F}$ situées sur elle.

Soit donc μ l'une de ces multiplicités, et supposons d'abord que ses points vérifient une équation où figurent les y_m, par exemple de la forme

$$y_a = \eta(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{a-1}). \tag{73}$$

On pourra définir toute $\mathfrak{M}'_s$ située sur μ en adjoignant à cette équation un système (σ) de $(r + a - 1)$ équations où y_a ne figurera pas. En exprimant que le système total ainsi constitué admet des transformations du type (62), on obtiendra, d'une part, des équations résolues par rapport aux v_{ah}, et, d'autre part, des équations qui exprimeront que (σ) admet les transformations $X'_h + v_{\lambda h} q_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, a-1)$, où X'_h aura été déduit que X_h en y remplaçant y_a par la fonction η. De sorte que, pour que le système (σ), (73) définisse une $\mathfrak{M}'_s$ intégrale de $\mathcal{F}$, il sera nécessaire et suffisant que (σ) définisse une intégrale du faisceau $\{X'_1, \ldots, X'_s; q_1, \ldots, q_{a-1}\}$, où la variable y_a aura disparu.

Supposons, en second lieu, que les points de μ satisfassent à une équation entre les x_i seuls. Si l'on applique les V_h aux deux membres, on obtiendra des équations, ne contenant pas les v_{mh}, auxquelles devra satisfaire aussi toute $\mathfrak{M}'_s$ intégrale de $\mathcal{F}$. Donc, ou bien ces équations seront aussi vérifiées sur μ, ou bien on définira, en les adjoignant aux équations de μ, une multiplicité μ_1, ayant un nombre de dimensions moindre que celui de μ, sur laquelle devront se trouver toutes les $\mathfrak{M}'_s$ intégrales de $\mathcal{F}$ situées sur μ.

En combinant ces deux modes de réduction du problème, on sera ramené, soit à chercher toutes les intégrales à s dimensions d'un faisceau ayant, comme $\mathcal{F}$, une base de la forme (56), mais avec un moindre nombre de variables y_m; soit à chercher les intégrales à s dimensions d'un tel faisceau, situées sur une multiplicité, donnée dans le sous-espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}'$, et admettant toutes les transformations de ce faisceau.

16. Étudions donc ce dernier problème, en supposant qu'il s'agisse du faisceau $\mathcal{F}$ lui-même et de la multiplicité μ définie par les équations

$$x_{p+l} = g_l(x_1, \ldots, x_p) \qquad (l = 1, 2, \ldots, t;\; t + p = n + 1;\; p \geqq s). \tag{74}$$

Si $p > s$, une $\mathfrak{M}'_s$, située sur μ, sera définie par ces équations (74), associées à des équations

$$x_{s+m} = f_m(x_1, \ldots, x_s) \qquad (m = 1, 2, \ldots, q;\ q + s = p), \tag{75}$$

et

$$y_j = h_j(x_1, \ldots, x_s) \qquad (j = 1, 2, \ldots, a). \tag{76}$$

Si $p = s$, il n'y aura pas d'équations (75).

En exprimant que ce système (74), (75), (76) admet des transformations V_h du type (62), nous obtiendrons, d'une part, en appliquant ces V_h aux équations (74), des équations qui seront toutes des conséquences de ces équations (74), puisque μ admet toutes les transformations de $\mathcal{F}$, par hypothèse; et, d'autre part, en ce qui concerne les équations (75) et (76), des équations qui, en y tenant compte des équations (74), seront celles que l'on trouverait en appliquant aux deux membres des équations (75) et (76) les transformations infinitésimales

$$V_h^{(0)} = X_h^{(0)} + [v_{\alpha h}] q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, a;\ h = 1, 2, \ldots, s), \tag{77}$$

où l'on a posé

$$X_h^{(0)} = p_k + [\zeta_{\chi h}(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y_1, \ldots, y_a)] p_{s+\chi} \qquad (\chi = 1, 2, \ldots, q;\ h = 1, 2, \ldots, s), \tag{78}$$

et utilisé la notation

$$[f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n+1};\ y_1, \ldots, y_a)] = f(x_1, \ldots, x_p, g_1, \ldots, g_q;\ y_1, \ldots, y_a). \tag{79}$$

Les multiplicités (75), (76), de l'espace $\mathcal{E}_0$, de coordonnées $x_1, \ldots, x_p$; $y_1, \ldots, y_a$, qu'il s'agit de chercher seront donc les $\mathfrak{M}_s^{(0)}$ intégrales du faisceau $\mathcal{F}^{(0)}$, ayant pour symbole

$$\{X_1^{(0)}, \ldots, X_s^{(0)}, q_1, \ldots, q_a\}, \tag{80}$$

dont on pourra dire qu'il a été obtenu en *projetant* $\mathcal{F}$ sur μ.

17. *Cas* D, ($s > 1$). — Pour terminer l'examen du problème b dans ses divers cas, il nous reste à considérer une famille continue de droites Δ_{s-1}, dont les équations générales seront, comme dans le cas C que nous venons d'étudier, de la forme (49), mais qui ne seront situées sur l'image Φ de E que si le point x se trouve sur une certaine multiplicité paramétrique ϖ, afférente à cette famille. La solution (48) du système Z [n° 4] qui la fournira sera susceptible d'une infinité de formes différentes, qui seront équivalentes sous le bénéfice des équations de cette multiplicité ϖ. Nous supposons que l'on en ait choisi une, arbitrairement, de sorte que les transformations infinitésimales (50) seront connues, et bien déterminées.

On pourra ainsi reprendre l'analyse du n° 11, et l'on conclut, par suite, qu'il s'agit de trouver les $\mathfrak{M}'_s$ intégrales du faisceau $\mathcal{F}$, ayant pour base ces transformations (50) et les transformations $\dfrac{\partial f}{\partial y_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, a)$, qui seront situées sur la multiplicité connue ϖ, considérée comme appartenant à l'espace $\mathcal{E}'$, (lequel sera considéré lui-même comme ayant $\mathcal{E}$ pour sous-espace).

C'est un problème de la même nature que celui qui a fait l'objet des n°s 15 et 16; et il se traitera par les mêmes moyens.

II. — Des intégrales complètes et des transformations de contact qui leur sont associées.

18. Conformément aux idées de Sophus Lie, nous appellerons *intégrale complète* d'une équation de contact E [n° 1] toute famille de multiplicités, à un même nombre quelconque s de dimensions, telle que l'ensemble des éléments de contact de toutes les multiplicités de cette famille soit identique à celui des éléments de contact de E; ce qui implique que toute multiplicité de la famille est une $\mathfrak{M}_s$ intégrale de E. Pour $s = n$, cette notion équivaut à celle de l'intégrale complète de Lagrange, relative aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Toute multiplicité ayant, dans l'espace $\mathcal{E}$, de coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$, que nous considérons, ∞^n éléments de contact, toute intégrale complète se composera de ∞^n multiplicités, et nous prendrons ses équations générales sous la forme résolue

$$(81)\qquad G_k(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1}) = y_{s+k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ r + s = n + 1),$$

les y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, étant des constantes arbitraires.

Considérons alors le faisceau complet F

$$(82)\qquad X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1})\, p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

qui a les G_k pour invariants fondamentaux. Les paramètres $y_1, \ldots, y_{s-1}$ y devront être, comme dans le système des G_k, essentiels; et, par suite, on obtiendra, en les éliminant entre les équations

$$(83)\qquad X_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s),$$

une équation et une seule. Celle-ci admettra pour intégrales, comme le système (83), les multiplicités (81) (pour tout système de valeurs constantes attribuées aux y_j), et, par conséquent, ne sera autre que l'équation

$$(\mathrm{E})\qquad \Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, \ldots, p_{n+1}) = 0,$$

donnée, qui a pour intégrale complète la famille de ces multiplicités.

On voit, de plus, qu'il existe toujours une équation E, et une seule, ayant une intégrale complète arbitrairement donnée.

Remarquons que le lien que nous venons d'établir entre l'équation E et son intégrale complète (81) supposée, par l'intermédiaire du système (83), est en accord avec les principes et les résultats de l'étude générale des intégrales d'une équation de contact qui a fait l'objet du paragraphe I. Les équations (83) sont, dans l'espace figuratif Π [nº 5], celles d'une famille de ∞^{s-1} droites Δ_{r-1}, qui engendrent l'image Φ de E, de telle manière que par chaque point de Φ passe une Δ_{r-1} génératrice et une seule. Et, relativement à l'analyse du nº 11, il se présente ici cette particularité que le faisceau $\{X_1, \ldots, X_s\}$ est un sous-faisceau complet, de degré s, du faisceau $\left\{X_s, \ldots, X_s, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}}\right\}$.

On sait que Sophus Lie a donné le nom de *semi-linéaires* aux équations aux dérivées partielles du premier ordre qui ont des intégrales complètes à moins de n dimensions (n étant le nombre des variables indépendantes). Nous garderons cette dénomination pour les équations de contact, qui leur sont équivalentes [nº 2]. Nous dirons, de plus, que E est une *équation de contact semi-linéaire d'espèce* $(s-1)$, si elle a une intégrale complète à s dimensions. Dans le cas $s=1$, les X_h se réduisent à une seule transformation, où ne figure aucun des paramètres y_j : égalée à zéro, elle donnera une équation équivalente à E. Celle-ci sera donc, comme il est bien connu, une *équation linéaire*. L'espèce d'une équation de contact semi-linéaire est donc un entier positif, au plus égal à $(n-2)$.

Avec cette terminologie, nous pouvons conclure de l'analyse précédente que les équations de contact semi-linéaires d'espèce a sont les équations E qui s'obtiennent, à partir de tout système complet de la forme

$$(84)\qquad \begin{cases} p_h + \zeta_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_a) p_{\rho+a+1} = 0 \\ (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, a+1;\ a+r=n), \end{cases}$$

par l'élimination des indéterminées y_j.

19. A l'intégrale complète G, de E, définie par les équations (81), nous associerons la transformation de contact T, faisant passer de l'espace $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ à l'espace $(y_1, \ldots, y_{n+1})$, qui a pour *directrices* les équations

$$(85)\qquad x_{n+1} = y_{n+1}, \qquad G_k = y_{s+k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ r+s = n+1).$$

Pour avoir le système de ses équations, nous désignerons par $q_1, \ldots, q_{n+1}$ les coordonnées d'orientation des éléments de contact dans l'espace des y_i, et nous écrirons que l'équation de Pfaff $q_\alpha dy_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$ se réduit à $p_\alpha dx_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$, quand on y remplace $dy_s, dy_{s+1}, \ldots, dy_{n+1}$ par $dG_1, dG_2, \ldots, dG_n, dx_{n+1}$: ce qui donne

$$(86)\qquad q + \frac{\partial G_\rho}{\partial y_j} q_{s+\rho-1} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s-1),$$

et, avec un facteur arbitraire, non nul, λ,

$$(87)\quad \frac{\partial G_\rho}{\partial x_l} q_{s+\rho-1} = \lambda p_l, \qquad \frac{\partial G_\rho}{\partial x_{n+1}} q_{s+\rho-1} + q_{n+1} = \lambda p_{n+1} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ l = 1, 2, \ldots, n).$$

Or on tire, de ces dernières équations, les combinaisons

$$(88)\quad X_h G_\rho q_{s+\rho-1} + \zeta_{rh} q_{n+1} = \lambda(p_h + \zeta_{\rho h} p_{s+\rho}) \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

qui se réduisent à

$$(89)\quad \zeta_{r,h} q_{n+1} = \lambda(p_h + \zeta_{\rho h} p_{s+\rho}) \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

quand on tient compte de ce que les G_k sont des invariants des X_h.

Et de là résulte que la transformation T considérée change l'équation de contact E en $q_{n+1} = 0$, ou, en faisant abstraction des notations employées pour les coordonnées de l'espace transformé, qu'elle ramène E à la *forme canonique* $p_{n+1} = 0$.

Remarquons, en effet, que l'on a supposé implicitement que x_{n+1} n'est pas une fonction des G_k, de sorte que les ζ_{rh} $(h = 1, 2, \ldots, s)$ ne sont pas tous nuls. A tout élément $(x_1, \ldots, x_{n+1};\ p_1, \ldots, p_{n+1})$ de E, on peut associer des valeurs de $y_1, \ldots, y_{s-1}$ telles que les seconds membres des équations (89) soient nuls, ce qui entraînera $q_{n+1} = 0$. Il restera alors, pour déterminer l'élément transformé $(y_1, \ldots, y_{n+1};\ q_1, \ldots, q_{n+1})$, les équations (85), qui donneront $y_s, \ldots, y_{n+1}$, et le système formé des équations (86) et des équations (87) non remplacées par les combinaisons (88), à savoir les $r = n + 1 - s$ dernières. En tenant compte de $q_{n+1} = 0$, celles-ci donneront $q_s, \ldots, q_n$, et les autres fourniront $q_1, \ldots, q_{s-1}$. A tout élément de contact de E correspondra donc bien un élément de contact de $q_{n+1} = 0$.

Inversement, T^{-1} fera correspondre à tout élément de $q_{n+1} = 0$, un élément qui, d'après (89), satisfera, concurremment avec $y_1, \ldots, y_{s-1}$, aux équations (83), et, par conséquent, appartiendra à E.

20. Considérons, *réciproquement*, une transformation de contact T quelconque, définie par des équations directrices de la forme (85), où les G_k seront des fonctions des x_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, et des y_j $(j = 1, 2, \ldots, s-1)$, arbitrairement données (sous la réserve que x_{n+1} ne soit pas une fonction des G_k et des y_j). L'équation de contact $q_{n+1} = 0$ sera la transformée d'une équation de contact E de l'espace $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, qui, d'après les équations (85), (86), (87) de T, résultera de l'élimination de $y_1, \ldots, y_{s-1};\ q_s, q_{s+1}, \ldots, q_n$ entre les $(n+1)$ équations

$$(90)\quad \frac{\partial G_\rho}{\partial x_i} q_{s+\rho-1} = \lambda p_i \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

On vérifie sans peine que cette équation E ne sera pas autre chose que celle qui a pour intégrale complète la famille G des multiplicités (81), [où les y_l, $(l=1, 2, \ldots, n)$ sont des constantes arbitraires].

Les éléments de contact $(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, \ldots, p_{n+1})$ de ces multiplicités s'obtiennent, en effet, en écrivant que l'équation de Plaff $p_\alpha dx_\alpha = 0 (\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$ est une conséquence des équations $dG_k = 0 (k=1, 2, \ldots, r)$, les y_j $(j=1, 2, \ldots, s-1)$ étant laissées constantes. Le lieu de ces éléments de contact sera donc défini par le résultat de l'élimination des arbitraires μ_k $(k=1, 2, \ldots, r)$, et $y_j (j=1, 2, \ldots, s-1)$, entre les équations

$$(91) \qquad p_i = \mu_\rho \frac{\partial G_\rho}{\partial x_i} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots, n+1);$$

et celui-ci sera précisément l'équation E considérée, puisque cette équation résulte de l'élimination des quantités q_{s+k-1} $(h=1, 2, \ldots, r)$, et $y_j (j=1, 2, \ldots, s-1)$, entre les équations (90), et que l'on passe du système (90) au système (91) en y posant $q_{s+k-1} = \lambda \mu_k$ $(k=1, 2, \ldots, r)$.

21. *L'intégration de l'équation de contact canonique* $p_{n+1} = 0$ est immédiate. En effet, sur toute intégrale chaque déplacement infinitésimal dx satisfera à une équation de la forme $p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n = 0$, de sorte que tout déplacement continu sur cette intégrale ne comportera que l'existence de relations entre les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. Les équations de toute intégrale seront donc des relations entre ces coordonnées, ou, en d'autres termes, seront indépendantes de x_{n+1}.

Réciproquement, sur toute multiplicité de $\mathcal{E}$,

$$(92) \qquad F_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, r; \; 0 < r \leqq n),$$

les coordonnées d'orientation des éléments de contact sont telles que

$$\rho_\alpha dx_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$$

soit une conséquence des équations $dF_k = 0 (k=1, 2, \ldots, r)$, de sorte que l'on a des identités de la forme

$$(93) \qquad p_i = \lambda_\rho \frac{\partial F_\rho}{\partial x_i} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r; \; i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Si donc x_{n+1} ne figure pas dans les F_k, on a $p_{n+1} = 0$, c'est-à-dire que la multiplicité est alors une intégrale de l'équation de contact canonique $p_{n+1} = 0$.

En définitive, les intégrales de cette équation canonique sont toutes les multiplicités de $\mathcal{E}$ ayant des équations de la forme

$$(94) \qquad F_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, r; \; 0 < r \leqq n).$$

Les $F_k y$ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments.

Sous forme résolue, on aura, pour $s = n + 1 - r = 1$, le type rectilinéaire

$$x_l = c_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, n), \tag{95}$$

avec n constantes arbitraires, et si ce nombre de dimensions s est supérieur à 1, le type cylindrique

$$x_k = \varphi_k(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{96}$$

avec r fonctions arbitraires de $(s-1)$ arguments.

22. *Intégrer une équation de contact* E *quelconque équivaut à en trouver une intégrale complète* G *quelconque*, puisque celle-ci fournira une transformation de contact T, laquelle changera E en l'équation canonique $q_{n+1} = 0$, dont on connaîtra, d'après ce qui précède [nº 21], toutes les intégrales.

L'intégrale complète G étant supposée connue sous la forme (81), on lui associera les équations (86), et l'on prendra pour $z_1, \ldots, z_{n+1}; q_1, \ldots, q_{n+1}$ les coordonnées de l'élément de contact général d'une intégrale arbitraire de $q_{n+1} = 0$. Supposons d'abord que celle-ci soit à n dimensions, et soit

$$y_n = \psi(y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{97}$$

son équation. En écrivant que $q_\alpha dy_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n+1)$ est, pour $q_{n+1} = 0$, une conséquence de $dy_n = d\psi$, on trouve

$$q_l + \frac{\partial\psi}{\partial y_l} q_n = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{98}$$

On aura donc la transformée de (97) par T^{-1} en éliminant $y_1, \ldots, y_n$ entre les équations (81), (97) et

$$\frac{\partial G_r}{\partial y_j} - \frac{\partial\psi}{\partial y_j} - \frac{\partial\psi}{\partial y_{s+\nu-1}} \frac{\partial G_\nu}{\partial y_j} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r-1;\ j = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{99}$$

Si l'on pose

$$H(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1}) = G_r - \psi(y_1, \ldots, y_{s-1}, G_1, \ldots, G_{r-1}), \tag{100}$$

cela reviendra à éliminer $y_1, \ldots, y_{s-1}$ entre les équations

$$H = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{101}$$

L'intégrale générale de E apparaît donc, conformément à l'idée classique de Lagrange, comme l'enveloppe des ∞^{s-1} intégrales particulières à n dimensions définies, avec la fonction arbitraire ψ des $n-1$ arguments $y_1, \ldots, y_{n-1}$, par l'équation $H = 0$ [1].

---

[1] Celle-ci représente une surface quelconque, dépendant des paramètres $y_1, \ldots, y_{s-1}$, engendrée par des multiplicités tirées de l'intégrale complète G.

Si l'on était parti d'une intégrale à une dimension de $q_{n+1}=0$, soit

$$y_j = c_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n),$$

les c_j étant des constantes arbitraires, on aurait seulement les ∞^n intégrales (81) constituant l'intégrale complète G considérée.

Considérons maintenant le cas où l'intégrale de $q_{n+1}=0$ à transformer est à t dimensions $(1 < t \leqq n-1)$. Prenons-la sous sa forme générale résolue [n° 21]

$$(102) \qquad y_m = \psi_m(y_{u+1}, y_{u+2}, \ldots, y_n) \qquad (m=1, 2, \ldots, u;\ u+t=n).$$

Ses éléments de contact seront définis par les équations [1]

$$(103) \qquad q_{u+z} + \frac{\partial \psi_\omega}{\partial y_{u+z}} q_\omega = 0 \qquad (\omega = 1, 2, \ldots, u;\ z=1, 2, \ldots, t).$$

On aura donc à éliminer $y_1, \ldots, y_n$ et les rapports de $q_1, \ldots, q_n$ entre les équations (81), (86), (102), (103), ce qui sera possible puisque l'on aura affaire à $(2n-1)$ indéterminées et à $r+(s-1)+u+t=2n$ équations. On aura donc, en général, des surfaces de l'espace $\mathcal{E}$ pour les intégrales de E ainsi obtenues. Ce n'est que par un choix approprié des fonctions arbitraires ψ_m, (ou de ψ dans le cas considéré d'abord), que l'on pourra obtenir les intégrales à moins de n dimensions que E est susceptible d'avoir.

23. Nous appellerons, pour abréger, transformation T toute transformation de contact de $\mathcal{E}$ ayant des équations directrices de la forme (85), ce qui équivaut à dire que x_{n+1} est, pour elle, un invariant. D'après les formules (86) et (87), elle transforme $x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n$ comme le fait la transformation de contact $\overline{\mathrm{T}}$ de l'espace $\mathcal{E}_0$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ qui a pour équations directrices les équations (81). Pour cette transformation $\overline{\mathrm{T}}$, que nous appellerons le *noyau* de T, x_{n+1} doit être considéré comme un paramètre, et non comme une coordonnée.

Il résulte des numéros 19 et 20 que les équations de contact E de $\mathcal{E}$ forment une *classe* vis-à-vis du groupe (T) des transformations T. Car, d'après le théorème d'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre, toute équation E a des intégrales complètes à n dimensions [n° 18], et les transformations T qui leur sont associées ramènent E à la *forme réduite* $p_{n+1}=0$. Nous désignerons celle-ci par E_0, et nous dirons *réductrice*, pour E, toute transformation T qui la réduit à la forme E_0, c'est-à-dire qui est associée à l'une des intégrales complètes de E.

Les intégrales complètes de la réduite E_0 étant définies [n° 21] par des équations ne contenant pas x_{n+1}, ses transformations réductrices θ, qui constitueront le groupe (θ) des transformations T qui la laissent invariante, sont toutes

[1] On obtient ces équations en écrivant que $q_\alpha\, dy_\alpha = 0$ est conséquence des équations $dy_m = d\psi_m$.

les transformations T qui ont pour noyau une transformation *pure* de contact de l'espace $\mathcal{E}_0$: ce mot *pure* indiquant que la coordonnée paramétrique x_{n+1} ne figure pas dans ce noyau $\overline{T}$.

Cela posé, la formule générale des transformations T qui réduisent E à E_0 est [1] $T = T_1\theta$, T_1 étant l'une quelconque d'entre elles, et θ l'une quelconque des transformations T qui laissent E_0 invariante. De là, la formule $\overline{T} = \overline{T}_1\theta$ pour les noyaux des transformations considérées. Ce qui équivaut à dire que l'on passe de l'intégrale complète de E associée à T_1 à celle qui est associée à T en effectuant sur les paramètres $y_1, \ldots, y_n$ une transformation de contact arbitraire de l'espace $(y_1, \ldots, y_n)$.

On retrouve donc ainsi la loi du passage d'une intégrale complète à une autre.

24. Conformément à la propriété classique des plans tangents aux cylindres, les éléments de contact de toute intégrale de E_0 se répartissent en bandes, B_0, de ∞^1 éléments définies par des équations de la forme

$$(104) \qquad x_1 = a_1, \; \ldots, \; x_n = a_n; \qquad p_1 : p_2 : \ldots : p_n : p_{n+1} = b_1 : b_2 : \ldots : b_n : 0,$$

les a_j et les b_j étant des constantes. Car les éléments de contact d'une multiplicité cylindrique (96) sont déterminés par les équations

$$(105) \qquad p_{r+j} = \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_{r+j}} p_\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r; \; j = 1, 2, \ldots, s-1) \qquad p_{n+1} = 0.$$

Il est manifeste que la famille β_0 de ces ∞^{2n-1} bandes B_0 (dites *caractéristiques*) est invariante par toute transformation θ.

Il en résulte que chacune des transformations T^{-1} qui changent la réduite E_0 en une même équation de contact quelconque E changera cette famille β_0 de bandes en une même famille β de ∞^{2n-1} bandes B de ∞^1 éléments de contact, (*bandes caractéristiques*), car la formule $T = T_1\theta$ du n° 23 entraîne

$$(106) \qquad T_1^{-1}(\beta_0) = T^{-1}[\theta(\beta_0)] = T^{-1}(\beta_0).$$

Chaque intégrale de E_0 étant engendrée par ∞^{n-1} bandes B_0 (quand on la considère comme une multiplicité d'éléments de contact), chaque intégrale de E sera, de même, engendrée par ∞^{n-1} bandes caractéristiques B.

Le même principe de transformation conduit, *réciproquement*, à la construction des intégrales de E au moyen des bandes caractéristiques qui ont un élément de contact commun avec une *bande intégrale* arbitrairement choisie.

Soit donnée, en effet, une multiplicité ponctuelle quelconque à $(s-1)$ dimensions

$$(107) \qquad x_k = \varphi_k(x_{r+1}, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, r); \qquad x_{n+1} = \varphi(x_{r+1}, \ldots, x_n).$$

[1] La notation produit TT′ indiquant qu'on fait suivre T de T′.

Parmi ses ∞^n éléments de contact, définis par (107) et par

$$(108)\quad p_{r+j} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_{r+j}} p_\rho + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{r+j}} p_{n+1} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s-1;\ r+s = n+1),$$

il y en aura ∞^{n-1} qui satisferont à $p_{n+1} = 0$. Ils constitueront une *bande intégrale* arbitraire de E_0 qui sera définie par (107) et par

$$(109)\qquad p_{r+j} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_{r+j}} p_\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s-1); \qquad p_{n+1} = 0.$$

Par chacun de ses éléments passera une bande caractéristique de E_0, définie par

$$(110)\qquad X_l = x_l \quad (l = 1, 2, \ldots, n); \qquad P_i = \lambda p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Le lieu des éléments de contact de ces bandes aura pour équations

$$(111)\qquad x_k = \varphi_k(x_{r+1}, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(111\ bis)\quad p_{r+j} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_{r+j}} p_\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s-1); \qquad p_{n+1} = 0.$$

Ce sera donc la multiplicité d'éléments de contact qui a pour support la multiplicité ponctuelle (111), cylindrique, à s dimensions. On obtient donc ainsi une intégrale de E_0 et une seule, et l'on peut, par cette méthode, les obtenir toutes.

Si l'on se donne de même, pour E, une multiplicité ponctuelle quelconque m, on en pourra déduire, par un calcul algébrico-différentiel, une *bande intégrale* de E ayant cette multiplicité m pour support, c'est-à-dire constituée par les ∞^{n-1} éléments de contact de m satisfaisant à l'équation E. Chacun des éléments de contact de cette bande intégrale appartiendra à une *bande caractéristique* de E déterminée. En appliquant à la figure géométrique ainsi obtenue l'une quelconque des transformations T qui réduisent E à E_0, on conclura alors de ce qui vient d'être établi pour E_0, que le lieu des éléments de contact des bandes caractéristiques de E qui passent par les divers éléments de la bande intégrale ayant m pour support, est une multiplicité d'éléments de contact qui a pour support une intégrale de E, et que l'on pourra obtenir par cette méthode toute intégrale de E, dès que l'on connaîtra ses bandes caractéristiques. On voit, de plus, qu'une intégrale de E est entièrement déterminée par la condition d'avoir ∞^{n-1} éléments de contact communs avec une multiplicité ponctuelle quelconque donnée, à moins de n dimensions.

25. D'après la manière dont nous les avons introduites, les bandes caractéristiques d'une équation de contact E donnée sont connues dès que l'on connaît une intégrale complète G de cette équation. Celle-ci étant supposée définie par les équations (81), la transformation réductrice T qui lui est associée en résulte

sous la forme (85), (86), (87). Il n'y a qu'à écrire les équations de la bande obtenue en transformant par T^{-1} la bande caractéristique générale de $q_{n+1}=0$, qui, d'après (104) (système relatif à $p_{n+1}=0$), a pour équations, avec les constantes arbitraires a_l et b_l,

$$y_1=a_1, \ldots, y_n=a_n; \qquad q_1:q_2:\ldots:q_n:q_{n-1}=b_1:b_2:\ldots:b=0. \tag{112}$$

On obtient les équations

$$\left\{\begin{array}{ll} G_k(x_1, \ldots, x_{n+1}, a_1, \ldots, a_{s-1})=a_{s+k-1} & (k=1, 2, \ldots, r;\ r+s=n+1), \\ b_j+b_{s+\rho-1}\dfrac{\partial G_\rho}{\partial a_j}=0 & (\rho=1, 2, \ldots, r;\ j=1, 2, \ldots, s-1), \\ b_{s+\rho-1}\dfrac{\partial G_\rho}{\partial x_i}=\lambda p_i & (i=1, 2, \ldots, n+1), \end{array}\right. \tag{113}$$

qui entraînent l'équation de E comme conséquence

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, \ldots, p_{n+1})=0. \tag{114}$$

25[bis]. On peut, d'autre part, définir directement les bandes caractéristiques de E, par un système différentiel, au moyen de l'équation (114) seule. Il suffit de se servir, à cet effet, de l'invariance, vis-à-vis des transformations de contact de $\mathcal{E}$, du crochet

$$(f, g)=\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n+1), \tag{115}$$

de deux fonctions quelconques des x_i et des p_i, homogènes par rapport aux p_i.

Les bandes caractéristiques B_0 de l'équation réduite E_0, qui a pour équation

$$p_{n+1}=0, \tag{116}$$

sont, d'après leurs équations (104), celles des trajectoires [dans l'espace $(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1:p_2:\ldots:p_{n+1})$] de la transformation infinitésimale

$$(p_{n+1}, f)=\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}, \tag{117}$$

qui satisfont à (116). Les équations (104) égalent à des constantes $(2n-1)$ invariants de cette transformation, distincts de p_{n+1}, et homogènes de degré zéro par rapport aux p_i; et l'on pourrait utiliser de même $(2n-1)$ autres invariants de (117) satisfaisant aux mêmes conditions.

L'équation E, sous l'une quelconque de ses formes (114), fournira de même la transformation infinitésimale

$$(\Phi, f)=\frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n+1), \tag{118}$$

dont Φ est un invariant. Pour avoir les bandes caractéristiques B de E, il suffira, dès lors, d'égaler à des constantes arbitraires $(2n-1)$ invariants de cette transformation, distincts de Φ, et de degré d'homogénéité zéro par rapport aux p_i.

En effet, par une transformation réductrice de E quelconque, Φ se changera en une fonction de la forme $M(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, \ldots, p_{n+1})\,p_{n+1}$ et les invariants de (Φ, f) considérés deviendront des invariants, du même degré d'homogénéité en $p_1, \ldots, p_{n+1}$ de la transformation infinitésimale

$$(Mp_{n+1}, f) = M(p_{n+1}, f) + p_{n+1}(M, f). \tag{119}$$

Soient J_m, $(m = 1, r, \ldots, 2n-1)$, ceux-ci. Il s'agit de vérifier que le système $J_m = c_m$, $(m = 1, r, .,., 2n-1)$, $p_{n+1} = 0$, où les c_m sont des constantes arbitraires, définit les mêmes bandes que les équations (104). Or ce système équivaut à $dJ_m = 0$, $(m = 1, 2, \ldots, 2n-1)$, $p_{n+1} = 0$; et l'on a, les J_m étant des invariants de (119),

$$M\frac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial x_{n+1}} + p_{n+1}(M, \mathcal{J}_m) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n-1); \tag{120}$$

et, à cause de l'homogénéité des J_m, on a aussi

$$p_\alpha \frac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial p_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n+1;\ m = 1, 2, \ldots, 2n-1). \tag{121}$$

Le système en question équivaut donc à [1]

$$\left\{\begin{array}{l} p_{n+1} = 0, \qquad \dfrac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial x_\beta} dx_\beta + \dfrac{\partial \mathcal{J}_m}{\partial p_\gamma} p_n\, d\dfrac{p_\gamma}{p_n} = 0. \\ (\beta = 1, 2, \ldots, n;\ \gamma = 1, 2, \ldots, n-1;\ m = 1, 2, \ldots, 2n-1). \end{array}\right. \tag{122}$$

C'est-à-dire à

$$p_{n+1} = 0, \qquad dx_1 = \ldots = dx_n = d\frac{p_1}{p_n} = \ldots = d\frac{p_{n-1}}{p_1} = 0. \tag{123}$$

Celui-ci ayant pour intégrale générale (104), la vérification cherchée est ainsi obtenue.

III. — Sur l'intégration des équations semi-linéaires.

26. Soit E une équation de contact semi-linéaire, d'espèce $(s-1)$, c'est-à-dire [n° 18] une équation

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1}; p_1, \ldots, p_{n+1}) = 0, \tag{124}$$

---

[1] On peut supposer $\Phi = 0$ indécomposable; de sorte que M ne s'annulera pas pour $p_{n+1} = 0$.

dont on suppose qu'elle a au moins une intégrale complète à s dimensions, $(1 < s < n)$,

$$(125)\qquad G_k(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{s-1}) = y_{j+k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r;\ r+s = n+1);$$

et soit

$$(126)\qquad X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{s-1})\, p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s)$$

la base du faisceau complet qui a les G_k pour l'un de ses systèmes d'invariants fondamentaux : de sorte que E est le résultat de l'élimination des y_m, $(m = 1, 2, \ldots, s-1)$, entre les équations $X_h = 0$, $(h = 1, 2, \ldots, s)$. Nous nous proposons d'étudier le problème d'intégration qui consiste à trouver toutes les intégrales complètes G, de la forme (125), d'une telle équation.

Il faut remarquer que chacune d'elles peut être mise d'une infinité de manières sous cette forme (125) : on passe de l'une à l'autre par les diverses transformations ponctuelles

$$(127)\qquad y'_j = \eta_j(y_1, \ldots, y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

effectuées sur les constantes arbitraires. Dans la forme nouvelle

$$(128)\qquad G'_k(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y'_1, \ldots, y'_{s-1}) = y'_{s+k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

les G'_k seront les fonctions obtenues en faisant dans les fonctions

$$(129)\qquad y'_{s+k-1} = \eta_{s+k-1}(y_1, \ldots, y_{s-1};\ G_1, \ldots, G_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

le changement de variables

$$(130)\qquad y'_m = \eta_m(y_1, \ldots, y_{s-1}, G_1, \ldots, G_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r);$$

et ce même changement de variables fera passer du faisceau complet $F = \{X_1, \ldots, X_s\}$ qui a les G_k pour invariants au faisceau complet $F' = \{X'_1, \ldots, X'_s\}$ ayant les G'_k pour invariants. On peut considérer que l'on opère ainsi dans l'espace $(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{s-1})$. Les X_h ont alors pour invariants fondamentaux les y_m et les G_k : les seconds membres des formules (130) en sont donc des invariants, et, par suite, les X'_h seront de la forme

$$(131)\qquad X'_h = p_h + \zeta'_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y'_1, \ldots, y'_{s-1})\, p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

obtenue en faisant simplement le changement de variables (130) dans les coefficients ζ_{kh} des X_h.

Réciproquement, tout changement de variables

$$(132)\qquad y'_m = f_m(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y_1, \ldots, y_{s-1}) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s-1),$$

qui laissera invariante la forme des X_h, c'est-à-dire qui les changera en des transformations X'_h où les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial y'_m}$ ne figureront pas, sera de la forme (130), puisque les y'_m seront, de ce fait, des invariants du faisceau : et cela suffira. Et, dans l'une quelconque des formes (128) de l'intégrale complète de E donnée par le faisceau $\{X'_1, \ldots, X'_s\}$, les fonctions G'_k, étant des invariants de ce faisceau, seront de la forme (129) si l'on revient aux variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$, $y_1, \ldots, y_{s-1}$.

En définitive, tous les faisceaux complets $\{X_1, \ldots, X_s\}$, de la forme (126), dont l'intégration donne une même intégrale complète, sous ses diverses formes (125), sont tous ceux qui se déduisent de l'un d'entre eux par des transformations de l'espace $(x_1, \ldots, x_{n-1}; y_1, \ldots, y_{s-1})$; et celles-ci sont du type (130).

Interprétés dans l'espace projectif Π, de coordonnées homogènes $p_1, \ldots, p_{n+1}$, les systèmes $X_h = 0$, $(h = 1, 2, \ldots, s)$, associés à ces divers faisceaux complets, représentent la même famille D de droites Δ_{r-1} situées sur l'image Φ de E [représentée par l'équation (124), *cf.* n° 5]. Pour avoir la représentation la plus générale de cette famille D, il faudrait faire sur les y_m, *dans les coefficients* ζ_{kh} des X_h, une transformation (132) arbitraire. Soient (131) les expressions linéaires en $p_1, \ldots, p_{n+1}$ ainsi obtenues. Les droites Δ_{r-1} de D auraient les équations $X'_h = 0$ pour équations générales, mais les transformées des transformations infinitésimales X_h seraient

$$(133) \qquad X'_h + X_h y'_\alpha \frac{\partial f}{\partial y'_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s-1;\ h = 1, 2, \ldots, s).$$

Le faisceau complet $\{X_1, \ldots, X'_s\}$ serait ainsi devenu le sous-faisceau complet, de base (133), du faisceau $\left\{X'_1, \ldots, X'_s; \frac{\partial f}{\partial y'_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y'_{s-1}}\right\}$ de l'espace $(x_1, \ldots, x_{n+1};$ $y'_1, \ldots, y'_{s-1})$; et le faisceau $\{X'_1, \ldots, X'_s\}$ ainsi introduit ne serait pas complet [tant que la transformation (132) demeurerait arbitraire].

27. Il résulte des remarques précédentes, rapprochées de l'analyse des n^{os} 11 et 12 et des indications du n° 18, que pour que l'équation E considérée ait une intégrale complète, distincte de l'intégrale G supposée, qui soit associée au même mode de génération linéaire de l'image Φ de cette équation [à savoir celui qui est représenté par les équations $X_h = 0$, $(h = 1, 2, \ldots, s)$, qui définissent cette intégrale G], il faut et il suffit que le faisceau

$$\mathcal{F} = \left\{X_1, \ldots, X_s; \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}}\right\}$$

ait un sous-faisceau complet, V, autre que $F = \{X_1, \ldots, X_s\}$ lui-même, ayant des transformations de base $V_1, \ldots, V_s$ de la forme

$$(134) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_h = X_h + v_{\alpha h}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1}) \dfrac{\partial f}{\partial y_\alpha}, \\ \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s-1;\ h = 1, 2, \ldots, s). \end{array} \right.$$

C'est donc de la recherche de tels sous-faisceaux complets V d'un faisceau du type $\mathfrak{F}$ que nous allons nous occuper. Nous allons voir d'abord que, *en général*, c'est-à-dire si le faisceau F est seulement assujetti à la condition d'être complet, $\mathfrak{F}$ n'a pas de sous-faisceau $\{V_1, \ldots, V_s\}$, autre que F, qui soit complet. Cela résulte de l'existence d'exemples pour lesquels il en est ainsi.

Tout sous-faisceau complet de $\mathfrak{F}$ est, en effet, une involution de $\mathfrak{F}$, et les conditions d'involution du sous-faisceau (134) sont [*cf.* n° 12]

$$(135)\qquad v_{\alpha h}\frac{\partial\zeta_{kl}}{\partial y_\alpha}-v_{\alpha l}\frac{\partial\zeta_{kh}}{\partial y_\alpha}=0\qquad(\alpha=1, 2, \ldots, s-1;\ h, l=1, 2, \ldots, s;\ k=1, 2, \ldots, r).$$

On a là un système de $\frac{1}{2}rs(s-1)$ équations linéaires homogènes entre les $s(s-1)$ quantités v_{mh}. Comme on a $r>1$, le nombre des équations est au moins égal au nombre des inconnues (il lui est égal pour $r=2$). Il suffira de montrer que ce système n'a pas, *en général* [c'est-à-dire si les ζ_{kh} ne sont pas assujetties à des conditions autres que les équations

$$(136)\qquad X_h\zeta_{kl}-X_l\zeta_{kh}=0\qquad(h, l=1, 2, \ldots, s;\ k=1, 2, \ldots, r)$$

qui expriment que F est complet], de solution autre que $v_{mh}=0$, $(m=1, 2, \ldots, s-1)$, $(h=1, 2, \ldots, s)$. Et cela résultera de l'existence d'exemples où, les conditions (136) étant remplies, le système (135) n'aura effectivement que la solution *zéro*.

Nous nous assurerons que les conditions (136) seront remplies en prenant, pour les X_h des transformations à coefficients constants (par rapport aux x_i).

28. Prenons d'abord le *cas* $r=2$. L'exemple annoncé sera

$$(137)\qquad \begin{cases} X_1=p_1+y_1p_{n+1}, \qquad X_h=p_h+y_{h-1}p_n+y_hp_{n+1}\quad(r\leqq h\leqq n-2),\\ \qquad\qquad X_{n-1}=p_{n-1}+y_{n-2}p_n.\end{cases}$$

On a, par élimination des y_m, l'équation E

$$(138)\qquad p_1p_n^{n-1}-p_2p_n^{n-2}p_{n+1}+p_3p_n^{n-3}p_{n+1}^2-\ldots+(-1)^{n-1}p_{n-1}p_np_{n+1}^{n-2}=0,$$

et, par intégration, l'intégrale complète G, à $(n-1)$ dimensions,

$$(139)\qquad \begin{cases} y_1x_2+y_2x_3+\ldots+y_{n-2}x_{n-1}-x_n\ \ =y_{n-1},\\ y_1x_1+y_2x_2+\ldots+y_{n-2}x_{n-2}-x_{n+1}=y_n.\end{cases}$$

L'image Φ de E n'a pas d'autres droites à $r-1=1$ dimension que les droites $X_h=0$, $(h=1, 2, \ldots, n-1)$.

Pour écrire que les V_h sont en involution, on peut écrire que leurs crochets sont nuls quand on y traite les v_{mh} comme des indéterminées constantes. Les crochets de X_1 avec $X_2, \ldots, X_{n-1}$ donnent

$$(141)\qquad v_{h,1}=v_{1,h},\qquad v_{1,h-1}=0\quad(2\leqq h\leqq n-2);\qquad v_{n-2,1}=0,\qquad v_{1,n-1}=0.$$

Il en résulte que tous les $v_{m,1}$ sont nuls ($m = 1, 2, \ldots, n-2$), ainsi que tous les $v_{1,\alpha}$ ($h = 1, 2, \ldots, n-1$). Donc V_1 doit se réduire à X_1, et les autres V_h doivent être de la forme

$$(141) \qquad V_h = X_h + v_{\beta h}\frac{\partial f}{\partial y_\beta} \qquad (\beta = 2, 3, \ldots, n-2;\ h = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Les crochets de ces V_h ne seront pas modifiés si l'on fait abstraction, dans X_2, du terme $y_1 p_n$: ce qui donne, pour $\{X_2, \ldots, X_{n-1}\}$, un faisceau construit comme $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$, mais avec les variables x_1 et y_1 en moins. On est donc ainsi passé, pour la vérification à faire, du cas de $(n+1)$ variables x_i à celui de n variables; et il suffira, de proche en proche, d'achever cette vérification en supposant $n = 4$, c'est-à-dire pour le faisceau

$$(142) \qquad X_1 = p_1 + y_1 p_5, \qquad X_2 = p_2 + y_1 p_4 + y_2 p_5, \qquad X_3 = p_3 + y_2 p_4.$$

Cela résulte immédiatement de ce que les conditions d'involution des V_h sont, pour lui,

$$(143) \qquad v_{1,1} = 0, \quad v_{2,1} = v_{1,2}; \qquad v_{2,1} = 0, \quad v_{1,3} = 0; \qquad v_{2,2} = v_{13}, \quad v_{2,3} = 0.$$

29. La propriété étant ainsi établie pour $r = 2$ et s quelconque, nous l'établirons pour r quelconque et s quelconque en opérant de proche en proche. Comme il ne s'agit que de former des exemples pour lesquels elle soit réalisée, nous pourrons considérer des transformations de la forme (à coefficients constants)

$$(146) \qquad X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(y_1, \ldots, y_{s-1})p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s);$$

car il résulte de ce qui précède que la propriété est vraie, pour $r = 2$, en ce qui concerne des faisceaux $F = \{X_1, \ldots, X_s\}$ ainsi constitués, tant que les coefficients $\zeta_{\rho h}$ y sont arbitraires. Il nous suffira ainsi de montrer que la propriété, étant supposée vraie pour un faisceau de base (146), le sera aussi pour les faisceaux ayant une base de la forme

$$(147) \qquad Y_h = X_h + \zeta_{r+1,h}(y_1, \ldots, y_{s-1})p_{s+r+1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Or, les conditions d'involution à considérer dans le cas du faisceau

$$\left\{Y_1, \ldots, Y_s;\ \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}}\right\}$$

comprendront les conditions d'involution (135), relatives au faisceau

$$\left\{X_1, \ldots, X_s;\ \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}}\right\}$$

considéré. Comme celles-ci exigent, par hypothèse, que les v_{mh} soient tous nuls, il en sera de même, *a fortiori*, pour les premières.

30. *Écartons maintenant le cas général* où $\mathcal{F}$ n'a pas de sous-faisceau complet (134) autre que F, et supposons qu'il en ait au moins un, soit V. Les deux sous-faisceaux F et V de $\mathcal{F}$ ont alors au moins une transformation commune. Considérons le cas où ils n'en ont pas deux (qui soient divergentes), c'est-à-dire le *cas où la matrice des* v_{mh} *est de rang* $(s-1)$, et soit $\mathfrak{X}$ une base du sous-faisceau, de degré 1, formée par les transformations communes à F et à V. Si, par exemple, le déterminant de $v_{m,l}(m, l = 1, 2, \ldots, s-1)$ n'est pas nul, $\mathfrak{X}$ pourra être pris de la forme

$$(148) \qquad \mathfrak{X} = X_s + \zeta_\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1})X_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s-1),$$

et l'on aura

$$F = \{\mathfrak{X}, X_1, \ldots, X_{s-1}\}, \qquad V = \{\mathfrak{X}, V_1, \ldots, V_{s-1}\},$$

et

$$\mathcal{F} = \{\mathfrak{X}, X_1, \ldots, X_{s-1}, V_1, \ldots, V_{s-1}\}.$$

Par conséquent, $\mathfrak{X}$, faisant partie de F, sera en involution (dans $\mathcal{F}$) avec $X_1, \ldots, X_{s-1}$; et, faisant partie de V, sera en involution avec $V_1, \ldots, V_{s-1}$; et, par suite, étant en involution avec toutes les transformations de base de $\mathcal{F}$, ce sera une ***transformation distinguée*** (1) de $\mathcal{F}$.

Si l'on exprime, inversement, qu'une transformation quelconque de $\mathcal{F}$,

$$(149) \qquad \mathfrak{X}_0 = u_\sigma X_\sigma + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s;\ \alpha = 1, 2, \ldots, s-1),$$

est en involution avec chacune des transformations $X_1, \ldots, X_s; \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}}$, on obtient les conditions

$$(150) \qquad v_\alpha \frac{\partial X_h}{\partial y_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s-1;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

$$(151) \qquad u_\sigma \frac{\partial X_\sigma}{\partial y_m} = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s-1),$$

parce que les premiers membres de ces équations, étant de la forme $\lambda_\rho p_{s+\rho} (\rho = 1, 2, \ldots, r)$, ne peuvent être les symboles de transformations de $\mathcal{F}$ autres que la transformation *zéro*. Or la matrice $\left\| \frac{\partial X_h}{\partial y_m} \right\| (h = 1, 2, \ldots, s), m = 1, 2, \ldots, s-1)$ est de rang $(s-1)$, parce que l'élimination des y_m entre les équations $X_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ ne doit pas donner de résultat autre que $\Phi = 0$. Les conditions (150) expriment donc que $\mathfrak{X}_0$ doit faire partie de F. Et, pour la même raison, les équations (151) ne peuvent pas avoir, en $u_1, \ldots, u_s$, plus d'une solution (au point de vue homogène). Donc *les seules transformations distinguées de* $\mathcal{F}$ *seront celles du sous-faisceau* $\{\mathfrak{X}\}$.

(1) Une transformation d'un faisceau est dite *distinguée* si elle est en involution avec toute transformation de ce faisceau. *Voir* M., § III, n° 18, p. 374.

Il importe de remarquer qu'il résulte de ce qui précède que *si $\mathcal{F}$ a une transformation distinguée $\mathfrak{X}$, celle-ci fera partie de tout sous-faisceau complet* V *de $\mathcal{F}$*. Car, par un changement de variables

$$y'_m = f_m(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1}) \qquad (m = 1, 2, \ldots, s-1), \tag{152}$$

dans lequel les f_m seront des invariants des V_h, celles-ci deviendront les transformations

$$X'_h = p_h + \zeta'_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y'_1, \ldots, y'_{s-1}) p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s), \tag{153}$$

que l'on obtiendrait en effectuant ce changement de variables dans les coefficients ζ_{kh} des X_h seulement. Le faisceau $\mathcal{F}$ deviendra ainsi

$$\left\{ X'_1, \ldots, X'_s; \frac{\partial f}{\partial y'_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y'_{s-1}} \right\}$$

et V, devenu $\{X'_1, \ldots, X'_s\}$, y jouera le rôle que $F = \{X_1, \ldots, X_n\}$ y jouait ci-dessus. Donc toute transformation distinguée de $\mathcal{F}$ fera bien partie de V.

On conclut de là que *si $\mathcal{F}$ a une transformation distinguée, toute intégrale complète de $\mathcal{F}$, à s dimensions, sera engendrée par des trajectoires de cette transformation*, de sorte que *les trajectoires de cette transformation distinguée seront, pour $\mathcal{F}$, en ce qui concerne de telles intégrales complètes, des caractéristiques de Cauchy* (¹).

31. Étudions, plus spécialement, le cas des *équations à coefficients constants*, c'est-à-dire de la forme

$$\Phi(p_1, \ldots, p_{n+1}) = 0. \tag{154}$$

Si les X_h contiennent les x_i, ceux-ci devront s'éliminer, en même temps que les y_m, entre les équations $X_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$. Donc les X_h ne dépendront des x_i et des y_m que par l'intermédiaire de $(s-1)$ fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_{s-1}$ de ces variables. Soit alors X'_h les symboles déduits des X_h en y remplaçant ces fonctions η_m par des indéterminées y'_m. Le faisceau $F' = \{X'_1, \ldots, X'_s\}$ sera complet, et l'élimination des y'_m entre les équations $X'_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$ donnera l'équation (154) considérée. Ces équations représenteront, du reste, avec les paramètres y'_m, la même famille de droites Δ_{r-1} que les équations $X_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots, s)$, avec les paramètres y_m : cette dernière ne dépendant pas, en fait, du point paramétrique x.

Nous pourrons donc supposer d'emblée que le faisceau complet

$$F = \{X_1, \ldots, X_s\}$$

(¹) *Voir* pour la théorie des *caractéristiques de Cauchy*, M., § III, nº 19, p. 375.

donnant l'intégrale complète de E, prise pour point de départ de l'étude de cette équation, est un *faisceau à coefficients constants*, c'est-à-dire que les X_h sont de la forme

$$(155) \qquad X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(y_1, \ldots, y_{s-1})p_{s+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s).$$

Tout faisceau de cette forme donne, du reste, par élimination des y_m, une équation E semi-linéaire, d'espèce $(s-1)$, à coefficients constants : car il est complet, quels que soient les coefficients ζ_{kh}. Seront complets aussi tous ceux de ses sous-faisceaux dont la base sera formée de transformations à coefficients constants, c'est-à-dire de la forme $\lambda_\sigma(y_1, \ldots, y_{s-1})X_\sigma$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$.

Remarquons ici que si une équation E a une intégrale complète G ayant un nombre s de dimensions inférieur à $(n-1)$, elle a aussi des intégrales complètes, engendrées par des multiplicités de G, ayant $(s+1)$ dimensions. Ceci conduit à distinguer les intégrales G en *primitives* et en *non-primitives*, suivant qu'elles ne sont pas engendrées par des multiplicités faisant partie d'une intégrale complète à un nombre moindre de dimensions, ou qu'elles sont susceptibles d'un tel mode de génération. Et nous supposerons, dans l'étude actuelle, que nous avons affaire à une intégrale complète G primitive.

Il en résultera que, si E est à coefficients constants, F ne contiendra aucun sous-faisceau $H = \{Y_1, \ldots, Y_t\}$ $(t < s)$, tel que les Y_l soient à coefficients constants et que les y_m puissent s'éliminer entre les équations $Y_l = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, t)$. Car le résultat de cette élimination serait E, les Y_l dépendraient essentiellement de $(t-s)$ paramètres (fonctions des y_m), et H serait complet. L'intégrale complète J de H (à t dimensions), serait une intégrale complète de $\mathcal{F}$, et les multiplicités composant l'intégrale complète de F (à s dimensions), seraient engendrées par des multiplicités faisant partie de J. De sorte que G ne serait pas primitive.

32. Ces remarques faites, supposons, *en restant dans le cas des coefficients constants*, que $\mathcal{F}$ ait une transformation distinguée $\mathfrak{X}$. Les équations de condition (150), (151) étant à coefficients constants, on pourra supposer qu'il en soit de même pour $\mathfrak{X}$. Or, $\mathfrak{X}$ étant transformation distinguée de $\mathcal{F}$, ce faisceau contiendra les transformations $\left(\frac{\partial f}{\partial y_m}, \mathfrak{X}\right) = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, s-1)$. Si ces transformations n'étaient pas divergentes, on aurait au moins une identité de la forme

$$(156) \qquad \lambda_\alpha(y_1, \ldots, y_{s-1})\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s-1),$$

et $\mathfrak{X}$ ne dépendrait des y_m que par l'intermédiaire de fonctions $\eta_l(y_1, \ldots, y_{s-1})$ en nombre ω inférieur à $(s-1)$. Mais alors les transformations $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial \eta_l}$ $(l = 1, 2, \ldots, \omega)$ appartiendraient aussi à $\mathcal{F}$, et à F. On pourrait, dès lors, éliminer les η_l, et, par suite, les y_m, entre les équations $\mathfrak{X}=0$, $\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial\eta_l}=0$ ($l=1, 2, \ldots, \omega$); et G ne serait pas primitive.

Observons, d'autre part, que l'on peut prendre $\mathfrak{X}$ sous la forme

$$(157)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}=\mathrm{X}_s+u_\alpha(y_1, \ldots, y_{s-1})\mathrm{X}_\alpha=p_s+\zeta_\beta(y_1, \ldots, y_{s-1})p_\beta \\ (\alpha=1, 2, \ldots, s-1;\ s=1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n+1). \end{cases}$$

Parmi les ζ_β, il y aura, du fait que les $\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_m}$ sont divergentes, $(s-1)$ fonctions indépendantes, que l'on pourra substituer aux variables y_m. On pourra ainsi réduire $\mathfrak{X}$ à la forme

$$(158)\qquad \mathfrak{X}=p_s+y_\alpha p_\alpha+\eta_\rho(y_1, \ldots, y_{s-1})p_{s+\rho} \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, s-1;\ \rho=1, 2, \ldots, r),$$

et les $\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_m}$ ne différeront pas alors des X_m ($m=1, 2, \ldots, s-1$) : on aura donc [1]

$$(159)\qquad \mathrm{X}_m=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_m}, \qquad \mathrm{X}_s=\mathfrak{X}-y_\alpha\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_\alpha} \qquad (m, \alpha=1, 2, \ldots, s-1).$$

La base de tout sous-faisceau V de $\mathfrak{F}$ sera, par suite,

$$(160)\qquad \mathfrak{X}, \quad \mathrm{V}_m=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_m}+v_{\alpha m}\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \qquad (\alpha, m=1, 2, \ldots, s-1);$$

et les conditions d'involution, deux à deux, de ces transformations, seront

$$(161)\qquad v_{\alpha l}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial y_m\,\partial y_\alpha}-v_{\alpha m}\frac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial y_l\,\partial y_\alpha}=0 \qquad (\alpha, m, l=1, 2, \ldots, s-1);$$

parce que les transformations $\dfrac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial y_l\,\partial y_m}$, et, par suite, les premiers membres de ces équations (161), étant de la forme $\lambda_\rho p_{s+\rho}$ ($\rho=1, 2, \ldots, r$), ne peuvent pas appartenir à $\mathfrak{F}$.

Si les $\dfrac{\partial^2\mathfrak{X}}{\partial y_l\,\partial y_m}$ ($l, m=1, 2, \ldots, s-1$), sont divergentes, ces équations (161) ont pour unique solution

$$(162)\qquad v_{ll}=v, \qquad v_{lm}=0 \qquad (l\neq m=1, 2, \ldots, s-1),$$

où v est arbitraire; et cette solution existe dans tous les cas.

Voyons si l'on peut choisir v de manière que V, ainsi déterminé par la base

$$(163)\qquad \mathfrak{X}, \mathrm{V}_m=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_m}+v\frac{\partial f}{\partial y_m} \qquad (m=1, 2, \ldots, s-1),$$

---

[1] Remarquons que l'image Φ de E, étant donnée par l'élimination des y_m entre les équations $\mathfrak{X}=0$, $\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_1}=0$, $\ldots$, $\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_{s-1}}=0$, sera la *développable* enveloppe des ∞^{s-1} plans $\mathfrak{X}=0$.

soit un faisceau complet. On aura

$$(164)\qquad (\mathfrak{X},\ \mathrm{V}_m) = -v\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_m} + \mathfrak{X}v\frac{\partial f}{\partial y_m},\qquad (\mathrm{V}_l,\ \mathrm{V}_m) = \mathrm{V}_l v\frac{\partial f}{\partial y_m} - \mathrm{V}_m v\frac{\partial f}{\partial y_l}.$$

D'où les conditions

$$(165)\qquad \mathfrak{X}v + v^2 = 0,\qquad \mathrm{V}_m v = 0\qquad (m = 1, 2, \ldots, s-1).$$

Or, si l'on cherche à déterminer v par une équation

$$(166)\qquad f(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y_1, \ldots, y_{s-1};\ v) = \text{const.} = v',$$

f devra être un invariant du faisceau $\mathfrak{V}$ de base

$$(167)\qquad \mathrm{V}_0 = \mathfrak{X} - v^2\frac{\partial f}{\partial v},\quad \mathrm{V}_m\qquad (m = 1, 2, \ldots, s-1),$$

lequel sera complet, à cause des identités

$$(168)\qquad (\mathrm{V}_0,\ \mathrm{V}_m) = -v\mathrm{V}_m,\qquad (\mathrm{V}_l,\ \mathrm{V}_m) = 0\qquad (l,\ m = 1, 2, \ldots, s-1).$$

On a donc ainsi une infinité de sous-faisceaux V complets, et, par conséquent, une infinité d'intégrales complètes de E, à s dimensions, distinctes de l'intégrale G supposée. Pour avoir l'une quelconque de celles-ci, il faudrait tirer v de (166), la porter dans (163) et intégrer le faisceau V ainsi obtenu. Or cela reviendrait à faire dans $\mathfrak{V}$, sur v, le changement de variable

$$(169)\qquad v' = f(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y_1, \ldots, y_{s-1};\ v),$$

et à intégrer le faisceau obtenu, en y traitant v' comme une constante : ce qui équivaudrait à intégrer $\mathfrak{V}$ lui-même. L'intégrale complète cherchée s'obtiendra donc en éliminant v et les y_m entre les équations

$$(170)\qquad f = c,\qquad f_i(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y_1, \ldots, y_{s-1};\ v) = c_i\qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les f_i formant avec f un système fondamental d'invariants de $\mathfrak{V}$. En raison de la constante arbitraire c, l'ensemble des intégrales complètes ainsi obtenues comprend ∞^{n+1} intégrales, à s dimensions, de E [1].

Ces résultats constituent, pour le cas des équations à coefficients constants, la réciproque du théorème initial du n° 30.

---

[1] Remarquons que, si l'on pose $z = \frac{1}{v}$, le faisceau $\mathfrak{V}$ à intégrer devient

$$\overline{\mathrm{V}}_0 = \frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{X},\qquad \overline{\mathrm{V}}_m = \frac{\partial f}{\partial y_m} + z\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_m}\qquad (m = 1, 2, \ldots, s-1).$$

33. Le faisceau $\mathcal{F}$ étant de degré impair $(2s-1)$, il aura une transformation distinguée, d'après les résultats d'un de mes précédents mémoires ([1]), dans un cas étendu, à savoir celui où son *dérivé* ([2]) $\mathcal{F}$ sera de degré $2s$. De plus ([3]), ce dérivé sera complet, si l'on a $s > 2$. Il n'en est pas, en général, de même pour $s = 2$, qui constitue de ce fait, un cas exceptionnel.

Pour toute valeur de s, $\mathcal{F}$ aura, dans le cas considéré, une infinité d'intégrales complètes à s dimensions. J'ai donné, dans le Mémoire en question, une méthode pour les trouver qui est fondée sur la réduction de $\mathcal{F}$ à une forme canonique. La solution générale se déduit d'une intégrale complète particulière quelconque (pour $s > 2$, et, pour $s = 2$, si le dérivé est complet), au moyen d'une transformation de contact arbitraire d'un espace à s dimensions ([4]).

Rappelons aussi que, pour $s = 2$, il y a un cas remarquable où la solution générale s'exprime explicitement au moyen d'une fonction arbitraire d'un argument, et de ses dérivées successives ([5]). C'est celui où les degrés des dérivés successifs de $\mathcal{F}$ (jusqu'à ce qu'on arrive à un dérivé complet), forment une progression arithmétique de raison 1. C'est encore par la réduction du faisceau à une forme canonique que l'on obtient, dans ce cas, son intégrale générale explicite.

34. Ayant rappelé les résultats précédents, nous allons, dans les cas les plus simples, $s = 2$ et $s = 3$, étudier les diverses circonstances qui pourront se présenter, pour une équation de contact semi-linéaire donnée (d'espèce $s-1$), relativement à ses intégrales complètes à s dimensions. Nous conserverons les notations que nous avons introduites successivement dans les numéros 26 à 32. Nous aurons donc, dans le *cas* $s = 2$, en mettant y à la place de y_1,

$$(171)\qquad F = \{X_1, X_2\}, \qquad \mathcal{F} = \left\{X_1, X_2, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}, \qquad V = \left\{X_1 + v_1\frac{\partial f}{\partial y}, X_2 + v_2\frac{\partial f}{\partial y}\right\}.$$

Aucun des crochets $\left(\frac{\partial f}{\partial y}, X_1\right) = \frac{\partial X_1}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}, X_2\right) = \frac{\partial X_2}{\partial y}$ ne sera nul; car si X_1, par exemple, ne dépendait pas de y, l'équation de contact E considérée ne serait autre que $X_1 = 0$: elle serait donc linéaire, et non semi-linéaire (au sens strict du terme) ([6]).

([1]) Sur l'intégration des faisceaux de transformations infinitésimales dans le cas où, le degré du faisceau étant n, celui du faisceau dérivé est $n+1$ (*Annales de l'École Normale Supérieure*, (3), t. 45, 1928, p. 189). Ce mémoire sera désigné ici par M'.

([2]) Le dérivé $\mathcal{F}^{(1)}$ d'un faisceau $\mathcal{F}$ quelconque est l'ensemble des transformations obtenues en formant les crochets de tous les couples de transformations de $\mathcal{F}$. Il contient $\mathcal{F}$. Si la base de $\mathcal{F}$ est $X_1, \ldots, X_m$, on obtient une base de $\mathcal{F}^{(1)}$ en choisissant, parmi les transformations X_1 et (X_i, X_j) des transformations divergentes, en nombre maximum. *Voir* M', n° 2, p. 346.

([3]) *Voir* M', n° 7, p. 215.

([4]) *Voir* M', n° 9, p. 218.

([5]) *Voir* M', n° 15, p. 233.

([6]) En d'autres termes, l'intégrale complète définie par F ne serait pas *primitive* (*voir* n° 31).

Comme, d'autre part, F est complet, par hypothèse, le crochet (X_1, X_2), ne dépendant ni de p_1, ni de p_2, sera nul, et le dérivé $\mathcal{F}^{(1)}$ de $\mathcal{F}$ sera du degré 5, ou 4, suivant que $\frac{\partial X_1}{\partial y}$, $\frac{\partial X_2}{\partial y}$ seront divergentes, ou non.

Or, si l'on exprime que V est une involution de $\mathcal{F}$, on obtient $\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}\right.$ et $\left.\frac{\partial X_2}{\partial y}\right)$ ne dépendant ni de p_1, ni de p_2, l'équation

$$\varrho_1 \frac{\partial X_2}{\partial y} - \varrho_2 \frac{\partial X_1}{\partial y} = 0, \tag{172}$$

qui entraîne $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, si $\frac{\partial X_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial X_2}{\partial y}$ sont divergentes.

Donc, si $\mathcal{F}^{(1)}$ est du degré 5, E n'a pas d'intégrale complète autre que l'intégrale complète G définie par F; et même $\mathcal{F}$ n'a pas d'involution du type V autre que F.

Si, au contraire, $\mathcal{F}^{(1)}$ est du degré 4, on se trouve dans le cas du n° 33 et $\mathcal{F}$ a une transformation distinguée $\mathfrak{X}$. En raisonnant comme au n° 32, on voit alors que $\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \mathfrak{X}\right) = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}$ appartient à $\mathcal{F}$, et que l'on a

$$F = \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \right\}, \qquad \mathcal{F} = \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}, \qquad V = \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} + \varrho \frac{\partial f}{\partial y} \right\}. \tag{173}$$

De plus V, ainsi représenté, sera complet si ϱ satisfait à l'équation

$$\mathfrak{X}\varrho - \varrho^2 = 0, \tag{174}$$

qui s'intègre au moyen des invariants de la transformation $\mathfrak{X} + \varrho^2 \frac{\partial f}{\partial \varrho}$.

Si donc le dérivé de $\mathcal{F}$ est de degré 4, E a une infinité d'intégrales complètes, dont le calcul ne nécessite que l'intégration d'équations différentielles ordinaires. Le cas où le dérivé de $\mathcal{F}$ sera complet, et celui où $\mathcal{F}$ aura des dérivés successifs dont les degrés formeront une progression arithmétique de raison 1 comporteront les particularités d'intégration remarquables indiquées au n° 33.

35. Pour le cas $s = 3$, nous nous bornerons, pour simplifier, aux équations à coefficients constants, bien que les résultats que nous obtiendrons ainsi aient une portée plus générale. Supposons d'abord que $\mathcal{F}$ ait une transformation distinguée $\mathfrak{X}$. Nous serons dans les conditions du n° 32, et nous aurons, par conséquent,

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} \right\}, \qquad \mathcal{F} = \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \right\}, \\ V &= \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1} + \varrho_{11} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \varrho_{21} \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} + \varrho_{12} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \varrho_{22} \frac{\partial f}{\partial y_2} \right\}; \end{aligned} \right. \tag{175}$$

et, $\mathfrak{X}$ étant supposé ramené à la forme (158), les conditions d'involution de V seront exprimées par l'identité

$$(176) \qquad v_{12}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2} + (v_{22} - v_{11})\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1 \partial y_2} - v_{21}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_2^2} = 0.$$

Or le dérivé $\mathfrak{F}^{(1)}$ de $\mathfrak{F}$ s'obtiendra en adjoignant à la base de $\mathfrak{F}$ le nombre maximum de transformations divergentes qui se trouvent dans les trois transformations $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1 \partial y_2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_2^2}$. Le degré de ce dérivé sera donc 8, 7 ou 6.

S'il est égal à 8, il n'existe aucune relation linéaire homogène entre $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1 d y_2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_2^2}$, et l'identité (176) exige donc

$$v_{12} = 0, \qquad v_{21} = 0, \qquad v_{22} = v_{11}.$$

Les involutions V de $\mathfrak{F}$ sont donc données par la formule

$$(177) \qquad \mathrm{V} = \left\{ \mathfrak{X}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1} + v\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} + v\frac{\partial f}{\partial y_2} \right\},$$

et fournissent, comme on l'a vu au n° 32, une infinité d'intégrales complètes à s dimensions.

Si le dérivé $\mathfrak{F}^{(1)}$ est du degré 6, on a affaire à un cas particulier de la théorie dont il a été question au n° 33, et, comme F s'intégrera rationnellement (car il a des invariants linéaires en $x_1, \ldots, x_{n+1}$ qu'on obtient, par exemple, par la méthode des coefficients indéterminés, l'intégrale complète la plus générale de $\mathfrak{F}$ aura une expression explicite.

Supposons enfin que $\mathfrak{F}^{(1)}$ soit du degré 7. Il existera, entre $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1 \partial y_2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_2^2}$ une relation linéaire homogène conique, que l'on pourra, par un changement de variables $y'_1 = f_1(y_1, y_2)$, $y'_2 = f_2(y_1, y_2)$ convenablement choisi, ramener à l'une des deux formes $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$, ou $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}_1}{\partial y_1^2} = 0$, pour lesquelles la condition (176) donnera, respectivement, $v_{12} = v_{21} = 0$, et $v_{22} - v_{11} = v_{21} = 0$. D'où, pour les involutions V de $\mathfrak{F}$, dans le premier cas,

$$(178) \qquad \mathrm{V} = \left\{ \mathfrak{X}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1} + v_1\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} + v_2\frac{\partial f}{\partial y_2} \right\},$$

avec

$$(178\ bis) \qquad \mathfrak{X} = p_1 + \mathrm{A} + \mathrm{B}, \qquad \mathrm{A} = a_\nu(y_1)p_\nu, \qquad \mathrm{B} = b_\nu(y_2)p_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n+1);$$

et, dans le second cas,

$$(179) \qquad \mathrm{V} = \left\{ \mathfrak{X}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} + v_1\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} + v_2\frac{\partial f}{\partial y_1} + v_1\frac{\partial f}{\partial y_2} \right\},$$

avec

$$(179\ bis) \qquad \mathfrak{X} = p_1 + \mathrm{B}_0 + y_1\mathrm{B}, \qquad \mathrm{B}_0 = b_{0,\nu}(y_2)p_\nu, \qquad \mathrm{B} = b_\nu(y_\nu)p_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n+1).$$

Dans les deux cas, v_1 et v_2 sont indéterminées, et nous allons voir qu'on en pourra disposer de manière que V soit un sous-faisceau complet.

Posant, à cet effet,

$$(180)\qquad \mathrm{T}_m = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_m}, \qquad \mathrm{S}_m = \frac{\partial f}{\partial y_m} + x_1 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_m} \qquad (m = 1, 2),$$

nous pourrons remplacer, respectivement, (178) et (179) par

$$(181)\qquad \mathrm{V} = \{ \mathfrak{X}, \mathrm{S}_1 + w_1 \mathrm{T}_1, \mathrm{S}_2 + w_2 \mathrm{T}_2 \},$$

$$(182)\qquad \mathrm{V} = \{ \mathfrak{X}, \mathrm{S}_1 + w_1 \mathrm{T}_1, \mathrm{S}_2 + w_2 \mathrm{T}_1 + w_1 \mathrm{T}_2 \},$$

avec les arbitraires w_1 et w_2; et les crochets mutuels de $\mathfrak{X}$, S_1, S_2, T_1, T_2 seront tous nuls, à l'exception de

$$(183)\qquad (\mathrm{S}_1, \mathrm{T}_1) = \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2}, \qquad (\mathrm{S}_2, \mathrm{T}_2) = \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_2^2},$$

dans le premier cas, et de

$$(184)\qquad (\mathrm{S}_1, \mathrm{T}_2) = (\mathrm{S}_2, \mathrm{T}_1) = \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1 \partial y_2}, \qquad (\mathrm{S}_2, \mathrm{T}_2) = \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_2^2}$$

dans le second.

Introduisons alors, comme variables nouvelles, à la place de $x_2, \ldots, x_{n+1}$, des invariants $t_1, \ldots, t_n$ de $\mathfrak{X}$, formant avec y_1, y_2 un système d'invariants fondamentaux [variables caractéristiques (1)], et tels que l'un d'eux au moins, t_1 par exemple, n'admette aucune des transformations S_1, S_2, T_1, T_2. Les conditions pour que V soit complet se composent, d'une part, dans les deux cas, de $\mathfrak{X} w_1 = 0$, $\mathfrak{X} w_2 = 0$, et, respectivement, d'autre part, du premier, ou du second, des systèmes

$$(185)\qquad \mathrm{S}_1 w_2 + w_1 \mathrm{T} w_2 = 0, \qquad \mathrm{S}_2 w_1 + w_2 \mathrm{T}_2 w_1 = 0,$$

$$(186)\qquad \mathrm{S}_1 w_1 + w_1 \mathrm{T} w_1 = 0, \qquad \mathrm{S}_1 w_2 + w_1 \mathrm{T}_1 w_2 - \mathrm{S}_2 w_1 - w_2 \mathrm{T}_1 w_1 - w_1 \mathrm{T}_2 w_1 = 0.$$

Les inconnues w_1 et w_2 seront donc, dans les deux cas, des fonctions des t_i, indépendantes de x_1, et (185) et (186) seront, après le changement de variables, des systèmes différentiels, relatifs à ces fonctions, et desquels x_1 aura disparu.

Le système (185), relatif au premier cas, sera un système de Kowalewski $\left(\text{résoluble en } \frac{\partial w_1}{\partial t_1}, \frac{\partial w_2}{\partial t_1}\right)$. Quant au système (186), relatif au second cas, il donnera w_1 par la première de ses équations, et, ensuite, w_2 par la seconde : et cela se fera par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

35^bis^. *Remarque* 1. — En raison de l'existence d'une transformation distinguée $\mathfrak{X}$ dans les faisceaux $\mathcal{F}$ considérés au n° 35 (cas $s = 3$), nous aurions pu introduire d'emblée des variables caractéristiques, et ramener ainsi leur étude

---

(1) *Voir* M, n° 19, p. 374.

à une application de celle des faisceaux de degré 4, à dérivé de degré 6 que j'ai faite dans un autre travail [1]. Nous en aurions conclu immédiatement, pour $\mathcal{F}$, à l'existence, soit de deux *sous-faisceaux singuliers* [2] $\{\mathfrak{X}, S_1, T_1\}, \{\mathfrak{X}, S_2, T_2\}$ (premier cas), soit d'*un seul sous-faisceau singulier double* $\{\mathfrak{X}, S_1, T_1\}$ (second cas), dont les intégrales à 2 dimensions sont, pour les intégrales à 3 dimensions de $\mathcal{F}$, des *caractéristiques de Monge*. Et nous aurions pu prévoir que l'intégration se ferait, dans le second cas, par des intégrations d'équations différentielles ordinaires, parce que le sous-faisceau singulier double, $\{\mathfrak{X}, S_1, T_1\}$ est alors, ici, un faisceau complet.

Pour $n = 5$, l'intégration pourra même se ramener à celle d'une équation du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Nous en donnerons un exemple plus loin [n° 42].

Remarque 2. — Si, dans le premier cas, on cherche directement les intégrales particulières de $\mathcal{F}$, à 3 dimensions, la solution générale s'obtient par des quadratures. En effet, $\mathcal{F}$ étant de la forme (178^{bis}), une quelconque de ces intégrales sera définie par la condition d'admettre trois transformations infinitésimales de la forme

$$(185) \qquad \mathfrak{X}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} + w_1 A', \qquad \frac{\partial f}{\partial y_2} + w_2 B' \qquad \left(A' = \frac{\partial A}{\partial y_1},\ B' = \frac{\partial B}{\partial y_2}\right),$$

ce qui s'exprime, en supposant l'intégrale définie par des équations

$$x_j = f_j(x_1, y_1, y_2) \qquad (j = 2, 3, \ldots, n+1),$$

par les conditions

$$(186) \quad a_j + b_j = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \qquad w_1 a'_j = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \qquad w_2 b'_j = \frac{\partial f_j}{\partial y_2} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n+1),$$

qui devront être des identités en x_1, y_1, y_2, quand on y remplacera w_1 et w_2 par les fonctions de cas variables auxquelles elles se réduisent sur l'intégrale. On en déduit, pour ces fonctions, les conditions $\frac{\partial w_1}{\partial y_2} a'_j - \frac{\partial w_2}{\partial y_1} b'_j = 0$, pour $(j = 2, 3, \ldots, n+1)$, qui exigent $\frac{\partial w_1}{\partial y_2} = \frac{\partial w_2}{\partial y_1} = 0$ $\left(\text{du fait que } \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1} \text{ et } \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} \text{ sont divergentes}\right)$; et aussi les conditions $\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 1$. On pourra donc prendre $w_1 = x_1 + \varphi(y_1)$, $w_2 = x_2 + \psi(y_2)$, φ et ψ étant des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs; et les équations (186) donneront alors immédiatement pour les f_j, c'est-à-dire pour les expressions des inconnues x_j,

---

[1] *Sur les faisceaux de transformations infinitésimales associés aux équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Journal de Mathématiques*, t. 15, 1936, p. 301). *Voir* § 1 de ce mémoire, p. 303.

[2] *Voir* M, § IV, p. 380.

les formules explicites

$$(187)\qquad x_j=(a_j+b_j)x_1+\int^{y_1} a'_j\,\varphi\,dy_1+\int^{y_2} b'_j\,\psi\,dy_2 \qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n+1).$$

Remarque 3. — On peut arriver de même, pour le second cas, à des formules analogues : $\mathfrak{X}$ étant supposé donné par la formule (179^{bis}), une intégrale quelconque de $\mathcal{F}$, à 3 dimensions,

$$(188)\qquad x_j=f_j(x_1,\ y_1,\ y_2) \qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ n+1),$$

devra, d'après la forme (179) des involutions de $\mathcal{F}$, admettre 3 transformations de la forme

$$(189)\quad \mathfrak{X},\qquad \frac{\partial f}{\partial y_1}+w_1 b_\nu p_\nu,\qquad \frac{\partial f}{\partial y_2}+\left[w_2 b_\nu+w_1(y_1 b'_\nu+b'_{0\nu})\right]p_\nu \qquad (\nu=2,\ 3,\ \ldots,\ n+1).$$

Cela donne les conditions suivantes, pour $j=2,\ 3,\ \ldots,\ n+1$,

$$(190)\qquad \frac{\partial f_j}{\partial x_1}=y_1 b_j+b_{0j},\qquad \frac{\partial f_j}{\partial y_1}=w_1 b_j,\qquad \frac{\partial f_j}{\partial y_2}=w_2 b_j+w_1(y_1 b'_j+b'_{0j}).$$

En exprimant leur compatibilité, on trouve

$$(191)\qquad \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}-1\right)b_j=0,\qquad \frac{\partial w_2}{\partial x_1}b_j=0,\qquad \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_2}-\frac{\partial w_2}{\partial y_1}\right)b_j=\frac{\partial w_1}{\partial y_1}(y_1 b'_j+b'_{0j}),$$

qui conduisent à prendre

$$(192)\qquad w_1=x_1+\psi(y_2),\qquad w_2=y_1\psi'(y_2)+\psi_0(y_2),$$

ψ et ψ_0 étant des fonctions arbitraires. Posant alors

$$(193)\qquad x_j=(y_1 b_j+b_{0j})(x_1+\psi)+\theta_j,$$

où les θ_j seront de nouvelles inconnues, fonctions de y_1 et y_2, on trouve, pour les déterminer,

$$(194)\qquad \frac{\partial\theta_j}{\partial y_1}=0,\qquad \frac{\partial\theta_j}{\partial y_2}=\psi_0 b_j-\psi' b_{0j},$$

d'où, pour les x_j, les formules annoncées

$$(195)\qquad x_j=(y_1 b_j+b_{0j})(x_1+\psi)+\int^{y_2}(\psi_0 b_j-\psi' b_{0j})\,dy_2.$$

36. Pour achever l'étude du cas $s=3$, nous supposons maintenant que le faisceau $\mathcal{F}$ considéré n'a pas de transformation distinguée. Ses transformations étant à coefficients constants, nous aurons

$$(197)\quad \mathrm{F}=\{X_1,\ X_2,\ X_3\},\qquad \left\{\mathcal{F}=X_1,\ X_2,\ X_3,\ \frac{\partial f}{\partial y_1},\ \frac{\partial f}{\partial y_2}\right\},\qquad \mathrm{V}=\{V_1,\ V_2,\ V_3\},$$

avec

(198) $\quad X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(y_1, y_2) p_{3+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, 3;\ r = n - 2),$

(199) $$V_h = X_h + v_{1h}\frac{\partial f}{\partial y_1} + v_{2h}\frac{\partial f}{\partial y_2} \qquad (h = 1, 2, 3).$$

En vertu du théorème du n° 30, la matrice des v_{mh} $(m = 1, 2;\ h = 1, 2, 3)$ sera de rang 1. Nous pourrons donc prendre la base de V sous la forme

(200) $$\mathfrak{X}_1 = X_1 + u_1 X_3, \qquad \mathfrak{X}_2 = X_2 + u_2 X_3, \qquad V_3 = X_3 + v_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + v_2\frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

Les conditions d'involution de V s'écrivent alors

(201) $$YX_1 + u_1 YX_3 = 0, \qquad YX_2 + u_2 YX_3 = 0,$$

la lettre Y désignant l'opérateur

(202) $$Y = v_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Ces équations déterminent u_1 et u_2 sans ambiguïté quand le rapport de v_1 et v_2 est connu. Car si l'on avait $YX_3 = 0$, elles entraîneraient $YX_1 = YX_2 = 0$, de sorte que X_1, X_2, X_3 ne dépendraient de y_1 et y_2 que par l'intermédiaire d'une certaine fonction de ces variables, et l'équation E ne serait pas le résultat unique de l'élimination de y_1 et y_2 entre les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ [*cf.* n° 18].

Les équations (200) ne peuvent pas avoir, par suite, deux solutions en u_1, u_2 et $v_2 : v_1$. Elles donneraient, en effet, deux involutions du type (190) : supposons que l'une fût représentée par les formules (190) elles-mêmes, et l'autre par des formules analogues

(203) $$\mathfrak{X}'_1 = X_1 + u'_1 X_3, \qquad \mathfrak{X}'_2 = X_2 + u'_2 X_3, \qquad V'_3 = X_3 + v'_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + v'_2\frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

D'après ce qui vient d'être dit, $v_1 v'_2 - v_2 v'_1$ ne serait pas nul. Or les deux sous-faisceaux $\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2\}$, $\{\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\}$ de F auraient au moins une transformation commune, soit $\mathfrak{X}$, et celle-ci serait, dès lors, en involution avec V_3 et V'_3. Les deux transformations $v_1\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_1} + v_2\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_2}$ et $v'_1\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_1} + v'_2\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_2}$ feraient donc partie de $\mathfrak{F}$, et, $v_1 v'_2 - v_2 v'_1$ n'étant pas nul, il en serait de même pour $\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_1}$ et $\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y_2}$. Mais alors $\mathfrak{X}$ serait une transformation distinguée de $\mathfrak{F}$, tandis qu'on a supposé que $\mathfrak{F}$ n'en avait pas.

Nous conclurons donc que, si $\mathfrak{F}$ a une involution V, il en a une infinité, l'une quelconque d'entre elles ayant une base de la forme (200), dans laquelle u_1, u_2 et le rapport $m = v_2 : v_1$ seront des fonctions déterminées de y_1 et y_2. En remplaçant y_2 par un invariant y'_2 de la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial y_1} + m\frac{\partial f}{\partial y_2}$, nous ramènerons cette base à la forme

$$\mathfrak{X}_1 = X_1 + u_1 X_3, \qquad \mathfrak{X}_2 = X_2 + u_2 X_3, \qquad V_3 = X_3 + v\frac{\partial f}{\partial y_1}, \tag{204}$$

où u_1 et u_2 seront des fonctions connues de y_1 et y_2, tandis que v demeurera indéterminée. Les conditions d'involution

$$\frac{\partial X_1}{\partial y_1} + u_1\frac{\partial X_3}{\partial y_1} = 0, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial y_1} + u_2\frac{\partial X_3}{\partial y_2} = 0. \tag{205}$$

seront remplies par l'hypothèse, et il en résultera les identités

$$(V_3, \mathfrak{X}_m) = v\frac{\partial u_m}{\partial y_1}X_3 - \mathfrak{X}_m v\frac{\partial f}{\partial y_1} \qquad (m = 1, 2). \tag{206}$$

Les conditions pour que V, tel qu'on vient de le définir, soit un faisceau complet seront donc

$$\mathfrak{X}_m v + v^2\frac{\partial u_m}{\partial y_1} = 0 \qquad (m = 1, 2), \tag{207}$$

et l'on y satisfera en définissant v par toute équation

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1};\ y_1, y_2;\ v) = c = \text{const.}, \tag{208}$$

où f sera un invariant du faisceau complet

$$\left\{\mathfrak{X}_1 - v^2\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial v}, \qquad \mathfrak{X}_2 - v^2\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial v}\right\}. \tag{209}$$

Donc E aura une infinité d'intégrales complètes, autres que l'intégrale G donnée par F, et celles-ci s'obtiendront par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

37. Les intégrales faisant partie des intégrales complètes ainsi obtenues seront toutes engendrées par des trajectoires (à 2 dimensions) du faisceau complet $\mathcal{H} = \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2\}$ (1). Les trajectoires de ce faisceau seront donc, pour l'intégration de $\mathcal{F}$, des caractéristiques de Cauchy. Pour tirer partie de ce fait, introduisons comme variables nouvelles, à la place de $x_3, \ldots, x_{n+1}$, des invariants $x'_3, \ldots, x'_{n+1}$ de $\mathcal{H}$ (variables caractéristiques). On pourra les prendre de la forme

$$x'_j = x_j + \alpha_{j1}(y_1, y_2)x_1 + \alpha_{j2}(y_1, y_2)x_2 \qquad (j = 3, 4, \ldots, n+1) : \tag{210}$$

(1) Cela résulte de ce que $V = \left\{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, X_3 + v\frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}$, de sorte que toute intégrale totale de V admet $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$.

$\mathfrak{X}_1$ se réduira à p_1, et $\mathfrak{X}_2$ à p_2; X_3 deviendra la transformation X'_3 qui s'en déduit en y remplaçant les p_j par les p'_j $\left(p'_j = \frac{\partial f}{\partial x'_j}\right)$, et $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ deviendra

$$(211) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} + Z, \qquad \text{avec } Z = \left[\frac{\partial a_{\beta 1}}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial a_{\beta 2}}{\partial y_1} x_2\right] p'_\beta \qquad (\beta = 3, 4, \ldots, n+1).$$

Or les identités

$$(212) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \mathfrak{X}_m\right) = \frac{\partial u_m}{\partial y_1} X_3 \qquad (m = 1, 2),$$

qui résultent de (205), deviendront

$$(213) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + Z, p_m\right) = \frac{\partial u_m}{\partial y_1} X'_3 \qquad (m = 1, 2),$$

c'est-à-dire

$$(214) \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_m} = -\frac{\partial u_m}{\partial y_1} X'_3 \qquad (m = 1, 2).$$

On en conclut, Z étant linéaire homogène en x_1 et x_2,

$$(215) \qquad Z = -\left(x_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_1}\right) X'_3;$$

de sorte que V se ramènera à la forme

$$(216) \qquad V = \left\{p_1, p_2, X'_3 + w \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}.$$

La condition pour que V soit complet sera dès lors que w ne dépende ni de x_1, ni de x_2. Ces variables disparaîtront donc des calculs et l'on aura simplement à intégrer le faisceau $\left\{X'_3, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}$, (c'est-à-dire à en chercher toutes les intégrales à une dimension). Comme les dérivés successifs de ce faisceau sont $\left\{X'_3, \frac{\partial X'_3}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}$, $\left\{X'_3, \frac{\partial X'_3}{\partial y_1}, \frac{\partial^2 X'_3}{\partial y_1^2}, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}$, etc., ce problème aura une intégrale générale explicite.

38. On peut donner, pour les faisceaux $\mathcal{F}$ que nous venons d'étudier, des types canoniques explicites. Partons, à cet effet, des identités (202), c'est-à-dire

$$(217) \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1}{\partial y_1} X_3, \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2}{\partial y_1} X_3.$$

Si l'on avait, à la fois, $\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = 0$ et $\frac{\partial u_2}{\partial y_1} = 0$, il en résulterait que $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ ne dépendraient que de y_2, de sorte que l'on pourrait éliminer y_1 et y_2 entre les équations $\mathfrak{X}_1 = 0$, $\mathfrak{X}_2 = 0$, ce qui est exclu [n° 31] : nous pourrons donc supposer $\frac{\partial u_2}{\partial y_1} \neq 0$, et nous poserons

$$u = -\frac{\partial u_1}{\partial y_1} : \frac{\partial u_2}{\partial y_1}. \tag{218}$$

Considérons alors la transformation

$$\mathfrak{X} = \frac{\partial u_2}{\partial y_1}\mathfrak{X}_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\mathfrak{X}_2. \tag{219}$$

Elle donne lieu aux identités

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2}\mathfrak{X}_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}\mathfrak{X}_2 \tag{220}$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y_1^3}\mathfrak{X}_1 - \frac{\partial^3 u_1}{\partial y_1^3}\mathfrak{X}_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial u_2}{\partial y_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}\right)X_3. \tag{221}$$

Si donc $\frac{\partial u}{\partial y_1}$ *n'est pas nul*, on pourra donner à F la base $\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2}$ et au sous-faisceau caractéristique $\mathcal{H} = \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2\}$ la base $\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}$.

Réciproquement, tout faisceau de la forme

$$\mathcal{F} = \left\{\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}\right\}, \tag{222}$$

où $\mathfrak{X}$ est une transformation à coefficients constants quelconque, répondra à la question, pourvu que $\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2}$ soient divergentes, et qu'il n'ait pas de transformation distinguée : car tous ses sous-faisceaux

$$V = \left\{\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2} + v\frac{\partial f}{\partial y_1}\right\} \tag{223}$$

seront des involutions.

Remarquons que l'image Φ de E, étant alors représentée par $\mathfrak{X} = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1} = 0$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2} = 0$, est engendrée par les *arêtes de rebroussement* de ∞^1 développables (dépendant de y_2 comme paramètre).

On peut, de plus, préciser davantage cette forme canonique (222) en substituant à $\mathfrak{X}$ la transformation

$$X = \left(1 : \frac{\partial u_2}{\partial y_1}\right)\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 + u\mathfrak{X}_2 = X_1 + uX_2 + (u_1 + u_2 u)X_3, \tag{224}$$

et en prenant u comme variable, à la place de y_1. Cette transformation X prend ainsi la forme

$$X = p_1 + y_1 p_2 + \eta(y_1, y_2)p_3 + \eta_\rho(y_1, y_2)p_{3+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r), \tag{225}$$

et l'on a

$$(226)\qquad \frac{\partial X}{\partial y_1} = \mathfrak{X}_2, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_1^2} X_3,$$

de sorte que $\frac{\partial^2 \eta}{\partial y_1^2}$ ne devra pas être nul.

La forme (222) a été obtenue en supposant $\frac{\partial u}{\partial y_1}$ non nul. *Supposons maintenant* $\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0$. En introduisant à nouveau la transformation (224), on aura $\frac{\partial X}{\partial y_1} = 0$; car les équations (217) entraînent $\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial y_1} + u \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial y_1} = 0$. On prendra u_2 comme variable nouvelle à la place de y_1, et, en remplaçant y_2 par une fonction de cette variable, convenablement choisie, on raménera X et $\mathfrak{X}_2$ à être de la forme

$$(227)\qquad X = p_1 + y_2 p_2 + \eta(y_2) p_3 + \eta_\rho(y_2) p_{3+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(228)\qquad \mathfrak{X}_2 = p_2 + y_1 p_3 + \zeta_\rho(y_1, y_2) p_{3+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r).$$

On aura donc, de plus,

$$(229)\qquad X_3 = \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial y_1} = p_3 + \frac{\partial \zeta_\rho}{\partial y_1} p_{3+\rho} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r).$$

La forme canonique de $\mathcal{F}$ sera

$$(230)\qquad \mathcal{F} = \left\{ X, \mathfrak{X}_2, \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \right\};$$

et l'on constate que, *réciproquement*, un tel faisceau $\mathcal{F}$ a, quel que soit le choix des coefficients des formules (227) et (228), des involutions du type général

$$(231)\qquad V = \left\{ X, \mathfrak{X}_2, \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial y_1} + v \frac{\partial f}{\partial y_1} \right\}.$$

39. On a supposé, dans l'analyse précédente [n^os 26 à 38] que l'on connaissait une intégrale complète (primitive) de l'équation de contact semi-linéaire considérée. Supposons maintenant que l'on ait affaire à une équation de contact E donnée, et que l'on se propose : 1° de reconnaître si elle est semi-linéaire d'une espèce $(s-1)$ donnée, au sens strict du mot, c'est-à-dire si elle a au moins une intégrale complète primitive à s dimensions; 2° s'il en est ainsi, de trouver toutes ses intégrales complètes à s dimensions, ou toutes ses intégrales appartenant à ces diverses intégrales complètes.

Conformément aux généralités des deux premières parties de ce Mémoire [n^os 4, 5, 11, 18], la surface Φ, image de E dans l'espace projectif $(p_1 : p_2 : \ldots : p_{n+1})$ devra, pour que E soit semi-linéaire d'espèce $(s-1)$, être engendrée par ∞^{s-1} droites à $r - 1 = n - s$ dimensions. Supposons qu'il en soit ainsi, et que l'on ait trouvé, par les méthodes de la géométrie analytique, un tel mode de génération. Les équations générales des génératrices seront de la forme

$$(232)\qquad \begin{cases} 0 = X_h = p_h + \zeta_{\rho h}(x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1})p_{s+\rho} \\ (\rho = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, s), \end{cases}$$

les y_m étant des paramètres essentiels. On aura alors à reconnaître si le faisceau

$$\mathcal{F} = \left\{ X_1, \ldots, X_s, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_{s-1}} \right\}$$

a des sous-faisceaux complets

$$(233)\quad V = \{V_1, \ldots, V_s\}, \qquad \left(V_h = X_h + v_{\alpha h}\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s-1;\ h = 1, 2, \ldots, s),$$

et à trouver et intégrer, le cas échéant, ces sous-faisceaux : car les intégrales complètes cherchées seront celles (à s dimensions) de ces sous-faisceaux V.

Si le sous-faisceau $F = \{X_1, \ldots, X_s\}$ se trouve être complet (¹), *ce qui sera toujours le cas si* E *est à coefficients constants*, on pourra appliquer, tels quels, les résultats obtenus ci-dessus.

Dans le cas contraire, on aura à chercher d'abord les sous-faisceaux V qui seront des involutions de $\mathcal{F}$, car c'est parmi eux (s'il y en a) que devront se trouver, éventuellement, les sous-faisceaux V complets. S'il n'y a pas d'involution V, l'équation E n'est pas semi-linéaire d'espèce $(s-1)$. S'il y en a une et une seule, E le sera si cette involution est un faisceau complet : et elle aura alors une intégrale complète et une seule G, relative au mode de génération linéaire de Φ considéré, laquelle s'obtiendra par l'intégration de ce sous-faisceau V complet.

C'est, comme on l'a vu aux nos 27 à 29, ce qui a lieu pour les équations E semi-linéaires (d'espèce $s-1$) *générales*. Leur intégrale complète à s dimensions (unique) s'obtient donc par l'intégration d'un système complet de s équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaires et homogènes à $n+s$ variables. Si l'on effectue cette intégration par la méthode de Lie-Mayer, on sera ramené à intégrer une équation linéaire homogène unique à $n+1$ variables, c'est-

(¹) On pourra se ramener à ce cas, dès que l'on aura déterminé un sous-faisceau V de $\mathcal{F}$ qui soit complet, en prenant comme variables nouvelles, à la place des y_m, des invariants y'_m, en nombre $(s-1)$, de ce sous-faisceau. Les V_h, tels qu'ils sont écrits dans les formules (223) deviendront les transformations X'_h qui se déduiront des X_h en faisant ce changement de variables dans leurs coefficients : ce faisceau $F' = \{X'_1, \ldots, X'_s\}$ sera complet, et l'on aura

$$\mathcal{F} = \left\{ X'_1, \ldots, X'_s, \frac{\partial f}{\partial y'_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y'_{s-1}} \right\}.$$

On voit par là qu'il s'agit, au fond, dans notre problème, de trouver les changements de variables $y'_m = f_m(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{s-1})$ $(m = 1, 2, \ldots, s-1)$ qui, effectués dans les coefficients des X_h, les changent en des transformations X'_h telles que $\{X'_1, \ldots, X'_s\}$ soit complet.

à-dire à une opération de la même nature (à l'intervention près de $s-1$ paramètres constants), que si l'équation E était elle-même linéaire.

S'il y a plus d'une involution V, il y en aura une infinité, et la plus générale dépendra d'un certain nombre d'arbitraires $v_1, v_2, \ldots, v_\omega$. Il s'agira alors de déterminer ces arbitraires, en fonction des variables $x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{s-1}$, de manière qu'une telle involution V soit un sous-faisceau complet de $\mathcal{F}$. Les intégrations nécessaires ne différeront pas essentiellement, dans les cas que nous avons examinés, de celles auxquelles nous avons été conduits en supposant connu l'un de ces sous-faisceaux complets.

Des exemples, choisis dans les divers cas que nous avons étudiés, éclaireront et préciseront ces généralités.

40. Exemple 1. — Soit donnée l'équation

$$p_2 p_3 - \mathrm{M}(x_1, x_2, x_3, x_4) p_1 p_4 = 0. \tag{234}$$

Elle représente, dans l'espace projectif $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$, à trois dimensions, une quadrique réglée. On se propose de choisir M de manière qu'elle soit semi-linéaire, et de l'intégrer dans ce cas.

On a ici $n = 3$, $r - 1 = 1$; donc $r = 2$, $s = 2$. Il y a deux systèmes de génératrices. Considérons, par exemple, celui qui est défini par les équations

$$0 = \mathrm{X}_1 = p_1 + y p_3, \qquad 0 = \mathrm{X}_2 = p_2 + y \mathrm{M} p_4. \tag{235}$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ à considérer sera $\mathcal{F} = \left\{ \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right\}$, et l'on aura à étudier ses sous-faisceaux ayant une base résolue de la forme

$$\mathrm{V}_1 = p_1 + y p_3 + v_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \mathrm{V}_2 = p_2 + y \mathrm{M} p_4 + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{236}$$

En exprimant que c'est une involution, on trouve

$$v_1 = -y\left(\frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x_1} + y \frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x_3}\right), \qquad v_2 = 0. \tag{237}$$

$\mathcal{F}$ aura donc au plus un sous-faisceau complet, donné par les formules (236), (237); et il reste à voir si l'on peut choisir M de manière que ce sous-faisceau soit effectivement complet. On trouve, pour cela, les conditions

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x_1 \, \partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x_3 \, \partial x_4} = 0, \qquad \mathrm{M} \frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x_1 \, \partial x_4} + \frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x_2 \, \partial x_3} = 0. \tag{238}$$

On satisfait aux deux premières en posant

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{A}(x_2, x_3)}{\mathrm{B}(x_1, x_4)} \frac{\mathrm{C}(x_2, x_4)}{\mathrm{D}(x_1, x_3)}, \tag{239}$$

ce qui ramène la troisième à

$$D\left(\frac{1}{A}\frac{\partial^2 \log A}{\partial x_2\,\partial x_3}\right)=C\left(\frac{1}{B}\frac{\partial^2 \log B}{\partial x_1\,\partial x_4}\right). \tag{240}$$

En y donnant des valeurs numériques particulières à x_1 et x_4, puis à x_2 et x_3, on en conclut

$$\frac{1}{A}\frac{\partial^2 \log A}{\partial x_2\,\partial x_3}=\psi_2\psi_3,\qquad \frac{1}{B}\frac{\partial^2 \log B}{\partial x_1\,\partial x_4}=\psi_1\psi_4, \tag{241}$$

chaque ψ_i étant une fonction de x_i seul; et, par suite,

$$\frac{C}{D}=\frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1\psi_4},\qquad M=\frac{A}{B}\,\frac{\psi_2\psi_3}{\psi_1\psi_4}. \tag{242}$$

Posons alors

$$U=A\psi_2\psi_3,\qquad V=B\psi_1\psi_4, \tag{243}$$

et nous aurons, d'après (232) et (231),

$$M=\frac{U}{V},\qquad \text{avec}\qquad \frac{\partial^2 \log U}{\partial x_2\,\partial x_3}=U,\qquad \frac{\partial^2 \log V}{\partial x_1\,\partial x_4}=V. \tag{244}$$

De là, d'après le résultat classique relatif à l'intégration de l'équation de Liouville,

$$M=\frac{\xi'_2\xi'_3}{(\xi_2+\xi_3)^2}\,\frac{(\xi_1+\xi_4)^2}{\xi'_1\xi'_4}, \tag{245}$$

chaque ξ_i étant une fonction de x_i seul.

Faisons maintenant le changement de variables

$$x'_i=\xi_i(x_i)\qquad (i=1,\,2,\,3,\,4), \tag{246}$$

et il viendra, en désignant par p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 les nouvelles coordonnées d'orientation des éléments de contact,

$$p'_\alpha\,dx'_\alpha=p'_\alpha\xi'_\alpha\,dx_\alpha=p_\alpha\,dx_\alpha\qquad (\alpha=1,\,2,\,3,\,4); \tag{247}$$

d'où, pour la transformée de (234), l'équation

$$p'_2p'_3(x'_2+x'_3)^2=p'_1p'_4(x'_1+x'_4)^2. \tag{248}$$

Les équations (234) semi-linéaires sont donc celles qui se déduisent par des transformations de la forme (246) de l'équation type pour laquelle on a

$$M=(x_1+x_4)^2:(x_2+x_3)^2. \tag{249}$$

Pour avoir l'intégrale complète à deux dimensions (unique) de cette équation type [relative au système (235) de génératrices de la surface image], il faudra intégrer le faisceau complet qui a pour base

$$V_1=p_1+yp_3-2wy\frac{\partial f}{\partial y},\qquad V_2=p_2+yMp_4, \tag{250}$$

M étant la fonction (249) et w étant donné par

$$w = \frac{1}{x_1 + x_4} - y\frac{1}{x_2 + x_3}. \tag{251}$$

On trouve sans difficulté son intégrale générale

$$x_1 - \frac{1}{w} = a_1, \qquad \frac{y}{w^2} = a_2, \qquad x_3 + \frac{y}{w} = a_3; \tag{252}$$

d'où, en éliminant y et w, l'intégrale complète cherchée

$$(x_1 - a_1)(x_3 - a_3) + a_2 = 0, \qquad \frac{x_1 - a_1}{x_1 + x_4} + \frac{x_3 - a_3}{x_2 + x_3} = 1, \tag{253}$$

avec les trois constantes arbitraires a_1, a_2, a_3.

En raison de la symétrie de l'équation type, on voit qu'elle a aussi une intégrale complète à deux dimensions relative au second système de droites de sa surface image : elle se déduira de (253) en y échangeant, par exemple, x_2 et x_3.

41. Exemple 2. — Soit à étudier l'équation

$$(p_1p_4 - p_2p_3)^2 - 4(p_1p_3 - p_2^2)(p_2p_4 - p_3^2) = 0, \tag{254}$$

qui a pour surface image la développable engendrée par les tangentes à la cubique gauche

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = y^3 : y^2 : y : 1. \tag{255}$$

L'équation générale des plans osculateurs de cette cubique est

$$0 = \mathfrak{X} = p_1 - 3yp_2 + 3y^2p_3 - y^3p_4, \tag{256}$$

et celles de ses tangentes sont, par suite,

$$0 = \mathfrak{X}, \qquad 0 = -\frac{1}{3}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = X_2 = p_2 - 2yp_3 + y^2p_4. \tag{257}$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ à considérer est donc $\mathcal{F} = \left\{\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$; on a, comme dans l'exemple 1, $n = 3$, $s = 2$, $r = 2$, mais $\mathcal{F}$ a ici une transformation distinguée qui est $\mathfrak{X}$ [*cf.* n° 34]. Le dérivé $\mathcal{F}^{(1)}$ est $\left\{\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$, et le dérivé second $\mathcal{F}^{(2)}$ est le faisceau général $\left\{p_1, p_2, p_3, p_4, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$, et il est, par conséquent, complet. Les degrés de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{(1)}$, $\mathcal{F}^{(2)}$ étant 3, 4, 5, on est donc dans le cas, signalé au n° 33, où $\mathcal{F}$ a une intégrale générale explicite. Conformément à la méthode que j'ai donnée pour l'obtenir dans mon Mémoire de 1928 [M', n° 15, p. 233], nous prendrons d'abord comme variables nouvelles, à la place de x_3 et x_4, deux invariants du sous-faisceau $F = \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \right\}$, à savoir :

(258) $$z = y^3 x_1 + y^2 x_2 + y x_3 + x_4, \qquad z_1 = 3 y^2 x_1 + 2 y x_2 + x_3,$$

ce qui ramène $\mathcal{F}$ à la forme

(259) $$\mathcal{F} = \left\{ p_1, p_2, \frac{\partial}{\partial y} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z} + (6 y x_1 + 2 x_2) \frac{\partial f}{\partial z_1} \right\}.$$

Il suffit alors de remplacer x_2 par le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ dans la troisième de ces transformations de base, en posant

(260) $$z_2 = 6 y x_1 + 2 x_2,$$

pour achever la réduction de $\mathcal{F}$ à la forme canonique

(261) $$\mathcal{F} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}; \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\}.$$

La forme générale de ses sous-faisceaux complets est alors

(262) $$V = \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + v(y, z, z_1, z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\},$$

v étant une fonction arbitraire de ses arguments. L'intégration d'un tel sous faisceau équivaudra à celle du système

(263) $$dz - z_1\, dy = 0, \qquad dz_1 - z_2\, dy = 0, \qquad dz_2 - v\, dy = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation du troisième ordre

(264) $$\frac{d^3 z}{dy^3} = v\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dy^2} \right).$$

L'intégrale complète qu'elle fournira sera donc de la forme

(265) $$z = W(y; a_1, a_2, a_3), \qquad z_1 = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad z_2 = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2},$$

a_1, a_2, a_3 étant trois constantes arbitraires. Dans l'ensemble des intégrales complètes ainsi définies, W sera, en définitive, comme v, une fonction arbitraire de ses arguments. Les intégrales complètes à deux dimensions de E seront donc définies par ces formules explicites, étant entendu que les premiers membres devront être remplacés par leurs expressions (258) et (260) et que y est une variable auxiliaire qui sera, en principe, à éliminer. On remarquera que l'on a $z_1 = \frac{\partial z}{\partial y}$, $z_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, de sorte qu'en posant

(266) $$\Omega = y^3 x_1 + y^2 x_2 + y x_3 + x_4 - W(y, a_1, a_2, a_3),$$

les intégrales complètes seront définies par les équations

$$\Omega = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0. \tag{267}$$

Elles seront donc composées de multiplicités réglées (à deux dimensions) osculatrices à leurs plans tangents le long de leurs génératrices; chacun de ces plans tangents devant être parallèle à l'un des plans $y^3 x_1 + y^2 x_2 + y x_3 + x_4 = 0$.

42. Exemple 3. — L'équation de contact E considérée sera ici l'équation à coefficients constants obtenue en éliminant y_1 et y_2 entre les équations

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{X} = p_1 + 3p_2 y_1 + 3p_3 y_2 + 3p_4 y_1^2 + 3p_5 y_2^2 + p_6(y_1^3 + y_2^3), \\ 0 &= X_1 = \frac{1}{3}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1} = p_2 + 2p_4 y_1 + p_6 y_1^2, \\ 0 &= X_2 = \frac{1}{3}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} = p_3 + 2p_5 y_2 + p_6 y_2^2. \end{aligned}\right. \tag{268}$$

Le faisceau à intégrer sera donc $\mathcal{F} = \left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \right\}$. On aura donc $n = 5$, $s = 3$, $r = 3$; et $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$ [*cf.* n° 35]; $\mathfrak{X}$ est, du reste, pour $\mathcal{F}$, une transformation distinguée. Le nombre total des variables est 8, le degré de $\mathcal{F}$ est 5, et celui de son dérivé, qui est

$$\left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_1^2}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y_2^2}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \right\}$$

est 7. Si donc on prend comme variables nouvelles, à la place de x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, des invariants de $\mathfrak{X}$ (variables caractéristiques), x_1 disparaîtra des calculs [1], et l'on sera ramené à intégrer un faisceau de degré 4, à 7 variables, et à dérivé de degré 6. C'est le type d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Pour trouver l'équation du second ordre correspondant à notre exemple, nous n'aurons qu'à suivre la marche indiquée dans notre Mémoire cité au n° 35 [2].

Prenons donc, comme variables nouvelles, d'une part,

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_4 - 2y_1 x_2 + 3y_1^2 x_1, \\ y &= x_5 - 2y_2 x_3 + 3y_2^2 x_1, \\ z &= x_6 - y_1^2 x_2 - y_2^2 x_3 + 2(y_1^3 + y_2^3)x_1, \end{aligned}\right. \tag{269}$$

qui sont des invariants du sous-faisceau $\left\{ \mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_2} \right\}$, et, d'autre part,

$$u = x_2 - 3y_1 x_1, \qquad v = x_3 - 3y_2 x_1, \tag{270}$$

---

[1] *Voir* M, n° 19, p. 374, et, plus particulièrement, la fin de ce numéro, p. 375.

[2] N° 3, p. 306, du Mémoire. *Voir* aussi M, n°s 23 et suivants, p. 381.

qui sont les invariants de $\mathfrak{X}$ les plus simples. La base de $\mathfrak{F}$ deviendra ainsi

$$(271) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} - 2u\frac{\partial f}{\partial x} - 2uy_1\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} - 2v\frac{\partial f}{\partial y} - 2vy_2\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

et il suffira de poser

$$(272) \qquad p = y_1, \qquad q = y_2, \qquad r = -\frac{1}{2u}, \qquad t = -\frac{1}{2v},$$

pour avoir la forme canonique cherchée pour $\mathfrak{F}$,

$$(273) \qquad \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + t\frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}; \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\},$$

composée du faisceau associé à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(274) \qquad 0 = s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},$$

et de la transformation distinguée $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$.

On a, pour $\mathfrak{F}$, l'intégrale générale

$$(275) \quad z = \varphi(x) + \psi(y), \quad p = \varphi'(x), \quad q = \psi'(y), \quad r = \varphi''(x), \quad t = \psi''(y),$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs, x et y; et, par suite, l'intégrale générale ([1]) de E résulterait de l'élimination de y_1 et y_2 entre les équations

$$(276) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = \varphi(x) + \psi(y), \qquad y_1 = \varphi'(x), \qquad y_2 = \psi'(y), \\ \quad 2u\,\varphi''(x) + 1 = 0, \qquad 2v\,\psi''(y) + 1 = 0, \end{array} \right.$$

après substitution à x, y, z, u, v de leurs expressions (269) et (270).

43. Exemple 4. — Ce dernier exemple se rapportera au cas considéré aux nos 37 et 38. L'équation E, à coefficients constants, sera le résultat de l'élimination de y_1 et y_2 entre les équations

$$(277) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 = X = p_1 + 3y_1p_2 + 3y_1^2p_3 + y_1^3p_4 + 3y_2(p_3 + 2y_1p_4 + y_1^2p_5), \\ 0 = X' = \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial X}{\partial y_1} = p_2 + 2y_1p_3 + y_1^2p_4 + 2y_2(p_4 + y_1p_5), \\ 0 = X'' = \dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^2 X}{\partial y_1^2} = p_3 + y_1p_4 + y_2p_5 = X_3. \end{array} \right.$$

([1]) L'intégrale complète G donnée par $F = \left\{ \mathfrak{X}, \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \right\}$ est, par ailleurs, $x = y_3$, $y = y_4$, $z = y_5$, x, y, z étant les invariants (259) de F, et y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 étant des constantes.

On trouve l'équation du septième degré

$$(278)\quad \begin{aligned} 0 = {} & p_4(p_1 p_5^2 - 2p_2p_4p_5 - 3p_3^2p_5 + 4p_3p_4^2)^2 \\ & - (p_2^2p_5^2 - 7p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_4^2p_5 + 4p_3^2p_4^2)(p_2p_5^2 - 5p_3p_4p_5 + 4p_4^3). \end{aligned}$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ à considérer est $\left\{X, \frac{\partial X}{\partial y_1}, \frac{\partial^2 X}{\partial y_1^2}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}\right\}$. On a donc $n = 4$, $s = 3$, $r = 2$. On vérifie sans peine que $\mathcal{F}$ n'a pas de transformation distinguée.

Le sous-faisceau $\mathcal{H} = \left\{X, \frac{\partial X}{\partial y_1}\right\}$ a, comme $F = \left\{X, \frac{\partial X}{\partial y_1}, \frac{\partial^2 X}{\partial y_1^2}\right\}$ des invariants linéaires : on peut prendre

$$(279)\quad \left\{\begin{aligned} x'_3 &= x_3 - 2y_1x_2 + 3(y_1^2 y_2)x_1, \\ x'_4 &= x_4 - (y_1^2 + 2y_2)x_2 + 2y_1^3x_1, \\ x'_5 &= x_5 - 2y_1y_2x_2 + 3y_1^2y_2x_1, \end{aligned}\right.$$

qui se réduisent respectivement à x_3, x_4, x_5 pour $x_1 = x_2 = 0$, et que l'on trouve, par exemple, par la méthode des coefficients indéterminés. Si on les prend comme variables nouvelles à la place de x_3, x_4, x_5, le sous-faisceau $\mathcal{H}$ devient $\{p_1, p_2\}$ et X_3, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ deviennent, respectivement, en désignant les $\frac{\partial f}{\partial x'_i}$ $(i = 3, 4, 5)$, par p'_i,

$$(280)\quad \left\{\begin{aligned} X'_3 &= p'_3 + y_1p'_4 + y_2p'_5, \\ Y_1 &= \frac{\partial f}{\partial y_1} - 2(x_2 - 3y_1x_1)X'_3, \\ Y_2 &= \frac{\partial f}{\partial y_2} + 3x_1(y_1^2p'_5 - p'_3) - 2x_2(y_1p'_5 + p'_4); \end{aligned}\right.$$

de sorte que l'on a

$$(281)\quad \mathcal{F} = \left\{p_1, p_2, X'_3, \frac{\partial f}{\partial y_1}, Y_2\right\}.$$

Les involutions, de degré 3, de $\mathcal{F}$ seront alors de la forme

$$(282)\quad V = \left\{p_1 + u_1X'_3,\ p_2 + u_2X'_3,\ X'_3 + v_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2Y_2\right\},$$

et les conditions d'involution donnent facilement $u_1 = u_2 = v_2 = 0$. Ces involutions sont donc

$$(283)\quad V = \left\{p_1, p_2, X'_3 + v\frac{\partial f}{\partial y_1}\right\},$$

v demeurant indéterminé. Ce seront des sous-faisceaux complets de $\mathcal{F}$, si v est une fonction, arbitraire d'ailleurs, des variables x'_3, x'_4, x'_5, y_1, y_2.

Les invariants du sous-faisceau $F = \left\{\mathfrak{X}, \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y_1}, X_3\right\}$, devenu $\{p_1, p_2, X'_3\}$ sont, par exemple,

$$(284)\quad x''_4 = x'_4 - y_1x'_3, \qquad x''_5 = x'_5 - y_2x'_3,$$

ce qui donne l'intégrale complète de E relative à F :

$$(285) \qquad \begin{cases} x_4 - y_1 x_3 + y_1^2 x_2 - y_1^3 x_1 - y_2(2x_2 - 3y_1 x_1) = y_3, \\ x_5 - y_2 x_3 + 3y_2^2 x_1 = y_4, \end{cases}$$

avec les constantes arbitraires y_1, y_2, y_3, y_4.

Quant aux intégrales complètes fournies par les sous-faisceaux complets du type (273), on obtiendra toutes les intégrales qui en font partie en intégrant le faisceau $\left\{p_1, p_2, X'_3, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}$, et, par conséquent, en faisant abstraction des variables x_1, x_2 et intégrant, relativement aux autres variables, le faisceau $\left\{X'_3, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}$. Or ce faisceau est ***intégrable*** (c'est-à-dire a une intégrale générale explicite), parce que son dérivé est $\left\{p'_3 + y_2 p'_5, p'_4, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\}$, qui est de degré 3 et complet [*cf.* n° 33].

Pour trouver son intégrale générale, il suffira, conformément à la méthode déjà employée au n° 41, de prendre comme variable nouvelle, à la place de x'_5, l'invariant

$$(286) \qquad x''_5 = x'_5 - y_2 x'_3$$

de son dérivé, ce qui le ramène à la forme canonique [1]

$$(287) \qquad \left\{p'_3 + y_1 p'_4, \frac{\partial f}{\partial y_1}\right\},$$

dont l'intégrale générale est

$$(288) \qquad x'_4 = \varphi(x'_3), \qquad y_1 = \varphi'(x'_3),$$

φ étant une fonction arbitraire de son argument.

En tenant compte des expressions (279) et (286) de x'_3, x'_4, x'_5, x''_5, l'intégrale générale de E, à trois dimensions, sera donnée par l'élimination de y_1 entre les équations

$$(289) \qquad x'_4 = \varphi(x'_3), \qquad y_1 = \varphi'(x'_3), \qquad x''_5 = c.$$

Elle dépendra de la fonction arbitraire φ et des deux constantes arbitraires y_2 et c. Pour avoir une intégrale complète, il suffirait de prendre pour φ une fonction arbitraire de x'_3 et de deux nouvelles constantes arbitraires c_1 et c_2.

---

[1] Avec les notations classiques, c'est le faisceau $\left\{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial p}\right\}$, dont les intégrales sont les multiplicités de contact à une dimension, $z = \varphi(x), p = \varphi'(x)$. *Voir*, par exemple, notre Mémoire M', n° 9, p. 218.